AG3 2017-2018

FEILLE D'EXERCICES 9.

Anneaux et Corps

Exercice 1. *Soit A et A' des anneaux. Soit*

$$A \times A' = \{(x, x') \mid x \in A,\, x' \in A'\}.$$

Définir des LCI $+$ et $\cdot$ sur $A \times A'$ en utilisant les LCI de A et A' pour que $(A \times A', +, \cdot)$ soit un anneau.

Exercice 2. *Soit $n \geq 2$ et considérons l'anneau $Z/n\mathbb{Z}$.*

(1) *Montrer que $\bar{x} \in Z/n\mathbb{Z}$ admet un inverse multiplicatif si et seulement si $pgcd(x, n) = 1$.*

(2) *Soit ϕ l'indicatrice d'Euler ($\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ définie par $\phi(n) =$ le nombre d'entiers compris entre 1 et n premiers avec n). Montrer que pour tout $\bar{x} \in (Z/n\mathbb{Z})^*$, on a $(\bar{x})^{\phi(n)} = \bar{1}$.*

(3) *Montrer que si $a \in \mathbb{Z}$ tel que $pgcd(a, n) = 1$, alors $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.*

Exercice 3. *Montrer que un idéal $I \neq \{0_A\}$ dans $\mathbb{Z}$ est premier si et seulement si $I = p\mathbb{Z}$ où p est un nombre premier.*

Exercice 4. *Soit A un anneau commutatif et $M \subset A$ un idéal maximal. Montrer que, si $a \in A \setminus M$ et I_a l'idéal engendré par a, alors $A = M + I_a$.*

Exercice 5. *Soit A un anneau commutatif et $M \subset$ un idéal. Montrer que si M est maximal alors il est premier.*

Exercice 6. *Soit A un anneau commutatif.*

(1) *Soit P un idéal de A. Montrer que P est premier si et seulement si l'anneau quotient A/P est un anneau intègre.*

(2) *Soit M un idéal de A. Montrer que M est maximal si et seulement si A/M est un corps.*

Exercice 7. *Soit K un corps de caractéristique p. Montrer que*

$$(x + y)^p = x^p + y^p$$

pout tous $x, y \in K$.

Exercice 8. *Soit K un corps fini de caractéristique p. Soit $\sigma : K \to K$ une application définie par $\sigma(x) = x^p$. Montrer que σ est un automorphisme de K.*