AG3 2017-2018

FEUILLE D'EXERCICES 5.

Sous-groupes distingués, groupes quotients, groupes cycliques, groupes symétriques.

Exercice 1. *Soit G un groupe et H_1 et H_2 sous-groupes distingués. Montrer que $H_1 \cap H_2$ est un sous-groupe distingué de G.*

Exercice 2. *Soit $\phi : G \to G'$ un morphisme surjectif. Montrer que, si H est un sous-groupe distingué de G, alors $\phi(H)$ est une sous-groupe distingué de G'.*

Exercice 3. *Soit $G = \mathbb{R}^n$ un groupe additif. On considère le système lineaire suivant : $A\mathbf{x} = 0$ où A est un matrice $n \times n$. Soit W l'ensemble des solutions du système. Montrer que les solutions du système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est une classe à gauche suivant W.*

Exercice 4. *Montrer que tout groupe d'ordre p où p est premier est cyclique.*

Exercice 5. *Soit $G = \mathbb{R}^*$ groupe multiplicatif, $H = \mathbb{R}^*_+$. Montrer que H est un sous-groupe distingué de G et identifier G/H.*

Exercice 6. *($*$) Soit G un groupe, et H un sous-groupe d'indice 2. Montrer que H est distingué dans G.*

Exercice 7. *Déterminer la signature des permutations suivantes :*

$$(a)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (b)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (c)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 8. *Trouver les inverses des permutations de l'Exercice 7.*

Exercice 9. *Donner les décompositions des permutations de l'Exercice 7 en produit de cycles disjoints et en produit de transpositions.*