AG3 2017-2018

FEILLE D'EXERCICES 7.

Action de groupe.

Exercice 1. *Soit G un groupe.*

— *Dire si l'action de G sur lui-même par translation à gauche est une action fidèle, libre et/ou transitive.*

— *Soit H un sous-groupe distingué de G. Montrer que l'application $G \times G/H \to G/H$ définie par $(a, bH) \mapsto a \cdot (bH) = abH$ est une action de groupe. Est-ce que c'est une action fidèle ? libre ? transitive ?*

Exercice 2. *Soit $G = GL(2, \mathbb{R})$ et $E = \mathbb{R}^2$.*

— *Montrer que l'application $G \times E \to E$ définie par*

$$(A, \bar{x}) = A\bar{x}$$

est une action de groupe.

— *Trouver les stabilisateurs de* $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Trouver toutes les orbites de cette action.

Exercice 3. *Soit $G = S_3$. Considérons l'action de G sur lui-même par conjugaison. Trouver toutes les orbites (les classes de conjugaison) pour cette action.*

Exercice 4. *Soit*

$$G = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}, ac \neq 0\}.$$

Montrer que l'application $G \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, x) \mapsto \frac{ax + b}{c}$$

est une action de groupe. Déterminer le noyau de cette action, le stabilisateur G_0 et l'orbite $G(0)$.

Exercice 5. *Pour $n \geq 2$, on considère une permutation $\sigma \in S_n \setminus \{e\}$. Le sous-groupe cyclique $H =< \sigma >$ de S_n agit naturellement sur $\{1, 2, \ldots, n\}$. En considèrent les orbites de cette action, montrer qu'il existe une unique (à ordre près) décomposition de σ en cycles de supports disjoints.*