AG3 2017-2018

FEUILLE D'EXERCICES 2C.

Groupes finies, générateurs, groupes cycliques, sous-groupes

Exercice 1. *Montrer que, si G est un groupe et $x \in G$ un élemént d'ordre n, alors le sous-groupe $H = \langle x \rangle$ est cyclique d'ordre n.*

Exercice 2. *Montrer que tout sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique.*

Exercice 3. *Soit G un groupe cyclique fini, d'ordre $n \geq 1$. Soit $a \in G$ un générateur de G, et soit $r \in \mathbb{Z}^*$, tel que $pgcd(r, n) = 1$.*

(1) Montrer que a^r est un générateur de G, i.e. $G = \langle a^r \rangle$.

(2) Montrer que tout générateur b de G est de cette forme : il existe $r \in \mathbb{Z}^*$, avec $pgcd(r, n) = 1$, tel que $b = a^r$.

Exercice 4. *On considère l'ensemble des matrices 2×2*

$$SL(2, \mathbb{R}) = \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1\}.$$

Montrer que

$$SL(2, \mathbb{R}) < GL(2, \mathbb{R}).$$

Exercice 5. *Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $A \in SL(2, \mathbb{R})$. Déterminer tous les éléments du sous-groupe cyclique engendré par A.*

Exercice 6. *Soit G un groupe commutatif. Montrer que les éléments d'ordre fini dans G forment un sous-groupe de G.*

Exercice 7. *On considère les applications suivantes de $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ dans lui-même :*

$$f_1 : x \mapsto x; \;\; f_2 : x \mapsto 1 - x; \;\; f_3 : x \mapsto \frac{1}{1-x};$$
$$f_4 : x \mapsto \frac{1}{x}; \;\; f_5 : x \mapsto \frac{x}{x-1}; \;\; f_6 : x \mapsto \frac{x-1}{x}.$$

Montrer que $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ est un groupe pour la composition des applications. Déterminer tous ses sous-groupes.

Exercice 8. *Déterminer tous les sous-groupes de S_4 d'ordre 2.*