AG3 2017-2018

FEILLE D'EXERCICES 6.

Exercice 1. *Soit* $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. *Est-ce que* G *est un groupe fini ? Si oui, trouver l'ordre de* G. *Est-ce que* G *est un groupe cyclique ? Mêmes questions pour* $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 2. *Trouver tous les sous-groupes de* $G = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

Exercice 3. *Montrer que si* $E = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, *alors* S_E *est un groupe infini. (Ne dites pas* $\infty! = \infty$.*)*

Exercice 4. *Trouver tous les éléments d'ordre* 2 *dans* S_4, *et donner les décompositions de ces éléments en produit de cycles disjoints.*

Exercice 5. *Montrer que si* $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ *deux cycles disjoints, alors*

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1.$$

Exercice 6. *Trouver tous les éléments de* A_3 *et* A_4.

Exercice 7. *Soit* $\sigma \in S_n$ *et* $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \ldots \circ \sigma_k$ *la décomposition de* σ *en cycles à supports disjoints. On pose* n_i *l'ordre de* σ_i. *Montrer que l'ordre de* σ *est égal à* $ppcm(n_1, n_2, \ldots, n_k)$.

Exercice 8.

(1) Montrer que le groupe A_5 *ne contient pas d'éléments d'ordre* 4.

(2) Trouver un élément d'ordre 2 *dans* A_5. *Montrer qu'il n'existe pas de deux éléments distincts* $\sigma_1, \sigma_2 \in A_5$ *qui sont d'ordre* 2 *et qui commutent.*

(3) Conclure qu'il n'y a pas de sous-groupe d'ordre 4 *dans* A_5.

Exercice 9. *Soit* G *un groupe et* Z *le centre de* G, *i.e.*

$$Z = \{x \in G |\ xy = yx\ \forall y \in G\}.$$

Nous avons vu que Z *est un sous-groupe distingué de* G. *Si* G/Z *est cyclique, montrer que* G *est abélien.*

Indication : *Comme* G/Z *est cyclique, il existe* $a \in G$ *tel que*

$$G/Z =< aZ > .$$

Alors pour $x, y \in G$, *il existe* $n, m \in \mathbb{Z}$ *tels que* $xZ = a^n Z$ *et* $yZ = a^m Z$*....*

Exercice 10. *Montrer que le groupe additif* $\mathbb{Z}$ *agit sur lui-même par*

$$(a, x) \mapsto a + x$$

pour tout $a, x \in \mathbb{Z}$.

Exercice 11. *Soit G un groupe, E un ensemble, et on suppose que G agit sur E. Montrer que le stabilisateur de $x \in E$ dans G*

$$G_x = \{a \in G |\ a \cdot x = x\}$$

est un sous-groupe de G.

Exercice 12. *(*) Soit G un groupe. Pour tous $x, y \in G$ on définit le commutateur de x et y par*

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}.$$

Soit $S = \{[x, y] \mid x, y, \in G\}$ et notons $[G, G]$ le sous-groupe de G engendré par S. On appelle $[G, G]$ le ***groupe dérivé*** *de G.*

(1) *Montrer que $[G, G]$ est un sous-groupe distingué.*
(2) *Montrer que $G/[G, G]$ est abélien.*

Exercice 13. *(*) Soit A un groupe abélien. Nous allons noter $+$ la LCI de A et 0 son élément neutre. On dit que $n \in \mathbb{N}^*$ est* ***un exposant*** *de A si $\forall x \in A$, $nx = 0$. Supposons que n est un exposant de A, et que $n = rs$ où $r, s \in \mathbb{N}^*$ et $pgcd(r, s) = 1$.*

Posons $A_r = \{x \in A |\ rx = 0\}$ et $A_s = \{x \in A |\ sx = 0\}$.

Montrer que pour tout élément a de A il existent un unique b de A_r et un unique c de A_s tels que $a = b + c$.