Algèbre et Géométrie 3

Contrôle du 6 octobre 2017 (1 heure) Correction

EXERCICE 1

1. $(\mathbb{N}, +)$ est un groupe.
   F. L'élément 1 n'a pas d'inverse.
2. Il existe un morphisme de groupe $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ du groupe additif $\mathbb{Z}$ dans lui même, telle que $\phi(0) = 3$.
   F. L'élément neutre devrait être envoyé à l'élément neutre par un morphisme.
3. Tout groupe cyclique est abélien.
   V. Voir le cours
4. Soit G un groupe d'ordre 7. Alors G est cyclique.
   V. Un groupe fini dont l'ordre est un nombre premier est cyclique (utiliser le thm de Lagrange pour démontrer ce fait).
5. Les groupe $(\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Q}, +)$ sont isomorphes.
   F. Voir l'ex8 du TD3.
6. Tout automorphisme est un isomorphisme.
   V. Par définition.
7. Si G est un groupe fini, alors tout élément de G est d'ordre fini.
   V. Voir le cours.
8. Il existe un morphisme $\phi : (\mathbb{Q}, +) \to (\mathbb{Q}, +)$ tel que $\phi(2) = 3$.
   V. Vérifier que l'application $x \mapsto \frac{3x}{2}$ est bien définie et est un morphisme. Plus généralement, toute application linéaire entre deux espaces vectoriels est un morphisme de groupes entre les deux groupes additifs sous-jacents aux espaces vectoriels.
9. Soit G un groupe et $H < G$ un sous-groupe. Si G est abélien, alors H est un sous-groupe distingué de G.
   V. Puisque tous se commute dans G, on a $gHg^{-1} = H$ pour tout $g \in G$.

EXERCICE 2

(a) Rappeler la définition d'un sous-groupe. (1,5 pts)
(b) Rappeler la définition d'un sous-groupe distingué. (1,5 pts)
(c) Soit G un groupe. **Le centre** C_G de G est l'ensemble des éléments $a \in G$ tels que $ax = xa$ pour tout $x \in G$:

$$C_G = \{a \in G | \ \forall x \in G \, ax = xa\}.$$

1. Montrer que C_G est un sous-groupe de G ; (3 pts)

   Soient $a, b \in C_G$. Soit $x \in G$. On a

   $$(ab)x = a(bx) = a(xb) = (ax)b = (xa)b = x(ab). \tag{1}$$

   Après avoir multiplié les deux côtés de l'équation $ax = xa$ par a^{-1} à gauche et à droite, on obtient

   $$xa^{-1} = a^{-1}x. \tag{2}$$

   Les équations (**??**) et (**??**) étant vraies pour tout $x \in G$, on obtient que $ab \in C_G$ et $a^{-1} \in C_G$.
   Comme en plus l'élément neutre est évidemment contenu dans C_G, on en déduit que C_G est un sous-groupe.
2. Montrer que C_G est distingué dans G ; (3 pts)

   Soient $g \in G$ et $c \in C_G$. Comme $gc = cg$, on a

   $$gcg^{-1} = cgg^{-1} = c.$$

   Ceci montre que $gC_Gg^{-1} = C_G$. Comme c'est vrai pour tout $g \in G$, on en déduit que C_G est distingué dans G.
3. Montrer que $C_G = Ker(\phi)$, où ϕ est le morphisme de G dans $Aut(G)$ défini par $\phi(a) = x \mapsto axa^{-1}$. (3 pts)

   Soit $c \in G$. Alors

   $$\begin{aligned} & c \in C_G \\ \Leftrightarrow & \forall x \in G, cxc^{-1} = x \\ \Leftrightarrow & \phi(c) = Id_G \\ \Leftrightarrow & C_G \subset Ker(\phi). \end{aligned}$$

4. (Bonus) Trouver le centre de S_3.(2 pts)

   Assertion : le centre de S_3 est le sous-groupe trivial.
   Les rôles des trois transpositions sont symétriques, de même pour les deux cycles. Il suffit donc de vérifier qu'une transposition ne commute pas avec un cycle.