AG3 2017-2018

FEILLE D'EXERCICES 7.

Groupe d'isométries. Anneaux

Exercice 1. *Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ un tétraèdre (une pyramide avec 4 faces triangulaires, 4 sommets et 6 arêtes) qui est régulier (les arêtes sont de même longueur). Soit G le groupe des isométries de R^3 qui fixent S. Montrer que $G \sim S_4$.*

Exercice 2. *Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ un hexaèdre régulier (ou cube), i.e. un prisme avec dont toutes les faces sont carrées. Il a 6 faces, 8 sommets et 12 arêtes où les arêtes sont de meme longueur. Soit G le groupe des isométries de R^3 qui fixent S. Trouver $|G|$.*

Exercice 3. *Soit p un nombre premier. On définit*

$$A = \{\frac{m}{n} \mid \; n, m \in \mathbb{Z},\, n \neq 0,\, p \textit{ ne divise pas } n\}.$$

Montrer que A est un anneau.

Exercice 4. *Soit A un anneau intègre. Si $a, b, c \in A$, $a \neq 0_A$ et $ab = ac$, alors montrer que $b = c$.*

Exercice 5. *Soit A un anneau intègre, et $a \in A \setminus 0_A$. Montrer que l'application $f : A \to A$ définie par*

$$f(x) = ax$$

est injective.

Exercice 6. *Soit A un anneau intègre fini. Montrer que A est un corps. Indication : l'exercice précédant peut être utile.*

Exercice 7. *Soit A un anneau tel que $\forall x \in A$, on a $x^2 = x$. (On appèle un tel anneau* ***un anneau de Boole*** *). Montrer que A est commutatif.*

Exercice 8. *Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau. Rappelons que A^* est l'ensemble des éléments de A qui admettent un inverse multiplicatif. On appèle les éléments de A^** ***unités de*** *A ou* ***inversibles dans*** *A. Montrer que $(A^*, \cdot)$ est un groupe.*

Exercice 9.

(1) Soit $A = \{a + b\sqrt{2} |\; a, b \in \mathbb{Q}\}$. Montrer que A est un anneau. En fait, montrer que A est un corps.

(2) Soit $A = \{a + b\sqrt{2} |\; a, b \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que A est un anneau, mais pas un corps.

Exercice 10. *Soit A un corps. Montrer que les seuls idéaux (bilatère) de A sont $\{0_A\}$ et $\{A\}$.*

Exercice 11. *Soit A un anneau et I_1, I_2 des idéaux à gauche.*

(1) *Montrer que l'intersection $I_1 \cap I_2$ est un idéal à gauche. Même question pour des idéaux à droite.*
(2) *On définit*
$$I_1 + I_2 = \{a + b | \ a \in I_1, \, b \in I_2\}$$
Montrer que $I_1 + I_2$ est un idéal à gauche.

Exercice 12. *Soit $\phi : A \to A'$ un morphisme d'anneaux. Montrer que $\phi(A)$ est un sous-anneau de A'.*

Exercice 13. *Soit $\phi : A \to A'$ un morphisme d'anneaux. Montrer que, si A' n'est pas trivial et A est un corps, alors $\phi(A)$ est isomorphe à A.*