AG3 2017-2018

FEUILLE D'EXERCICES 13.

Révision.

Exercice 1. *Réviser les définitions de*

— *Groupe groupe abélien, sous-groupe, groupe cyclique, classe à gauche suivant un sous-groupe, groupe quotient, ordre d'un groupe, ordre d'un élément, morphisme de groupe, noyau d'un morphisme, indice d'un sous-groupe H dans G, groupe symétrique, transposition, signature, groupe alterné, action de groupe, action triviale, orbite, stabilisateur*

— S_n, A_n, D_n, $Aut(G)$ *(ou G est un groupe),* G/H *(G est un groupe et H est un sous-groupe),* $K[X]$, $pgcd(P,Q)$, $GL(2,\mathbb{R})$, $SL(2,\mathbb{R})$, $Hom_K(V,W)$ *où V et W espaces vectoriels sur K.*

— *Anneau, anneau commutatif, sous-anneau, corps, idéal à gauche (à droite, bilatère), diviseurs de zéro, anneau intègre, idéal principal, morphisme d'anneaux, noyau d'un morphisme d'anneau, anneau quotient, idéal premier, idéal maximal, caractéristique d'un anneau (d'un corps), corps des fractions.*

— *Polynôme à coéfficients d'un corps K, une fonction polynôme, corps algébriquement clos, polynôme irreductible.*

— *Espace vectoriel sur un corps K, sous-espace vectoriel, vecteurs linéairement dépendants et linéairement dépendants, une base d'un espace vectoriel, un espace vectoriel de dimension finie (et de dimension infinie), application linéaire, noyau et image.*

Exercice 2. *Décider pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux. Justifier vos réponses.*

(1) *Soit* $S = \{x + \pi y \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$.
  (a) *S est un sous-groupe de* $(\mathbb{R}, +)$;
  (b) *S est un sous-groupe de* $(\mathbb{R}, \cdot)$;
  (c) *S est un idéal du corps* $(\mathbb{R}, +\cdot)$;
  (d) *S est un sous-anneau de* $\mathbb{R}, +, \cdot)$;
  (e) $(S, +, \cdot)$ *est un corps.*
  (f) *S est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$.

(2) *Il existe un morphisme de groupe* $\phi : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, +)$
  (a) *tel que* $\phi(2) = 3$ *et* $\phi(-2) = 2$;
  (b) *tel que* $\phi(x) \geq 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$;

(c) *tel que* $\phi(a) = b$ *pour un* $a \in \mathbb{R}$ *et un* $b \in \mathbb{R}$.

(3) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *est un sous-groupe de* $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$;

(4) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *est isomorphe à un sous-groupe de* $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$;

(5) $G = 5\mathbb{Z}$ *est un sous-groupe distingué de* Z ;

(6) $SL(2,\mathbb{R})$ *est un sous-groupe distingué de* $GL(2,\mathbb{R})$;

(7) *Tout groupe cyclique d'ordre* 20 *a un sous-groupe d'ordre* 5 ;

(8) S_4 *est abélien* ;

(9) *Si un idéal* I *d'un anneau* A *contient* 1_A, *alors* $I = A$;

(10) *Tout sous-anneau* S *de* A *est un idéal bilatère de* A.

(11) *Le corps* $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ *n'est pas algébriquement clos.*

(12) *L'anneau* $\mathbb{Q}[X]$ *est intègre.*

(13) *Polynôme* $P = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4$ *est irréductible dans*
  (a) $\mathbb{R}[X]$
  (b) $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[X]$
  (c) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$

(14) $GL(2,\mathbb{R})$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$.

(15) *Soit* K *un corps. L'espace vectoriel* K^n *est de dimension* n.

(16) *Fonctions* $f_1, f_2 : K \to K$ *définies par* $f_1(t) = t$ *et* $f_2(t) = t^6$ *sont linéairement indépendants sur tout corps* K.

Exercice 3. *Trouver tous les sous-groupes finis de* $(\mathbb{R}, +)$.

Exercice 4. *Trouver tous les sous-groupes de* $G = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ *et* $G' = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

Exercice 5. *Soit*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 6 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) *Décomposer* σ *en produit des cycles à support disjoint.*

(2) *Décomposer* σ *en produit des transpositions.*

(3) *Déterminer la signature de* σ.

Exercice 6. *Soit* $G = S_3$. G *agit sur lui-même par conjugaison. Trouver toutes les orbites pour cette action.*

Exercice 7. *Soit* A *un anneau de Boole (pour tout* $x \in A$ *on a* $x^2 = x$*). Montrer que si* A *n'est pas trivial, alors* A *est de caractéristique* 2.

Exercice 8. *Soit* A *un anneau commutatif. On dit qu'un élément* $x \in$ *est nilpotent si il existe* $n > 0$ *tel que* $x^n = 0_A$. *Montrer que l'ensemble* I *des éléments nilpotents de* A *est un idéal de* A.

Exercice 9. *Soit* V *un espace vectoriel sur un corps* K, *et* V_1, V_2 *deux sous-espaces vectoriels de* V.

— *Montrer que* $V_1 \cap V_2$ *est un sous-espace vectoriel de* V.
— *Montrer que*

$$V_1 + V_2 = \{u + w \,|u \in V_1, w \in V_2\}$$

est un sous-espace vectoriel de V.

Exercice 10. *(*) Montrer que tout groupe d'ordre* 6 *est isomorphe à* $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ *ou à* S_3.

Exercice 11. *(*) Montrer que l'anneau quotient* $K[X]/I$ *est un corps si et seulement si* I *est irréductible.*

Exercice 12. *(*) Sout* G *un groupe. Montrer que tout sous-groupe* $H < G$ *d'indice 2 est distingué.*