AG3 2017-2018

FEUILLE D'EXERCICES 12.

Espaces Vectoriels

Exercice 1. *Montrer que* 1 *et* $\sqrt{2}$ *sont linéairement indépendents sur* $\mathbb{Q}$*.*

Exercice 2. *Soit* $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} |\ f \text{ continue}\}$*. Est-ce que* $f_1 = \sin x$ *et* $f_2 = \cos x$ *dans* V *linéairment indépendants ?*

Exercice 3. *Soit* $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ *et* $V = K^2$*. Combien d'éléments est-ce qu'il y a dans* V *? Trouver trois bases (différentes de* $\{(1,0),(0,1)\}$ *) de* V*. Trouver un sous-espace* V *de dimension* 1*.*

Exercice 4. *Soit* V *et* W *deux espaces vectoriels sur* K*. Montrer que l'ensemble* $Hom_K(V,W)$ *des applications linéaires de* V *dans* W *est un espace vectoriel sur* K*.*

Exercice 5. *Soit* V *et* W *deux espaces vectoriels sur* K*, de dimension finie, et telles que* $dim(V) = dim(W)$*. Soit* $\phi : V \to W$ *une application linéaire.*

(a) Si $Ker(\phi) = \{0\}$*, montrer que* ϕ *est un isomorphisme des espaces vectoriels ;*

(b) Si $Im(\phi) = W$*, montrer que* ϕ *est un isomorphisme des espaces vectoriels.*

Exercice 6. *Montrer que un espace vectoriel* V *sur* K *de dimension* n *est isomorphe à* $W = K^n$*, i.e. qu'il existe un isomorphisme des espaces vectoriels* $\phi : V \to K^n$*.*

Exercice 7. *Soit* V *et* W *deux espaces vectoriels isomorphes. Montrer que si* $dim(V) = n$ *alors* $dim(W) = n$*.*

Exercice 8. *Soit* V *un espace vectoriel sur un corps* K *et soit* $\phi \in End_k(V)$ *(une application linéaire de* V *dans* V*). Si* $x \in V \setminus \{0\}$ *satisfait*

$$\phi(x) = \lambda x$$

pour un $\lambda \in K$*, on dit que* x *est un vecteur propre de* ϕ *pour la valeur propre* λ*. Montrer que pour tout* $\lambda \in K$ *l'ensemble*

$$V_\lambda = \{0\} \cup \{x \in V \setminus \{0\} |\ \phi(x) = \lambda x\}$$

est un sous-espace vectoriel de V*.*

Exercice 9.

(1) *Soit* $K = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ *et* $V = K^2$. *Soit* ϕ *l'application linéaire définie par la matrice*
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Pour quelles valeurs de λ *l'espace* V_λ *est non-trivial ? Trouver les vecteurs propres correspondants.*

(2) *Meme question pour* $K = \mathbb{R}$.

Exercice 10.

(a) *Montrer que* $M_{m,n}(K)$ *est un espace vectoriel sur* K. *Trouver une base de* $M_{m,n}(K)$.

(b) *Montrer que* $M_{n,n}(K)$ *est un anneau sur* K. *Trouver le centre de* $M_{n,n}(K)$.

Exercice 11. *Une matrice* $A = (a_{ij})$ *de taille* $n \times n$ *est* ***symétrique*** *si* $a_{ij} = a_{ji}$ *pour tous* $i, j \in \{1, \dots n\}$. *Soit*
$$Sym_n(K) = \{A \in M_n(K) |\ A \text{ est symétrique}\}$$
l'ensemble des matrices symétriques de taille $n \times n$ *à coéfficients dans* K. *Montrer que* $Sym_n(K)$ *est un sous-espace vectoriel de* $M_n(K)$ *et trouver une base de* $Sym_n(K)$.

Exercice 12. *(*) Soit* $\phi : K^n \to K^m$ *une application linéaire. Montrer que*
$$dim(Im\,\phi) + dim(Ker\,\phi) = n.$$