AG3 2017-2018

FEUILLE D'EXERCICES 1.

Exercice 1. *Soit G un groupe, $x \in G$, $n \geq 1$ un entier.*

(a) Que vaux $(x^{-1})^{-1}$?

(b) Si $x^n = e$, quel est l'inverse de x ?

Exercice 2. *Soit G un groupe et soient a et b des éléments de G tels que $a^5 = 1$ et $a^3 b = ba^3$.*

(a) Montrer que $a^6 b = ba^6$.

(b) En déduire que l'on a $ab = ba$.

Exercice 3.

(a) Soit G un groupe et $x \in G$. Supposons qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $x^n = e$. Montrer qu'il existe un entier $m \geq 1$ tel que $x^{-1} = x^m$.

(b) Soit G un groupe fini et $x \in G$. Montrer qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $x^n = e$.

Exercice 4. *Soit G un groupe tel que $x^2 = 1$ pour tout $x \in G$. Montrer que G est abelien.*

Exercice 5. *Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que l'ensemble*

$$G = \{z \in \mathbb{C} | z^n = 1\}$$

est un groupe pour la loi multiplication.

Exercice 6. *Soit G un groupe. Pour des éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans G, montrer par récurrence que*

$$(x_1 x_2 \ldots x_n)^{-1} = x_n^{-1} x_{n-1}^{-1} \ldots x_1^{-1}.$$

Exercice 7. *Soit $G =]-1, 1[$. Pour $x, y \in G$, on définit $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$. Montrer que $(G, *)$ forme un groupe.*

Exercice 8. *On définit sur $\mathbb{R}$ la LCI $*$ par $a * b = a + b - ab$.*

(a) $(\mathbb{R}, *)$ est-il un groupe ?

(b) Déterminer un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui soir un groupe pour la loi $*$.

Exercice 9. *Soit G et G' des groupes finis, d'ordre m et n, respectivement. Trouver le nombre d'éléments dans $G \times G'$.*

Exercice 10 $(*)$**.** *Soit G un groupe d'élément neutre e. On suppose que le nombre d'éléments de G est fini, et que ce nombre est pair. Démontrer qu'il existe $x \in G$ avec $x \neq e$ et tel que $x = x^{-1}$.*