Probabilites 1 **Licence S3** **2009**

Semaine 8

1. Variables aléatoires simultanées

1.1. **Fonction de répartition conjointe.** Il est souvent necéssaire de considérer des événements relatifs à deux ou plus variables simultanément. Pour traiter de tels problèmes, on introduit une fonction de répartition simultanée, ou **conjointe**.

Définition 1.1. *Soit X et Y deux variables aléatoires sur (Ω, P). La fonction $F_{X,Y}$ de répartion conjointe de X et Y est définie comme suit. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$:*

$$F_{X,Y}(a,b) = P(X \leq a, Y \leq b)$$

1.2. **Fonction de répartition marginale.** On peut déduire la fonction de répartition de X de la fonction de répartition conjointe $F_{X,Y}$ comme suit :

$$\begin{aligned} F_X(a) &= P(X \leq a) = P(X \leq a, Y < \infty) \\ &= P(\lim_{b\to\infty}\{X \leq a, Y \leq b\}) \\ &= \lim_{b\to\infty} P(\{X \leq a, Y \leq b\}) \\ &= \lim_{b\to\infty} F_{X,Y}(a,b) = F(a,\infty) \end{aligned}$$

On obtient de manière similaire la fonction de répartition de Y :

$$\begin{aligned} F_Y(b) &= P(Y \leq a) = P(X < \infty, Y \leq b) \\ &= P(\lim_{a\to\infty}\{X \leq a, Y \leq b\}) \\ &= \lim_{a\to\infty} F_{X,Y}(a,b) = F(\infty, b) \end{aligned}$$

Les fonctions F_X et F_Y sont parfois dites **fonctions de répartition marginales** de X et Y.

1.3. **Application des fonctions de répartition.** La probabilité de tous les événements relatifs à X et Y peut être calculée grâce à la fonction $F_{X,Y}$. Par exemple,

$$\begin{aligned} P(\{X > a, Y > b\}) &= 1 - P(\{X > a, Y > b\}^c) \\ &= 1 - (P(\{X > a\}^c \cup \{Y > b\}^c)) \\ &= 1 - (P(\{X \leq a\} \cup \{Y \leq b\})) \\ &= 1 - (P(\{X \leq a\}) + P(\{Y \leq b\}) - P(\{X \leq a\}, \{Y \leq b\})) \\ &= 1 - F_X(a) - F_Y(b) + F_{X,Y}(a, b) \end{aligned}$$

En général,

$$\begin{aligned} &P(\{a < X \leq b, c < Y \leq d\}) = \\ &= F_{X,Y}(b, d) + F_{X,Y}(a, c) - F_{X,Y}(a, d) - F_{X,Y}(b, c) \end{aligned} \tag{1}$$

Exercice 1.1. *Démontrer l'égalité* (1).
Indication : On peut écrire $(X \leq b, Y \leq d)$ *comme le réunion d'ensembles disjoints*

$$\begin{aligned} (X \leq b, Y \leq d) =& (X \leq a, Y \leq c) \cup (X \leq a, c < Y \leq d) \cup (a < X \leq b\,, Y \leq c) \\ &\cup (a < X \leq b, c < Y \leq d) \end{aligned}$$

1.4. **Loi discrète conjointe.** Dans le cas où X et Y sont deux variables discrètes, on définit la fonction p, dite **loi de probabilité ou conjointe** de X et Y.

$$p(x, y) = P(X = x, Y = y)$$

La loi de probabilité **marginale** de X est :

$$p_X(x) = P(X = x) = \sum_{y; p(x,y)>0} p(x, y)$$

De la même façon on trouve la loi de probabilité **marginale** de Y :

$$p_Y(y) = P(Y = y) = \sum_{x; p(x,y)>0} p(x, y)$$

1.5. **Exemples.**

Exemple 1.1. *On tire deux nombres au hasard dans* $\{-1, 1\}$*. On note* X *leur somme, et* Y *leur produit. On cherche à déterminer la loi conjointe de* (X, Y)*.*

Solution. On remarque que l'univers Ω est $\{-1, 1\}^2$, donc il y a 4 événements élementaires, la probabilité de chacun est $\frac{1}{4}$. La variable

X prend les valeurs $\{-2,0,2\}$, alors que $Y(\Omega)=\{-1,1\}$. Alors la loi conjointe de X et Y est $p(i,j)=P(X=i,Y=j)$:

$$\begin{aligned}
p(-2,-1) &= P(X=-2,Y=-1)=0\\
p(-2,1) &= P(X=-2,Y=1)=\frac{1}{4}\\
p(0,-1) &= P(X=0,Y=-1)=\frac{1}{2}\\
p(0,1) &= P(X=0,Y=1)=0\\
p(2,-1) &= P(X=2,Y=-1)=0\\
p(2,1) &= P(X=2,Y=1)=\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

•

1.6. **Loi discrète conjointe.** On définit enfin les lois conditionnelles de X par rapport à Y et de Y par raport à X :

$$P(\{X=x_i|Y=y_j)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{p(x_i,y_j)}{p_Y(y_j)}$$

$$P(\{Y=y_j|X=x_i)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(X=x_i)}=\frac{p(x_i,y_j)}{p_X(x_i)}$$

Exemple 1.2. *On tire avec remise deux jetons d'une urne contenant trois jetons numérotés de 1 à 3. Soit X et Y les numéros successivement obtenus et $U=\sup(X,Y)$ le plus grand de ces numéros. Trouver la loi conditionnelle de X sachant $U=3$, $U=1$.*

Solution. On a $\Omega=\{1,2,3\}^2$ muni d'une probabilité uniforme P. Pour faciliter les calculs on trouve la loi de (X,Y) :

$X\diagdown Y$	1	2	3
1	1/9	1/9	1/9
2	1/9	1/9	1/9
3	1/9	1/9	1/9

La loi $p_{(X,U)}$ de (X,U) est donc

$X\diagdown U$	1	2	3
1	1/9	1/9	1/9
2	0	2/9	1/9
3	0	0	3/9
$P(U=i)$	1/9	1/3	5/9

Alors la loi conditionnelle de X sachant $U = 1$ est :

$$P(X = 1|U = 1) = \frac{p_{(X,U)}(1,1)}{p_U(1)} = 1,$$

$$P(X = 2|U = 1) = \frac{p_{(X,U)}(2,1)}{p_U(1)} = 0,$$

$$P(X = 3|U = 1) = \frac{p_{(X,U)}(3,1)}{p_U(1)} = 0.$$

De la même façon,

$$P(X = 1|U = 3) = \frac{p_{(X,U)}(1,3)}{p_U(3)} = \frac{1/9}{5/9} = \frac{1}{5},$$

$$P(X = 2|U = 3) = \frac{p_{(X,U)}(2,3)}{p_U(3)} = \frac{1/9}{5/9} = \frac{1}{5},$$

$$P(X = 3|U = 3) = \frac{p_{(X,U)}(3,3)}{p_U(3)} = \frac{3/9}{5/9} = \frac{3}{5}.$$

•

2. Covariance

La covariance de deux variables aléatoires X et Y est notée $Cov(X,Y)$ et est définie par l'expression :

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\right]$$

On pourrait développer le membre de droite et obtenir

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= \mathbb{E}\left[XY - \mathbb{E}(X)Y - X\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\right] \\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \end{aligned}$$

Remarque. On a deja vu que si X et Y sont deux V.A. **indépendantes**, alors

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

et donc la covariance

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0.$$

Donc deux variables ayant une covariance non nulle sont **dépendantes**.

La réciproque n'est cependant pas vraie.

Exemple 2.1. *Par exemple soit X une V.A. telle que*

$$P(X=-2)=P(X=2)=\frac{1}{4}, P(X=0)=\frac{1}{2}$$

On définit Y comme

$$Y(\omega)=\begin{cases} 1, & si\ X(\omega)=0 \\ 0, & si\ X(\omega)\neq 0. \end{cases}$$

Alors pour tout ω, $(XY)(\omega)=0$ est donc l'espérance $\mathbb{E}(XY)=0$. L'espérance de X est aussi 0 :

$$\mathbb{E}(X)=(-2)\cdot\frac{1}{4}+(2)\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$$

Ainsi, la covariance $Cov(XY)=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X)=0$. Cependant les variables ne sont pas indépendantes :
$P(X=2,Y=1)=0$ alors que $P(X=2)P(Y=1)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$.

Deux variables ayant une covariance non nulle sont dites **dépendantes**.

2.1. **Propriétés de la covariance.**

Théorème 2.1. *Soit X et Y deux variables aléatoires, $a\in\mathbb{R}$. On a*

(1) $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$,
(2) $Cov(X,X)=\mathbb{V}(X)$,
(3) $Cov(aX,Y)=a\cdot Cov(X,Y)$,
(4) $Cov\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^m Y_j\right)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m Cov(X_i,Y_j)$.
(5) $\mathbb{V}(X+Y)=\mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y)+2Cov(X,Y)$.

Démonstration. On peut demontrer les propriétés (1)-(3) à partir de définition de la covariance. Pour voir (5),

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X+Y)&=\mathbb{E}\left((X+Y)^2\right)-(\mathbb{E}(X+Y))^2\\&=\mathbb{E}\left(X^2+2XY+Y^2\right)-(\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y))^2\\&=\mathbb{E}(X^2)+2\mathbb{E}(XY)+\mathbb{E}(Y^2)-(\mathbb{E}(X))^2-2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)-(\mathbb{E}(Y))^2\\&=\mathbb{V}(X)+V(Y)+2Cov(X,Y)\end{aligned}$$

□

Exemple 2.2. *Une urne contient 4 jetons numérotés de 1 à 4. On en tire 2 jetons successivement et sans remise et on note X et Y le premier et le second numéros obtenus. Que vaut la covariance $Cov(X,Y)$?*

Solution. On trouve la loi conjointe de X et Y :

$X \diagdown Y$	1	2	3	4	$P(X=i)$
1	0	1/12	1/12	1/12	1/4
2	1/12	0	1/12	1/12	1/4
3	1/12	1/12	0	1/12	1/4
4	1/12	1/12	1/12	0	1/4
$P(Y=j)$	1/4	1/4	1/4	1/4	

L'espérance de X et de Y est $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{4}(1+2+3+4) = 10/4$. L'espérance du produit est

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{i,j=1}^{4} ijP(X=i, Y=j) = \frac{70}{12}$$

Alors la covariance

$$Cov(X,Y) = \frac{70}{12} - \frac{10}{4} \cdot \frac{10}{4} = -\frac{5}{12}$$

•