Université de Rennes 1 2017–2018
UFR de Mathématiques Licence

Algèbre et Géométrie 3
Contrôle du 8 novembre 2017 (Corrigé)

NOM : **Prénom :**

EXERCICE 1

Décider pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux. Les réponses possibles sont **V="C'est vrai", F="C'est faux", N="Je ne sais pas"** . Vous n'avez pas besoin de justifier vos réponses. Chaque réponse correcte vaut **+1 point**, réponse incorrecte vaut **-0,5 points**, réponse "je ne sais pas" vaut **0 points**. Si le total donne un nombre négatif, la note attribuée à cet exercice sera ramenée à zéro.

(1) $(\mathbb{R}^*, +, \cdot)$ est un anneau.
Réponse : c'est **Faux**, car $\mathbb{R}^*$ n'est pas stable pour l'addition. Par exemple, $-1, 1 \in \mathbb{R}$, mais $-1 + 1 = 0 \notin \mathbb{R}^*$.

(2) Le noyau d'un morphisme de groupes $\phi : G \to G'$ est un sous-groupe distingué de G.
Réponse : c'est **Vrai**, ce résultat a été montré en cours.

(3) Tout morphisme de groupes $\phi : G \to G'$ est une bijection de G dans $\phi(G)$.
Réponse : c'est **Faux** : contre-exemple : un morphisme trivial $\phi : G \to G'$ envoie tout élément de G sur $1_{G'}$ et donc n'est pas injectif.

(4) La signature de $(1\,2\,3\,4)$ est 1.
Réponse : c'est **Faux**, car on a $(1\,2\,3\,4) = (1\,4)(1\,3)(1\,2)$, donc c'est un produit de 3 transpositions et on a

$$\epsilon((1\,2\,3\,4) = \epsilon((1\,4))\epsilon((1\,3))\epsilon((1\,2)) = (-1)^3 = -1$$

(5) La permutation $(1\,3\,5)$ est un élément de A_5.
Réponse : c'est **Vrai**. A_5 est l'ensemble d'éléments de S_5 de signature 1. Comme $(1\,3\,5) = (1\,5)(1\,3)$, la signature de $(1\,3\,5)$ est $(-1)(-1) = 1$. Donc cette permutation est bien un élément de A_5.

(6) Si $\phi : G \to G'$ un morphisme de groupes surjectif, et $H = Ker(\phi)$ le noyau de ϕ, alors G/H et G' sont isomorphes.
Réponse : c'est **Vrai**. C'est une conséquence du Premier Théorème d'isomorphisme.

(7) Le produit des transpositions $(1\,5)(1\,4)(1\,3)(1\,2)$ et le cycle $(5\,1\,2\,3\,4)$.
Réponse : c'est **Vrai**.

(8) Les groupes S_4 et D_4 sont isomorphes.
Réponse : c'est **Faux**. Comme $|S_4| = 4! = 24$ et $|D_4| = 2 \cdot 4 = 8$, et comme un isomorphisme est une bijection, ces groupes ne sont pas isomorphes.

(9) L'action d'un groupe G abélien sur lui-même par conjugaison est transitive.
Réponse : c'est **Faux**. Une action de $G \times G \to G$ par conjugaison est transitive si pour tout $x, y \in G$ il existe $a \in G$ tel que $y = axa^{-1}$. Comme G est abélien, pour tout $a, x \in G$ on a $axa^{-1} = x$. Autrement dit, cette action est triviale, donc n'est pas transitive (si $G \neq \{e\}$).

Tournez svp

EXERCICE 2

(a) Donner une définition d'une action de groupe G sur un ensemble E. (1,5 pts)
Soit $G \times E \to E$ une action du groupe G sur E, et soit $x \in E$.
(b) Rappeler la définition du stabilisateur G_x. (1,5 pts)
(c) Montrer que G_x est un sous-groupe de G. (3 pts)

Démonstration. Soit e l'élément neutre de G. Comme $e \cdot x = x$, on a $e \in G_x$. Soit $a, b \in G_x$. Alors $a \cdot x = x$ et $b \cdot x = x$ et donc on a $(ab) \cdot x = a \cdot (b \cdot x) = a \cdot x = x$. On a montré que $ab \in G_x$. Pour $a \in G$, on a $a \cdot x = x$, et $a^{-1} \cdot x = a^{-1} \cdot (a \cdot x) = (a^{-1}a) \cdot x = e \cdot x = x$. Ca montre que $a^{-1} \in G_x$. $\square$

(d) Soit $a \in G$ et $y = a \cdot x$. Montrer que $G_y = aG_xa^{-1}$. (4 pts)

Démonstration. On montre d'abord que $aG_xa^{-1} \subset G_y$. Soit $b \in G_x$. Montrons que $aba^{-1} \in G_y$. Notons que $a^{-1} \cdot y = a^{-1} \cdot (a \cdot x) = x$. Donc $(aba^{-1}) \cdot y = (ab) \cdot (a^{-1} \cdot y) = (ab) \cdot x = a \cdot x = y$ d'où $aba^{-1} \in G_y$.
On montre ensuite que $G_y \subset aG_xa^{-1}$. Soit $b \in G_y$. Montrons que $a^{-1}ba \in G_x$. On a $(a^{-1}ba) \cdot x = (a^{-1}b) \cdot (a \cdot x) = (a^{-1}b) \cdot y = a^{-1} \cdot (b \cdot y) = a^{-1} \cdot y = x$. Donc $a^{-1}ba \in G_x$ d'où $b \in aG_xa^{-1}$. $\square$

Tournez svp

EXERCICE 3

(a) Donner une définition d'un sous-anneau. (1,5 pts)

(b) Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau. Le **centre** de A est l'ensemble

$$Z(A) = \{x \in A | \; xy = yx \; \forall y \in A\}.$$

Montrer que $Z(A)$ est un sous-anneau de A.(3 pts)

Démonstration.
(i) 1_A commute avec tous les éléments de A, donc $1_A \in Z(A)$.
(ii) Soit $x, y \in Z(A)$, et $z \in A$. Alors $(x+y)z = xz + yz = zx + zy = z(x+y)$. On a montré que $x + y$ commute avec tout élément de A. Donc $x + y \in Z(A)$.
(iii) Soit $x, y \in Z(A)$, et $z \in A$. Alors $(xy)z = x(yz) = x(zy) = (xz)y = (zx)y = z(xy)$. Donc $xy \in Z(A)$.
(iv) Montrons que $-1 \in Z(A)$. Soit $z \in A$. On a $(-1)z + z = (-1+1)z = 0$ et $z(-1) + z = z(-1+1) = 0$, donc $(-1)z = z(-1)$.
Soit $x \in Z(A)$. On a $-x = (-1)x$, et comme $-1, x \in Z(A)$, le produit est aussi dans $Z(A)$. Donc $-x \in Z(A)$.

□