AG3 2017-2018

FEUILLE D'EXERCICES 11.

Polynômes

Exercice 1.

(a) *Soit P un polynôme de degré 3 dans $K[X]$. Montrer que si P n'est pas irréductible sur K, alors P a une racine dans K.*

(b) *Soit $K = F_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Montrer que le polynôme $P = X^3 + X^2 + 1$ dans $K[X]$ est irreductible.*

Exercice 2. *Soit $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Trouver un polynôme irréductible (si existe) dans $K[X]$ de degré*

(1) *2*
(2) *3*
(3) *4*

Exercice 3. *Soit $P \in K[X]$ irréductible. Soit $Q, R \in K[X]$ tels que $Q, R \neq 0$. Supposons que $P|QR$. Montrer que P divise Q ou P divise R.*

Exercice 4. *Soit $P \in K[X]$ et supposons que*

$$P = cP_1^{k_1}P_2^{k_2}\dots P_n^{k_n}$$

où $c \in K^*$, $k_i \in \mathbb{N}^*$ $P_i \in K[X]$ irréductibles, unitaires et distincts. Montrer que si

$$P = bQ_1^{l_1}Q_2^{l_2}\dots Q_m^{l_m}$$

où $b \in K^*$, $l_i \in \mathbb{N}^*$ $Q_i \in K[X]$ irréductibles, unitaires et distincts, alors, après un reclassement, on a $n = m$, $P_i = Q_i$, $k_i = l_i$ et $c = b$. Indication : utiliser l'exercice précédent

Exercice 5. *Soit $P \in K[X]$ et écrivons $P = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$. Le* ***polynôme dérivé de*** *P est*

$$P' = na_nX^{n-1} + (n-1)a_{n-1}X^{n-2} + \dots + a_1.$$

Montrer que pour $P, Q \in K[X]$ on a

(1) $(cP)' = cP'$
(2) $(P + Q)' = P' + Q'$
(3) $(PQ)' = P'Q + PQ'$.

Exercice 6. *Soit $P \in K[X]$ un polynôme de degré ≥ 1. Soit $\alpha \in K$ une racine de P. Soit m tel que $P = (X - \alpha)^mQ$ où $pgcd((X - \alpha), Q) = 1$. Montré que α est de multiplicité $m > 1$ si et seulement si α est une racine du polynôme dérivé P'.*

Exercice 7. *Montrer que les polynômes suivants n'ont pas de racines de multiplicité* $m > 1$ *dans* $\mathbb{C}$ *:*

(1) $P = X^4 + X$

(2) $P = X^5 - 5X + 1$

Exercice 8. *(*) Montrer que un idéal* I *dans* $K[X]$ *est maximal si et seulement si* I *est engendré par un polynôme irréductible. Déduire que* $K[X]/I$ *est un corps si et seulement si* I *est irréductible.*