Université de Rennes 1

Master 2 – Année 2010/2011
Systèmes dynamiques et théorie ergodique
Examen terminal du 14 /12/2010
durée 1h30 –notes de cours autorisées

1 - **[2P.]** Soient $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu, S)$ deux systèmes dynamiques préservant une mesure de probabilité. On suppose que ces deux systèmes sont isomorphes. Montrer que les entropies $h(T)$ et $h(S)$ de T et S sont égales.

2 - **[4P.]** Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un système dynamique préservant une mesure de probabilité . Soit $A \in \mathcal{B}$ avec $\mu(A) > 0$. Soit $(A, \mathcal{A}, \mu_A, T_A)$ le sytème induit. On rappelle que $T_A : A \to A$ est définie par $T_A x = T^{n_A(x)}(x)$, où $n_A(x) = \min\{n \geq 1 |\ T^n x \in A\}$. On suppose que T est ergodique. On rappelle que ceci implique que T_A est ergodique.
(i) Montrer que, pour presque tout $x \in A$, on a

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} n_A(T_A^k x) = \frac{1}{\mu(A)} \int_A n_A d\mu.$$

(ii) Soit $N \in \mathbf{N}$; on définit $\tau_N(x) = \sum_{k=0}^{N-1} n_A(T_A^k x)$ pour tout $x \in A$. Montrer que $\sum_{k=0}^{\tau_N(x)-1} \mathbf{1}_A(T^k x) = N$ pour tout $x \in A$.
(iii) Montrer que, pour presque tout $x \in A$, on a

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N}{\tau_N(x)} = \int_A \mathbf{1}_A d\mu = \mu(A).$$

(iv) En déduire la “formule de Kac”

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A n_A d\mu = \frac{1}{\mu(A)}.$$

3 -**[14P.]** On considère l’application “tente” $S : [0, 1] \to [0, 1]$ définie par $Sx = 2x$ pour $x \in [0, 1/2]$ et $Sx = 2 - 2x$ pour $x \in [1/2, 1]$. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$.
(i) Vérifier que λ est S-invariante.
(ii) Soit $E_2 : [0, 1] \to [0, 1], x \mapsto \{2x\}$. Montrer que le système $([0, 1], E_2, \lambda)$ est fortement mélangeant.

(iii) Montrer que $S^{n+1} = S \circ E_2^n$ pour tout $n \geq 1$.
(iv) Montrer que le système $([0,1], S, \lambda)$ est fortement mélangeant.

On considère maintenant l'application "logistique"

$$T : [0,1] \to [0,1], \qquad x \mapsto 4x(1-x).$$

(v) Vérifier que, pour tout $\theta \in \mathbf{R}$ et tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $T^n(\sin^2\theta) = \sin^2(2^n\theta)$.
(vi) Pour tout $n \geq 1$, déterminer les points $x \in [0,1]$ de période n sous T. En déduire que les points périodiques de T sont denses dans $[0,1]$.
(vii) On considère la bijection de $[0,1]$ dans $[0,1]$ définie par $\varphi(x) = \sin^2(\pi x/2)$. Vérifier que $T \circ \varphi = \varphi \circ S$.

Soit μ la mesure de probabilité définie sur les boréliens de $[0,1]$ par

$$\mu(A) = \frac{1}{\pi} \int_A \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

(viii) Montrer que μ est T-invariante.
(ix) Montrer que le système $([0,1], T, \mu)$ est ergodique.
(x) Soit $\alpha \in [0,1]$. Montrer que, pour λ-presque tout $x \in [0,1]$ on a

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\mathrm{Card}\{n : \ 1 \leq n \leq N, T^n x \leq \alpha\} = \frac{2}{\pi}\mathrm{Arcsin}(\sqrt{\alpha}).$$

(xi) Montrer que l'entropie de T est $h(T) = \log 2$.
(*Indication:* On pourra utiliser, sans le prouver, le fait que $\{[0,1/2],[1/2,1]\}$ est une partition génératrice.)