AG3 2017-2018

FEUILLE D'EXERCICES 3.

Morphismes de groupe

Exercice 1. *Soit $G = \mathbb{C}^*$ le groupe multiplicatif. Soit $\phi : G \to \mathbb{C}^*$ définie par $z \mapsto |z|$.*

(1) Trouver $\phi(G)$;

(2) Trouver $Ker(\phi)$.

Exercice 2. *Soit $\phi : G \to G'$ est un morphisme de groupe. Soit $H' < G'$ un sous-groupe. Montrer que l'image réciproque de H',*

$$\phi^{-1}(H') = \{x \in G|,\, \phi(x) \in H'\},$$

est un sous-groupe de G.

Exercice 3. *Soit $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{C}^*, \times)$ l'application définie par $f(x) = e^{ix}$. Montrer que f est un morphisme de groupe, trouver son noyau et son image.*

Exercice 4. *Soit $\phi : G \to G'$ un morphisme de groupe surjectif. Montrer que, si G est abélien, alors G' est abélien, et que si G est cyclique alors G' l'est aussi.*

Exercice 5.

Soit

$$U = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{R}, ad \neq 0\} \subset GL(2, \mathbb{R}).$$

(1) Montrer que $U < GL(2, \mathbb{R})$.

(2) Soit $\phi : U \to \mathbb{R}^*$ l'application de U dans le groupe multiplicatif $(R^*, \times)$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mapsto a^2.$$

Montrer que ϕ est un morphisme de groupe, trouver $Ker(\phi)$ et $\phi(U)$.

Exercice 6. *Soit $\phi : G \to G'$ un morphisme de groupe. Montrer que, si ϕ est une bijection alors ϕ est un isomorphisme de groupe.*

Exercice 7. *Soit G un groupe et S un ensemble de générateurs de S. Soit $\phi_1 : G \to G'$ et $\phi_2 : G \to G'$ des morphismes de groupe. Montrer que, si $\phi_1(x) = \phi_2(x)$ pour tout $x \in S$, alors $\phi_1 = \phi_2$.*

Exercice 8. *Le groupe additif $(\mathbb{Z}, +)$, est-il isomorphe au groupe additif $(\mathbb{Q}, +)$?*

Exercice 9. *Soit G un groupe fini. Montrer qu'il n'y a qu'un seul morphisme de groupe de G dans le groupe additif $\mathbb{Z}$.*

Exercice 10. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $Z^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | \, a_i \in Z\}$, muni de la LCI addition :*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (a'_1, a'_2, \ldots, a'_n) = (a_1 + a'_1, a_2 + a'_2, \ldots, a_n + a'_n).$$

Montrer que Z^n est un groupe abélien. Soit $H = \{(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3 | \; a+b+c = 0\}$.

(1) Montrer que H est un sous-groupe de $\mathbb{Z}^3$
(2) Montrer que le groupe H est isomorphe à $\mathbb{Z}^2$.