AG3 2017-2018

FEILLE D'EXERCICES 10.

Anneaux, Corps des fractions, Polynômes

Exercice 1. *Dans un exercice de la Feuille 9 on a vu comment définir la structure d'anneau sur le produit* $A \times A'$ *si* $(A, +, \cdot)$ *et* $(A', +, \cdot)$ *sont deux anneaux. Si* A *et* A' *sont des corps, est-ce que* $(A \times A', +\cdot)$ *est un corps ?*

Exercice 2. *Soit* A *un anneau commutatif et intègre. En cours on a définit un ensemble* $K = \{\frac{a}{b}| \ a, b \in A, \ b \neq 0_A\}$. *Rappelons que*

$$\frac{a}{b} = \{(a', b') \in A \times A \setminus \{0_A\}| \ (a, b) \sim (a', b')\}$$

et que $(a, b) \sim (a', b')$ *si* $ab' = a'b$.

Montrer que $(K, +, \cdot)$ *est un corps avec opérations* $+$ *et* $\cdot$ *définies par* $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ *et* $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Exercice 3. *Soit* K *un corps de caractéristique* 0. *Montrer qu'il existe un morphisme d'anneaux injectif* $\phi : \mathbb{Q} \to K$. *Montrer que* ϕ *est unique.*

Exercice 4. *Soit* K *un corps fini. Soit* C *le produit de tous les éléments non-nuls de* K. *Montrer que* $C = -1_K$.

Exercice 5. *Soit* p *un nombre premier. Montrer que*

$$(p - 1)! = -1(mod\ p).$$

Exercice 6. *Soit* K *un corps fini d'ordre* q. *Montrer que* $a^q = a$ *pour tout* $a \in K$. *Déduire que les polynomês* $P = X$ *et* $Q = X^q$ *définissent la même fonction polynôme sur* K.

Exercice 7. *Soit* K *un corps fini. Montrer qu'il existe un polynôme* $P \in K[X]$ *de degré* $deg(P) \geq 1$ *qui n'a pas de racine dans* K. *Indication : considére le polynôme*

$$P = \prod_{\alpha \in K^*} (X - \alpha) + 1_K.$$

Exercice 8. *Soit* $(K, +, \cdot)$ *un corps et* $n \in \mathbb{N}^*$. *On considère l'ensemble* $\mu_n(K)$ *des éléments* x *de* K *tels que* $x^n = 1$,

$$\mu_n(K) = \{x \in K|| \ x^n = 1_K\}.$$

(a) *Montrer que* $(\mu_n(K), \cdot)$ *est un groupe.*
(b) *Trouver les éléments de* $\mu_n(\mathbb{C})$.
(c) *Trouver les éléments de* $\mu_p(K)$ *si* K *est de caractéristique* p *où* p *est premier.*

(d) Trouver les éléments de $\mu_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ *pour* $p = 7$ *et* $1 \leq n \leq p$.

Exercice 9. *(*) Soit* A *un anneau commutatif. Montrer que, si les seuls idéaux de* A *sont* $\{0_A\}$ *et* A*, alors* A *est un corps.*