AG3 2017-2018

FEUILLE D'EXERCICES 4.

Isomorphismes, automorphismes, classes à gauche suivant un sous-groupe, Théorème de Lagrange

Exercice 1. *Montrer que l'ensemble $Aut(G)$ d'automorphismes de G muni de LCI composition des applications, forme un groupe.*

Exercice 2. *Soit $\phi : G \to G'$ un isomorphisme de groupe. Montrer que si $a \in G$ est d'ordre n, alors $\phi(a)$ est aussi d'ordre n.*

Exercice 3. *Déterminer tous les automorphismes d'un groupe cyclique d'ordre 10.*

Exercice 4.

(1) *Déterminer tous les automorphismes de S_2.*

(2) *Déterminer tous les éléments de S_3.* ***Indication :*** *en utilisant la table de S_3 (voir feuille 1), montrer que S_3 est engendré par deux éléments. Plus précisement, montrer que $S_3 = \{1, x, y, x^2, xy, x^2y\}$, où x et x^2 est d'ordre 3, et y, xy, x^2y d'ordre 2. En suite utiliser l'exercice 7 du feuille 3 pour trouver $Aut(S_3)$.*

Exercice 5. *Classifier les groupes d'ordre 4.* ***Indication :*** *Montrer d'abord que tout élément de G est d'ordre 1,2 ou 4.*

Exercice 6. *Soit G un groupe et $H < G$. Soit $x, y \in H$. On définit une relation suivant :*

$$x \sim y \quad si \quad x \in yH,$$

où yH est la classe à gauche de y suivant H. Montrer que c'est une relation d'èquivalence.

Exercice 7. *Soit H et K deux sous-groupes de G, avec $|H| = 3$ et $|K| = 5$. Montrer que $H \cap K = \{e\}$.*

Exercice 8. *Soit $p \in \mathbb{N}^*$ un nombre premier, et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que tout groupe d'ordre p^k contient un sous-groupe d'ordre p.*

Exercice 9. *Démontrer un lemme du cours :*

(1) *Si H est un sous-groupe de G, alors $HH = H$;*

(2) *Si $H < G$ et S un sous-ensemble non-vide de H, alors $SH = H$;*

(3) *Si S_1, S_2, S_3 sont des sous-ensembles non-vides de G, alors*

   (a) $(S_1S_2)S_3 = S_1(S_2S_3)$.

(b) $(S_1 \cup S_2)S_3 = S_1S_3 \cup S_2S_3$.

Exercice 10. *Soit* $\phi : G \to G'$ *un morphisme de groupe, et* $H = Ker(\phi)$. *On suppose que* G *est un groupe fini.*

(1) *Montrer que*
$$|G| = |\phi(G)| \cdot |H|$$
(2) *Supposons maintenant que les deux groupes* G *et* G' *sont finis, d'ordre* n *et* m, *tel que* $pgcd(n, m) = 1$. *Montrer que* ϕ *est trivial, i.e. que* $\phi(x) = e'$ *pour tout* $x \in G$.