Université de Rennes 1
Année 2024/2025

L3—PS
Feuille de TD 12

Exercice 1. Une association comprend 12 personnes.
(i) Combien de permanences de cette association composées de 3 personnes peut on former ?
(ii) Combien de bureaux de cette association composés d'un président, d'un secrétaire et d'un trésorier peut on former ?

Exercice 2. On lance un dé à 6 faces 4 fois de suite, de manière indépendante.
(i) Décrire un espace probabilisé modélisant cette expérience aléatoire.
(ii) Quelle est la probabilité que deux nombres distincts apparaissent, chacun deux fois, lors de ces 4 lancers ?

Exercice 3. On dispose de 2 urnes U_1 et U_2 contenant 100 boules en tout. L'urne U_1 contient 40 boules dont 8 sont blanches et 32 noires ; l'urne U_2 contient 60 boules dont 6 sont blanches et 54 noires. On choisit au hasard une urne et on en tire une boule. Soient A_i l'évènement "l'urne choisie est U_i" pour $i = 1, 2$ et A l'événement "la boule est blanche".

(i) Calculer $\mathbf{P}(A|A_1), \mathbf{P}(A|A_2)$ et $\mathbf{P}(A)$.

(ii) On constate qu'on a tiré une boule blanche. Qu'elle est la probabilité qu'elle provient de l'urne U_2.

Exercice 4. Un livre de 100 pages contient 1000 erreurs, réparties aux hasard selon les pages. On ouvre le livre et on compte le nombre X d'erreurs contenues dans une page.

Identifier la loi de X. Quelle est l'espérance de X? Quelle est sa variance ?

Exercice 5. On désire évaluer le nombre N de kangourous vivant sur une île. Pour cela, on commence par capturer 800 kangourous que l'on marque et relâche juste après. Après un certain temps, on capture de nouveau 1000 kangourous parmi lesquels on trouve que 250 sont marqués. En déduire un intervalle de confiance pour N au seuil de risque de $\alpha = 5\%$.

Exercice 6. On considère une urne contenant 5 boules, dont 3 sont blanches et 2 noires. On tire de l'urne successivement deux boules **sans**

remise. Soient X_1 (respectivement X_2) la v.a.r égale à 1 si la 1e (respectivement la 2e) boule est blanche et 0 sinon.
(i) Déterminer la loi conjointe de (X_1, X_2) ainsi que la loi de X_1 et la loi de X_2 et présenter le résultat sous forme de tableau.

(ii) Calculer $\mathbb{E}(X_1X_2)$ et la covariance $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.

Exercice 7. Soit X v.a.r continue de loi uniforme sur $[-1, 1]$. Déterminer la loi de $Y = f(X)$ pour $f :]-1, 1[\to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{2}\log(\frac{1+x}{1-x})$.
(Indication : montrer que $f :]-1, 1[\to \mathbf{R}$ est une bijection croissante).

Exercice 8. Pour $a > 0$, soit X une variable aléatoire continue de densité f, donnée par $f(x) = axe^{-\frac{x^2}{2}}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x)$ pour $x \in \mathbf{R}$.
(i) Déterminer a.
(ii) Soit $Y = -X^2$. Déterminer la densité de Y
%n
(iii) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

Exercice 9. Pour $a \in \mathbf{R}$, soit (X, Y) un couple aléatoire de densité f définie par

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = \frac{a}{(1 + x + y)^2}\mathbf{1}_{[0,1[}(x)\mathbf{1}_{[0,1[}(y).$$

(i) Déterminer a.
(ii) Déterminer les densités f_X et f_Y de X et de Y.
(iii) X et Y sont-elles indépendantes ?
(iv) Calculer la covariance $\mathbf{Cov}(X, Y)$.
(v) Soit $x \in [0, 1]$. Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(Y|x)$.
(v) Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(Y|X)$ de Y sachant X.