Analyse 2 : Suites et séries numériques

Exercices

UFR de Mathématiques

1.11 Exercices

Relation d'ordre

Exercice 1.1 Soient x et y des réels tels que $-2 \leq x \leq 3$ et $-7 \leq y \leq -5$. Encadrer les réels x^2 et $\frac{x^2}{y^2 - x^2}$.

Exercice 1.2 Déterminer les ensembles suivants :

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \ : \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \right\} \qquad \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \right\}.$$

Valeur absolue

Exercice 1.3 Soient x et y des réels tels que $|x-1| \leq 2$ et $-5 \leq y \leq -4$. Encadrer les réels $x+y$, $x-y$, xy, $\frac{x}{y}$ et $|x| - |y|$.

Exercice 1.4 Soit x un réel tel que $|x| \leq 1$. Montrer que

$$\left| \frac{x + \sin x}{x^7 + x - 3} \right| \leq 2.$$

Majorant, minorant

Exercice 1.5 (Extrait d'un contrôle continu.) Soient e, m, M des nombres réels qui vérifient $m < e < M$. Montrer qu'on a

$$|e| < \max\{|m|, |M|\} \leq |m| + |M|.$$

Exercice 1.6 L'ensemble

$$\left\{ \frac{x-y}{x+y+3} \,|\, x \in [-1,1], y \in [-1,1] \right\}.$$

est-il majoré ? minoré ?

Exercice 1.7 L'ensemble

$$\left\{ \frac{n^2 - \cos n}{n^2 - 2} \,|\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

est-il majoré ? minoré ?

Exercice 1.8 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$A(n) = \frac{10n^3 - 2n + \exp(-n)}{-n^5 + n^2 + (-1)^n}.$$

Déterminer un entier N tel que pour tout n supérieur à N on ait $|A(n)| < 10^{-5}$.

Borne supérieure, inférieure

Exercice 1.9 Déterminer (s'ils existent) le minimum, maximum, la borne supérieure et inférieure (dans $\mathbb{R}$) des ensembles suivants :

(a) $]-\infty,2[$ (b) $]-\infty,2]$ (c) $]-2,5]$
(d) $\mathbb{R}^*$ (e) $[1,2]\cup\{3\}$ (f) $\emptyset$
(g) $\{x\in\mathbb{R}\ :\ x^2\leq 3\}$, (h) $\{x\in\mathbb{R}\ :\ x^2<3\}$ (i) $\{x\in\mathbb{Q}\ :\ x^2\leq 3\}$

Exercice 1.10 Déterminer (s'ils existent) le minimum, le maximum, la borne supérieure et la borne inférieure (dans $\mathbb{R}$) des ensembles suivants :
(a) $\left\{\frac{1}{n}\ :\ n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\right\}$, (b) $\left\{-\frac{1}{n}+[1+(-1)^n]n^2\ :\ n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\right\}$

Récurrence

Exercice 1.11 Démontrer la proposition 1.8.1 :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\qquad \sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 1.12 1. Soient $a,b\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$. Démontrer la formule du binôme (proposition 1.8.2) :

$$\forall a,b\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N},\qquad (a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}.$$

2. Soit $a\geq 0$. Montrer que pout tout $n\in\mathbb{N}$ on a les deux relations suivantes :

$$(1+a)^n\geq 1+na$$
$$(1+a)^n\geq \frac{n(n-1)}{2}a^2$$

Exercice 1.13 Soient $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ et $a_1,\dots,a_n$ des nombres réels. Montrer que

$$|a_1+\cdots+a_n|\leq|a_1|+\cdots+|a_n|$$

Exercice 1.14 (Extrait d'un contrôle continu de 2011/2012.) Démontrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ et $x>-1$ on a $(1+x)^n\geq 1+nx$.

Un peu de topologie

Exercice 1.15 (on imitera l'exemple qui suit la définition 1.6.2 de la page 17.) Soit $b\in\mathbb{R}$.
1. Montrer (en utilisant la définition d'un ensemble ouvert) que l'intervalle $]-\infty,b[$ est ouvert.
2. En déduire que l'intervalle $[b,+\infty[$ est fermé.
3. Montrer que l'intervalle $[b,+\infty[$ n'est pas ouvert.
4. En déduire que l'intervalle $]-\infty,b[$ n'est pas fermé.
5. L'intervalle $]-\infty,b]$ est-il compact ?

Exercice 1.16 Soient A, B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Démontrer la proposition 1.6.3 :
1. Montrer que si A et B sont ouverts alors $A\cup B$ et $A\cap B$ sont ouverts.
2. Montrer que si A et B sont fermés alors $A\cup B$ et $A\cap B$ sont fermés.

(Voir aussi l'exercice 1.28.)

Exercice 1.17 Soit $S \subset \mathbb{R}$. Donner la définition de : $x \in \mathbb{R}$ n'est pas un point d'adhérence de S.

Exercice 1.18 Décider pour chaque ensemble s'il est ouvert, fermé et déterminer son adhérence :
1. $S_1 =]-\infty, 2]$
2. $S_2 = [0,1] \cup \{2\}$
3. $[-5,3] \setminus \{0\}$
4. $]1,2[\cup]3,+\infty[$
5. $]1,2[\cup [3,4]$

La droite réelle complétée

Exercice 1.19 Déterminer dans $\widetilde{\mathbb{R}}$ la borne supérieure et inférieure des ensembles des exercices 1.9 et 1.10.

Vrai/Faux ?

Exercice 1.20 Décider pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux. Justifier votre réponse par un court argument ou un contre exemple.
1. Un ensemble $S \subset \mathbb{R}$ est majoré si pour tout $x \in S$ il existe un $M \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq M$.
2. Tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui est majoré admet un maximum.
3. Tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui est majoré admet une borne supérieure.
4. Si un sous-ensemble S de $\mathbb{R}$ admet un maximum M alors $M = \sup(S)$.
5. $[1,+\infty[$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$.
6. Le maximum de l'ensemble $[1,2[$ est 2.
7. 3 est un majorant de l'ensemble $[1,2[$.
8. Un ensemble S est ouvert s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in S$, $U_\varepsilon(x) \subset S$.
9. Un ensemble qui n'est pas ouvert est fermé.
10. $\mathbb{R}$ est à la fois ouvert et fermé.
11. Soit $S \subset \mathbb{R}$ un ensemble dont le complémentaire est fermé, alors S est ouvert.
12. 0 et 1 sont des points d'adhérence de l'ensemble $\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$.

Exercices supplémentaires

Exercice 1.21 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ \sum_{k=1}^{n} k^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Exercice 1.22 Soit x un réel.
1. On suppose $x \geq 1$. Montrer qu'il existe un unique entier naturel n tel que $2^n \leq x < 2^{n+1}$.
2. On suppose $x > 0$. Montrer qu'il existe un unique entier n tel que $2^n \leq x < 2^{n+1}$.

Exercice 1.23 Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble I_ℓ des réels x vérifiant

$$|x| \leq 1 \text{ et } |x-\ell| \leq 1$$

est un intervalle. Tracer le graphe de la fonction représentant la longueur de I_ℓ en fonction de ℓ.

Exercice 1.24 On considère deux parties quelconques A et B de $\mathbb{R}$. On suppose que A est borné et que B est majoré. Pour chacun des ensembles suivants, on dira s'il est automatiquement borné (ou majoré) :

1. un sous-ensemble quelconque de A (de B) ;
2. pour c réel donné, l'ensemble $cA = \{ca \mid a \in A\}$;
3. pour c réel donné, l'ensemble cB ;
4. l'ensemble $\{ca \mid a \in A, c \in \mathbb{R}\}$;
5. $A \cap B$;
6. $A \cup B$;
7. $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$;
8. $\{a/b \mid a \in A, b \in B$ non nul$\}$;
9. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in B\}$;
10. $\{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) \in A\}$.

Exercice 1.25 Démontrer la proposition 1.5.6 : soit S un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et

$$-S = \{-s \ : s \in S\}.$$

1. Montrer que M est un majorant de S si et seulement $-M$ est un minorant de $-S$.
2. Montrer que S possède un maximum si et seulement si $-S$ possède un minimum et qu'alors $\min(-S) = -\max(S)$.
3. Montrer que S possède un maximum si et seulement si $-S$ possède un minimum et qu'alors $\inf(-S) = -\sup(S)$.

Exercice 1.26 Soient S et T des sous-ensembles de $\mathbb{R}$. On pose

$$S + T = \{s + t \ : s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}\}.$$

1. Montrer que si S et T sont majorés et non vides, alors $S + T$ aussi et $\sup(S + T) = \sup(S) + \sup(T)$.
2. Montrer que si S et T sont minorés et non vides, alors $S + T$ aussi et $\inf(S + T) = \inf(S) + \inf(T)$.
3. Montrer que les formules sont valables pour des sous-ensembles non vides quelconques de $\mathbb{R}$ en prenant $\inf(S) \in \tilde{R}$ et $\sup(S) \in \tilde{R}$.

Exercice 1.27 Soient S et T des sous-ensembles de $\mathbb{R}$. On pose

$$S - T = \{s - t \ : s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}\}.$$

1. Montrer que si S et T sont bornés et non vides, alors $\sup(S - T) = \sup(S) - \inf(T)$ et $\inf(S - T) = \inf(S) - \sup(T)$.
2. Montrer que les deux formules sont valables pour des sous-ensembles non vides arbitraires de $\mathbb{R}$ en prenant $\inf(S) \in \tilde{R}$ et $\sup(S) \in \tilde{R}$.

Exercice 1.28 Soient, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Soient N un entier tel que $N \geq 2$ et $B_1, \ldots, B_N$ des sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si chaque A_n est ouvert alors leur union $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est ouverte et si chaque A_n est fermé alors leur intersection $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est fermée.
2. Montrer que si chaque B_n est ouvert alors leur intersection $\bigcap_{1 \leq n \leq N} B_n$ est ouverte et si chaque B_n est fermé alors leur union $\bigcup_{1 \leq n \leq N} B_n$ est fermée.
3. Montrer que $\mathbb{N}$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}$.

Fonction partie entière

Exercice 1.29
1. Déterminer la partie entière de $-\pi$?
2. Tracer le graphe de la fonction partie entière.
3. Pour deux réels x et y quelconques, comparer $[x+y]$ et $[x]+[y]$.

Exercice 1.30 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x - E[x]$ pour x réel.
1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $0 \leq f(x) < 1$.
2. Montrer que la fonction f est périodique de période 1.
3. Tracer le graphe de f.

2.7 Exercices

Définition d'une suite numérique

Exercice 2.1 Écrire à l'aide de quantificateurs la définition d'une suite non majorée, non minorée, non bornée.

Exercice 2.2 Montrer que la suite (u_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{2n-7}{3n+2}$$

est majorée par $2/3$, et minorée par $-7/2$.

Définition d'une suite convergente

Exercice 2.3 Soit (u_n) une suite réelle. Parmi les énoncés suivants, dire lesquels sont équivalents à « (u_n) converge vers 0 » :

1. $\exists \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, |u_n| < \varepsilon$,
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, |u_n| \leq \varepsilon$,
3. $\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n > N, |u_n| < \varepsilon$,
4. $\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n > N, |u_n| < \varepsilon$.

Exercice 2.4
1. Soit $l \in \mathbb{R}$. Écrire à l'aide de quantificateurs la définition d'une suite qui ne converge pas vers l. Écrire à l'aide de quantificateurs la définition d'une suite qui diverge.
2. Montrer en utilisant la définition d'une suite qui diverge donnée en 1) que la suite $((-1)^n)$ diverge.

Exercice 2.5 On considère la suite $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ par

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

1. Trouver un entier N à partir duquel la valeur absolue du terme général est inférieure à 10^{-2}. Même question pour 10^{-3} et 10^{-4}.
2. Montrer en utilisant la définition de convergence d'une suite que la suite a converge vers 0.

Exercice 2.6 Trouver la limite des suites numériques $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$, définies $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ par

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \qquad b_n = \frac{3n^2 - 2n + 1}{n^2 + 1} \qquad c_n = \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2 - 1}$$

Justifier la réponse en n'utilisant que la définition de convergence d'une suite. (La suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ est extraite de l'examen de l'année 2011/2012.)

Exercice 2.7 Montrer en utilisant la définition que si u est une suite qui converge vers 0 et v une suite bornée alors la suite uv converge vers 0.

Exercice 2.8 Soit (u_n) une suite qui converge vers un nombre réel l. Soit (v_n) une suite qui vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |u_n - v_n| < \varepsilon).$$

Montrer que la suite (v_n) converge vers l.

Limites et inégalités

Exercice 2.9 Voici une « démonstration fausse » du théorème des gendarmes : « Puisque les inégalités larges passent à la limite, on a $\ell \leq \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \ell$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. » Où est l'erreur ?

Exercice 2.10 Compléter la démonstration de la proposition 2.4.1 : Soient u une suite qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ et μ un réel tel que $\mu < \ell$. Montrer (en utilisant la définition de convergence d'une suite) qu'on a $u_n > \mu$ pour tout n assez grand.

Exercice 2.11 Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Soit I un intervalle d'extrémités a et b (donc $I = [a,b]$, $I = [a,b[$, $I =]a,b]$, ou $I =]a,b[$). Montrer que si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeur dans I qui converge vers un réel $\ell \in \mathbb{R}$, alors $\ell \in \bar{I}$.
2. Même question pour un intervalle de la forme $]a,+\infty[$, $[a,+\infty[$, $]-\infty,a[$, ou $]-\infty,a]$.
3. En déduire que si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeur dans un intervalle fermé I qui converge vers un réel $\ell \in \mathbb{R}$, alors $\ell \in I$.
4. Donner l'exemple d'un intervalle I et d'une suite à valeurs dans I qui converge mais dont la limite n'est pas dans I.

(Voir aussi l'exercice 2.19.)

Exercice 2.12 Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que si u converge alors sa limite est un entier et la suite est stationnaire. (Indication : $\mathbb{N}$ est un ensemble fermé.)

Limites et opérations

Exercice 2.13 Un résultat du cours (théorème 2.5.1) dit que la somme (produit) de deux suites convergentes converge et que la limite est la somme (produit) des limites des deux suites. Le but de l'exercice est de généraliser ce résultat pour k suites, $k \geq 2$. Soient donc $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, et $u^{(i)}$ une suite pour tout $i \in \{1,\dots,k\}$.

1. Montrer (par récurrence) que la suite $u^{(1)} + \cdots + u^{(k)}$ converge et que sa limite est la somme des limites des suites $u^{(1)},\dots,u^{(k)}$.
2. Montrer que la suite $u^{(1)} \cdots u^{(k)}$ converge et que sa limite est le produit des limites des suites $u^{(1)},\dots,u^{(k)}$.
3. En déduire que la suite $\left(\frac{1}{n^k}\right)$ converge vers 0.

Exercice 2.14 Soit u une suite réelle qui converge vers 0. On définit une suite v par

$$v_n = n\,u_n = \underbrace{u_n + \cdots + u_n}_{n \text{ termes}}.$$

Le raisonnement suivant est il vrai ou faux ? « v_n est la somme de n suites tendant vers 0, donc $\lim_n(v_n) = 0$. »

Étude de la convergence d'une suite

Exercice 2.15 Étudier la convergence de la suite (u_n) définie $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ par :

$$(1) \quad u_n = (-1)^n \frac{n^2+1}{n^2-1}; \qquad (2) \quad u_n = \frac{1-(-1)^n}{n^2};$$

$$(3) \quad u_n = \frac{1}{n} \cos n; \qquad (4) \quad u_n = \frac{(-1)^n}{2+4+6+\cdots+2(n+1)};$$

$$(5) \quad u_n = \frac{n^2-n+1}{n^3+2n+1}; \qquad (6) \quad u_n = \frac{n^3+\sin(\cos(n))}{n^3+\cos(\sin(n))};$$

$$(7) \quad u_n = \frac{\sqrt{n}-n+1}{1+3n}; \qquad (8) \quad u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n};$$

$$(9) \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n}}{2n\sqrt{n}+\sqrt{k}}; \qquad (10) \quad u_n = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{100} - 1\right]^{\frac{1}{100}};$$

$$(11) \quad u_n = \frac{a^n}{n^n} \quad a \in \mathbb{R}; \qquad (12) \quad u_n = \frac{n^3-2n^2}{n-1} - \frac{n^3+2n}{n+1};$$

$$(13) \; u_n = \frac{n^7+3n^5}{n^5+n^3+\sqrt{n}} - \frac{n^6-7n^4}{n^4+(\sin n)^8}.$$

Chaque fois que vous utilisez une propriété des suites numériques citez le résultat du cours qui énonce cette propriété. (Les suites (7) à (10) sont extraits de contrôles continus.)

Utilisation de sous-suites

Exercice 2.16 Soient $u = (u_n)_{n\geq 0}$ une suite et $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1. Montrer que la suite $v = (v_n)_{n\geq 0}$ définie par $v_n = u_{n+p}$, $n \in \mathbb{N}$ est une sous-suite de u.
2. Montrer en utilisant la définition de la convergence d'une suite que si u converge alors v converge vers la même limite.

Exercice 2.17 Le but de l'exercice est de montrer que la suite $v = (\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. Supposons pour arriver à une contradiction que la suite v converge et notons sa limite par ℓ.

1. Démontrer les relations

$$\cos(n+1) - \cos(n-1) = -2\sin(n)\sin(1) \qquad \text{(i)}$$

$$\cos(n+1) = \cos(n)\cos(1) - \sin(n)\sin(1) \qquad \text{(ii)}$$

2. Déduire de (i) que la suite $u = (\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite est 0.
3. Déduire de (ii) qu'on aurait alors $\ell = 0$.
4. Montrer qu'on arriverait alors à une contradiction.
5. Utiliser la même méthode pour montrer que la suite u diverge.

(Voir aussi l'exercice 2.22.)

Vrai/Faux ?

Exercice 2.18 Décider pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux. Justifier votre réponse par un court argument ou un contre exemple.

1. (Extrait d'un examen) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes telles qu'on ait $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < v_n$, alors on a $\lim_{n\to+\infty} u_n < \lim_{n\to+\infty} v_n$.

2. (Extrait d'un examen) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers 0, alors on a $u_n \leq 1$ pour tout n assez grand.
3. (Extrait d'un examen) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui vérifie $u_n < 0$ pour tout n assez grand, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.
4. (Extrait d'un examen) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers 0, et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arbitraire, alors la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
5. (Extrait d'un examen) Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si toute sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
6. (Extrait d'un examen) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente, alors la suite de terme général $v_n = u_n - u_{2n}$ converge vers 0.
7. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ ou $-\ell$.
8. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ alors la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|\ell|$.
9. Si u est une suite bornée et v est une suite qui tend vers 0 alors la suite uv tend vers 0.
10. La suite
$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{16}, \frac{1}{15}, \dots$$
est une sous suite de la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercices supplémentaires

Exercice 2.19

1. Soit u une suite à valeurs dans un sous-ensemble S de $\mathbb{R}$. Si u converge, disons vers $l \in \mathbb{R}$, alors on a $l \in \bar{S}$.
2. Soit u une suite à valeurs dans un sous-ensemble fermé F de $\mathbb{R}$. Si u converge, disons vers $l \in \mathbb{R}$, alors on a $l \in F$.

Exercice 2.20 Pour tout entier $n \geq 2$, on pose

$$u_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Montrer, en écrivant chaque facteur sous la forme $\frac{k-1}{k}\frac{k+1}{k}$, que ce produit se simplifie considérablement. En déduire que u converge et préciser sa limite.

Exercice 2.21 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ une suite qui converge vers un nombre réel l. Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ on pose

$$T_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ converge vers l.

Exercice 2.22 Pour étudier la convergence de la suite $u = (\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n = \left[2\pi n + \frac{\pi}{6}, 2\pi n + \frac{\pi}{2}\right], \qquad B_n = \left[2\pi n - \frac{\pi}{3}, 2\pi n\right].$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intervalle A_n contient au moins un entier et notons par a_n un de ces entiers, disons le plus petit des entiers dans A_n.
2. Montrer que $(\sin(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de u.

3. Trouver un encadrement pour la suite $(\sin(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Trouver de la même manière une sous-suite $(\sin(b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ en choisissant un entier $b_n \in B_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et encadrer cette sous suite.
5. Montrer que la suite u est divergente.

3.4 Exercices

Définition et première propriété

Exercice 3.1 Écrire à l'aide de quantificateurs la définition d'une suite non croissante, non décroissante.

Borne d'une suite monotone convergente

Exercice 3.2 Soient u une suite croissante pour laquelle il existe une sous-suite v qui converge vers un réel ℓ.

1. Montrer que la suite v est majorée par ℓ.
2. En déduire que la suite u est majorée par ℓ.
3. Montrer que la suite u converge vers ℓ.

Exercice 3.3 Démontrer la proposition 3.1.3 (2) : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle décroissante qui converge vers un réel ℓ, alors elle est minorée par ℓ et on a $\ell = \inf\{u_n \ : n \in \mathbb{N}\}$.
On utilisera deux méthodes différentes :

1. Imiter la démonstration de la proposition 3.1.3 (1).
2. Utiliser la proposition 3.1.3 (1) pour $v = -u$.

Exercice 3.4
1. Montrer que la suite de terme général
$$u_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+n}, \qquad n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$$
est croissante et majorée.
2. Utiliser le fait (hors programme) que si $f \ : \ [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue alors on a
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \to \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$
pour évaluer la limite de la suite (u_n).

Suites adjacentes

Exercice 3.5 Pour $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, on pose
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} = 1 + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n^2}.$$

1. Montrer que les suites u et v convergent et ont la même limite.
2. Donner une valeur approchée par défaut de cette limite à 10^{-1} près.

Exercice 3.6 (Extrait d'un examen de 2011-2012) Soit $S = (S_n)_{n=2}^{\infty}$ la suite de terme général
$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \qquad S_n = \sum_{p=2}^{n} (-1)^p \frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n}.$$

1. Montrer que les deux suites $U = (U_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ et $V = (V_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ définies par
$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \qquad U_n = S_{2n} \quad \text{et} \quad V_n = S_{2n+1}$$
sont adjacentes.
2. En déduire que la suite $S = (S_n)_{n=2}^{\infty}$ est convergente.

Exercice 3.7 (Extrait d'un examen de 2010-2011)

1. Déterminer la limite : $\lim_{n \to +\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$.
2. Soient u et v les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n+1} \qquad v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n}$$

   (a) Montrer que $u < v$.
   (b) Montrer que u et v sont adjacentes.
   (c) Que peut-on dire de leurs limites éventuelles ?

Exercice 3.8 Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on pose

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} \qquad \text{et} \qquad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

1. Montrer que les suites u et v convergent et ont la même limite ℓ.
2. Trouver un intervalle contenant ℓ et de longueur inférieure à $0,02$.
3. Montrer que ℓ n'est pas rationnel (on supposera que $\ell = m/n$ avec $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et on montrera qu'alors $n!u_n < m(n-1)! < n!u_n + 1$).

Exercice 3.9 Soit a un réel strictement positif. Étudier la monotonie de la suite $(a^{\frac{1}{n}})_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ suivant les valeurs de a.

Racine n-ième, Dichotomie

Exercice 3.10 On cherche une valeur approchée de $\sqrt{3}$. Pour cela on utilise la méthode (dichotomie) décrite dans la démonstration de la proposition 3.3.1 (voir aussi la remarque qui suit cette proposition). Pour cet exercice on utilise la notation de cette démonstration.

1. Pour trouver une approximation de $\sqrt{3}$ commencez avec $[a_0, b_0] = [1, 2]$ et construisez la suite d'intervalles $[a_i, b_i]$ qui contiennent tous $\sqrt{3}$, disons pour $i = 1, \ldots, 7$. (Réponse : $a_7 = \frac{221}{128} = 1.7265625$ et $b_7 = \frac{111}{64} = 1.734375$.)
2. Pour passer de $[a_{i-1}, b_{i-1}]$ à $[a_i, b_i]$ on retient soit la première moitié de $[a_{i-1}, b_{i-1}]$, soit la deuxième moitié. Dans le premier cas on pose $e_i = 0$ et dans la deuxième on pose $e_i = 1$. Quelle est la suite $e_1, \ldots, e_7$ qu'on a obtenu en (1) ? (Réponse : $(1, 0, 1, 1, 1, 0, 1)$.
3. Pouvez-vous trouver une formule qui relie a_7 et la suite $e_1, \ldots, e_7$?
4. (Pour aller plus loin). Pouvez-vous modifier la méthode de dichotomie en divisant à chaque fois l'intervalle en dix parties (de longueur égales) plutôt que en deux parties ? Comment associer une suite $(e_1, \ldots, e_n)$ à cet algorithme appliqué n fois ? Comment traduire cette suite en une approximation de $\sqrt{3}$.

Vrai ou faux ?

Exercice 3.11 Décider pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux. Justifier votre réponse par un court argument ou un contre exemple.

1. (Extrait d'un examen de 2011/2012) Si (u_n) est une suite croissante et majorée par un réel ℓ, alors elle converge vers ℓ.
2. (Extrait d'un examen de 2011/2012) Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite à termes strictement positifs qui converge vers 0, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang.

3. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites telles que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n,$$
alors les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
4. Si (u_n) est une suite croissante et minorée, alors (u_n) converge.
5. Si (u_n) est une suite monotone et bornée, alors (u_n) converge.

Exercices supplémentaires

Exercice 3.12 (Démonstration du théorème 3.3.3 des segments emboîtés.) Soient $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, les intervalles $I_n = [a_n, b_n]$ vérifient $I_{n+1} \subset I_n$ et que la longueur de cette suite d'intervalles tend vers 0 : $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$. (On dit alors que la suite $([a_n, b_n])$ est une suite de segments (fermés) emboîtés).

1. Montrer que les suites a et b sont adjacentes, et donc convergentes. Notons leur limite commune par ℓ.
2. Montrer que $\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{\ell\}$ (autrement dit : ℓ est l'unique réel qui vérifie $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq \ell \leq b_n$).
3. Trouver une suite $J_n =]a_n, b_n[$ d'intervalles qui vérifient $J_{n+1} \subset J_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - u_n) = 0$ et tel que $\cap_{n\in\mathbb{N}} J_n = \emptyset$. (Donc le théorème des segments emboîtés n'est pas valable en général pour les segments ouverts.)

Exercice 3.13 — Généralisation de l'exercice précédent. Soient $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, les intervalles $I_n = [a_n, b_n]$ vérifient $I_{n+1} \subset I_n$.

1. Montrer que les suites a et b vérifient
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n.$$
2. Montrer que les suites a et b convergent et que leurs limites vérifient $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \ell'$.
3. Montrer que $\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n = [\ell, \ell']$.

4.9 Exercices

Définitions

Exercice 4.1 Montrer en utilisant la définition d'une suite qui tend vers $+\infty$ que la suite $(\sqrt{n})_{n\in N}$ tend vers $+\infty$.

Exercice 4.2 Pour la suite $(u_n) = (n^2 - n)$, trouver un entier N à partir duquel on a $u_n > 100$. Montrer que la suite $(n^2 - n)$ tend vers $+\infty$. (On justifiera la réponse en utilisant la définition d'une suite qui tend vers $+\infty$.)

Exercice 4.3

1. Écrire à l'aide de quantificateurs la définition d'une suite qui ne tend pas vers $+\infty$.
2. Montrer que la suite de terme général $u_n = 1 + [1 + (-1)^n]n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ est strictement positive, n'est pas majorée mais ne tend pas vers $+\infty$. Voir la figure 4.1.

Exercice 4.4 Montrer que si (u_n) est une suite qui tend vers $+\infty$, alors toute sous-suite de (u_n) tend vers $+\infty$.

Exercice 4.5 Montrer que si (u_n) est une suite qui n'est pas majorée, alors il existe une sous-suite de (u_n) qui tend vers $+\infty$.

Premières propriétés

Exercice 4.6 Démontrer la proposition 4.2.1 pour une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $-\infty$: montrer que si u tend vers $-\infty$ alors,

1. la suite u est majorée,
2. la suite $-u$ tend vers $+\infty$,
3. pour tout réel a, la suite $(a + u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$,
4. pour tout $c > 0$, la suite cu tend $-\infty$.

Exercice 4.7 Démontrer le théorème des gendarmes à l'infini (proposition 4.4.1 (1)) : soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles tel que $u \leq v$. Montrer que si u tend vers $+\infty$ alors v tend vers $+\infty$ et si v tend vers $-\infty$ alors u tend vers $-\infty$.

Suites monotones divergentes

Exercice 4.8 — Série harmonique. Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ la suite définie par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Utiliser le calcul suivant

$$\begin{array}{rcllll} S_{16} & = & 1+\frac{1}{2} & +\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) & +\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right) & +\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right) \\ & > & 1+\frac{1}{2} & +2\frac{1}{4} & +4\frac{1}{8} & +8\frac{1}{16}. \end{array}$$

pour conjecturer une minoration de S_{2^p}, pour tout $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Démontrer votre formule. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ tends vers l'infini.

Application aux calculs de limites

Exercice 4.9 Construire une suite $u_n = v_n w_n$ convergente et telle que l'une au moins des suites (v_n) et (w_n) diverge.

Suites équivalentes

Exercice 4.10 Démontrer la proposition 4.6.2 : montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence :

1. ($\sim$ est réflexive) $u \sim u$;
2. ($\sim$ est transitive) $u \sim v$, $v \sim w$ implique $u \sim w$;
3. ($\sim$ est symétrique) $u \sim v$ implique $u \sim v$.

Exercice 4.11 Démontrer la proposition 4.6.3 : soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites tels que $v_n \neq 0$, $\forall n \geq R$. Alors $u \sim v$ si et seulement si u/v converge vers 1 : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.

Exercice 4.12 Démontrer la proposition 4.6.5 : si u, u', v, v' sont des suites telles que $u \sim u'$ et $v \sim v'$, alors on a $uv \sim u'v'$.

Exercice 4.13 Montrer que les suites u et v définies par

$$u_n = \frac{n^2 - 2n + 1}{n - 1}, \qquad v_n = \frac{n^2 - 1}{n - 1}, \qquad n \geq 2$$

sont équivalentes, mais que la suite $u - v$ ne tend pas vers 0.

Suites géométriques

Exercice 4.14 Montrer qu'une suite (u_n) est une suite géométrique de raison q si et seulement si elle vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q u_n.$$

Exercice 4.15 Soient l un nombre réel et λ un nombre réel qui vérifie $\lambda \in]0, 1[$. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_{n+1} - l| \leq \lambda |u_n - l|.$$

Démontrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - l| \leq \lambda^n |u_0 - l|,$$

et en déduire que la suite u converge vers ℓ.

Étude de convergence d'une suite

Exercice 4.16 Étudier la convergence de la suite (u_n) définie $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ par :

$$(1) \quad u_n = \frac{n^3 + 2^n}{3^n} \qquad (2) \quad u_n = \frac{n^n}{n!} \qquad (3) \quad u_n = \frac{n^n}{4^n}$$

$$(4) \quad u_n = (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} \qquad (5) \quad u_n = \frac{2^n}{n!}$$

Exercice 4.17 — Extrait d'un examen de 2010/11. Étudier la convergence, et le cas échéant donner la limite, des suites réelles a, b, c ci-dessous (définies pour n entier ≥ 2) :

$$a_n = (-1)^n \left(\frac{10}{11}\right)^n; \qquad b_n = n^{\frac{1}{4}} \sin \frac{1}{n}; \qquad c_n = \frac{n^{\frac{3}{4}} \left(\frac{4}{3}\right)^n}{\ln(n)}.$$

Exercice 4.18 On considère la suite définie par :

$$u_1 = \frac{1}{4}, \quad u_2 = \frac{1 \cdot 3}{4^2 \cdot 2\,!}, \quad \ldots \quad u_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{4^n \cdot n\,!}.$$

Démontrer que

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} < \frac{1}{2}.$$

En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 4.19 Étudier en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}^+$ la convergence de la suite

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \qquad u_n = \frac{1}{n^\alpha}(1+2+\cdots+n) = \frac{1}{n^\alpha}\sum_{p=1}^{n} p.$$

Exercice 4.20

1. Étudier (par encadrement) la convergence de la suite (u_n) telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \qquad u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \frac{1}{n+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}.$$

2. Étudier (par encadrement) la convergence de la suite (v_n) telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{n}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{n}{\sqrt{n^2+3}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}.$$

Exercice 4.21 Étudier selon la valeur de $\theta \in [0, 2\pi[$ la convergence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n &= (\sin\theta)^n, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n &= 1 + \sin\theta + (\sin\theta)^2 + \cdots + (\sin\theta)^n = \sum_{p=0}^{n} (\sin\theta)^p, \end{aligned}$$

et, le cas échéant, déterminer la limite.

Exercice 4.22

1. Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Étudier en fonction de la valeur de a la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{(a+1)^n - 1}{(a+1)^n + 1},$$

et, le cas échéant, déterminer sa limite.

2. (Extrait d'un contrôle continu de 2011/2012.) Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Étudier en fonction de la valeur de a si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{2^{5n} + 5^{2n}}{a^n},$$

admet une limite dans $\tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, \infty\}$ et, le cas échéant, déterminer cette limite.

Racine n-ième

Exercice 4.23 (Démonstration de la proposition 4.7.4). Pour $a \in]0, +\infty[$ on définit la suite u

dont le terme général est $u_n = a^{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1. Soit $a \in]1, +\infty[$. Montrer que $u_n \in]1, +\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
2. Soient $x \in]0, \infty[$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Utiliser la formule du binôme pour montrer que $(1+x)^n \geq nx$.
3. On pose $\varepsilon_n = u_n - 1$, donc $u_n = 1 + \varepsilon_n$. Utiliser la relation du (2) pour montrer que ε_n tend vers 0. En déduire que la suite $(a^{\frac{1}{n}})$ converge vers 1.
4. En déduire la convergence de la suite u pour $a \in]0, 1[$.
5. Généraliser ce qui précède pour étudier la convergence de $(n^{\frac{1}{n}})_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$. (Indication : $(1+x)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} x$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, \infty[$.)

Démonstration du critère de Cauchy pour les suites

Exercice 4.24 Imiter la démonstration du critère de d'Alembert pour les suites (4.8.1) pour donner une démonstration du critère de Cauchy pour les suites (4.8.2), c'est-à-dire : soit (u_n) une suite réelle à termes positifs pour laquelle il existe $\ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ qui vérifie

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = \ell.$$

1. Si $0 \leq \ell < 1$ alors la suite (u_n) converge vers 0.
2. Si $\ell > 1$ alors la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

Vrai ou faux

Exercice 4.25 Décider pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux. Justifier votre réponse par un court argument, un résultat du cours ou un contre exemple. Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles.

1. Si (u_n) converge, alors $(u_{n+1} - u_n)$ tend vers 0.
2. Si la suite $(u_{n+1} - u_n)$ tend vers 0, alors la suite (u_n) converge.
3. (Extrait d'un examen de 2011-2012.) Si u et v sont deux suites réelles telles que la suite u converge et la suite $u + v$ diverge, alors la suite v diverge.
4. Si la suite (u_n^2) converge, alors (u_n) converge.
5. Une suite qui n'est pas bornée diverge.
6. Une suite qui diverge ne peut pas être bornée.
7. Une suite monotone qui diverge ne peut pas être bornée.
8. Une suite strictement négative qui n'est pas bornée tend vers $-\infty$.
9. Soit (u_n) une suite décroissante pour laquelle il existe une sous-suite qui tend vers $-\infty$ alors (u_n) tend vers $-\infty$.
10. Soit (u_n) une suite réelle pour laquelle il existe une sous-suite (v_n) qui tend vers $-\infty$ alors (u_n) tend vers $-\infty$.
11. Si u converge vers $l \in \mathbb{R}$ et si v diverge alors uv diverge.
12. Si u converge vers $l \in \mathbb{R}^*$ et si v diverge alors uv diverge.
13. Soit u une suite qui n'est pas majorée, alors elle tend vers $+\infty$.
14. Si u tend vers $-\infty$ alors u^2 tend vers $+\infty$.
15. Soient u et v deux suites tels que leur produit uv converge alors les deux suites u et v convergent.
16. Soit u une suite qui tend vers $-\infty$ alors elle est décroissante à partir d'un certain rang.
17. Soit (u_n) une suite tel que $u_n \neq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si la suite (u_n) tend vers 0 alors la suite $(\frac{1}{u_n})$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.
18. Soient u et u' deux suites équivalentes alors la suite $u - u'$ tend vers 0.
19. Si u et u' sont deux suites équivalentes et si v et v' sont deux suites équivalentes alors

$u+v$ et $u'+v'$ sont équivalentes.

20. Si u et u' sont deux suites équivalentes et si v et v' sont deux suites équivalentes alors uv et $u'v'$ sont équivalentes.
21. La suite définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$
est une suite géométrique.
22. $u_n \sim v_n$ implique que $u_n^n \sim v_n^n$.
23. La suite $(n^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ tend vers $+\infty$.
24. Soient $B>1$ un nombre réel et (u_n) une suite à valeurs dans $]1,B[$, alors la suite $(u_n^{\frac{1}{n}})$ converge.

Exercices supplémentaires

Exercice 4.26 Pour tout entier $n \geq 1$, on pose
$$v_n = \sqrt{n+1}+\cdots+\sqrt{2n} = \sum_{k=n+1}^{2n} \sqrt{k}.$$
Étudier la convergence éventuelle des suites
$$(v_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}, \quad \left(\frac{v_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}, \quad \text{et} \quad \left(\frac{v_n}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}.$$

Exercice 4.27
1. Que peut-on dire d'une suite qui vérifie $\lim_{n\to\infty} nu_n = 0$?
2. Que peut-on dire d'une suite qui vérifie $\lim_{n\to\infty} nu_n = 1$?
3. Que peut-on dire d'une suite qui vérifie $\lim_{n\to\infty} nu_n = +\infty$?

Exercice 4.28 Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.
1. Exprimer u_n en fonction de n et de u_0.
2. Montrer qu'il existe une valeur ℓ telle que pour $u_0 = \ell$, la suite (u_n) soit constante.
3. Retrouver le résultat du 1) en étudiant la suite $(u_n - \ell)$.

Exercice 4.29 Vous empruntez une somme S_0 pour une période de N années, à un taux annuel de τ, à intérêts composés (au bout d'un an, vous devez donc la somme $S_0(1+\tau)$). A la fin de chaque année, vous devrez rembourser une annuité A, fixée au départ. On cherche à calculer A.

Pour $n \in \{1,\ldots,N\}$ on note S_n la somme encore due au bout de n années.
1. Pour $0 \leq n < N$, exprimer S_{n+1} en fonction de S_n ; en déduire une expression de S_n en fonction de n.
2. En déduire A.
3. Quelle annuité doit-on verser pour un prêt à 3% sur 10 ans ?

Exercice 4.30 Pour $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, on pose $u_n = \sum_{k=0}^{n} k$, $v_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$ et $w_n = \frac{v_n}{u_n}$.
1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Étudier les premiers termes de la suite (w_n) et conjecturer une expression de w_n puis de v_n en fonction de n.
3. Vérifier si votre conjecture sur (v_n) est correcte.

5.4 Exercices

Définition d'une suite complexe

Exercice 5.1 Tracer dans le plan complexe les premiers 10 termes de la suite complexe (u_n) définie par
$$u_n = \frac{1}{n}e^{ni\frac{\pi}{2}}, n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}.$$
Représenter dans le même plan les ensembles
$$U_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} \mid \, : \, |z| < \varepsilon\}$$
pour $\varepsilon = 1/2, 1/4$. Pour $\varepsilon > 0$ (arbitraire) déterminer le rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel on a $|u_n| < \varepsilon$.

Exercice 5.2 Soit $q \in \mathbb{C}$. En utilisant l'écriture exponentielle de q tracer dans le plan complexe quelques termes de la suite géométrique (q^n). Faire une conjecture quand au comportement (pour n grand) de cette suite en distinguant les cas $|q| < 1$ et $|q| > 1$. Que pensez-vous est son comportement si $|q| = 1$?

Un critère de convergence

Exercice 5.3 Soit a un nombre réel non nul. On pose
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1+ina}{|1+in|}.$$

1. Construire géométriquement les premiers 5 termes de la suite (u_n) pour $a = 1$ et faire une conjecture quant à la convergence de la suite.
2. Étudier la convergence de la suite (u_n) (pour $a \neq 0$ arbitraire).

Exercice 5.4 Étudier la convergence de la suite de terme général

(1) $\quad u_n = \dfrac{n}{(1+ni)^2}$ (2) $\quad u_n = \dfrac{1+2in}{1+ni}$,

(3) $\quad u_n = \dfrac{e^{in\theta}}{n^2+i\cos n}, \theta \in \mathbb{R}$ (4) $\quad u_n = (-1)^n\dfrac{n+1}{n-3i}$

(5) $\quad u_n = \left(\dfrac{1+i}{2-i}\right)^n$

et, le cas échéant, déterminer sa limite. (Le (3) est extraite d'un contrôle continu de 2011/2012.)

Propriétés des suites complexes

Exercice 5.5 Soit u une suite complexe.

1. Montrer que u est bornée si et seulement si les suites réelles $\mathrm{Re}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont bornées.
2. Montrer que si u converge alors u est bornée.

Exercice 5.6 Montrer qu'une suite complexe u est convergente si et seulement si les suites réelles $\mathrm{Re}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont convergentes.

Exercice 5.7 Soient u et v deux suites complexes et $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que

1. si u converge vers ℓ alors λu converge vers $\lambda\ell$,

2. si u converge vers ℓ et v converge vers ℓ' alors $u+v$ converge vers $\ell+\ell'$ et uv tend vers $\ell\ell'$.

(On peut se ramener au cas réel en utilisant la proposition 5.2.4.)

Exercice 5.8 Soit u une suite complexe qui converge vers $\ell \in \mathbb{C}$.

1. Est-ce que $\overline{u}$ converge vers $\overline{\ell}$? Réciproque ?
2. Est-ce que $|u|$ converge vers $|\ell|$? Réciproque ?

Exercice 5.9 Frai ou faux : si $\theta < 0$ alors la suite $e^{in\theta}$ tend vers 0 ?

Exercices supplémentaires

Exercice 5.10 Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. Le but de l'exercice est de montrer que la suite $w = (e^{in\theta})_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour $\theta = 0$ et diverge sinon. La méthode utilisée est une adaptation de celle de l'exercice 2.17.

1. Vérifier que la suite u converge pour $\theta = 0$.

On suppose maintenant que $\theta \in]0, 2\pi[$ et on veut montrer que la suite w diverge.

2. Dire pourquoi il est suffisant de montrer que la suite $u = (\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Supposons pour arriver à une contradiction que la suite u converge et notons sa limite par ℓ.

3. Démontrer les relations

$$\cos((n+1)\theta) - \cos((n-1)\theta) = -2\sin(n\theta)\sin(\theta) \quad \text{(i)}$$
$$\cos((n+1)\theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta) \quad \text{(ii)}$$

4. Déduire de (i) que la suite $v = (\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite est 0.
5. Déduire de (ii) qu'on aurait alors $\ell = 0$.
6. Montrer qu'on arriverait alors à une contradiction.

Exercice 5.11 En imitant les définitions données dans la section 1.6 pour les sous-ensembles de $\mathbb{R}$, proposez pour un sous-ensemble S de $\mathbb{C}$ une définition de ce que signifie d'être ouvert, fermé, borné, compact et donner une définition de l'adhérence de S.

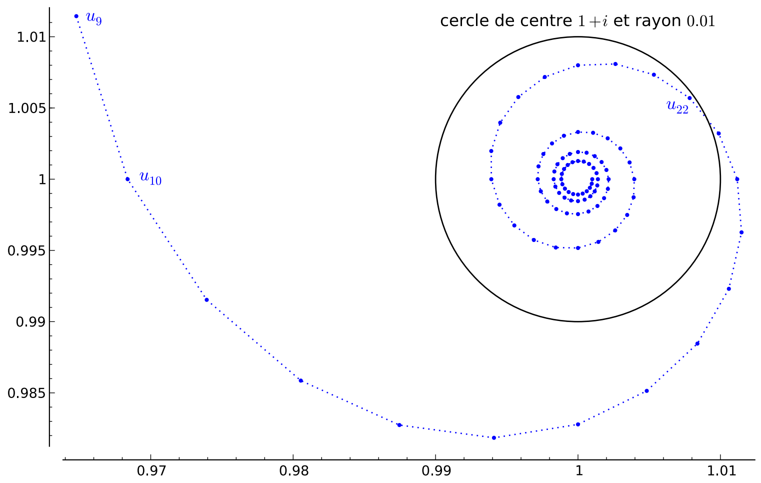

FIGURE 5.1 – La suite $u_n = 1+i+n^{-\frac{3}{2}}\left(\cos(\frac{n\pi}{10}) + i\left(\sin(\frac{n\pi}{10})\right)\right)$, pour $n = 9,\ldots,100$

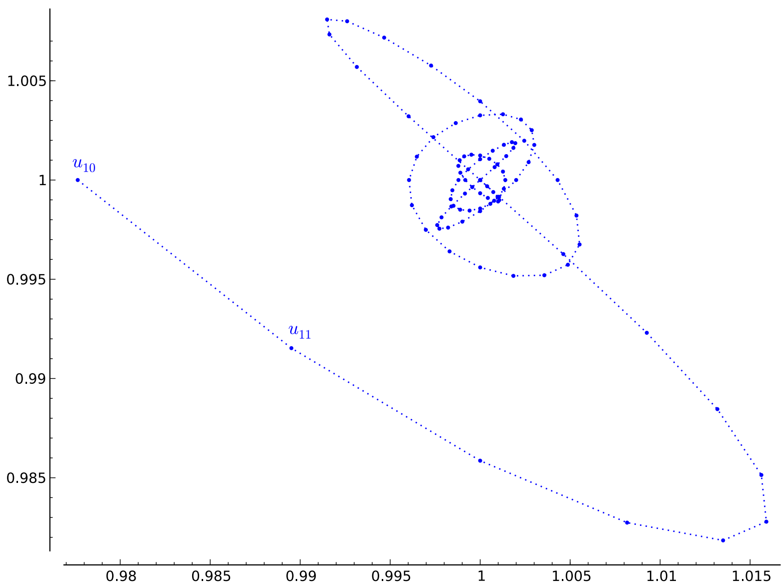

FIGURE 5.2 – La suite $u_n = 1+i+n^{-\frac{3}{2}}\left(\cos(\frac{n\pi}{8}) + i\left(\sin(\frac{n\pi}{10})\right)\right)$, pour $n = 10,\ldots,100$

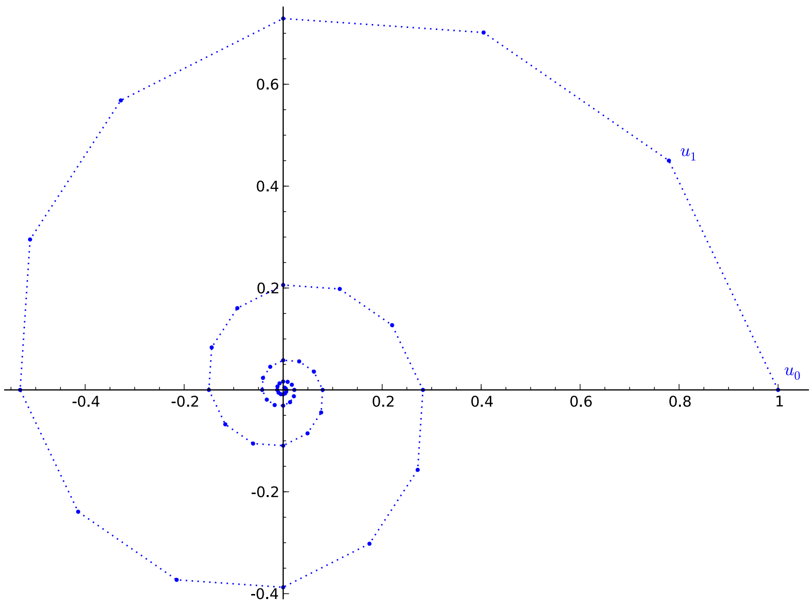

FIGURE 5.3 – La suite $(q^n)_{n=0}^{50}$, pour $q = \frac{9}{10}e^{\frac{\pi i}{6}}$.

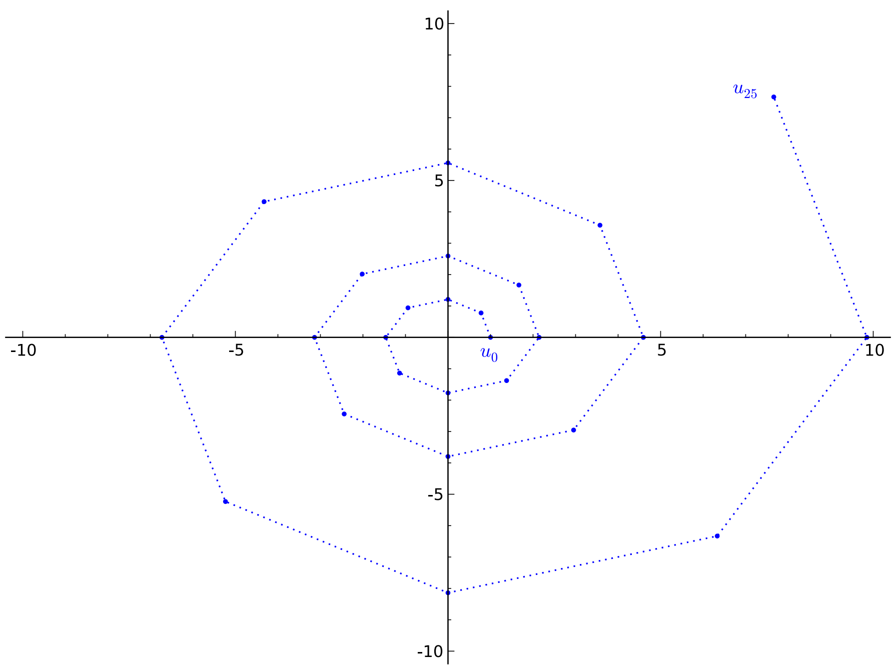

FIGURE 5.4 – La suite $(q^n)_{n=0}^{25}$, pour $q = 1.1 \cdot e^{\frac{\pi i}{4}}$.

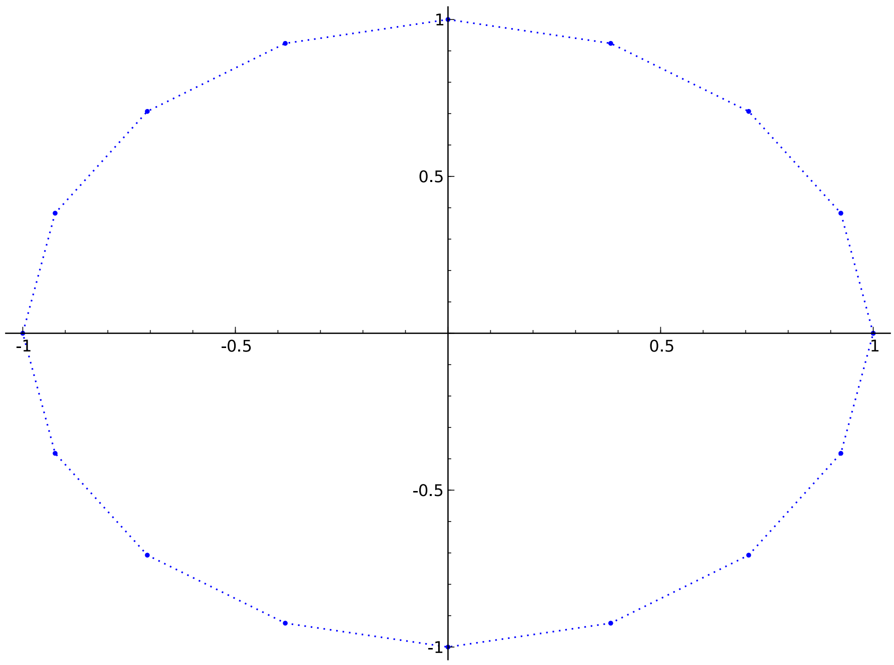

FIGURE 5.5 – La suite $(q^n)_{n=0}^{16}$, pour $q = e^{\frac{\pi i}{8}}$.

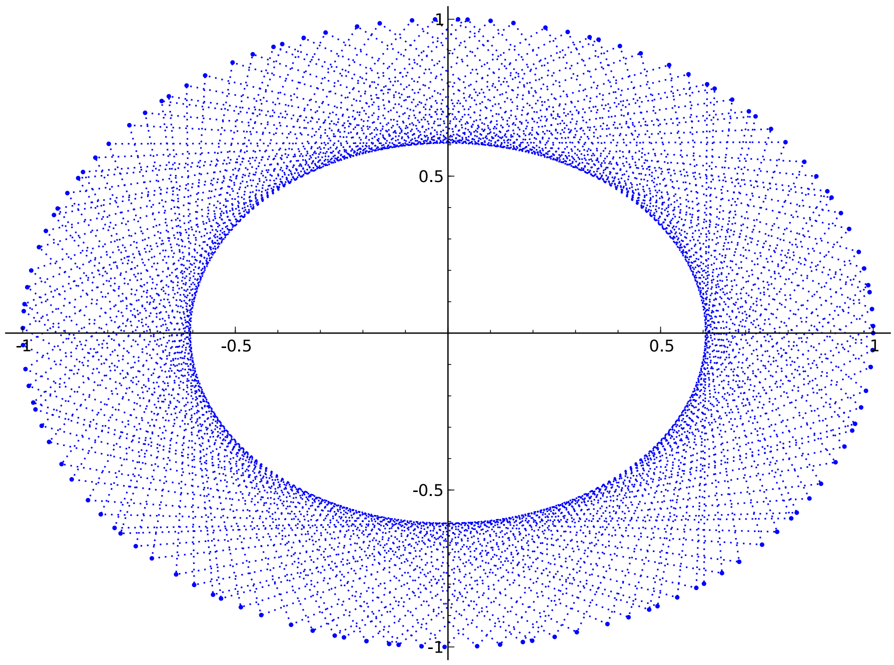

FIGURE 5.6 – La suite $(q^n)_{n=0}^{120}$, pour $q = e^{\pi i \sqrt{2}}$.

6.7 Exercices

Exercice 6.1 Soient I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I, $a \in \bar{I}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Dire ce que signifie que f ne tend pas vers ℓ lorsque x tend vers a. Dire ce que signifie que f n'admet pas de limite en a.

Exercice 6.2 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

n'admet pas de limite en 0.

Exercice 6.3

1. Montrer en utilisant une étude de fonction que $\ln(x) \leq x$ pour $x > 0$.
2. En déduire que $\ln(x) \leq 2\sqrt{x}$, pour $x \geq 1$.
3. En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.
4. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{e^n} = 0$.

Exercice 6.4

1. Montrer en utilisant une propriété des suites convergentes du chapitre 2 que si la suite (u_n) converge vers un réel ℓ alors la suite (u_n^2) converge vers ℓ^2.
2. En déduire que la fonction $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto x^2$ est continue.
3. Montrer avec la même méthode que pour tout $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ la fonction $f_N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto x^N$ est continue.

(La même méthode montre que les polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$ ainsi que les fractions rationnelles sur leur domaine de définition.)

Exercice 6.5 Soit $a \geq 0$. Étudier (en utilisant le logarithme) la convergence de la suite (u_n) définie par :

(a) $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad u_n = a^{\frac{1}{n}}$; (b) $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad u_n = n^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 6.6 Étudier la convergence de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ par :

(1) $u_n = \dfrac{n^n}{e^n}$ (2) $u_n = \left(3 - \sin^2(n)\right)^{\frac{1}{n}}$

(3) $u_n = \exp \dfrac{n^2}{-2 + \cos n}$ (4) $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

(5) $u_n = (3^n + e^n)^{\frac{1}{n}}$ (6) $u_n = \cos \dfrac{2^n}{n!}$;

(7) $u_n = (\ln(n))^{\frac{1}{n}}$ (8) $u_n = \cos(n) \sin\left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$

(9) $u_n = \dfrac{n^3 + 3^n}{5^n + n \ln n}$ (10) $u_n = \left(1 + e^{-n}\right)^{n^2}$

Exercice 6.7 Soit α un réel > 0. Trouver en fonction de α la limite éventuelle de la suite de terme général
$$u_n = \left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^n.$$

Exercice 6.8 Soit u une suite réelle quelconque. Montrer que les suites (a_n), (b_n) et (c_n) définies pour $n \geq 1$ par
$$a_n = u_n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right), \qquad b_n = \frac{u_n}{n}, \qquad c_n = u_n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$
ont même limite éventuelle.

Exercice 6.9 Soit u une suite réelle strictement positive qui converge vers 0, et soit $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$. Montrer « à la main » (c'est-à-dire à partir des définitions) que $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = +\infty$.

Vrai ou faux

Exercice 6.10 Décider pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux. Justifier votre réponse par un court argument ou un contre exemple.

1. La suite (u_n) définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \qquad u_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$
tend vers 1.
2. (Extrait d'un examen de 2011/2012.) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $[0, \frac{9}{10}]$, alors la suite $(u_n^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
3. (Extrait d'un examen de 2011/2012.) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $[0,1[$, alors la suite $(u_n^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
4. Soit $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction quelconque qui vérifie $f(0) = 1$. Si (u_n) est une suite qui tend vers 0 alors la suite $(f(u_n))$ tend vers 1.
5. Soit (u_n) une suite qui tend vers 0 alors la suite (e^{u_n}) tend vers 1.
6. La fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Exercices supplémentaires

Exercice 6.11 Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}_+$. On suppose que la fonction $f(x)\sin(x)$ a une limite (finie ou infinie) lorsque x tend vers $+\infty$.

1. Montrer que cette limite est nulle.
2. Peut-on en déduire que f tend vers 0 en $+\infty$?
3. Même question en supposant f continue.
4. Même question en supposant que f a une limite (finie ou infinie) en $+\infty$.

(Suggestion : utiliser des suites).

Exercice 6.12 Soient I un intervalle, $f, g : I \to \mathbb{R}$ des fonctions définies sur I, $a \in \bar{I}$ et ℓ et ℓ' des réels. Alors :

1. Si f tend vers ℓ et g tend vers ℓ' en a alors $f+g$ tend vers $\ell+\ell'$ en a.
2. Si f tend vers ℓ et g tend vers ℓ' en a alors fg tend vers $\ell\ell'$ en a.
3. *(Théorème des gendarmes)* Soit $h\ : I \to \mathbb{R}$ une fonction qui vérifie $f \leq h \leq g$. Si f et g tendent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$ en a, alors h tend vers ℓ en a.

7.4 Exercices

Exercice 7.1 On considère la suite u définie par un choix de $u_0 \in]0,3[$ et la formule de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{3 \cdot u_n}.$$

1. Montrer par récurrence que u_n est bien définie et vérifie $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n < 3$.
3. Montrer que u est une suite croissante.
4. En déduire que u converge. Déterminer sa limite.

Exercice 7.2 Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une application qui a deux points fixes distincts ℓ et ℓ' dans I. Disons que $\ell < \ell'$. Si la restriction de f à l'intervalle $[\ell, \ell']$ est croissante alors cet intervalle est stable par f. Si la fonction est strictement croissante sur $[\ell, \ell']$ alors l'intervalle $]\ell, \ell'[$ est stable par f.

Exercice 7.3 Soit $f : [0, +\infty[$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{2x+3}{x+4}, \qquad x \in [0, +\infty[.$$

On définit une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Déterminer les points fixes de f.
2. Calculer u_1 et montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $0 < u_n < 1$.
3. Montrer que la suite u est croissante.
4. Montrer que la suite u est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 7.4 (Extrait d'un contrôle continu de 2011/2012.) Pour $x \in [0, \infty[$ on pose $f(x) = \sqrt{5x}$ et $g(x) = f(x) - x$.

1. Montrer que $I =]0, 5[$ est un intervalle stable par f : si $x \in I$ alors $f(x) \in I$.
2. Déterminer les points fixes de f.
3. Montrer que pour tout $x \in I$, $g(x) > 0$.

On définit une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par un choix de $u_0 \in I$ et pour $n \in \mathbb{N}$ la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

4. Montrer que la suite u est convergente.
5. Déterminer la limite de la suite u.

Exercice 7.5 Soient f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x - 2$ et g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - x$. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par un choix de $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Donner les tableaux de variations des fonctions f et g. Montrer qu'il existe exactement deux réels distincts, disons ℓ_1 et ℓ_2 avec $\ell_1 < 0 < \ell_2$, qui sont points fixes de f. Faire un dessin du graphe de f et de la droite d'équation $y = x$.
2. En supposant que la suite u converge quelles sont ses limites possibles.
3. Montrer que chacun des intervalles

$$I_1 =]-\infty, \ell_1[, \quad I_2 =]\ell_1, \ell_2[, \quad I_3 =]\ell_2, +\infty[, \quad I_4 = \{\ell_1\}, \quad I_5 = \{\ell_1\}$$

   est un intervalle stable par f.
4. En utilisant le signe de g, étudier la monotonie de la suite u pour chacun des cas $u_0 \in I_k$, $k \in \{1,2,3,4,5\}$.
5. Étudier la convergence et déterminer la limite éventuelle de la suite u en fonction du choix de $u_0 \in \mathbb{R}$.

Exercice 7.6 On considère la suite complexe (z_n) définie par une valeur initiale $z_0 \in \mathbb{C}$ et pour $n \in \mathbb{N}$ la relation de récurrence

$$z_{n+1} = \frac{1}{2}(1+i)z_n + 2 - i.$$

1. En supposant que la suite z converge déterminer sa limite éventuelle qu'on note l.
2. On considère la suite w dont le terme général est $w_n = z_n - l$, $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite w est une suite géométrique dont on déterminera la raison.
3. Étudier la convergence des suites w et z.
4. Soient α, β des nombres complexes avec $|\alpha| < 1$. En généralisant ce qui précède, montrer que la suite complexe définie par un choix arbitraire de point initial $z_0 \in \mathbb{C}$ et pour $n \in \mathbb{N}$ la relation de récurrence $z_{n+1} = \alpha z_n + \beta$ converge.

Exercice 7.7 Soient f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = (1-x)^2$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = (1-u_n)^2$.

1. Tracer soigneusement sur l'intervalle $[0\,,\,1]$ le graphe de f et la droite d'équation $y = x$.
2. Calculer les six premiers termes de la suite et visualiser le début d'un colimaçon.
3. Montrer que $[0\,,\,1]$ est un intervalle stable par f et que f est décroissante sur $[0\,,\,1]$.
4. On pose $g = f \circ f$. Montrer que $[0\,,\,1]$ est un intervalle stable par g et que g est croissante sur $[0\,,\,1]$.
5. Que peut-on en déduire pour les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$?
6. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

Exercice 7.8

1. Soient a et b deux réels vérifiant $0 \le a \le b$. Montrer que
$$a \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le b,$$
et que toutes les inégalités sont strictes sauf si $a = b$ ou si $a = 0$.
2. Montrer qu'il est possible de définir deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $(u_0, v_0) = (1,2)$ puis en déduisant le couple (u_{n+1}, v_{n+1}) à partir du couple (u_n, v_n) à l'aide des relations de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$.
3. Montrer que
$$v_n - u_n = \frac{1}{2}\left[\sqrt{v_{n-1}} - \sqrt{u_{n-1}}\right]^2.$$
4. Montrer que $u_n \le u_{n+1} \le v_{n+1} \le v_n$. En déduire que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Montrer qu'elles convergent vers la même limite qu'on note l.
5. Montrer que
$$|\sqrt{y} - \sqrt{x}| \le \frac{1}{2}|y-x|, \quad \forall x, y \in [1,2].$$
6. Donner une majoration explicite de $|v_n - u_n|$ en fonction de n.
7. Donner des approximations à 10^{-3} et 10^{-9} près de l.

Exercices supplémentaires

Exercice 7.9 — Algorithme de Héron. Pour $x \in]0, \infty[$, on pose

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) \quad \text{et} \quad g(x) = f(x) - x.$$

1. Déterminer le tableau de variation de f ainsi que le signe de g sur l'intervalle $]0,\infty[$. Tracer dans le même dessin les graphes de f et de la droite d'équation $y = x$.
2. Montrer que $]\sqrt{2},+\infty[$ est un intervalle stable par f. En déduire que pour tout choix de $u_0 \in]\sqrt{2},\infty[$ la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ définit une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que la suite u est décroissante et convergente. Déterminer sa limite.
4. Montrer que, pour tout $x > 0$, on a
$$f(x) - \sqrt{2} = \frac{(x-\sqrt{2})^2}{2x},$$
et en déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la majoration
$$|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{(u_n-\sqrt{2})^2}{2}.$$
5. On choisit $u_0 = 2$. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$|u_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2^{2^n-1}}.$$
(On note que cette majoration implique aussi la convergence de u.)
6. Déterminer un entier N tel que pour $n \geq N$, on ait $|u_n - \sqrt{2}| < 10^{-4}$. Même question pour 10^{-8}.
7. Quel est le comportement de la suite si on choisit $u_0 \in]0,\sqrt{2}[$?

Exercice 7.10 À l'aide de la méthode de Newton, déterminer à 10^{-4} près la plus petite solution strictement positive de l'équation $\tan(x) = x$. (Utiliser une calculatrice pour le calcul de la fonction tangente).

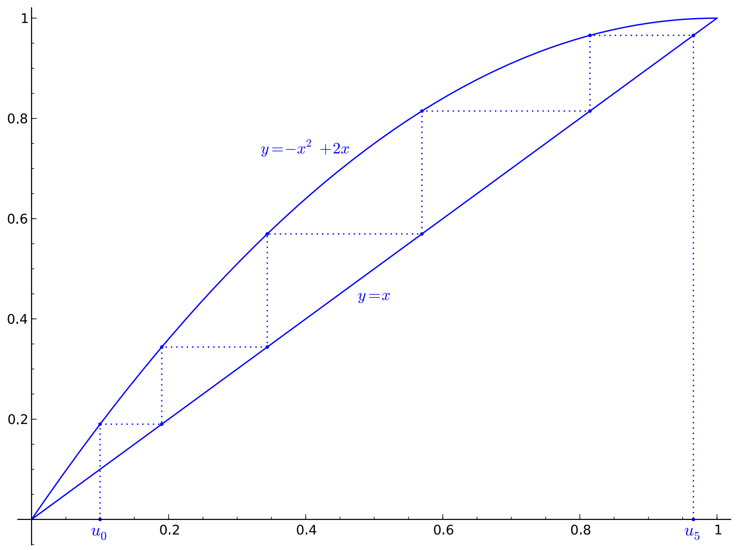

FIGURE 7.2 – La suite $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = -(x-1)^2+1$ et $u_0 = 0.1$.

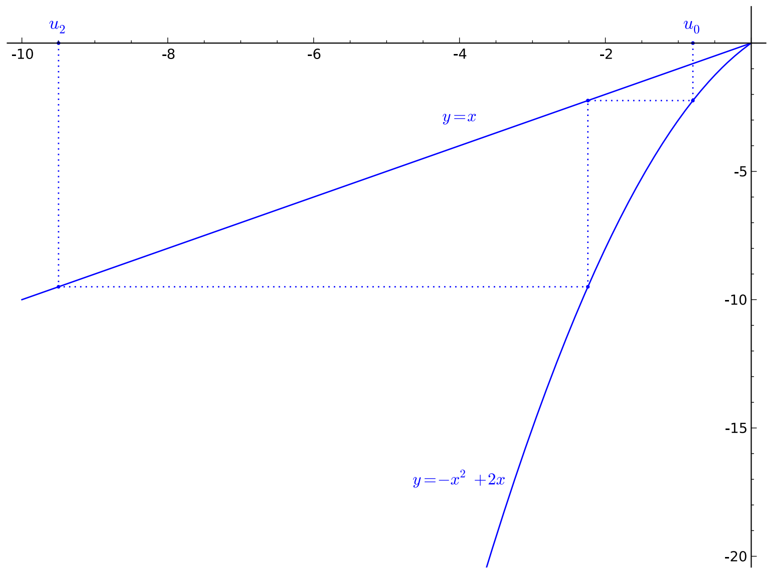

FIGURE 7.3 – La suite $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = -(x-1)^2+1$ et $u_0 = -0.8$.

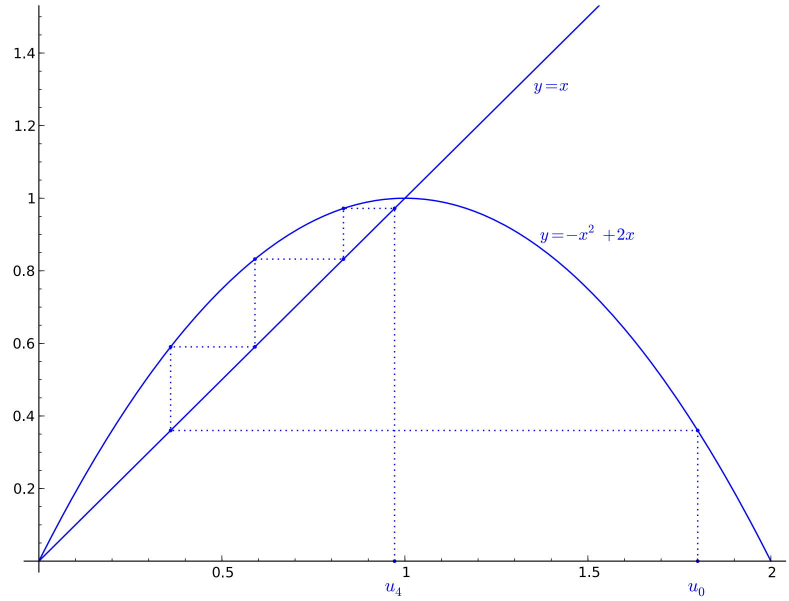

FIGURE 7.4 – La suite $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = -(x-1)^2+1$ et $u_0 = 1.8$.

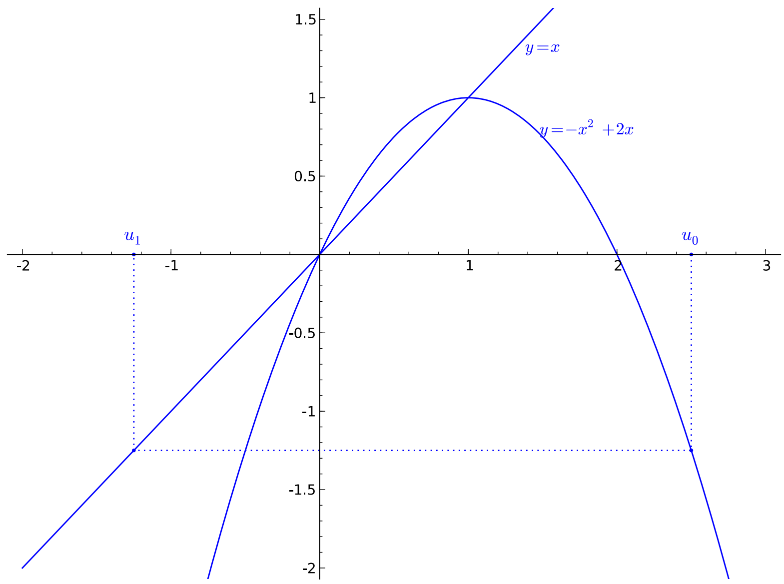

FIGURE 7.5 – La suite $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = -(x-1)^2+1$ et $u_0 = 2.5$.

8.5 Exercices

Exercice 8.1 Utiliser la définition de convergence d'une série pour décider si la série de terme général u_n converge ou diverge, lorsque la suite (u_n) est donnée par

$$\begin{array}{ll}
\text{(a)} & 1,0,-1,1,0,-1,1,0,-1,1,0,-1,1,0,-1,\dots \\
\text{(b)} & 1,\underbrace{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{2\,\text{fois}},\underbrace{\frac{1}{3},\dots,\frac{1}{3}}_{3\,\text{fois}},\underbrace{\frac{1}{4},\dots,\frac{1}{4}}_{4\,\text{fois}},\dots,\underbrace{\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n}}_{n\,\text{fois}},\dots \\
\text{(c)} & 2,\frac{2}{3},\frac{2}{9},\frac{2}{27},\frac{2}{81},\dots,\frac{2}{3^n},\dots
\end{array}$$

Exercice 8.2 (Extrait d'un contrôle continu de 2011/2012.) Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe.

1. Donner la définition de convergence de la série de terme général u_n.
2. On suppose maintenant que u est une suite complexe. Montrer que si la série de terme général u_n converge alors la série de terme général $\mathrm{Re}(u_n)$ converge, ou $\mathrm{Re}(u_n)$ est la partie réelle de u_n.

Exercice 8.3 Dans les deux cas suivants, montrer que la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge :

$$\text{(a) } u_n=(-1)^n,\ n\geq 0 \qquad\qquad \text{(b) } u_n=\cos\left(\frac{1}{n^2}\right),\ n\geq 1.$$

Exercice 8.4 Dans chacun des cas suivants, montrer que la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa somme :

$$\text{(a) } u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}},\quad n\geq 1 \qquad\qquad \text{(b) } u_n=\frac{1}{n^2-1},\quad n\geq 2$$

$$\text{(c) } u_n=\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right),\quad n\geq 2$$

(Indication pour (c) : $1-\frac{1}{n^2}=\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$.)

Exercice 8.5 Pour quelles valeurs du nombre réel a la série de terme général $(e^{na})_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Peut-on alors calculer sa somme ?

Exercice 8.6 Dans chacun des cas suivants, montrer que la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa somme :

$$\text{(a) } u_n=\frac{(-1)^{n+1}}{5^n}, \qquad\qquad \text{(b) } u_n=\frac{2^n+3^n}{4^n}$$

Exercice 8.7 Étudier selon la valeur de $\theta\in[0,2\pi[$ la convergence et, le cas échéant, déterminer la somme de la série de terme général

$$\text{(a) } \forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\frac{e^{in\theta}}{2^n}.$$

$$\text{(b) } \forall n\in\mathbb{N},\quad v_n=\frac{\cos(n\theta)}{2^n}; \qquad\qquad \text{(c) } \forall n\in\mathbb{N},\quad w_n=\frac{\sin(n\theta)}{2^n}.$$

Exercice 8.8 Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes quelconques. Montrer que si la série $\sum(u_n+v_n)$ converge et si la série $\sum(u_n-v_n)$ diverge alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent. (Indication : supposer pour arriver à une contradiction que une des deux séries converge, disons $\sum u_n$. Montrer qu'on aurait alors que $\sum v_n$ converge. Conclure.)

Exercice 8.9 Démontrer la proposition 8.4.1

Vrai ou faux

Exercice 8.10 Décider pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux. Justifier votre réponse par un court argument ou un contre exemple. Soit (u_n) une suite numérique réelle.

1. La série de terme général 1 converge.
2. Si $u_n \to 0$ alors la série $\sum u_n$ converge.
3. Si $u_n \not\to 0$ alors la série $\sum u_n$ diverge.
4. Si la série $\sum u_n$ diverge alors la suite (u_n) ne tend pas vers 0.
5. On suppose que $u_n \neq 0$, pour tout n. Si la série $\sum u_n$ converge alors la série $\sum 1/u_n$ diverge.
6. Si la série $\sum a_n$ et la série $\sum b_n$ divergent alors la série $\sum(a_n+b_n)$ diverge.
7. Si la série $\sum a_n$ converge et si la série $\sum b_n$ diverge alors la série $\sum(a_n+b_n)$ diverge.
8. Soit q un réel. Si $q<1$ alors la série géométrique $\sum q^n$ converge.
9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2.$
10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 3^{-n} = \frac{1}{2}.$
11. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1}.$
12. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!}.$

Exercices supplémentaires

Exercice 8.11 Soit u une suite réelle. On définit une nouvelle suite v par

$$n \in \mathbb{N} \longmapsto v_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ u_{n/2} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Montrer que les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont de même nature et ont, le cas échéant, la même somme.

Exercice 8.12 Dans chacun des cas suivants, montrer que la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa somme :

(a) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2-1}$, $n \geq 2$ (b) $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$, $n \geq 1$

(c) $u_n = (n+1)^{\frac{1}{n+1}} - n^{\frac{1}{n}}$, $n \geq 1$ (d) $u_n = \ln \dfrac{n^2+2n+1}{n^2+2n}$, $n \geq 1$

9.7 Exercices

Critères de comparaison et d'équivalence

Exercice 9.1 Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \le v_n \le w_n.$$

1. Montrer qu'on a
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \le v_n - u_n \le w_n - u_n.$$
2. Montrer que si les séries $\sum u_n$ et $\sum w_n$ convergent alors la série $\sum v_n$ converge.

Exercice 9.2 Soit $u = (u_n)$ une suite à termes positifs.
1. Montrer que si la série $\sum u_n$ converge alors la série $\sum u_n^2$ converge.
2. Montrer que si la série $\sum u_n$ converge alors la série $\sum u_{2n}$ converge.

Exercice 9.3 Soit $u = (u_n)$ une suite à termes positifs. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
1. On suppose que la suite $(n^\alpha u_n)$ tend vers 1. Montrer que la série $\sum u_n$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \le 1$.
2. On suppose que la suite $(n^\alpha u_n)$ tend vers 0. Montrer que la série $\sum u_n$ converge si $\alpha > 1$.
3. On suppose que la suite $(n^\alpha u_n)$ tend vers $+\infty$. Montrer que la série $\sum u_n$ diverge si $\alpha \le 1$.

Exercice 9.4
1. Montrer que si x et y sont deux nombres réels positifs, alors $\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$.
2. En déduire que si $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont deux séries convergentes à termes positifs, alors la série $\sum_n \sqrt{u_n v_n}$ est convergente.
3. Soit $\sum_n u_n$ une série convergente à termes positifs. Montrer que la série $\sum_{n\ge 1} \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ est convergente.

Exercice 9.5 Soit u une suite à termes positifs.
1. Montrer que les séries de termes généraux u_n et $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$ sont de même nature.
2. Montrer que les séries de terme généraux u_n et $v_n = \ln(1+u_n)$ sont de même nature.

Un critère de convergence : $\sum 2^n u_{2^n}$

Exercice 9.6 — Série de Bertrand. Soit $\beta \in]0,+\infty[$. Montrer que la série de terme général

$$\frac{1}{n(\ln n)^\beta}, \qquad n \ge 2$$

converge si et seulement si $\beta > 1$ en utilisant le théorème 9.3.1.

Étude de convergence d'une série à termes positifs

Exercice 9.7 Soit a un réel strictement positif. Étudier la nature des séries dont le terme général est :

(a) $n!\,a^n$ (b) $n(n+1)\,a^n$ (c) $a^n \ln(n)\sqrt{2^n+1}$

(d) $\dfrac{n^n}{4^n n!}$ (e) $\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^{n^2}$ (f) $\dfrac{n^{\ln(n)}}{(\ln(n))^n}$

(g) $\dfrac{e^n+e^{-n}}{a^n}$ (h) $u_n = \sqrt{n}\,\ln\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right)$

Exercice 9.8 Étudier la nature des séries dont le terme général est :

(a) $\dfrac{n+\cos n}{n^3+1}$ (b) $\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$ (c) $\sqrt{\dfrac{\ln(n)}{n}}$

(d) $\dfrac{(\sin(n))^2}{n^2}$ (e) $\dfrac{1}{n\times n^{\frac{1}{n}}}$ (f) $\dfrac{n^n}{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}$

(g) $\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{2n}$ (h) $\dfrac{\sqrt{n}\ln(n)}{n^2+1}$ (i) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{dt}{1+t^n}$

Comparaison avec une intégrale

Exercice 9.9 — Série de Bertrand bis. Redémontrer le résultat de l'exercice 9.6 en utilisant le théorème 9.6.1.

Critère de Cauchy et de d'Alembert

Exercice 9.10 Soit (u_n) une suite à termes réels strictement positifs. Supposons qu'on ait

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad \frac{u_{n+1}}{u_n}\leq\frac{1}{2}.$$

Montrer en adaptant la démonstration du critère de d'Alembert (proposition 9.5.1) que la série de terme général u_n converge.

Exercice 9.11 Donner une démonstration du critère de Cauchy (proposition 9.5.2) en adaptant la démonstration du critère de d'Alembert (proposition 9.5.1).

Exercice 9.12 Soit a un réel strictement positif. On définit une suite u par : $u_0=a$, $u_{n+1}=u_n-\frac{u_n}{1+u_n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1. Montrer que la suite u est bien définie, strictement positive et strictement décroissante.
2. Montrer que la suite u est convergente et déterminer sa limite.
3. En déduire que la série de terme général u_n est convergente.

Vrai ou faux ?

Exercice 9.13 Décider pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux. Justifier votre réponse par un court argument ou un contre exemple.

1. Une série numérique qui ne converge pas diverge vers l'infini.
2. Une série à termes positifs qui ne converge pas diverge vers l'infini.
3. (Extrait de l'examen de l'année 2011/2012.) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes strictement positifs telle que
$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad \frac{u_{n+1}}{u_n}<1,$$
alors la série de terme général u_n converge.
4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes strictement positifs telle que
$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad \frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{1}{2},$$
alors la série de terme général u_n converge.
5. (Extrait de l'examen de l'année 2011/2012.) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles

à termes strictement positifs telles que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=2,$$

alors la série de terme général u_n et la série de terme général v_n sont de même nature.

6. La série $\sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ est une série de Riemann qui converge.
7. Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs tels que à partir d'un certain rang $0 \leq u_n \leq v_n$. Si la série $\sum v_n$ diverge alors la série $\sum u_n$ diverge.
8. Soient (u_n) et (v_n) deux suites a termes *négatifs* tels que à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n \leq 0$. Si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum v_n$ converge.
9. Soit (u_n) une suite à termes positifs. Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum u_n^2$ diverge.
10. Soit (u_n) une suite à termes positifs telle que la suite $(\sqrt[n]{u_n})$ tend vers $3/4$. Alors la série $\sum n^3 u_n$ converge.
11. Soit (u_n) une suite à termes positifs telle que la suite $(n^2 u_n)$ tend vers 1, alors la série $\sum u_n$ converge.

Exercices supplémentaires

Exercice 9.14 Soient a et b des nombres réels strictement positifs. On pose $u_1 = b$, $u_2 = ab$ et, plus généralement, $u_{2n} = a^n\, b^n$ et $u_{2n+1} = a^n\, b^{n+1}$.

1. À quelle condition la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ a-t-elle une limite ?
2. Calculer la limite de $(u_n)^{\frac{1}{n}}$. Montrer que si $ab \neq 1$, alors la règle de Cauchy permet d'étudier la série de terme général u_n. Pour quelles valeurs de a et de b, la règle de d'Alembert permet-elle d'étudier cette série ?
3. On suppose $ab = 1$. La série de terme général u_n est-elle convergente ?

Exercice 9.15 Le but de cet exercice est de démontrer le théorème 9.6.1 en adaptant la démonstration du théorème 9.4.2 donnée dans la section 9.6. Soit $f\ :[1;+\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction continue, décroissante, et positive. On pose

$$S_N=\sum_{n=1}^{N} f(n),\quad \text{et}\quad I_N=\int_1^N f(x)\,\mathrm{d}x,\qquad N\in\mathbb{N}\setminus\{0\}.$$

1. Montrer (en adaptant la démonstration du théorème 9.4.2 donnée dans la section 9.6) que

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad S_N\leq I_N\leq S_{N+1}-1.$$

2. Montrer que la série de terme général $f(n)$ converge si et seulement si la *suite* des intégrales

$$I_N\ :=\int_1^N f(x)\,\mathrm{d}x$$

a une limite finie lorsque N tend vers $+\infty$.

Exercice 9.16 1. Soient $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries à termes positifs. Montrer que la série $\sum_n \max(u_n, v_n)$ converge si et seulement si les deux séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont convergentes.

2. Trouver deux séries divergentes $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$, à termes positifs, telles que $\min(u_n, v_n) = 0$ pour tout n.

Exercice 9.17 Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction décroissante et positive. Pour tout entier $n \geq 1$ on pose $u_n = f(n) - \int_n^{n+1} f(t)dt$.

1. Montrer que l'on a $0 \leq u_n \leq f(n) - f(n+1)$ pour tout entier $n \geq 1$. En déduire que la série de terme général u_n est convergente.
2. Montrer que la suite de terme général $(\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}) - \ln(n)$ est convergente. En déduire que l'on a
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}}{\ln(n)} = 1.$$

10.4 Exercices

Convergence absolue

Exercice 10.1 Le but de cet exercice est de réécrire la démonstration de la proposition 10.1.2 (la convergence absolue entraîne la convergence simple) dans le cas particulier de la série de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^2}, \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

1. Montrer que la série de terme général u_n est absolument convergente.
2. Déterminer, dans ce cas, $u_n^+ = \sup(u_n, 0)$ et $u_n^- = \sup(-u_n, 0)$.
3. Vérifier, dans ce cas, qu'on a $0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$, $0 \leq u_n^- \leq |u_n|$, et $u_n = u_n^+ - u_n^-$, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
4. Montrer (en utilisant l'argument de la démonstration de la proposition 10.1.2) que la série de terme général u_n converge (simplement).

Exercice 10.2 Soit (u_n) une suite à termes quelconques qui est équivalente à la suite $\dfrac{(-1)^n}{n^2}$. Montrer que la série de terme général u_n converge absolument, et donc simplement.

Séries alternées

Exercice 10.3 Étudier la convergence et la convergence absolue des séries dont le terme général est :

(a) $\dfrac{(-1)^n}{n^2 + \sin(n^2)}$ (b) $(-1)^n \dfrac{\ln(n)}{n}$ (c) $\dfrac{(-1)^n \sqrt{n} + 1}{n}$

(d) $(-1)^n \cos\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ (e) $\dfrac{\sin(\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}$ (f) $\sin\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$

Exercice 10.4 On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \qquad u_n = (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n-1}, \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}, \quad w_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

1. Étudier la convergence de la série de terme général u_n.
2. En déduire la nature de la série de terme général v_n. (Indication : multiplier numérateur et dénominateur de v_n par le « conjugué » du dénominateur de v_n.)
3. Étudier la convergence de la série de terme général w_n.
4. Montrer que les deux suites (v_n) et (w_n) sont équivalentes mais que les séries de termes généraux v_n et w_n ne sont pas de même nature. Pourquoi cet exemple ne contredit-il pas le critère d'équivalence de la proposition 9.2.2 ?

Exercice 10.5 Montrer que la série alternée de terme général $(-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ converge en réécrivant la *démonstration* du critère spécial des séries alternées (proposition 10.2.2) dans ce cas particulier. (Voir aussi l'exercice 3.6.)

Exercice 10.6
1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$\sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p} \leq \ln(n).$$

2. Utiliser le critère spécial des séries alternées pour démontrer la convergence de la série de terme général
$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p}.$$
3. La série est-elle absolument convergente ?

Étude de la convergence d'une série à termes quelconques

Exercice 10.7 Étudier la convergence et la convergence absolue des séries dont le terme général est :

(a) $\dfrac{n^2-1}{n^4+n^2+1}$ (b) $\dfrac{(-1)^n}{n^2+(-1)^n}$ (c) $(-1)^n \sin\dfrac{1}{2^n}$

(d) $(-1)^n \dfrac{n}{\ln n}$ (e) $(-1)^n \dfrac{a^n}{n!}, (a>0)$ (f) $\dfrac{1}{\sqrt{n^2-n+5}}$

(g) $(-1)^n \dfrac{2^n+3^n}{\sqrt{n}\,3^n}$ (h) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt[n]{n}}$ (i) $\dfrac{n^n}{n!}$

(j) $\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n^n}$ (k) $\dfrac{1}{(1+\ln n)^n}$ (l) $n\ln(1+\dfrac{1}{n^2})$

(m) $\dfrac{(-1)^n}{n^2+(-1)^n}$ (n) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ (o) $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+(-1)^n\,n}}$

(p) $\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n^2}$ (q) $(\sin\theta)^n$ $(\theta\in\mathbb{R})$ (r) $\dfrac{1}{n^{2+\frac{1}{n}}}$

(s) $\dfrac{n+3}{\sqrt{n^5+1}}\cos(n)$ (t) $\dfrac{1}{n(\sqrt{n}+\ln n)}$ (u) $\dfrac{2^n+n^2+3}{e^n+n}$

(v) $\dfrac{\sin(n\theta)}{2^n}(\theta\in\mathbb{R})$

Vrai ou faux ?

Exercice 10.8 Décider pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux. Justifier votre réponse par un court argument, un résultat du cours ou un contre exemple. Soit u une suite réelle.

1. Soit (u_n) une suite équivalente à la suite $((-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}})$, alors la série de terme général u_n converge.
2. Soit (u_n) une suite équivalente à la suite $((-1)^n\frac{1}{n^2})$, alors la série de terme général u_n converge.
3. Si la suite (a_n) tend vers 0 mais n'est pas décroissante (à partir d'un certain rang) alors la

série alternée de terme général $(-1)^n a_n$ ne converge pas.

4. Soit (u_n) une suite à termes positifs. Si la série $\sum u_n$ converge alors la série $\sum u_n^2$ converge.
5. Soit (u_n) une suite à termes quelconques. Si la série $\sum u_n$ converge alors la série $\sum u_n^2$ converge.
6. Soit (u_n) une suite à termes positifs. Si la série $\sum u_n$ converge alors la série $\sum u_{2n}$ converge.
7. Soit (u_n) une suite à termes quelconques. Si la série $\sum u_n$ converge alors la série $\sum u_{2n}$ converge.
8. Si $u_n \neq 0$ pour tout n et si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ a une limite strictement plus petite que 1.
9. Soit (u_n) une suite à termes quelconques. Si la suite (u_n) est bornée, alors la série $\sum \frac{1}{n^2} u_n$ converge.
10. Si la série $\sum u_n$ converge absolument, alors la série $\sum u_n \sin(n)$ converge.
11. Soit (u_n) une suite à termes positifs. Si la suite (u_n) est équivalente à la suite $(\frac{1}{n^2})$ alors la série $\sum \sin(n) u_n$ converge.

Exercices supplémentaires

Exercice 10.9 Pour $N \in \mathbb{N}$, on pose

$$f_N(t) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n t^n = 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^N t^N,$$

et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$S_N(x) = \int_0^x f_N(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer en imitant l'exemple de la page 134 que

1. $|S_N(x) - \ln(1+x)| \leq \dfrac{|x|^{N+2}}{N+2}$. En déduire que la suite (S_N) tend vers $\ln(1+x)$ si $|x| < 1$.
2. $S_N(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$.
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \ln(1+x)$, si $|x| < 1$.