

PROBABILITÉS 1

FEUILLE DE RÉVISION.

Analyse Combinatoire.

Exercice 1. Vingt ouvriers exécutent vingt travaux, 1 ouvrier a un seul travaux. Combien y a-t-il de distributions différents possibles ?

Réponse : $20!$

Exercice 2. De combien manières peut-on asseoir en rang 3 garçons et 3 filles ?

Réponse : $6!$

(a) Même question si les garçons doivent rester ensemble ?

Réponse : $4! \cdot 3!$

(b) Même question si les garçons doivent rester ensemble et les filles aussi ?

Réponse : $2 \cdot 3! \cdot 3!$

(c) Même question si deux personnes du même sexe ne doivent jamais voisiner ?

Réponse : $2 \cdot 3! \cdot 3!$

Exercice 3. Un ascenseur quitte le rez-de-chaussée avec 8 personnes (groom non compris). Lorsqu'il parvient au 6^e, il est vide. De combien de manières le groom a-t-il pu percevoir le départ des 8 personnes si pour lui elles se ressemblent toutes ?

Réponse : $C_{5+8-1}^8 = C_{12}^8$.

Exercice 4. Développer $(2x^2 + y)^6$.

Réponse :

$$(2x^2 + y)^6 = C_6^0 y^6 + C_6^1 (2x^2)(y^5) + C_6^2 (2x^2)^2 (y^4) + \\ + C_6^3 (2x^2)^3 (y^3) + C_6^4 (2x^2)^4 (y^2) + C_6^5 (2x^2)^5 (y) + C_6^6 (2x^2)^6$$

Espaces Probabilisés.

Exercice 5. Une forêt abrite vingt cerfs. Cinq sont capturés, marqués et relâchés. Un peu plus tard, quatre sont à nouveau capturés. Quelle est la probabilité que deux d'entre eux soient marqués ?

Réponse : $\frac{C_5^2 C_{15}^2}{C_{20}^4}$

Exercice 6. On aligne $N > 2$ personnes, dont A et B .

(a) Quelle est la probabilité que A et B soient voisins ?

Réponse : $\frac{2}{N}$

- (b) Quelle est la probabilité que A et B soient voisins si toutes les personnes sont disposées en cercle ?

Réponse : $\frac{2}{N-1}$

Exercice 7. Calculer la probabilité qu'une main de 13 cartes (tirées parmi 52) contienne

- (a) l'as et le roi d'une des quatre couleurs,

Réponse : Il faut appliquer la formule de Poincaré.

$$\frac{C_4^1 C_{50}^{11} - C_4^2 C_{48}^9 + C_4^3 C_{46}^7 - C_4^4 C_{44}^5}{C_{52}^{13}}$$

- (b) les quatre cartes de l'une des treize valeurs.

Réponse : Il faut appliquer la formule de Poincaré.

$$\frac{C_{13}^1 C_{48}^9 - C_{13}^2 C_{44}^5 + C_{13}^3 C_{40}^1}{C_{52}^{13}}$$

Exercice 8. Six chevaux, numérotés de 1 à 6, engagés dans une course donnent lieu à $6!$ résultats finaux. On définit les événements A "le cheval 1 termine parmi les trois premiers" et B "le cheval 2 termine le deuxième". Trouver la probabilité d'événement $A \cup B$.

Réponse :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{15} = \frac{3}{5}$$

Probabilité Conditionnelle et Indépendance.

Exercice 9. Montrer que $P(A | B) = 1$ entraîne $P(B^c | A^c) = 1$.

Exercice 10. On jette deux dés équilibrés. Quelle est la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux montre 6, sachant que la somme des deux est i , $i = 2, 3, 4, \dots, 12$.

Réponse : Pour $i = 2, 3, 4, 5$ ou 6 la probabilité $P(\text{Un dé montre } 6 | \text{ la somme} = i) = 0$.

$$P(\text{Un dé montre } 6 | \text{ la somme} = 7) = \frac{1}{3}, P(\text{Un dé montre } 6 | \text{ la somme} = 8) = \frac{2}{5}, \\ P(\text{Un dé montre } 6 | \text{ la somme} = 9) = \frac{1}{2}, P(\text{Un dé montre } 6 | \text{ la somme} = 10) = \frac{2}{3}, \\ P(\text{Un dé montre } 6 | \text{ la somme} = 11) = P(\text{Un dé montre } 6 | \text{ la somme} = 12) = 1.$$

Exercice 11. Avant de partir en vacances tu pries ton voisin de bien vouloir arroser une plante. Sans arrosage, elle mourra avec la probabilité $0,8$; avec arrosage, elle mourra avec la probabilité $0,15$. Tu es sûr à 90% que ton voisin l'arrosera.

- (a) Quelle est la probabilité que la plante soit vivante à ton retour ?

Réponse : $= 0,785$.

- (b) Si elle est morte, quelle est la probabilité que le voisin ait oublié de l'arroser ?

Réponse : ≈ 0.102 .

Exercice 12. On considère trois cartes : une avec les deux faces rouges, une avec les deux faces blanches, et une avec une face rouge et une face blanche. On tire une carte au hasard. On expose une face au hasard. Elle est rouge. Parieriez-vous que la face cachée est blanche ?

Réponse : Non. La probabilité est $\frac{1}{3}$.