Université de Rennes 1
Année 2024/2025

L3—PS

Feuille de TD 11

Exercice 1. (i) Soit V une variable aléatoire de loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$; rappeler les valeurs de $\mathbf{E}(V)$ et $\mathrm{Var}(V)$. Calculer $\mathbf{E}(V^3)$.

Soit (X, Y) un couple aléatoire de densité f définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} ax(y-x)e^{-y} & \text{si } 0 < x \leq y < +\infty \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où a est un nombre réel.
(ii) Déterminer a.
(iii) Déterminer les densités f_X et f_Y de X et de Y.
(iv) X et Y sont-elles indépendantes ?
(v) Calculer la covariance $\mathbf{Cov}(X, Y)$.
(vi) Soit $x \geq 0$. Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(Y|X = x)$.
(vii) Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(Y|X)$.

Exercice 2. Deux personnes A et B se donnent rendez-vous à un endroit entre 0h et 1h. On suppose que chacune arrive indépendamment de l'autre à un instant aléatoire suivant une loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$. Soient X et Y les instants d'arrivée de A et de B respectivement.
(i) Quelles sont les lois de X et de Y ? Calculer $\mathrm{Var}(X + Y)$.
(ii) Soit T le temps d'attente de la 1ère personne arrivée. Exprimer T en fonction de X et Y. Calculer $\mathbf{E}(T^2)$.
(iii) Soient U et V les heures d'arrivée successives des deux personnes. Exprimer U et V en fonction de X et Y.
(iv) Déterminer les fonctions de répartition de U et V et en déduire leurs densités.
(v) Calculer $\mathbf{E}(U)$ et $\mathbf{E}(V)$ ainsi que $\mathrm{Var}(U)$ et $\mathrm{Var}(V)$. En déduire $\mathbf{E}(T)$.
(vi) $(*)$ Calculer la covariance $\mathbf{Cov}(U, V)$. (*Indication :* on remarquera que $U + V = X + Y$ et que $\mathrm{Var}(U + V) = \mathrm{Var}(U) + \mathrm{Var}(V) + 2\mathbf{Cov}(U, V)$)

Exercice 3. Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes suivant des lois exponentielles $\mathcal{E}(\lambda)$ et $\mathcal{E}(\beta)$, respectivement.
(i) Quelle est la densité du couple aléatoire $Z = (X, Y)$?
(ii) Déterminer la densité f_{X+Y} de la v.a.r. $X + Y$ dans le cas $\lambda \neq \beta$.
(iii) Déterminer la densité f_{X+Y} de la v.a.r. $X + Y$ dans le cas $\lambda = \beta$.

Exercice 4. Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes et suivant chacune une loi normale centrée-réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.
(i) Déterminer la densité du couple aléatoire $Z = (X, Y)$.

Soit T la v.a.r définie sur $\{X \neq 0\}$ par $T = Y/X$ et par $T = 0$ sur $\{X = 0\}$.
(ii) $(*)$ Déterminer la fonction de répartition de T. (*Indication :* penser aux coordonnées polaires). Montrer que T possède une densité et la déterminer.