Université de Rennes 1
Année 2010/2011

Master 2

Théorie Ergodique et Systèmes Dynamiques–TD2

1 - (Équirépartion et puissances de 2**)** Pour $n \in \mathbf{N}$, soit

$$2^n = a_n 10^{p_n} + a_{n-1} 10^{p_n - 1} + \cdots + a_0$$

avec $0 \leq a_i \leq 9$ et $0 < a_n$ (développement décimal de 2^n).
(i) Montrer que $\log_{10} a_n \leq \{n \log_{10} 2\} < \log_{10}(a_n + 1)$.
(ii) Soit $k \in [1, 9[$ un entier; montrer que, dans la suite des puissances de 2, la proportion de celles qui commencent par le chiffre k est asymptotiquement égale à $\log_{10}(\frac{k+1}{k})$. Quel est le chiffre qui apparait le plus fréquemment?
[*Indication:* Considérer la rotation $R_\alpha : S^1 \to S^1$ pour $\alpha = \log_{10} 2$ et appliquer le théorème d'équirépartition de Weyl.]

2 -Soit $X = S^1$ muni de la mesure de Lebesgue λ et $T : X \to X$ défini par $Tx = \{2x\}$. Soit (Σ^+, μ, σ) le décalage unilatère de Bernoulli, où $\Sigma^+ = \{0, 1\}^{\mathbf{N}}$ est muni de la mesure μ définie sur la tribu engendrée par les cylindres par $p = q = 1/2$ et du décalage $\sigma((a_i)_{i \in \mathbf{N}}) = (a_{i+1})_{i \in \mathbf{N}}$.
(i) Montrer que les sytèmes (X, λ, T) et (Σ^+, μ, σ) sont isomorphes.
(ii) Déterminer l'ensemble des points périodiques de σ et ceux de T.

3 -Soit $X = S^1 \times S^1$ le tore bidimensionnel, muni de la mesure de Lebesgue λ. Soit $T : X \to X$ la transformation du boulanger. Soit $\Sigma = \{0, 1\}^{\mathbf{Z}}$. On considère l'application $\varphi : \Sigma \to X$ définie par: $\varphi(a) = (x, y)$ avec

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_{-i}}{2^{i+1}}, \qquad y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}$$

pour $a = (a_i)_{i \in \mathbf{Z}} \in \Sigma$. Montrer que φ définit un isomorphisme entre le schéma de Bernoulli bilatère (Σ, μ, S) et (X, λ, T), où Σ est muni de la mesure μ sur la tribu engendrée par les cylindres définie par $p = q = 1/2$ et du décalage $S((a_i)_{i \in \mathbf{Z}}) = (a_{i-1})_{i \in \mathbf{Z}}$.

4 (Transformation de Gauß) - Soit $T : [0, 1] \to [0, 1]$ défini par $T(x) = \{1/x\}$ si $x \neq 0$ at $T(0) = 0$. Soit μ la mesure de probabilité sur $[0, 1]$ de densité

$$\frac{1}{\log 2} \frac{1}{1 + x} dx.$$

Montrer que μ est T-invariante.

5 (Produit gauche) Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un système dynamique préservant une mesure de probabilité. Soit $\rho : X \to S^1$ une application mesurable. On pose $\widetilde{X} = X \times S^1$, $\widetilde{\mu} = \mu \otimes \lambda$ et $\widetilde{T}(x, y) = (Tx, y + \rho(x))$.
(i) Montrer que $\widetilde{T}$ préserve $\widetilde{\mu}$.
(ii) Montrer que $(\widetilde{X}, \widetilde{T})$ est une extension de (X, T).
(iii) Soit $X = S^1$, $T = R_\alpha$ pour α irrationnel et soit $\rho(x) = x$. Montrer que $(\widetilde{X}, \widetilde{T})$ est ergodique.

6 - (Théorème ergodique pour les systèmes finis) Soit $X = \{x_1, \ldots, x_r\}$ un ensemble fini et soit $\sigma : X \to X$ une permutation de X. Soit $f : X \to \mathbf{C}$ et $x \in X$.
(i) Supposons que σ est un cycle. Montrer que

$$\lim_N \sum_{n=0}^{N-1} f(\sigma^n(x)) = \frac{1}{r}(f(x_1) + \cdots + f(x_r)).$$

(ii) Soit σ quelconque. Identifier la limite $\lim_N \sum_{n=0}^{N-1} f(\sigma^n(x))$.

7 (Théorème ergodique L^p) Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un système dynamique préservant une mesure de probabilité. Soit $p \in [1, \infty[$. Pour $f \in L^p(X, \mu)$ et $N \in \mathbf{N}^*$, soit $f_N \in L^p(X, \mu)$ définie par $f_N(x)^+ = \dfrac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(T^n x)$.
(i) Montrer que, pour tout $f \in L^p(X, \mu)$, il existe une fonction T-invariante $f^* \in L^p(X, \mu)$ telle que $\lim_{N \to +\infty} \|f_N - f^*\|_p = 0$.
[*Indication:* Pour $p < 2$, on pourra utiliser la densité de $L^2(X, \mu)$ dans $L^p(X, \mu)$ et pour $p > 2$ celle de $L^\infty(X, \mu)$ dans $L^p(X, \mu)$.]
(ii) L'assertion (i) reste-t-elle vraie dans le cas $p = +\infty$?

8 - Pour $d \geq 1$, soit $X = S^1 \times \cdots \times S^1$ le tore d-dimensionnel, muni de la mesure de Lebesgue λ. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbf{R}$. Soit $T : X \to X$ la transformation définie par

$$T(x_1, \ldots, x_d) = (x_1 + \alpha_1, \ldots, x_d + \alpha_d) \qquad \text{mod} \quad 1.$$

Montrer que T est ergodique si et seulement si $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d$ sont $\mathbf{Q}$-linéairement indépendants.