UNIVERSITÉ DE RENNES 1 — 2017–2018
UFR DE MATHÉMATIQUES — LICENCE

ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE 3
CONTRÔLE DU 1 DECEMBRE 2017 (1 HEURE)

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits.

NOM : **Prénom :**

EXERCICE 1 (10,5 pts)

Décider pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux. Les réponses possibles sont **V="C'est vrai", F="C'est faux", N="Je ne sais pas"** . Vous n'avez pas besoin de justifier vos réponses. Chaque réponse correcte vaut **+1,5 points**, réponse incorrecte vaut **-1 point**, réponse "je ne sais pas" vaut **0 points**. Si le total donne un nombre négatif, la note attribuée à cet exercice sera ramenée à zéro.

(1) $X^3 - 2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
Réponse : C'est Vrai. Ce polynôme est de degré 3 et n'a pas de racines dans $\mathbb{Q}$. Donc irréductible.

(2) $\mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Q}$.
Réponse : C'est Faux. Q est un corps, et donc les ideáux de $\mathbb{Q}$ sont $\{0\}$ et $\mathbb{Q}$.

(3) Soit $\phi : K \to K'$ un morphisme d'anneaux. Si K et K' sont des corps, alors $Ker(\phi) = \{0_K\}$.
Réponse : C'est Vrai. $Ker(\phi)$ est un idéal de K. Comme K est un corps, $Ker(\phi) = \{0_K\}$ ou $Ker(\phi) = K$. Mais $\phi(1_K) = 1_{K'} \neq 0_{K'}$, donc $Ker(\phi) \neq K$ d'où $Ker(\phi) = \{0_K\}$.

(4) Soit K un corps. S'il existe un morphisme d'anneaux $\phi : \mathbb{Z} \to K$ injectif, alors K est de caractéristique 0.
Réponse : C'est Vrai. C'est une définition de caractéristique d'un corps.

(5) L'anneau $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ est intègre.
Réponse : C'est Faux. Par exemple, $\bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{0}$, donc il y a des diviseurs de zéro dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

(6) Soit A un anneau. L'application $\phi : A \to A$ définie par $\phi(x) = x^2$ est un morphisme d'anneaux.
Réponse : C'est Faux. Si ϕ est un morphisme d'anneaux, alors pour tous $x, y \in A$, on a $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$. Mais pour $\phi(x) = x^2$ on a

$$\phi(x+y) = (x+y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2$$

tandis que

$$\phi(x) + \phi(y) = x^2 + y^2.$$

Par exemple, si $A = \mathbb{Z}$, $x = 1$ et $y = -1$, on a $\phi(x+y) = (1-1)^2 = 0$ mais $\phi(x) + \phi(y) = 1 + 1 = 2$.

(7) Soit $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $P = X^2 + 1$ et $Q = X^2 - 1$ polynômes dans $K[X]$. Alors $pgcd(P, Q) = 1$.
Réponse : C'est Vrai. Le polynôme $P = X^2 + 1$ n'a pas de racines dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ car $P(0) = 1$, $P(1) = 2$ et $P(2) = 2$. Donc P est irréductible sur $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Comme P ne divise pas Q, $pgcd(P, Q) = 1$.

Tournez svp

EXERCICE 2(6 pts)

Dans cet exercice on vous demande de produire des exemples. Justification n'est pas demandée. **Donner un exemple (ou répondre que ça n'existe pas)** de..

(a) corps de caractéristique 2 ; (1 pt)
Réponse : par exemple, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est de caractéristique 2 ;

(b) polynome irréductible de degré 3 dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[X]$; (1,5 pts)
Réponse : par exemple, $P = X^3 + X + 1$. P est irréductible parce qu'il n'a pas de racines dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $(P(0) = 1, P(1) = 3, P(2) = 1, P(3) = 1, P(4) = 4)$, et P est de degré 3.

(c) anneau non-commutatif ; (1 pt)
Réponse : par exemple, $A = M_n(\mathbb{R})$. Multiplication de matrices n'est pas commutative, donc A est non-commutatif.

(d) anneau intègre qui n'est pas un corps ; (1 pts)
Réponse : par exemple, $A = \mathbb{Z}$ est intègre, mais les éléments de $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ n'ont pas d'inverse en général.

(e) polynôme irréductible de degré 3 dans $\mathbb{R}[X]$; (1,5 pts)
Réponse : Un tel polynôme n'existe pas. Tout polynôme de degré 3 à coéfficients réels a une racine dans $\mathbb{R}$, donc n'est pas irréductible.

EXERCICE 3(6,5 pts) Soit A, A' anneaux commutatifs, $\phi : A \to A'$ un morphisme d'anneaux.

(1) Rappeler la définition d'un idéal dans un anneau commutatif ;

(2) Soit $I' \subset A'$ un idéal. On dénote I l'image inverse de I' par ϕ :
$$I = \{x \in A | \ \phi(x) \in I'\}.$$
Montrer que I est un idéal de A.

Démonstration. On a $\phi(0_A) = 0'_A$ donc $0_A \in I$. Soit $x, y \in I$. Alors $\phi(x), \phi(y) \in I'$. Comme I' est un idéal et ϕ est un morphisme d'anneaux, on a $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y) \in I'$. Donc $x + y \in I$. Soit $a \in A$ et $x \in I$. Montrons que $ax \in I$. On a $\phi(ax) = \phi(a)\phi(x)$. Comme $\phi(a) \in A', \phi(x) \in I'$ et I' un idéal de A', on a $\phi(a)\phi(x) \in I'$, donc $\phi(ax) \in I'$ et $ax \in I$. On a montré que I est un idéal de A. $\square$

(3) Si $J \subset A$ est un idéal, est-ce que son image $\phi(J)$ est un idéal de A' ? Si oui, donner une démonstration courte, si non, donner un contre-exemple.
Réponse : En général non. Contre-exemple : $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ définie par $\phi(n) = n$ est un morphisme d'anneaux ; on prend $I = 2\mathbb{Z}$, c'est un idéal de $\mathbb{Z}$. Mais $\phi(2\mathbb{Z}) = 2\mathbb{Z}$, et ce n'est pas un idéal de $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est un corps, donc ces idéaux sont $\{0\}$ et $\mathbb{R}$).