Université de Rennes 1 **Année 2015/2016**

Théorie Ergodique des actions de groupes-M2

Feuille de TD 3

Exercice 1. (Quelques propriétés d'hérédité des groupes de Kazhdan)
(i) Soient G un groupe localement compact et N un sous-groupe distingué de G. On suppose que les groupes N et G/N possèdent la propriété (T). Montrer que G la possède aussi.
(ii) Soient G_1 et G_2 deux groupes localement compacts et $\varphi : G_1 \to G_2$ un homorphisme continu d'image dense. On suppose G_1 possède la propriété (T). Montrer que G_2 la possède aussi.
(iii) Soit G un groupe localement compact possédant la propriété (T). Montrer que son abélianisé $G/[G,G]$ est compact, où $[G,G]$ désigne le sous-groupe fermé engendré par les commutateurs $aba^{-1}b^{-1}$ avec $a, b \in G$.
(iv) Soit G un groupe localement compact possédant la propriété (T). Montrer que G est unimodulaire.

Exercice 2. (Deux matrices engendrant un groupe libre) Soient A et B les deux matrices suivantes de $SL_2(\mathbf{Z})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

et soit Γ le sous-groupe engendré par A et B.

(i) Soient

$$\Omega_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : \ |x| \leq |y|\}$$

et

$$\Omega_2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : \ |y| < |x|\}.$$

Montrer que $A\Omega_1 \subset \Omega_2$ et que $B\Omega_2 \subset \Omega_1$.

(ii) Soit $\omega \in \Omega_1$ fixé. Montrer que $A^{i_1}B^{i_2}\cdots B^{i_{n-1}}A^{i_n}\omega \neq \omega$ pour tous les entiers $i_1, \ldots, i_n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$.

(iii) En déduire que Γ est un groupe libre sur A et B.

Exercice 3. (Moyennabilité d'une limite inductive) Soit G un groupe localement compact. On suppose qu'il existe une suite croissante de sous-groupe fermés et moyennables G_n de G tels que $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} G_n$ est dense dans G. Montrer que G est moyennable.

En déduire que le groupe $\mathcal{S}_{\text{fin}}(\mathbf{N})$ des bijections $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ de support fini (c-à-d $\sigma(n) \neq n$ pour au plus un nombre fini d'entiers $n \in \mathbf{N}$) est moyennable.

Exercice 4. (Action de Bernoulli et trou spectral) Soit Γ un groupe dénombrable infini. On considère l'action de Bernoulli $\Gamma \curvearrowright (X, m)$ de Γ sur $X = \{0,1\}^\Gamma$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $\Gamma \curvearrowright (X, m)$ possède la propriété (TS) de trou spectral ;

(2) Γ n'est pas moyennable.

Exercice 5. (Croissance de groupes et moyennabilité)

Soit Γ un groupe de type fini et soit S une partie génératrice finie telle que $S = S^{-1}$. On définit la longueur $\ell_S(\gamma)$ d'un élément $\gamma \in \Gamma$ par $\ell_S(\gamma) = \min\{n \in \mathbf{N} \ : \ \gamma \in S^n\}$. Soit

$$d_S : \Gamma \times \Gamma \to \mathbf{R}, \ (\gamma_1, \gamma_2) \mapsto \ell_S(\gamma_2^{-1}\gamma_1).$$

(i) Vérifier que d_S est une distance sur Γ invariante par translations à gauche.

Pour tout $n \geq 1$, soit B_n la boule de rayon n dans Γ pour la distance d_S.

(ii) Montrer que $\kappa_S := \lim_{n\to\infty} \ \mathrm{Card}(B_n)^{1/n}$ existe.

[*Indication :* Montrer que la suite $(\log(\ \mathrm{Card}(B_n)))_{n\in\mathbf{N}}$ est sous-additive.]

(iii) Montrer que si $\kappa_S = 1$, alors $\kappa_{S'} = 1$ pour tout autre partie génératrice finie S' de Γ telle que $S' = S'^{-1}$.

On dit que Γ est à croissance sous-exponentielle si $\kappa_S = 1$. C'est le cas, en particulier, si Γ est à croissance polynomiale, c-à-d $\mathrm{Card}(B_n) \leq P(n)$ pour un polynôme P.

(iv) Montrer que, si Γ est à croissance sous-exponentielle, alors Γ est moyennable.

[*Indication :* Construire, à l'aide des boules B_n, une suite de fonctions $f_n \in \ell^2(\Gamma)$ avec $\|f_n\| = 1$ et $\lim_n \|\pi_\Gamma(\gamma)f_n - f_n\| = 0$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.]

(v) Soit Γ le groupe de Heisenberg discret, c-à-d le sous-groupe de $SL_3(\mathbf{Z})$ formé des matrices $\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, pour $x, y, z \in \mathbf{Z}$. Montrer que Γ est de type fini et à croissance polynomiale.