AG3 2017-2018

FEUILLE D'EXERCICES 2.

Groupes finies, générateurs, groupes cycliques, sous-groupes

Exercice 1.

(1) Montrer que tout groupe fini d'ordre 2 *est abélien.*

(2) Montrer que tout groupe fini d'ordre 3 *est abélien.*

Exercice 2. *Soit G un groupe et H, H' sous-groupes de G. Montrer que l'intersection $H \cap H'$ est un sous-groupe de G.*

Exercice 3. *Soit G un groupe, H un sous-groupe de G et $x \in G$. On définie*

$$xHx^{-1} = \{xhx^{-1} \mid h \in H\}.$$

Montrer que xHx^{-1} est un sous-groupe de G.

Exercice 4. *Soit G un groupe fini, S un ensemble de générateurs de G. Montrer que $\forall x \in G$ on peut écrire*

$$x = x_1 x_2 \dots x_n$$

où $x_i \in S$.

Exercice 5. *Il existe un groupe G d'ordre 4 tel que $G = \langle x, y \rangle$, où*

$$x^2 = y^2 = e \text{ et } xy = yx.$$

Montrer que $G = \{e, x, y, xy\}$. Trouver tous les sous-groupes de G.

Exercice 6. *Calculer la table de Cayley pour le groupe symétrique S_3. Montrer que S_3 n'est pas commutatif.*

Exercice 7. *Soit G un groupe, et soit S un ensemble de générateurs de G, $G = \langle S \rangle$. On suppose que $xy = yx$ pour tous $x, y \in S$. Montrer que G est abélien.*

Exercice 8 $(*)$**.** *Soit x un élément d'ordre fini n dans un groupe G, et soit k un entier tel que $k = nq + r$, $0 \leq r < n$. Montrer que l'ordre de x^k est n/d où $d = pgcd(k, n)$.*

Exercice 9. *Montrer que tout groupe cyclique G est abélien.*

Exercice 10. *Soit G un groupe fini cyclique d'ordre n. Montrer que pour tout entier $d \geq 1$ tel que $d|n$, il existe un sous-groupe d'ordre d.*

Exercice 11 ($*$)**.** *Il existe un groupe G d'ordre 8, engendré par trois éléments $i, j, k \in G$, tel que*

$$ij = k, \ jk = i, \ ki = j, \ i^2 = j^2 = k^2.$$

On note $m = i^2$.

(1) *Montrer que les éléments de G sont $G = \{e, i, j, k, m, mi, mj, mk\}$.*
(2) *Calculer la table de Cayley pour G.*

Morphismes de groupes

Exercice 12. *Soit G un groupe. Si G n'est pas abélien, montrer que l'application $x \mapsto x^{-1}$ n'est pas un morphisme de groupes.*

Exercice 13. *Montrer qu'il n'existe pas de morphisme*

$$\phi : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$$

tel que $\phi(2) = 3$.