

L'inauguration des séries trigonométriques dans *la Théorie analytique de la chaleur* de Fourier et dans la controverse des cordes vibrantes

Alain Herreman

avril-mai 2011

I -Introduction¹

Les notions d'énoncés et de textes inauguraux ont été définies et appliquées à *La Géométrie* de Descartes dans (Herreman xxxx). Ces notions sont rappelées dans le présent article et appliquées à la *La théorie analytique de la chaleur* de Fourier. Je vais montrer que ce livre est un autre exemple de texte inaugural inaugurant cette fois la représentation des courbes et des fonctions par des séries trigonométriques. Je vais pour cela suivre la progression de ce livre, et particulièrement celle du chapitre III, et montrer qu'elle répond aux contraintes de l'inauguration. Une vérification complète du caractère inaugural de ces deux textes aura ainsi été faite. Mais au-delà de cette vérification le propos de cet article est de pénétrer un peu plus avant dans l'analyse de l'expression de la généralité en mathématiques.

Les textes inauguraux introduisent de nouvelles représentations. Les caractéristiques de celles-ci obligent à les introduire suivant des modalités particulières qui confèrent à ces textes des caractéristiques communes. Leur étude s'inscrit dans l'étude des conditions de possibilité d'un type particulier d'énoncés et de raisonnements que sont les énoncés et les raisonnements *généraux*. En effet, la représentation des problèmes de géométrie par des équations polynomiales inaugurée par Descartes rend selon lui possible des énoncés et des raisonnements se rapportant à la *totalité* des problèmes de géométrie. La représentation des courbes géométriques par des équations polynomiales a aussi introduit la possibilité de considérer *toutes* les courbes (géométriques). Des énoncés généraux sur les courbes deviennent possibles. De la même manière, la représentation sur un intervalle borné, des courbes et des fonctions par des séries trigonométriques permet de ramener une multitude de représentations partielles (courbes dérivables, non dérivables, continues, discontinues, etc. ; fonctions polynomiales, trigonométriques, logarithmiques, exponentielles, etc.) à une seule expression : celle d'une série trigonométrique avec des coefficients indéterminés. Considérer et manipuler une telle expression donne la possibilité d'embrasser toutes les courbes et les fonctions. Les *Principia mathematica* introduisent une représentation uniforme des propositions mathématiques sans laquelle des énoncés comme l'*Entscheidungsproblem* (problème de décision de Hilbert) ou les théorèmes d'incomplétude aussi bien que de complétude de Gödel ne seraient pas concevables. Les machines de Turing ont de la même manière introduit une représentation uniforme des nombres ou des fonctions calculables à partir de laquelle une théorie générale de ces nombres et de ces fonctions a pu être développée. L'étude des textes inauguraux participe ainsi de l'analyse des moyens d'expression de la généralité en mathématique *au moment de leur introduction*, autrement dit du *conditionnement sémiotique* de cette généralité (Herreman 2000).

¹ Je remercie Catherine Goldstein pour ses commentaires et son intérêt pour ce travail ainsi que Olivier Darrigol, Alexandre Guilbaud et Guillaume Jouve qui m'ont fait bénéficier de leurs connaissances sur la controverse des cordes vibrantes.

La controverse des cordes vibrantes qui a opposé D'Alembert, Euler et Daniel Bernoulli nous conduit naturellement à poursuivre cette analyse au-delà des textes inauguraux. On sait en effet que la représentation des courbes par des séries trigonométriques a aussi été envisagée au cours de cette controverse. Or cela pose un problème évident d'inauguration : les séries trigonométriques ont-elles été inaugurées deux fois? Je m'attacherai à montrer que non : les textes qui composent cette controverse ne présentent pas les caractéristiques d'un texte inaugural. L'énoncé inaugural a bien été énoncé, mais n'a pas été soutenu. De ce fait l'analyse de l'introduction de l'idée que les séries trigonométriques pourraient représenter toutes les courbes et les fonctions ne peut plus se limiter à la vérification des caractéristiques des textes inauguraux. En entrant un peu plus avant dans l'analyse des moyens d'expression de la généralité en présence, je vais montrer que l'apparition de cette idée provient ici de la conjonction des moyens d'expressions utilisés par chacun des protagonistes : la possibilité de représenter toutes les courbes ou toutes les fonctions par des séries trigonométriques n'introduit pas comme avec Fourier un nouveau moyen d'expression de la généralité, elle est ici une *conséquence* d'autres moyens d'expression de la généralité qui ne sont pas nouveaux mais qui sont réunis à cette occasion et que je m'attacherai à mettre en évidence. Après donc avoir rappelé la définition des textes et des énoncés inauguraux et montré dans une première partie que les séries trigonométriques ont bien été inaugurées dans *La théorie analytique de la chaleur* de Fourier, j'analyserai et caractériserai dans la seconde partie la manière dont elles ont été introduites au cours de la controverse des cordes vibrantes.

II - L'inauguration des séries trigonométriques dans la *Théorie analytique de la chaleur* de Joseph Fourier

Cette partie va être consacrée à rappeler la définition des textes et des énoncés inauguraux et ensuite à montrer que la *Théorie analytique de la chaleur* de Joseph Fourier est un texte inaugural introduisant un énoncé inaugural². Cela établira l'existence de ce type de texte et d'énoncé à autre époque et sur un sujet différent de ceux de *La Géométrie* de Descartes. L'importance de la *Théorie analytique de la chaleur* dans l'histoire des mathématiques justifie aussi de le considérer d'un point de vue inaugural et de décrire son dispositif d'inauguration.

2 Pour une présentation et des commentaires du développement de la théorie de la chaleur de Fourier voir Grattan-Guinness (1990 ; 2000) ; Dhombres & Robert (1998), notamment le chapitre « Le physicien-mathématicien de *La Théorie analytique de la chaleur* » (Dhombres & Robert 1998, 443-620). Pour une présentation plus circonstanciée des textes et des énoncés inauguraux, de quelques-unes de leurs conséquences et de l'analyse de *La Géométrie* de Descartes suivant ce point de vue, voir Herreman (xxxx).

1 - Fonction et caractérisation des textes et des énoncés inauguraux

Les représentations entretiennent des rapports divers à ce qu'elles représentent mais toutes ont besoin d'être inaugurées. Un texte inaugural est un texte qui a pour fonction d'introduire (inaugurer) une représentation d'une totalité déjà constituée mais pour laquelle il n'existait pas auparavant de représentation uniforme. L'appellation « texte inaugural » désigne de manière plus spécifique un texte qui présente les cinq caractéristiques suivantes :

1. il met en jeu deux totalités (dualisme) ;
2. l'une des totalités est tenue pour pré-établie (réalisme) ;
3. l'autre totalité n'est pas tenue pour pré-établie sous la forme considérée ou dans le rapport considéré à la totalité pré-établie (inauguration) ;
4. une fonction du texte est de soutenir que la deuxième totalité, celle qui n'est pas pré-établie, est une représentation conforme de la première (conformité) ;
5. la démonstration de la conformité des deux totalités est impossible (incommensurabilité) ;

Ces caractéristiques vont être expliquées à partir de l'exemple de *La Géométrie* de Descartes. *La Géométrie* met en jeu deux totalités : les problèmes de géométrie (première totalité) et les équations algébriques (deuxième totalité). Il y a bien de ce fait un dualisme, c'est la première caractéristique. Les problèmes de géométrie sont considérés par Descartes comme une totalité constituée : *il y a* des problèmes de géométrie. Les mathématiciens peuvent en donner une définition, mais ils ne leur appartient pas de légiférer à leur propos. La constitution de cette totalité est hors de leur portée : leurs définitions ne peuvent jouer que sur la formulation de la définition (*definiens*), elles ne sauraient en modifier l'extension. La condition sur le réalisme est ainsi satisfaite. Il y a bien aussi inauguration, troisième caractéristique, puisque Descartes introduit un rapport spécifique nouveau entre les équations et les problèmes de géométrie : il fait correspondre à chaque problème une équation suivant la méthode qu'il décrit. Le rapport ainsi établi doit de plus conduire à une représentation conforme (quatrième caractéristique) : l'équation n'ajoute ni ne retranche rien à l'énoncé du problème. *Toutes* les caractéristiques du problème se retrouvent dans son équation. C'est le cas en particulier de sa solution : résoudre l'équation c'est exactement résoudre le problème. Les solutions de l'un et de l'autre sont tenues pour être les mêmes. Mais, et c'est la cinquième caractéristique, il est impossible d'établir cette conformité. Cela est impossible pour plusieurs raisons. Il n'y a pas de représentation des problèmes permettant de les parcourir tous. L'intérêt des équations polynomiales est précisément d'en introduire une. Une énumération des équations est possible alors qu'elle est impossible pour les problèmes. On ne peut pas non plus énumérer *toutes* les propriétés d'un problème que l'équation doit restituer. Enfin, le dualisme rend incommensurables les problèmes et les équations. Un énoncé de problème et une équation sont des expressions de types différents. Passer de l'expression d'un problème à l'expression de son équation

oblige à introduire au cours de cette transformation d'autres moyens d'expression que ceux utilisés dans les énoncés des problèmes. Je parlerai de « soutenir » un énoncé inaugural, et non par exemple de le « démontrer », pour indiquer à la fois la nécessité de donner des arguments et l'impossibilité d'établir complètement ce qui est énoncé.

Un texte inaugural doit avant tout être rapporté à sa fonction qui est d'introduire une représentation conforme. Comme cette conformité est en l'occurrence impossible à établir il est nécessaire de développer tout un ensemble d'arguments pour la soutenir. C'est cette fonction et l'impossibilité de l'accomplir qui donne lieu à des textes qui présentent des caractéristiques similaires. L'intérêt de la notion de texte inaugural n'est pas tant de pointer la récurrence d'un type de texte que de mettre en évidence la récurrence d'un type de représentation et en l'occurrence le rôle de la conformité dans l'histoire des mathématiques. La récurrence d'un type de texte n'est quant à elle qu'une conséquence de la nécessité d'introduire les représentations utilisées (conditionnement sémiotique), et les caractéristiques de ces textes sont elles-mêmes des conséquences des problèmes spécifiques posés par l'introduction de ces représentations. Ces deux aspects doivent être bien distingués. Le conditionnement sémiotique répond à une nécessité, qu'il importe de reconnaître comme telle, et qui n'est pas propre à l'introduction d'une représentation conforme. Le fait de disposer d'une représentation conforme, ou tout du moins qui puisse paraître telle à un moment donné, est néanmoins un phénomène remarquable. Etablir cette conformité pose des problèmes spécifiques auxquels est nécessairement confronté celui qui veut la soutenir. Cela confère aux textes où cela est fait des caractéristiques qu'il est surtout utile de dégager pour faciliter l'identification de ces textes et parce que cela facilite des discussions générales qu'il serait plus difficile d'avoir directement à partir de la fonction de ces textes.

Les textes inauguraux comprennent aussi souvent des *énoncés inauguraux* dont la fonction est de donner une expression concise au rapport de la représentation à ce qu'elle représente. Mais on peut, comme pour les textes inauguraux, les caractériser en reprenant les cinq caractéristiques précédentes en les adaptant simplement à un énoncé :

1. l'énoncé met en jeu deux totalités (dualisme) ;
2. l'une des totalités est tenue pour pré-établie (réalisme),
3. l'autre totalité n'est pas tenue pour pré-établie sous la forme considérée ou dans le rapport considéré à la totalité pré-établie (inauguration) ;
4. l'énoncé affirme que la deuxième totalité, celle qui n'est pas pré-établie, est une représentation conforme de la première (conformité) ;
5. la démonstration de la conformité des deux totalités est impossible (incommensurabilité) ;

L'énoncé inaugural correspondant à l'inauguration de la représentation des problèmes de géométrie par des équations algébriques est l'énoncé qui ouvre *La Géométrie* :

« Tous les problèmes de Géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il

n'est besoin, par après, que de connaître la longueur de quelques lignes droites, pour les construire. » 170

Tout le livre atteste qu'il s'agit bien ici d'exprimer les problèmes de géométrie au moyen d'expressions algébriques. L'énoncé inaugural actuellement le plus célèbre est sans doute celui connu sous le nom de « thèse de Church-Turing » qui affirme que les nombres ou les fonctions calculables coïncident avec les fonctions λ -définissables, ou encore avec les fonctions générales récursives ou de manière encore équivalente avec les machines de Turing.

2 - L'énoncé inaugural pour les séries trigonométriques

Dans l'avant dernier article du troisième chapitre de la *Théorie analytique de la chaleur*, Fourier tire les conséquences des développements qui précèdent. L'énoncé qu'il donne alors est aussi un énoncé inaugural :

« Il résulte de tout ce qui a été démontré dans cette Section concernant le développement des fonctions en séries trigonométriques que, si l'on propose une fonction $f(x)$ dont la valeur est représentée, dans un intervalle déterminé, depuis $x=0$ jusqu'à $x=X$, par l'ordonnée d'une ligne courbe tracée arbitrairement, on pourra toujours développer cette fonction en une série qui ne contiendra que les sinus ou les cosinus, ou les sinus et cosinus des arcs multiples, ou les seuls cosinus des multiples impairs. » art. 235.

Fourier soutient ici qu'une fonction arbitraire définie sur un intervalle borné (la borne inférieure étant en l'occurrence 0), peut toujours être développée en une série trigonométrique. Cet énoncé, qui se retrouve dans les divers Mémoires dans lesquels Fourier a exposé sa théorie avant la publication de ce livre en 1822, présente toutes les caractéristiques d'un énoncé inaugural³. Il y a bien un dualisme avec d'une part les courbes (« ligne courbe tracée arbitrairement ») et d'autre part l'expression analytique des fonctions au moyen d'une série trigonométrique. Les courbes ont bien le statut d'une totalité pré-établie (réalisme) que Fourier assimile ici à des tracés, ailleurs à une distribution de température. Fourier soutient bien aussi la conformité de ces deux totalités : toute courbe est la courbe d'une fonction qui peut être développée en une série trigonométrique, la réciproque,

3 On peut citer comme autres énoncés : "Il résulte de mes recherches sur cet objet que les fonctions arbitraires même discontinues peuvent toujours être représentées par les développements en sinus ou cosinus d'arcs multiples, et que les intégrales qui contiennent ces développements sont précisément aussi générales que celles où entrent les fonctions arbitraires d'arcs multiples." Fourier 1806, cité in Grattan-Guinness 1972, 183 ; « L'exposition détaillée des résultats de notre analyse ne peut laisser aucun doute sur le véritable sens dans lequel ils doivent être pris ; les développements de sinus et de cosinus multiples ont évidemment toute la généralité que comporte les fonctions arbitraires. » Fourier 1807, 113 ; « une fonction quelconque peut toujours être développée en séries de sinus ou de cosinus d'arcs multiples » Fourier 1807, 115 ; « cette remarque est essentielle, en ce qu'elle conduit à connaître comment les fonctions entièrement arbitraires peuvent aussi être développées en séries de sinus d'arcs multiples." Fourier 1807, voir aussi Fourier 1822, p. 234. "Les théorèmes dont il s'agit donnent le moyen de réduire une fonction arbitraire et même discontinue en séries trigonométriques. Cette nouvelle extension de la théorie des suites était nécessaire pour autoriser l'emploi des solutions particulières des équations aux différences partielles." "Notes jointes à l'extrait du mémoire sur la chaleur", cité in Hérivel 1980, p 59.

tenue pour évidente, n'a pas besoin d'être énoncée. L'incommensurabilité résulte de l'absence de rapport établi entre l'expression d'une courbe ou une distribution de chaleur dans un corps et l'expression d'une série trigonométrique. C'est une incommensurabilité semblable à celle entre les courbes géométriques et les équations polynomiales de *La Géométrie* en dépit des différences qu'il y a entre les expressions polynomiales de Descartes et celles des fonctions considérées par Fourier. Cette incommensurabilité n'est pas directement commentée par Fourier qui trouve tout de même « remarquable que l'on puisse exprimer par des séries convergentes et, comme on le verra dans la suite, par des intégrales définies les ordonnées des lignes et des surfaces qui ne sont pas assujetties à une loi continue » (Fourier 1822, art. 230). Il en est néanmoins question dans son « Discours préliminaire », sur lequel nous reviendrons, au travers des considérations philosophiques sur le rapport étroit qui lie l'Analyse mathématique aux phénomènes naturels. Elle est aussi avérée, et avec elle la condition d'inauguration, par le dispositif argumentatif développé pour soutenir cet énoncé. Et si Fourier ne s'étend pas sur l'impossibilité d'établir la conformité qu'il revendique, il avertit le lecteur qu'il a dû déroger au mode d'exposition habituel des Mémoires scientifiques et qu'il reviendra dans ses publications ultérieures au mode d'exposition traditionnel plus concis⁴.

3 - Un texte inaugural

Pour établir que la *Théorie analytique de la chaleur* est bien un texte inaugural nous allons à présent simplement en suivre la progression et mettre en évidence en quoi les exemples et les développements mathématiques proposés participent à l'inauguration des séries trigonométriques.

a) Présentation d'ensemble

La *Théorie analytique de la chaleur* est composée de neuf chapitres précédés d'un « Discours préliminaire ». Le premier est un chapitre d'introduction. Fourier y définit les grandeurs physiques considérées (température, capacité spécifique, C , conductibilité extérieure, h , et intérieure, K) et leur mesure, le modèle et les principes adoptés pour décrire la diffusion de la chaleur à l'intérieur et à la surface d'un corps fondés sur une représentation moléculaire des phénomènes thermiques. Il étudie le flux de la chaleur dans divers solides simples (solide homogène compris entre deux plans infinis, parallélépipède de longueur infinie, etc.), chauffés à leur surface mais ayant atteint leur état permanent de telle sorte que la

4 « Nous avons démontré dans cet Ouvrage tous les principes de la Théorie de la chaleur, et résolu toutes les questions fondamentales. On aurait pu les exposer sous une forme plus concise, omettre les questions simples, et présenter d'abord les conséquences les plus générales ; mais on a voulu montrer l'origine même de la Théorie et ses progrès successifs. Lorsque cette connaissance est acquise, et que les principes sont entièrement fixés, il est préférable d'employer immédiatement les méthodes analytiques les plus étendues, comme nous l'avons fait dans les recherches ultérieures. C'est aussi la marche que nous suivrons désormais dans les Mémoires qui seront joints à cet Ouvrage, et qui ne forment en quelque sorte le complément, et par là nous aurons concilié, autant qu'il peut dépendre de nous, le développement nécessaire des principes avec la précision qui convient aux applications de l'Analyse. » Fourier 1822, Discours préliminaire, Oeuvres I, xxiv-xxv.

chaleur diffuse mais la température en chaque point ne varie plus. Ce ne sont bien sûr pas à proprement parler des solides, mais des cas de figure, voire des « cas de solides ». Le chapitre II établit les équations différentielles partielles de la propagation de la chaleur pour différents « cas de solides » (armille, sphère, cylindre, parallélépipède de longueur infinie, etc.) dans lesquels la chaleur se diffuse à l'intérieur et se dissipe vers l'extérieur par sa surface et dont la température en chaque point varie avec le temps. Les chapitres III à VIII sont chacun consacrés à l'analyse de la propagation de la chaleur dans l'un de ces solides à partir de l'équation différentielle trouvée au chapitre II. Le neuvième et dernier chapitre est consacré à la diffusion dans une masse solide homogène dont toutes les dimensions sont infinies.

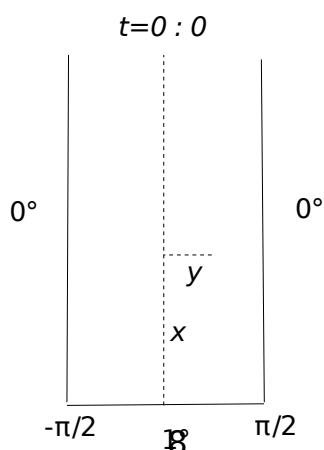
Comme pour une variation infinitésimale du temps, les températures aux bords peuvent être supposées constantes, les solides étudiés au chapitre I sont ceux qui apparaissent lors de l'analyse infinitésimale des différents corps considérés aux chapitres suivants. Le bilan des entrées et des sorties de chaleur dans ces éléments de volume au cours d'une variation infinitésimale de temps permet d'obtenir au chapitre II les équations différentielles régissant la variation de la chaleur dans ces solides (armille, sphère, cylindre, parallélépipède d'une longueur infinie, cube et enfin un parallélépipède rectangle).

b) Le chapitre III

L'énoncé inaugural est énoncé à la fin du chapitre III. Ce chapitre, consacré au cas d'un solide rectangulaire infini, est le premier des cinq chapitres dans lesquels Fourier détermine la distribution de la chaleur pour les différents cas de solides considérés à partir de l'équation différentielle partielle qui a été établie au chapitre II. Il s'agit donc pour nous de déterminer de quelle manière le soutien de cet énoncé s'articule à l'étude de la distribution de la chaleur dans ce « cas de solide ». Nous allons pour cela suivre les phases successives de la résolution de ce problème tout au long de ce chapitre jusqu'à l'énoncé de la thèse à la fin de celui-ci.

i) La solution de l'équation différentielle avec ses conditions aux bords

Le « cas de solide » considéré est donc une lame de longueur infinie dont la température à la base est maintenue à 1, et celle à ses deux côtés infinis est maintenue à 0, la température initiale de la barre étant supposée nulle.



Fourier cherche à déterminer la distribution de la chaleur dans cette lame quand la chaleur a atteint un état permanent. D'après l'équation obtenue pour un parallépipède de longueur infinie, l'équation différentielle régissant la variation de la chaleur en un point de la lame est $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ avec les conditions initiales déterminées par les conditions aux bords, x variant de 0 à $+\infty$ et y de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$ (ces valeurs sont choisies pour simplifier les expressions obtenues).

Fourier cherche une solution en séparant les variables, c'est-à-dire en posant $v = F(x)f(y)$. Il obtient comme solutions $F(x) = e^{-mx}$, $f(y) = \cos(my)$, où m est une constante quelconque. Il obtient ainsi une infinité de solutions de la forme $v = e^{-mx} \cos(my)$, où m doit, pour satisfaire aux conditions physiques du problème, être positif et annuler le cosinus pour les valeurs extrêmes de y , ce qui limite ses valeurs possibles à $m = 1, 3, 5, \text{etc.}$. L'expression $v = e^{-mx} \cos(my)$, $m = 1, 3, 5, \text{etc.}$, est l'expression d'une infinité (autant que de valeurs possibles de m), et à ce titre elle est générale, mais elle est aussi particulière puisqu'elle ne prend en compte que les solutions de la forme particulière $v = F(x)f(y)$. Compte tenu de la linéarité de l'équation différentielle, toute combinaison linéaire de ces solutions est aussi une solution. L'expression

$$v = a e^{-x} \cos(y) + b e^{-3x} \cos(3y) + c e^{-5x} \cos(5y) + d e^{-7x} \cos(7y) + \dots$$

est donc à nouveau l'expression d'une solution de l'équation plus générale que les précédentes qu'elle comprend. Pour être une solution du problème elle doit aussi satisfaire la condition à la base de la lame, soit :

$$1 = a \cos(y) + b \cos(3y) + c \cos(5y) + d \cos(7y) + \dots$$

Au terme d'un assez long calcul faisant intervenir le développement de π en produit infini, Fourier peut déterminer la valeur des coefficients $a, b, c, \text{etc.}$ (art. 171-177) :

$$\frac{\pi}{4} = \cos(y) - \frac{1}{3} \cos(3y) + \frac{1}{5} \cos(5y) - \frac{1}{7} \cos(7y) + \dots$$

L'expression de la fonction v de la distribution de la chaleur dans la lame est donc (art. 190) :

$$\frac{\pi v}{4} = e^{-x} \cos(y) - \frac{1}{3} e^{-3x} \cos(3y) + \frac{1}{5} e^{-5x} \cos(5y) - \frac{1}{7} e^{-7x} \cos(7y) + \dots$$

Il a ainsi trouvé l'expression d'un état permanent (fonction de x et de y indépendante du temps), qui satisfait à toutes les conditions aux bords. Un simple changement de variable donne l'expression de cette solution pour une base de longueur $2l$ au lieu de π (art. 196):

$$v = \frac{4A}{\pi} \left(e^{-\frac{\pi x}{2l}} \cos \frac{\pi y}{2l} - \frac{1}{3} e^{-\frac{3\pi x}{2l}} \cos 3 \frac{\pi y}{2l} + \frac{1}{5} e^{-\frac{5\pi x}{2l}} \cos 5 \frac{\pi y}{2l} - \frac{1}{7} e^{-\frac{7\pi x}{2l}} \cos 7 \frac{\pi y}{2l} + \dots \right)$$

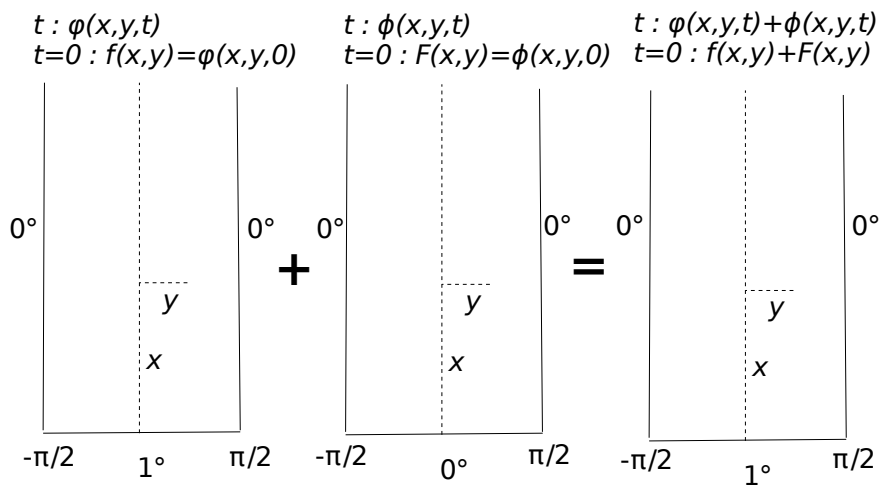
Il peut alors conclure :

« Cette équation représente exactement le système des températures permanentes dans un prisme rectangulaire infini, compris entre deux masses de glace B et C et une source de chaleur constante. » Fourier 1822, art. 196

ii) L'unicité de la solution et la décomposition d'une lame

Fourier s'attache ensuite à établir que la solution qu'il a trouvée est la seule, c'est-à-dire que l'équation différentielle, avec ses conditions aux bords, n'admet pas d'autre solution (art. 200-204).

La preuve de cette unicité est fondée sur une sorte de principe de *décomposition* d'une lame en deux autres lames. Voyons quel est ce principe. On considère pour cela deux lames. Les conditions aux bords de la première lame sont celles du problème (0 sur les bords infinis, 1 sur la base) avec une distribution de chaleur initiale $f(x, y)$ et pour un temps quelconque $\varphi(x, y, t)$. Les conditions aux bords de la deuxième lame sont celles du problème, mais avec une température à la base maintenue à 0 au lieu de 1, avec une distribution initiale $F(x, y)$ et pour un temps quelconque $\Phi(x, y, t)$.

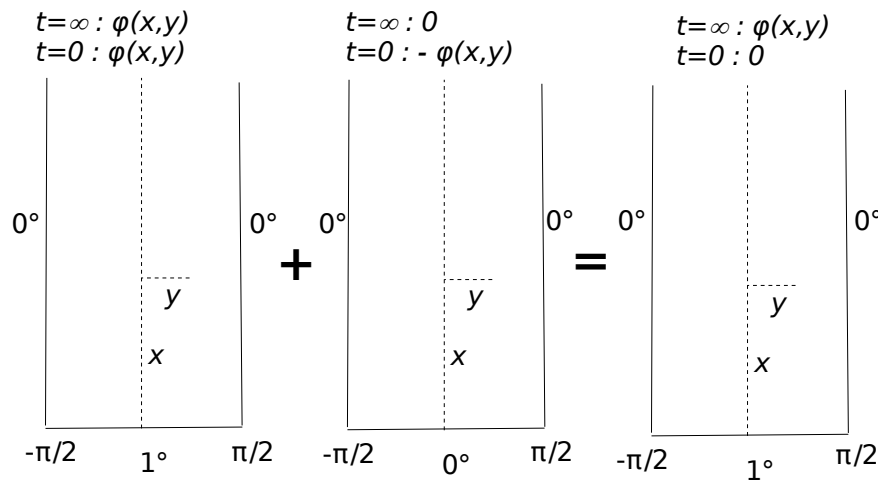


La « somme » de ces deux lames définit une troisième lame dont les conditions aux bords sont les mêmes que celles du problème avec une distribution initiale de la chaleur dans la lame $f(x, y) + F(x, y)$. Fourier démontre, en revenant au bilan des échanges moléculaires et en faisant intervenir diverses *hypotheses physiques*, que son évolution doit être la somme des distributions initiales de chacune des deux lames, soit $\varphi(x, y, t) + \Phi(x, y, t)$ (art. 202) :

« La proposition précédente s'applique à toutes les questions relatives au mouvement uniforme ou varie de la chaleur. Elle fait voir que ce mouvement peut toujours être décomposé en plusieurs autres dont chacun s'accomplit séparément comme s'il avait lieu seul. Cette superposition des effets simples est un des éléments fondamentaux de la théorie de la chaleur. Elle est exprimée dans le calcul par la nature même des équations générales et tire son origine du principe de la communication de la chaleur. » art. 203

La diffusion de la chaleur dans une lame peut être ainsi décomposée en faisant intervenir la diffusion dans deux autres lames, cette décomposition étant aussi valable pour les états permanents.

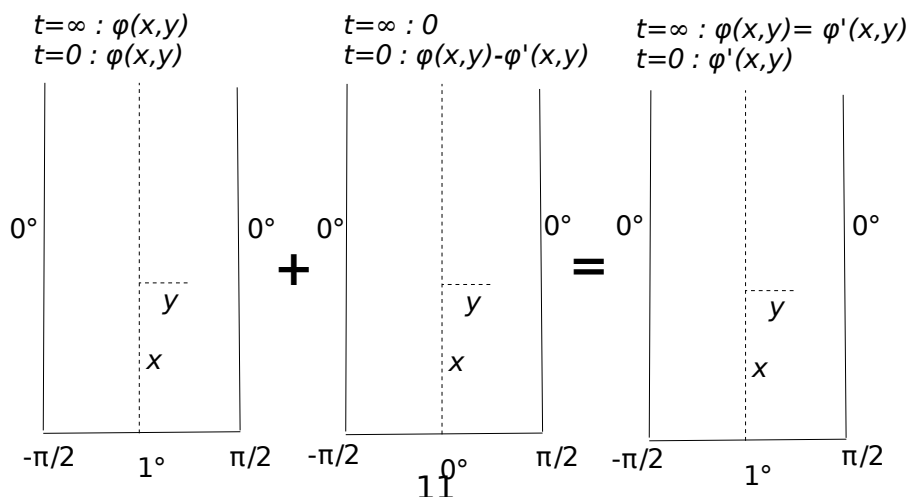
Le système étudié peut alors être décomposé en deux lames ayant une distribution de température initiale $\varphi(x, y)$ et $-\varphi(x, y)$, où $\varphi(x, y)$ est l'état permanent trouvé dont il s'agit d'établir l'unicité.



Comme $\varphi(x,y)$ est solution de l'équation différentielle qui décrit l'évolution du système et correspond donc à un état permanent, la température de la première lame restera constante malgré l'apport de chaleur à la base (l'apport compense exactement les pertes sur les côtés). La seconde lame ayant sa température sur les trois bords maintenue à zéro, Fourier a établi, *en en appelant à une évidence physique*, que la température finale ne pourra être que nulle (art. 201). L'état permanent du système résultant sera donc aussi $\varphi(x,y)$ (203). Il donne alors à ce résultat l'interprétation générale suivante :

« Si l'on suppose la lame solide dans un autre état initial, la différence entre ce dernier état et l'état fixe forme un état partiel qui disparaît insensiblement. Après un temps considérable, cette différence est presque évanouie, et le système des températures fixes n'a subi aucun changement. C'est ainsi que les températures variables convergent de plus en plus vers un état final, indépendant de l'échauffement primitif. » art. 203

Pour établir l'unicité de la solution il suffit à présent de supposer que le problème admette une autre solution $\varphi'(x,y)$ différente de $\varphi(x,y)$, et de décomposer ce système comme indiqué sur la figure :



Ce système étant stationnaire conservera indéfiniment la température $\varphi'(x, y)$. Mais d'après sa décomposition cet état permanent devrait être $\varphi(x, y)$. Contradiction. La solution trouvée doit donc être unique (art. 204).

iii) Expression finie de la solution

L'unicité ainsi établie, l'étude de l'état permanent d'une lame se termine par la transformation de la série trigonométrique infinie en une expression finie. Pour cela Fourier met la solution trouvée sous la forme $\frac{\pi v}{2} = \arctang e^{-(x+y\sqrt{-1})} + \arctang e^{-(x-y\sqrt{-1})}$, ce qui fait apparaître la forme générale connue de la solution de l'équation différentielle (sans les conditions aux bords) $\varphi(x+y\sqrt{-1}) + \psi(x-y\sqrt{-1})$, forme que nous retrouverons dans la partie de cette étude consacrée à Bernoulli, qu'il peut réduire à « la forme la plus simple sous laquelle on puisse présenter la solution de la question » (art. 205) :

$$\frac{1}{2}\pi v = \arctang \frac{2 \cos y}{e^x - e^{-x}} .$$

iv) Le développement d'une fonction impaire en série trigonométrique

A ce stade, Fourier a déterminé et établi l'unicité de l'expression de la température permanente dans une lame infinie dont la température sur les deux côtés est nulle et celle à la base est maintenue à 1 :

$$\frac{\pi v}{4} = e^{-1} \cos(y) - \frac{1}{3} e^{-3} \cos(3y) + \frac{1}{5} e^{-5} \cos(5y) - \frac{1}{7} e^{-7} \cos(7y) + \dots .$$

Cette expression a été obtenue à partir d'une solution générale $v = a e^{-1} \cos(y) + b e^{-3} \cos(3y) + c e^{-5} \cos(5y) + d e^{-7} \cos(7y) + \dots$ de l'équation différentielle dont les coefficients ont été déterminés en tenant compte de la température au bord inférieur, ce qui se traduisait par l'équation :

$$1 = a \cos(y) + b \cos(3y) + c \cos(5y) + d \cos(7y) + \dots$$

Autrement dit, déterminer le régime permanent à partir de la solution générale de l'équation différentielle revient à trouver le développement en série trigonométrique de la distribution de la température à la base de la lame (ici, uniforme et égale à 1). Déterminer le régime permanent dans une lame dont la température à la base est une fonction arbitraire, et non plus constante et égale à 1, conduit dès lors à considérer le problème du développement d'une fonction arbitraire en série trigonométrique :

« on n'a traité qu'un seul cas d'un problème plus général, qui consiste à développer une fonction quelconque en une suite infinie de sinus ou de cosinus d'arcs multiples. Cette question est liée à la théorie des équations aux différences partielles et a été agitée dès l'origine de cette analyse. Il était nécessaire de la résoudre pour intégrer convenablement les équations de la propagation de la chaleur ; nous allons en exposer la solution. » art. 207

L'étude d'une lame infinie dont la température à la base est maintenue constante et égale à 1 a donc permis de soutenir l'énoncé inaugural pour la fonction constante égale à 1 (et donc en fait pour toutes les fonctions constantes). Fourier poursuit en montrant maintenant qu'une fonction donnée par son développement de Taylor en 0, celui-ci ne comprenant que des puissances *impaires*, peut être développée en une série trigonométrique en sinus. Cela le conduit à résoudre un système infini d'équations linéaires infinies à coefficients constants. Au terme d'un long calcul faisant intervenir diverses manipulations de séries infinies, il peut donner l'expression des coefficients de la série trigonométrique en fonction des dérivées successives de la fonction en 0 (art. 202) ou en π (art. 217)⁵. L'expression en π , plus simple, conduit à l'expression suivante de $\varphi(x)$:

$$\frac{\pi}{2} \varphi(x) = s_1 \frac{\sin(x)}{1} - s_2 \frac{\sin(2x)}{2} + s_3 \frac{\sin(3x)}{3} - \dots \quad (a)$$

avec :

$$s_n = \varphi(\pi) - \frac{1}{n^2} \varphi''(\pi) + \frac{1}{n^4} \varphi^{IV}(\pi) - \frac{1}{n^6} \varphi^{VI}(\pi) + \dots$$

En posant⁶ :

$$\sigma_n(x) = \varphi(x) - \frac{1}{n^2} \varphi''(x) + \frac{1}{n^4} \varphi^{IV}(x) - \frac{1}{n^6} \varphi^{VI}(x) + \dots$$

on a :

$$\sigma_n(\pi) = s_n$$

et en dérivant deux fois la relation qui définit $\sigma_n(x)$, $\sigma_n(x)$ apparaît comme solution de l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre :

$$\sigma_n + \frac{1}{n^2} \frac{d^2 \sigma_n}{dx^2} = \varphi(x)$$

Il existe donc deux nombres a et b tels que :

$$\sigma_n(x) = a \cos nx + b \sin nx + n \sin nx \int_0^x \varphi(u) \cos nu \, du - n \cos nx \int_0^x \varphi(u) \sin nu \, du \quad .$$

Comme $s_n = \sigma_n(\pi)$, on a :

$$\begin{aligned} s_1 &= \sigma_1(\pi) = + \int_0^\pi \varphi(x) \sin x \, dx ; \\ s_2 &= \sigma_2(\pi) = - 2 \int_0^\pi \varphi(x) \sin 2x \, dx ; \\ s_3 &= \sigma_3(\pi) = + 3 \int_0^\pi \varphi(x) \sin 3x \, dx ; \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

En remplaçant ces valeurs dans (a), on obtient :

(M)⁷

$$\frac{\pi}{2} \varphi(x) = \sin x \int \sin x \varphi(x) \, dx + \sin 2x \int \sin 2x \varphi(x) \, dx + \sin 3x \int \sin 3x \varphi(x) \, dx + \dots + \sin ix \int \sin ix \varphi(x) \, dx + \dots$$

La fonction $\varphi(x)$ a ainsi été développée en une série trigonométrique dont les coefficients sont explicitement donnés à partir de la fonction elle-même.

5 Darboux critique ce calcul mais le corrige aussi facilement (Fourier 1888, notes p. 189 et 191).

6 Fourier n'introduit pas la notion $\sigma_n(x)$ et note ces fonctions s comme les coefficients, sans utiliser d'indice.

7 La relation (M) désigne dans le livre de Fourier la même relation sur l'intervalle $[0 ; r]$ au lieu, comme ici, d'être sur l'intervalle $[0 ; \pi]$. Cette distinction étant sans conséquences pour notre propos, (M) désignera ici indifféremment l'une ou l'autre de ces expressions.

v) Le développement d'une fonction arbitraire en série trigonométrique

La possibilité de développer une fonction en série de sinus a ainsi été *démontrée* pour toutes les fonctions dont le développement de Taylor en 0 n'a que des puissances impaires de la variable. La généralisation à une fonction arbitraire, définie entre 0 et π , est faite dans le passage suivant :

« Cette remarque [c'est-à-dire le fait que les coefficients de la série trigonométrique soient donnés par l'expression intégrale] est importante, en ce qu'elle fait connaître comment les fonctions entièrement arbitraires peuvent aussi être développées en séries de sinus d'arcs multiples. En effet, si la fonction $\varphi(x)$ est représentée par l'ordonnée variable d'une courbe quelconque, dont l'abscisse s'étend depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$, et si l'on construit sur cette même partie de l'axe la courbe trigonométrique connue dont l'ordonnée est $y=\sin x$, il sera facile de se représenter la valeur d'un terme intégral. Il faut concevoir que, pour chaque abscisse x à laquelle répond une valeur de $\varphi(x)$ et une valeur de $\sin x$, on multiplie cette dernière valeur par la première, et qu'au même point de l'axe on élève une ordonnée proportionnelle au produit $\varphi(x)\sin x$. On formera, par cette opération continue, une troisième courbe dont les ordonnées sont celles de la courbe trigonométrique, réduites proportionnellement aux ordonnées de la courbe arbitraire qui représente $\varphi(x)$. Cela posé, l'aire de la courbe réduite, étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$, donnera la valeur exacte du coefficient de $\sin x$; et, quelle que puisse être la courbe donnée qui répond à $\varphi(x)$, soit qu'on puisse lui assigner une équation analytique, soit qu'elle ne dépende d'aucune loi régulière, il est évident qu'elle servira toujours à réduire d'une manière quelconque la courbe trigonométrique ; en sorte que l'aire de la courbe réduite a, dans tous les cas possibles, une valeur déterminée qui donne celle du coefficient de $\sin x$ dans le développement de la fonction. Il en est de même du coefficient suivant b ou $\int_0^\pi \varphi(x)\sin 2x dx$ » art. 220.

Fourier explique en détail dans ce passage comment obtenir à partir de la courbe de $\varphi(x)$ les coefficients $\int_0^\pi \varphi(x)\sin x dx, \int_0^\pi \varphi(x)\sin 2x dx, \text{etc.}$. Il ne justifie pas en revanche que l'on obtienne ainsi un développement de $\varphi(x)$, c'est-à-dire que les valeurs de $\varphi(x)$ et celles obtenues à partir de la série trigonométrique associée coïncident.

En supposant $\varphi(x)$ développable en série trigonométrique

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \dots + a_j \sin jx + \dots$$

et en multipliant par $\int_0^\pi \varphi(x)\sin ix dx$, il peut vérifier que l'on doit avoir

$$a_i = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x)\sin ix dx \quad (\text{art. 221}).$$

Si donc la fonction admet un développement en série trigonométrique, ses coefficients seront donnés par la formule intégrale (en admettant les interversions entre signes d'intégration et de sommation⁸).

A ce stade, Fourier doit encore soutenir son énoncé inaugural au-delà de la famille de fonctions pour laquelle il a été possible de le *démontrer*. Il prend pour cela des exemples cruciaux (Herreman xxxx). Il va ainsi montrer qu'il est possible de développer la fonction $\cos x$ en somme de sinus (« un exemple qui ne laisse aucun doute sur [cette] possibilité »). L'exemple est extrême puisqu'il consiste à

8 Cette condition n'est pas anodine puisqu'elle suppose une théorie *générale* de l'intégration qui doit faire intervenir, par un moyen ou un autre, une notion générale de fonction.

montrer qu'une fonction paire peut être développée en une somme de fonctions impaires, ce qui avait été un des arguments opposés à Daniel Bernoulli pour réfuter la possibilité de tels développements (voir plus bas). Cela étant, même dans ce cas, Fourier ne fait que calculer les coefficients avec les formules intégrales et écrire, sans vérifier l'égalité pour toutes les valeurs de la variable (art. 223) :

$$\frac{\pi}{4} \cos x = \frac{2}{1.3} \sin 2x + \frac{4}{3.5} \sin 4x + \frac{6}{5.7} \sin 6x + \frac{8}{7.9} \sin 8x + \frac{10}{9.11} \sin 10x + \dots$$

En remplaçant $\int_0^\pi \varphi(x) \sin ix \, dx$ par $\int_0^\pi \varphi(x) \cos ix \, dx$ il peut de la même manière, sans plus de justifications et avec les mêmes réserves, obtenir le développement en série de *cosinus* (art. 224-225). Il considère aussi des fonctions discontinues, comme la fonction égale à $\frac{\pi}{2}$ pour $0 \leq x \leq \alpha$ et nulle pour $\alpha < x \leq \pi$ (art. 226), ou encore la fonction égale à $\sin \frac{\pi x}{\alpha}$ pour $0 \leq x \leq \alpha$ et nulle pour $\alpha < x \leq \pi$ (art. 226), une fonction définie par un arc de courbe et une ligne droite (art. 227), un contour de trapèze (art. 228) et la surface d'une pyramide (art. 229). Tous ces exemples illustrent le pouvoir expressif des séries trigonométriques. Fourier peut alors introduire son énoncé inaugural pour les fonctions définies entre $-\pi$ et $+\pi$:

« Les suites formées de sinus ou de cosinus d'arcs multiples sont donc propres à représenter, entre des limites déterminées, toutes les fonctions possibles, et les ordonnées des lignes ou des surfaces dont la loi est discontinue. Non seulement la possibilité de ces développements est démontrée, mais il est facile de calculer les termes des séries ; la valeur d'un coefficient quelconque dans l'équation

$$\varphi(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \dots + a_i \sin ix + \dots$$

est celle d'une intégrale définie, savoir

$$\frac{2}{\pi} \int \varphi(x) \sin ix \, dx \quad .$$

Quelle que puisse être la fonction $\varphi(x)$, ou la forme de la courbe qui la représente, l'intégrale a une valeur déterminée qui peut être introduite dans le calcul. Les valeurs de ces intégrales définies sont analogues à celle de l'aire totale $\int \varphi(x) \, dx$ comprise entre la courbe et l'axe dans un intervalle donné, ou à celles des quantités mécaniques, telles que les ordonnées du centre de gravité de cette aire ou d'un solide quelconque. Il est évident que toutes ces quantités ont des valeurs assignables, soit que la figure des corps soit régulière, soit qu'on leur donne une forme entièrement arbitraire. » art. 229

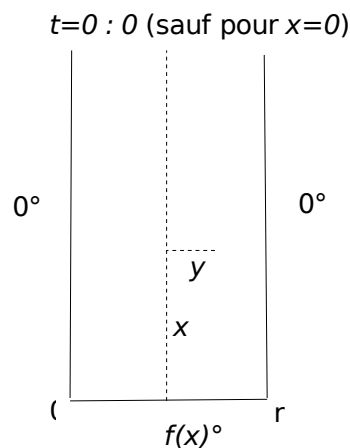
Le développement d'une fonction quelconque définie entre $-\pi$ et $+\pi$ (au lieu de l'être entre 0 et $+\pi$) se fait avec des séries de sinus *et* de cosinus (art. 233). Fourier peut ainsi conclure par son énoncé inaugural pour des fonctions définies sur un intervalle borné quelconque :

« Il résulte de tout ce qui a été démontré dans cette Section concernant le développement des fonctions en séries trigonométriques que, si l'on propose une fonction $f(x)$ dont la valeur est représentée, dans un intervalle déterminé, depuis $x=0$

jusqu'à $x=X$, par l'ordonnée d'une ligne courbe tracée arbitrairement, on pourra toujours développer cette fonction en une série qui ne contiendra que les sinus ou les cosinus, ou les sinus et cosinus des arcs multiples, ou les seuls cosinus des multiples impairs. » art. 235.

vi) Application à une distribution à la base définie par une fonction arbitraire

Le chapitre se termine en reprenant le problème de la distribution de la chaleur dans une plaque infinie dans laquelle la distribution à la base de longueur r est maintenant définie par une *fonction arbitraire* $f(x)$.



La solution générale de l'équation différentielle est toujours la même :

$$v = a_1 e^{-\frac{\pi y}{r}} \sin \frac{\pi x}{r} + a_2 e^{-2\frac{\pi y}{r}} \sin 2 \frac{\pi x}{r} + a_3 e^{-3\frac{\pi y}{r}} \sin 3 \frac{\pi x}{r} + \dots$$

La condition à la base devient ($y=0$) :

$$f(x) = a_1 \sin \frac{\pi x}{r} + a_2 \sin 2 \frac{\pi x}{r} + a_3 \sin 3 \frac{\pi x}{r} + \dots$$

La relation (M) permet alors de calculer la valeur des coefficients de la solution générale satisfaisant les conditions aux bords et ainsi d'obtenir dans ce cas aussi l'expression du régime permanent dans la lame (art. 236). Le dernier article est consacré à donner une expression finie (avec néanmoins une intégrale) de la solution.

Le cas de la lame avec à sa base une distribution de chaleur définie par une fonction arbitraire est donné comme une *application* des développements précédents. Et en effet, la relation (M) permet de déterminer les coefficients cherchés et donc de reprendre pour une fonction quelconque la résolution donnée pour la fonction constante égale à 1. Mais ce dispositif est aussi une sorte de *preuve physique* de la possibilité de représenter n'importe quelle fonction $f(x)$ par une série trigonométrique. Cette lame peut en effet être vue comme un *instrument* donnant le développement d'une fonction en série trigonométrique comme il existe des instruments pour en calculer l'intégrale. En admettant que la lame atteindra de fait un état permanent, l'expression de l'état permanent prise en $y=0$ donnera bien une représentation de $f(x)$, en l'occurrence sous la forme d'une série trigonométrique puisqu'il a été démontré que l'expression générale était de cette forme. Ainsi, en appliquant à la base d'une lame infinie une

température dont la distribution est donnée par $f(x)$, l'état permanent atteint par la lame considérée au bord donnera un développement en série de sinus de cette fonction. Toutes les questions mathématiques de convergence des séries trigonométriques ont ainsi un sens physique, à savoir la continuité de la distribution de la chaleur à la base de la lame une fois l'état permanent atteint. La relation (M) ne joue ici plus aucun rôle. Le rôle de son expression dans le soutien de l'énoncé inaugural est remplacé par celui de l'expression du modèle de la lame, soit schématique soit physique, dans lequel il est possible de *placer* l'expression de n'importe quelle fonction. L'expression schématique ou physique de la lame est ainsi l'expression d'une relation fonctionnelle comme la relation (M) en est une expression mathématique.

4 - Conformité et dualisme

a) Conformité

Ce qui précède restitue l'étude mathématique de la distribution de la chaleur dans une lame infinie et la manière dont la question de la représentation d'une fonction arbitraire par une série trigonométrique s'inscrit dans celle-ci. Mais l'inauguration ne se réduit pas à soutenir une correspondance : la conformité ne se réduit pas à établir une correspondance entre les courbes ou les distributions de température et les séries trigonométriques. Il faut encore soutenir que les propriétés des premières se retrouvent dans celles des séries et que les propriétés des séries se retrouvent dans les premières. Tout au long de cette étude Fourier s'assure en effet systématiquement de la complète interprétabilité des expressions mathématiques qu'il considère, c'est-à-dire de la conformité des séries trigonométriques avec les phénomènes auxquelles elles se rapportent. Il s'agit bien pour lui de soutenir que l'Analyse mathématique "réduit *toutes* [c'est moi qui souligne] les recherches physiques sur la propagation de la chaleur à des questions de Calcul intégral dont les éléments sont donnés par l'expérience." (art. 1). Il fait ainsi valoir que les séries trigonométriques donnent des valeurs de la température en un point donné de la lame conformes aux expériences :

« Il restait encore à comparer les faits avec la Théorie. On a entrepris, dans cette vue, des expériences variées et précises dont les résultats sont conformes à ceux du calculs et lui donnent une autorité qu'on eût été porté à lui refuser dans une matière nouvelle et qui paraît sujette à tant d'incertitude. » Fourier 1822, 10

L'expression des séries offre aussi une représentation de la chaleur qui se diffuse, de son mode fondamental, de ses modes propres etc :

« Les intégrales que nous avons obtenues ne sont point seulement des expressions générales qui satisfont aux équations différentielles : elles représentent de la manière la plus distincte l'effet naturel, qui est l'objet de la question. C'est cette condition principale que nous avons eue toujours en vue, et sans laquelle les résultats du calcul ne nous paraîtraient que des transformations inutiles. Lorsque cette condition est remplie, l'intégrale est, à proprement parler, *l'équation du phénomène* ; elle en exprime clairement le caractère et le progrès, de même que l'équation finie d'une ligne ou d'une surface courbe fait connaître toutes les propriétés de ces figures. (...) En général, on ne pourrait apporter aucun

changement dans la forme de nos solutions sans leur faire perdre leur caractère essentiel, qui est de représenter les phénomènes. » (art. 428).

Ainsi, l'expression $v = a e^{-x} \cos(y) + b e^{-3x} \cos(3y) + c e^{-5x} \cos(5y) + d e^{-7x} \cos(7y) + \dots$ est *intégralement* signifiante et son analyse est conforme à l'analyse des phénomènes thermiques⁹. Elle rend la propagation de la chaleur visible comme nos oreilles nous font entendre les résonances harmoniques d'un corps sonore (xxiv). Elle ne « laisse rien de vague et d'indéterminé » (xxii). On peut avec elle « déterminer *toutes* [c'est moi qui souligne] les circonstances du mouvement permanent de la chaleur dans une lame rectangulaire échauffée à son origine »

- 9 « L'irradiation de la chaleur a une relation manifeste avec les Tables de sinus ; car les rayons, qui sortent d'un même point d'une surface chauffée, diffèrent beaucoup entre eux, et leur intensité est rigoureusement proportionnelle au sinus de l'angle que fait leur direction avec l'élément de la surface. Si l'on pouvait observer pour chaque instant, et en chaque point d'une masse solide homogène, les changements de température, on retrouverait dans la série de ces observations les propriétés des séries récurrentes, celles des sinus et des logarithmes ; on les remarquerait, par exemple, dans les variations diurnes ou annuelles des températures des différents points du globe terrestre qui sont voisins de la surface. » art. 20

Ou encore : « L'équation

$$v = \frac{4}{\pi} e^{-x} \cos(y)$$

représente ainsi un état du solide qui se conserverait sans aucun changement, s'il était d'abord formé ; il en serait de même de l'état exprimé par l'équation

$$v = \frac{4}{3\pi} e^{-3x} \cos(3y)$$

et en général, chaque terme de la série correspond à un état particulier qui jouit de la même propriété.

Tous ces systèmes partiels existent à la fois dans celui que représente l'équation (α) ; ils se superposent, et le mouvement de la chaleur a lieu pour chacun d'eux de la même manière que s'il était seul. Dans l'état qui répond à l'un quelconque de ces termes, les températures fixes des points de la base A diffèrent d'un point à un autre, et c'est la seule condition de la question qui ne soit pas remplie ; mais l'état général qui résulte de la somme de tous les termes satisfait à cette même condition.

(...)

On voit donc que les valeurs particulières

$$a e^{-x} \cos(y), b e^{-3x} \cos(3y), c e^{-5x} \cos(5y), \dots$$

prennent leur origine dans la question physique elle-même et ont une relation nécessaire avec les phénomènes de la chaleur. Chacune d'elle exprime un mode simple suivant lequel la chaleur s'établit et se propage dans une lame rectangulaire, dont les côtés infinis conservent une température constante. Le système général des températures se compose toujours d'une multitude de systèmes simples, et l'expression de leur somme n'a d'arbitraire que les coefficients a, b, c, d, ... » art. 191

Citons enfin : « La décomposition dont il s'agit n'est point un résultat purement rationnel et analytique ; elle a lieu effectivement et résulte des propriétés physiques de la chaleur. » Fourier, "Extrait du

(art. 192), elle « représente exactement *toutes* [c'est moi qui souligne] les circonstances du mouvement de la chaleur » (art. 206). La conformité ne saurait être affirmée de manière plus explicite. Le réalisme n'est pas en reste puisque selon Fourier cette expression nous fait aussi pénétrer les corps¹⁰. Il fait valoir que toute sa théorie offre « un exemple singulier des rapports qui existent entre la science abstraite des nombres et les causes naturelles » (art. 20). Cette complète conformité n'est pas propre à sa théorie, c'est toute l'Analyse mathématique qui a selon lui un rapport nécessaire aux phénomènes sensibles :

« On reconnaîtrait encore les mêmes résultats et tous les éléments principaux de l'Analyse générale dans les vibrations des milieux élastiques, dans les propriétés des lignes ou des surfaces courbes, dans les mouvements des astres et dans ceux de la lumière ou des fluides. C'est ainsi que les fonctions obtenues par des différentiations successives, et qui servent au développement des séries infinies et à la résolution numérique des équations, correspondent aussi à des propriétés physiques. La première de ces fonctions, ou la fluxion proprement dite, exprime, dans la Géométrie, l'inclinaison de la tangente des lignes courbes, et, dans la Dynamique, la vitesse du mobile pendant le mouvement varié : elle mesure, dans la Théorie de la chaleur, la quantité qui s'écoule en chaque point d'un corps à travers une surface donnée. L'Analyse mathématique a donc des rapports nécessaires avec les phénomènes sensibles ; son objet n'est point créé par l'intelligence de l'homme ; il est un élément préexistant de l'ordre universel et n'a rien de contingent et de fortuit ; il est emprunt dans toute la nature. » art. 20

Cette conformité générale de l'Analyse mathématique aux phénomènes naturels est aussi un thème central de son « Discours préliminaire » sur lequel nous reviendrons.

Fourier ne donne pas comme le faisait Descartes d'éléments contribuant à soutenir la conformité des séries trigonométriques aux courbes (au delà d'une correspondance réciproque). C'est qu'en l'occurrence, cette conformité est déjà acquise : les séries trigonométriques sont de ce point de vue des expressions semblables aux expressions polynomiales ou aux séries entières pour lesquelles les mathématiciens sont depuis longtemps convaincus de leur conformité aux courbes qu'elles représentent. On a vu qu'il n'en était pas ainsi pour Descartes qui avait dû soutenir cette conformité (Herreman xxxx).

b) Dualisme

Cette conformité s'accompagne aussi d'une *séparation* stricte de l'Analyse mathématique et des phénomènes physiques :

« Les questions relatives à la propagation uniforme ou au mouvement varié de la chaleur dans l'intérieur des solides sont réduites, par ce qui précède, à des problèmes d'Analyse pure, et les progrès de cette partie de la Physique dépendront désormais de ceux que fera la science du calcul. Les équations différentielles que nous avons démontrées contiennent les résultats principaux de la théorie ; elles expriment, de la manière la plus générale et la plus concise, les rapports nécessaires de l'analyse numérique avec une classe très étendue de phénomènes, et réunissent pour toujours

mémoire sur la chaleur", 1807, Hérivel 1980, 55

10 « L'Analyse mathématique a devancé les observations ; elle supplée à nos sens et nous rend en quelque sorte témoins des mouvements réguliers et harmoniques de la chaleur dans l'intérieur des corps. » Fourier 1822, 12.

aux sciences mathématiques une des branches les plus importantes de la Philosophie naturelle. Il nous reste maintenant à découvrir l'usage que l'on doit faire de ces équations pour en déduire des solutions complètes et d'une application facile. » art. 163

L'Analyse mathématique *ne fait pas* partie des phénomènes physiques ; ses expressions ne peuvent se substituer à celles qui composent les phénomènes physiques.

Cette séparation, dont on a vu une mise en place dans *La Géométrie* pour les expressions algébriques (Herreman xxxx), apparaît très nettement à différents niveaux de la structure du texte. Le chapitre I est consacré à la définition et à la mesure des grandeurs physiques. Le chapitre II est consacré à la mise en équation de la distribution de la chaleur dans les différents modèles étudiés : « nous nous bornerons d'abord à former les équations différentielles, et nous en donnerons les intégrales dans les Chapitres suivants. » (art. 101). Et les chapitres suivants sont effectivement consacrés à la résolution de ces équations.

Le système d'expressions de l'Analyse mathématique est tenu pour tel que d'une part toutes les questions relatives à la propagation uniforme de la chaleur peuvent y être exprimées et que d'autre part tous les problèmes auxquels ces questions sont réduites peuvent y être complètement résolus, leurs solutions donnant les réponses aux questions posées. Les phénomènes thermiques peuvent ainsi être entièrement saisis par des équations différentielles et décrits par leurs solutions, obtenues par une analyse mathématique qui ne doit plus rien aux phénomènes considérés, menée suivant ses propres règles, mais qui néanmoins restitue tous les aspects des phénomènes. La conformité de l'analyse mathématique et les phénomènes thermiques va de paire avec leur séparation et l'existence propre et autonome de chacune.

La démonstration de l'unicité de la solution de l'équation différentielle est aussi à cet égard intéressante. Fourier s'est en effet attaché à démontrer assez longuement (cinq articles) cette unicité qu'il aurait pu inférer de l'unicité phénoménale (la lame n'hésite pas entre plusieurs états permanents...). En montrant que l'un comme l'autre ont une seule solution, il contribue à établir, au lieu de la présupposer, la conformité du problème mathématique (équation différentielle avec conditions aux bords) à la question physique ainsi que la capacité de l'Analyse mathématique à résoudre elle-même les problèmes que l'on peut y formuler. Pour démontrer cette unicité il introduit son théorème sur l'additivité des lois d'évolution de la distribution de la chaleur dans deux lames mais doit, pour le démontrer, faire une analyse moléculaire des échanges thermiques et ainsi revenir aux phénomènes physiques au cours de l'analyse mathématique. C'est là une entorse, la seule dans tout ce chapitre, à la séparation des deux analyses. Fourier ne réussit pas ici à reproduire exactement *dans le cours de son exposé* la séparation entre les phénomènes et leur représentation mathématique. Mais cette entorse intervient dans la démonstration d'un problème qui n'est posé que pour mieux établir cette séparation qui, si elle n'est pas complète, a pu ainsi être poussée un peu plus loin. Elle n'en met pas moins en évidence un défaut d'indépendance du système d'expressions mathématiques qui apparaît en l'occurrence incapable d'établir par ses propres moyens cette unicité.

c) Le Discours préliminaire : une philosophie du langage mathématique

La *Théorie analytique de la chaleur* est précédée d'un « Discours préliminaire ». Son examen va permettre de retrouver les caractéristiques des énoncés inauguraux dans la philosophie de la nature défendue par Fourier.

Ce Discours commence par un panorama des progrès de la mécanique rationnelle, en particulier depuis Newton, et des phénomènes naturels dont elle a pu rendre compte : le mouvement et la forme des astres, les marées, les phénomènes vibratoires, la propagation de la lumière, etc. Mais cette mécanique n'a pas jusqu'à présent été appliquée aux phénomènes thermiques qui « composent un ordre spécial de phénomènes » (xvi) dont Fourier fait valoir l'importance à la fois domestique (chauffage) et climatique : répartition de la température à la surface de la Terre et dans le sol, dans l'atmosphère et dans les mers, et leur évolution dans le temps (en supposant toujours que les températures sont devenues permanentes...). Comme Newton, il entend faire une analyse exempte d'hypothèse¹¹ sur la nature des phénomènes même si, comme lui aussi, il adopte le modèle moléculaire adapté au calcul différentiel. Ces phénomènes sont aussi supposés être régis par des lois dont il convient de trouver « l'expression mathématique » (xix), de sorte que « tous les phénomènes » soient interprétés « par le même langage » (xxiv).

L'Analyse mathématique est ainsi conçue comme un *langage*¹². Ce langage donne une expression conforme des phénomènes dont il est tenu séparé. Il est aussi nécessaire à l'expression de leurs lois¹³. Il doit être constitué et ne saurait l'être sans une étude des phénomènes¹⁴ :

« Il ne peut y avoir de langage plus universel et plus simple, plus exempt d'erreurs et d'obscurités, c'est-à-dire plus digne d'exprimer les rapports invariables des êtres naturels.

Considérée sous ce point de vue, l'Analyse mathématique est aussi étendue que la nature elle-même ; elle définit tous les rapports sensibles, mesure les temps, les espaces, les forces, les températures » xxiii

On retrouve dans ce Discours un dualisme, avec d'un côté la totalité des phénomènes naturels et de l'autre ce langage, l'Analyse mathématique. On retrouve la conformité. Leur différence de nature les rend aussi incommensurables.

11 « Les principes de cette théorie sont déduits, comme ceux de la Mécanique rationnelle, d'un très petit nombre de faits primordiaux, dont les géomètres ne considèrent point la cause, mais qu'ils admettent comme résultant des observations communes et confirmées par toutes les expériences. » (xxi).

12 Sur l'analyse mathématique comme langage à la fin du 18ème siècle, voir Brian (1994),.

13 "Les effets de la chaleur sont assujettis à des lois constantes que l'on ne peut découvrir sans le secours de l'Analyse mathématique. La Théorie que nous allons exposer a pour objet de démontrer ces lois ; elle réduit toutes les recherches physiques sur la propagation de la chaleur à des questions de Calcul intégral dont les éléments sont donnés par l'expérience." (art. 1).

14 « L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques. (...) [Elle] est encore un moyen assuré de former l'Analyse elle-même, et d'en découvrir les éléments qu'il nous importe le plus de connaître, et que cette science doit toujours conserver : ces éléments fondamentaux sont ceux qui se reproduisent dans tous les effets naturels » (xxii)

Devant rendre compte du fait que ce langage est commun à des phénomènes aussi différents que le mouvement de la lumière dans l'atmosphère, la diffusion de la chaleur et les probabilités, Fourier stipule qu'il nous en fait connaître « les éléments fondamentaux » (xxiii) : s'il y a une expression commune c'est, selon lui, qu'il y a un contenu commun. Et inversement, cette expression commune est là « comme pour attester l'unité et la simplicité du plan de l'univers, et rendre encore plus manifeste cet ordre immuable qui préside à toutes les causes naturelles » (xxiv). Ainsi, en dépit de l'incommensurabilité de ces divers phénomènes entre eux, une totalité uniforme est constituée qui permet de préserver la conformité et la dualité avec l'Analyse mathématique.

Les propos tenus dans une telle introduction peuvent être convenus. En l'occurrence la philosophie du langage mathématique développée ici est en adéquation complète avec les caractéristiques de la *Théorie analytique de la chaleur* qui ont été dégagées. Il y a ainsi une homologie entre la philosophie ou l'épistémologie déployées, singulièrement concernées par le langage..., et les caractéristiques sémiotiques des textes qu'elles introduisent¹⁵. On ne saurait préjuger du rôle éventuel et de l'antériorité de cette philosophie du langage sur le développement de la théorie. Il n'en reste pas moins qu'elle ne produit pas ce langage qui est l'œuvre des mathématiciens. Et même quand elle le décrit exactement, elle ne dispense pas non plus de son inauguration. Fourier expose une philosophie du langage conforme au livre qu'il écrit. Mais son livre est pour une large part une inauguration dont sa philosophie ne rend pas compte et dont elle ne lui a pas non plus permis de se dispenser. Une philosophie du langage ne tient-elle pas lieu d'inauguration. Elle ne rend pas non plus compte de la nécessité de celle-ci à laquelle pourtant Fourier semble avoir dû se soumettre.

5 - La formule intégrale des coefficients : inauguration et incommensurabilité

La présentation des trois premiers chapitres, et plus particulièrement du troisième, a permis d'établir que la *Théorie analytique de la chaleur* est un texte qui inaugure la représentation de toutes les fonctions définies sur un intervalle borné par des séries trigonométriques. L'inauguration commence par la considération d'une lame infinie avec une température uniforme et constante à sa base. La détermination du régime permanent de la température dans cette lame aboutit au développement en série trigonométrique d'une fonction constante (et partant, de n'importe quelle fonction constante). Fourier a pu ensuite *démontrer* que la relation (M), qui donne le développement en série trigonométrique de la fonction, est valable pour une classe infinie de fonctions (celles dont le développement de Taylor en 0 ne comprend que des puissances impaires). Il a ensuite donné le développement de quelques fonctions cruciales n'appartenant pas à cette classe. L'inauguration procède ainsi essentiellement par l'extension progressive de la validité de la relation (M), c'est-à-dire par l'extension de la validité de la formule intégrale des coefficients de Fourier. Nous avons aussi vu que le dispositif de la lame pouvait lui-même être considéré comme faisant partie de l'inauguration. Il convient à présent de préciser le rôle de la relation (M) dans cette inauguration.

15 Sur ce point Brian (1994, 49-71).

a) L'incommensurabilité mise en défaut

La possibilité de représenter une fonction arbitraire $\varphi(x)$ entre 0 et π par une série trigonométrique est pour une grande part fondée sur la formule intégrale des coefficients de Fourier¹⁶ :

$$(M) \quad \frac{\pi}{2} \varphi(x) = \sin x \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin x \, dx + \sin 2x \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin 2x \, dx + \sin 3x \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin 3x \, dx + \dots$$

Le statut de l'énoncé inaugural de Fourier dépend pour une grande part de celui de cette relation.

Il est remarquable d'avoir dans une inauguration un *procédé uniforme* et *a fortiori* une expression unique de ce procédé qui transforme les expressions d'une des totalités en celles de l'autre. Dans le cas par exemple de l'inauguration des machines logiques de Turing, il faut pour chaque nombre calculable donner la machine logique qui le calcule : il n'y a pas de machine (logique?!) qui déterminerait à partir d'un nombre donné la machine logique qui le calcule. L'intérêt et la nécessité de l'énoncé inaugural vient de l'impossibilité de donner un tel procédé ou, plus exactement, aux conditions de son expression. Il peut éventuellement en exister un pour toute une famille de nombres calculables, mais il n'y en a pas pour tous les nombres calculables, autrement la thèse de Turing ne serait pas un énoncé inaugural mais un théorème de représentation. La conformité du résultat du calcul effectué par la machine avec le nombre qu'elle est supposée reproduire n'est garantie que par notre capacité à considérer simultanément le nombre calculable et la machine qui le calcule et à les comparer. Les erreurs dans les exemples de machines données par Turing ou, plus généralement, les erreurs dans les programmes informatiques attestent des problèmes bien réels de conformité posés par cette incommensurabilité. De même la méthode qui permet à Descartes de mettre en équation n'importe quel problème de géométrie n'est ni un problème de géométrie dont il pourrait donner une expression géométrique générale ni un problème d'Algèbre dont il pourrait donner l'équation (Herreman xxxx). Là non plus, aucun dispositif uniforme ne réalise cette mise en équation. Il faut procéder au cas par cas. Frege, Whitehead & Russell doivent aussi construire pas à pas leurs formules faute d'une expression en mesure de le faire pour toute proposition logique. Il faut dans chaque cas construire l'expression dont l'existence est soutenue par l'énoncé inaugural.

L'obtention d'un tel procédé uniforme bute inmanquablement sur l'incommensurabilité. L'énoncé inaugural y pallie en introduisant directement un système d'expressions sans l'engendrer par une procédure uniforme à partir des expressions de la totalité pré-établie. L'intérêt de la représentation inaugurée et la nécessité de la soutenir résident dans l'impossibilité de donner une *expression* uniforme du *rapport* entre les deux systèmes d'expressions considérés, impossibilité qui tient, dans les exemples rencontrés, à l'absence d'expression uniforme de la totalité pré-existante. Or, Fourier donne ici une telle expression. La relation (M) est bien en effet l'expression d'un *procédé uniforme* qui convertit

16 Il faut ajouter les deux relations analogues (N) et (P) pour le développement en cosinus ou celui d'une fonction définie sur un intervalle centré en 0. Dans le livre de Fourier, les relations (M), (N) et (P) désignent les relations obtenues en remplaçant l'extrémité π par un nombre positif r quelconque. Ces distinctions n'ont aucune incidence sur notre propos que nous pouvons présenter à partir de la relation (M) donnée.

n'importe quelle fonction en une série trigonométrique. L'incommensurabilité inhérente à l'inauguration semble de ce fait avoir disparu. Nous devons la retrouver...

b) Une dualité et une incommensurabilité enfouies dans les signes

Il faut ici distinguer d'une part la relation (M) qui affirme l'égalité entre deux expressions analytiques et d'autre part le procédé qui permet de représenter une courbe par une série trigonométrique.

La relation (M) dans la première acception présuppose des expressions analytiques : elle présuppose en particulier que la fonction $\varphi(x)$ ait une telle expression. Ainsi la démonstration donnée par Fourier présuppose une fonction développable en série de Taylor ce qui permet de remplacer la courbe par une expression analytique. La démonstration ne se rapporte pas exclusivement à une courbe, même si celle-ci intervient en fait aussi, mais à cette expression analytique. La relation (M) ainsi démontrée n'est valable que pour les courbes que l'on suppose représentables par de telles expressions. Elle n'établit donc pas qu'une courbe peut être représentée par une série trigonométrique, elle établit seulement qu'une expression analytique d'un certain type (série de Taylor) peut être transformée en une autre expression analytique (une série trigonométrique). Il n'y a là aucune incommensurabilité : l'incommensurabilité n'a pas été résolue, elle a d'emblée été éliminée en considérant une fonction développable en série de Taylor. La relation (M) est alors un *théorème de représentation* pour les fonctions développables en série de Taylor. Elle contribue à l'inauguration en démontrant que l'énoncé inaugural est vérifié pour les fonctions qui satisfont cette condition.

Mais on peut aussi voir la relation (M) comme un *procédé* qui associe à une courbe désignée par $\varphi(x)$ la série trigonométrique

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x) \sin(x) dx \sin(x) + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x) \sin(2x) dx \sin(2x) + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x) \sin(3x) dx \sin(3x) + \dots$$

ont les coefficients $\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x) \sin(ix) dx$ dépendent de l'indice i et d'une intégrale

faisant intervenir la fonction $\varphi(x)$ et une fonction trigonométrique. La formule intégrale donne un développement en série trigonométrique, mais si la fonction n'est pas développable en série de Taylor il n'est pas démontré que l'on obtienne ainsi un développement de la fonction. Et en l'occurrence, l'incommensurabilité n'a pas disparu : ce procédé dérivé de la relation (M) s'applique à une fonction arbitraire dans la mesure où les intégrales qui y figurent sont définies pour une fonction *arbitraire*. Or ces intégrales désignent pour Fourier des mesures d'aires¹⁷ : il n'y pas d'intégrale s'il n'y a pas d'aire. Elles impliquent donc des

17 « On ne peut résoudre entièrement les questions fondamentales de la théorie de la chaleur, sans réduire à cette forme les fonctions qui représentent l'état initial des températures.

Ces séries trigonométriques, ordonnées selon les cosinus ou les sinus des multiples de l'arc, appartiennent à l'analyse élémentaire comme les séries dont les termes contiennent les puissances successives de la variable. Les coefficients des séries trigonométriques sont des aires définies, et ceux des séries de puissances sont des fonctions données par la différentiations, et dans lesquelles

courbes. C'est à partir d'un *courbe quelconque* que Fourier peut inférer l'existence, pour une fonction quelconque, des intégrales qui figurent dans (M). La possibilité de considérer que les intégrales dans (M) sont définies pour une *fonction arbitraire* fait intervenir la possibilité de se référer à la *totalité des courbes* ou à *n'importe quelle courbe*. Les notions de fonctions et de courbes sont l'objet d'autres associations dans ce texte, mais celle-ci serait sans doute l'une des plus difficiles à éliminer. L'histoire de la théorie de l'intégration après Fourier en donne une bonne indication.

La relation (M) implique donc à la fois les expressions analytiques des fonctions et leurs expressions géométriques (courbes). Il est impossible de rendre complètement compte de l'usage de l'expression $\varphi(x)$ au sein de (M) sans lui reconnaître ces deux contenus¹⁸. Ainsi, un certain usage, largement attesté dans ce texte, permet de considérer la relation (M) comme une relation fonctionnelle pour laquelle l'expression $\varphi(x)$ suffit. Il n'est alors pas nécessaire d'associer un contenu géométrique aux fonctions. Mais si l'on veut rendre compte complètement de la relation (M), et notamment l'appliquer à une fonction quelconque, il est nécessaire de reconnaître aux fonctions un double contenu, analytique et géométrique, contenus que je ne chercherai pas ici à caractériser¹⁹. Il est aussi nécessaire de faire intervenir un contenu thermique si l'on tient compte, par exemple, de la dernière section du chapitre. Mais ce contenu thermique, et il importe sans doute de le remarquer, n'est pas nécessaire à la relation (M) comme l'est en l'occurrence le contenu géométrique. A nouveau, la suite de l'histoire de la théorie de l'intégration et des séries de Fourier le confirme²⁰.

Les courbes, et donc l'incommensurabilité, n'ont donc pas disparu de la relation (M). L'incommensurabilité désigne en effet l'hétérogénéité de deux systèmes d'expressions qui empêche ou limite la possibilité d'*exprimer* dans l'un ou l'autre de ces systèmes des relations entre les expressions de l'un et de l'autre. L'expression (M) est une expression de l'Analyse mathématique qui met en relation $\varphi(x)$, expression d'une fonction quelconque, avec son développement en série trigonométrique, expression de la totalité inaugurée. Il n'y aurait dès lors aucune nécessité à mettre en avant la dualité de l'énoncé inaugural si celle-ci est absente de la relation qui en rend compte. Mais cette dualité se retrouve dans le double contenu qu'il est bien nécessaire de reconnaître à $\varphi(x)$. La dualité, et avec elle l'incommensurabilité, n'ont donc pas disparu, elles ont été enfouies dans le signe de fonction.

on attribue aussi à la variable une valeur définie.» art. 235. Voir aussi ci-dessus, la citation de l'art. 220.

18 Pour la description d'autres signes en mathématiques faisant intervenir plusieurs plans de contenu voir (Herreman 2000).

19 « Ce théorème et le précédent conviennent à toutes les fonctions possibles, soit que l'on en puisse exprimer la nature par les moyens connus de l'Analyse, soit qu'elles correspondent à des courbes tracées arbitrairement. » art. 224.

20 La citation suivante de Titchmarsh (1950, 85) atteste de la possibilité de séparer la théorie des séries de Fourier de ses applications, et en particulier de la théorie de la chaleur : « I worked on the theory of Fourier integrals under his [Hardy] guidance for a good many years before I discovered that this theory has applications in applied mathematics, if the solution of certain differential equations can be called « applied » ».

Il serait difficile de trouver une citation semblable dans laquelle la théorie des séries de Fourier serait séparée d'une théorie de l'intégration!

6 - Synthèse de l'analyse de l'inauguration des séries trigonométriques

Le « théorème » de Fourier soutenant la possibilité de représenter n'importe quelle fonction définie par une série trigonométrique est bien un *énoncé inaugural*. Sa validité repose pour une large part sur la formule des coefficients de Fourier qui donne chaque coefficient du développement en fonction de la fonction considérée. C'est un fait évident d'un point de vue mathématiques qui ressort aussi d'une analyse de l'inauguration des représentations. Du fait de cette relation fonctionnelle il n'y a plus guère de dualité, plus guère d'incommensurabilité, plus guère d'énoncé inaugural mais un théorème. Ni la dualité ni l'incommensurabilité n'ont pourtant disparu. On les retrouve à un autre niveau, dans le rapport que l'expression $\varphi(x)$ a avec d'autres expressions ou contenus que ce soit sa courbe ou la distribution de chaleur qu'elle représente. La dualité et l'incommensurabilité passent ainsi des totalités ou des systèmes (totalité des courbes ou des fonctions, totalité des séries trigonométriques) aux contenus des signes des fonctions. La suite de l'histoire de la théorie des séries de Fourier et de la théorie de l'intégration montrerait comment cette dualité et cette incommensurabilité ont pu, et dans quelle mesure, être éliminées.

Comme l'expression des coefficients de Fourier établit une relation entre les fonctions et les développements en séries trigonométriques, l'énoncé inaugural n'est pas *nécessaire* comme il l'est en l'absence d'une telle expression. Cet énoncé devient une expression relativement secondaire par rapport à ce qui est déjà et mieux exprimé par la relation (M). Il fait *référence* à cette expression mathématique au lieu d'être la principale expression du rapport entre les deux totalités considérées.

La *Théorie analytique de la chaleur* de Joseph Fourier est bien un texte qui inaugure la représentation des fonctions par des séries trigonométriques. L'inauguration se présente à nouveau comme un argument progressif et inachevé déployé ici tout au long du chapitre III : d'abord le cas particulier de la fonction constante égale à 1, il est ensuite étendu à une classe infinie de fonctions pour laquelle Fourier dispose d'une représentation uniforme et adaptée à son propos, puis il revient à nouveau à plusieurs cas particuliers cruciaux non encore couverts. Cette inauguration est aussi inextricablement liée à la résolution d'un problème particulier : l'étude de la distribution de la chaleur dans une lame infinie. Le développement de la théorie de Fourier détachera cet énoncé inaugural de ce problème particulier. La situation est à bien des égards analogue à celle de *La Géométrie* de Descartes où le soutien des deux principaux énoncés inauguraux est aussi intriqué à la résolution d'un problème particulier, le problème de Pappus, qui lui aussi ne jouera ensuite plus aucun rôle dans la relation entre les équations algébriques, les problèmes et les courbes. Leur rôle, essentiel, dans ces inaugurations n'a plus dès lors qu'un intérêt historique.

Fourier inaugure ici la totalité des séries trigonométriques et introduit une représentation uniforme des fonctions. Le développement de l'algèbre et du calcul différentiel ont conduit à l'usage d'expressions d'une autre nature que celles des courbes (polynômes, séries entières, fonctions transcendentes, etc.) et en même temps avantageuses pour en exprimer certaines propriétés et les soumettre au calcul. L'examen d'un point de vue inaugural de *La Géométrie* nous a donné

l'occasion d'en étudier un moment important. Mais aucun de ces systèmes d'expressions ne pouvait plus, depuis longtemps, prétendre servir à exprimer *toutes* les courbes ou seulement en délimiter la partie utile comme Descartes avait pu prétendre le faire en son temps. L'étude des équations différentielles tout au long du 18^{ème} siècle a conduit à considérer des fonctions dont les expressions à la fois traversent et débordent ces systèmes. Descartes avait contribué à instaurer un système d'expressions remarquable dans lequel le même type d'expressions pouvait représenter aussi bien les *problèmes* que leurs *solutions*. Il n'en est plus de même avec la représentation des problèmes au moyen d'équations différentielles qui sont des expressions distinctes de celles de leurs solutions. L'introduction des équations différentielles rompt cette situation remarquable, qui prévalait aussi, sous une autre forme dans la Géométrie grecque, où les mêmes expressions, en l'occurrence les figures géométriques, servent à exprimer les problèmes et leurs solutions. C'est au regard de cette diversité de systèmes d'expressions que doit être appréciée l'uniformité du système formé par les séries trigonométriques.

Le livre de Fourier est entièrement consacré à *soutenir* pas à pas, solide par solide, la possibilité de représenter la distribution de la chaleur dans ces solides par des expressions de l'Analyse mathématique. Il met en œuvre la conviction plus générale que l'Analyse mathématique donne l'expression des lois qui régissent les phénomènes naturels. Ce souci le conduit à veiller systématiquement au sens physique de ses expressions mathématiques et à vérifier leur conformité à ce qu'elles expriment. Toute recherche qui irait à l'encontre de cette conformité apparaît devoir être exclue. Toute généralisation apparaît inutile. Cela conduit à cette philosophie du langage mathématique défendue par Fourier selon laquelle « le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels ». C'est par opposition à celle-ci que Jacobi écrira dans la lettre qu'il adresse à Legendre le 2 juillet 1830 que « le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain » (Jacobi 1881, 454)²¹. L'« épistémologie « naturaliste » » présentée dans le « Discours préliminaire » participe en définitive de la conviction selon laquelle tout phénomène naturel peut être mis en équation différentielle. Pour donner lieu à un énoncé inaugural, il faudrait avoir une représentation relativement uniforme de ces équations différentielles.

21 Les enjeux politiques de cette philosophie du langage ont bien été mis en évidence par Roy Harris dans le cadre de sa critique du « mythe du langage ».

III - Courbes et fonctions arbitraires : les séries trigonométriques dans la controverse des cordes vibrantes

Nous avons montré que Fourier inaugurerait dans *La théorie analytique de la chaleur* la représentation des courbes ou des fonctions par des séries trigonométriques. Mais la possibilité de représenter toute fonction par une série trigonométrique avait déjà été envisagée. Fourier sait lui-même que c'est une « conclusion que le célèbre Euler a toujours repoussée » (Fourier 1806, cité in Grattan-Guinness 1972, 183). Les exemples de développements en séries trigonométriques qu'il donne dans ses mémoires ou dans sa correspondance (Herivel 1980) sont autant de contre-exemples aux objections qu'il sait avoir été avancées contre la généralité de ces séries²². L'énoncé inaugural soutenu par Fourier a en effet déjà été énoncé dans les années 1750 au cours de la controverse sur les cordes vibrantes²³. Dans ce qui suit je voudrais préciser le statut de cet énoncé dans cette controverse. Je vais montrer qu'il s'agit d'un énoncé inaugural qui n'a été énoncé que pour être contesté et qu'il n'a été soutenu, pour des raisons parfois très différentes, par aucun des mathématiciens ayant pris part à cette controverse. Nous verrons que Bernoulli défend pour sa part un principe physique, et non un énoncé inaugural. Ce sera donc l'occasion d'apprécier leur différence. Mais nous verrons surtout l'incidence qu'a pu avoir sur l'émergence de cet énoncé la représentation du problème des cordes vibrantes par l'équation différentielle établie et résolue par D'Alembert. Nous verrons que cet énoncé au lieu d'inaugurer une représentation de la totalité des fonctions (par les séries trigonométriques) est à l'inverse *une conséquence* de l'introduction d'expressions donnant une représentation de toutes les fonctions. L'énoncé inaugural ne sert pas ici à introduire un système d'expressions qui va permettre des énoncés généraux sur les fonctions : il est au contraire le résultat de l'apparition, nous verrons de quelle manière, d'expressions représentant des fonctions quelconques.

22 "A l'égard des recherches de D'Alembert et d'Euler ne pourrais-je point ajouter que s'ils ont connu ces développements il n'en ont fait qu'un usage bien imparfait, car ils étoient persuadés l'un et l'autre qu'une fonction arbitraire et discontinue ne pourroit jamais être résolue en séries de ce genre, et il ne paroît pas même que personne eut encore développé une constante en cosinus d'arcs multiples, ce qui est le premier problème que j'ai eu à résoudre dans la théorie de la chaleur. » Fourier à Lagrange (Herivel 1980, 21).

23 Parmi les travaux consacrés à cette controverse on peut citer : Riemann 1854 ; Burkhardt 1908, 10-47 trad. fr. in Jouve 2007, II, 21-51 ; Langer 1947 ; Truesdell 1960 ; Ravetz 1961 ; Youschkevitch 1976 ; Darrigol 2007 ; Jouve 2007, I, 23-25 ; Jouve 2008. L'édition annotée des mémoires de D'Alembert sur le sujet se trouve dans Jouve 2007. Sur les problèmes vibratoires avant cette controverse, voir Cannon & Dostrovsky 1981. Sur D'Alembert et les équations aux différences partielles, voir Guilbaud & Jouve 2009, Demidov 1982, 1989. Les dates indiquées sont toujours celles de la publication qui peut différer sensiblement de la date à laquelle le Mémoire a été écrit et à laquelle il a commencé à circuler. Les écarts induits ne donnent pas lieu à des inversions et n'ont donc aucune incidence pour mon propos.

1 - L'énoncé inaugural dans la controverse

La controverse sur les cordes vibrantes opposa D'Alembert, Euler, Daniel Bernoulli et Lagrange²⁴. La description mathématique d'une corde vibrante débouche en particulier sur la question de savoir s'il est possible de donner une expression mathématique unique décrivant le mouvement continu d'une corde qui peut avoir une forme initiale quelconque. Elle peut avoir au départ des tangentes discontinues (corde pincée) et, à la fin de son excursion, avoir la forme d'une droite. Cette controverse mit aux prises quelques-uns des plus grands mathématiciens de l'époque qui à cette occasion s'opposèrent notamment sur la représentation générale des fonctions et l'extension de leur représentation par des séries entières ou trigonométriques²⁵.

Au début du siècle, Taylor avait déjà appliqué sa méthode des incréments à l'étude du mouvement d'une corde vibrante²⁶. Il avait montré, en se limitant à des oscillations infiniment petites, que la compagne de la cycloïde, c'est-à-dire une sinusoïde, était une solution de ce problème et avait défendu que la corde devait rapidement prendre cette forme. D'Alembert (1749) revint ensuite sur ce problème. Il donna l'équation différentielle partielle qui le régit²⁷. Il montra qu'il existait une infinité de solutions et contesta qu'elles prennent rapidement la forme d'une sinusoïde. Le même problème fut peu après repris par Euler (1749) avec des conditions initiales plus générales que celles que D'Alembert avait admises (et qu'il était prêt à admettre). Il démontra que si les séries trigonométriques étaient bien des solutions, elles n'en étaient qu'une partie. Daniel Bernoulli est ensuite intervenu et a défendu dans deux mémoires paru dans le même volume de *l'Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin* que les solutions, pour des oscillations infiniment petites, s'obtenaient toutes comme somme, éventuellement infinie, des solutions de Taylor, c'est-à-dire, et en se servant des « dénominations de M. Euler » (Bernoulli 1755, 156), sous la forme de séries trigonométriques (Bernoulli 1755, 157) :

$$y = \alpha \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \beta \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) + \gamma \sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right) + \delta \sin\left(\frac{4\pi x}{a}\right) + \text{etc.} \quad .$$

Dans un mémoire inséré dans le même volume que ceux de Bernoulli, Euler a

24 Le terme de « controverse » ne renvoie pas seulement ni principalement à un genre historiographique qui a pu être à la mode ; il est aussi employé par les protagonistes, ainsi D'Alembert écrivait à Lagrange : « J'ai parlé de vous dans ma Préface [*Opuscules mathématiques*, t. IV] comme je le dois à tous égards, à l'occasion de notre controverse sur les vibrations des cordes. » D'Alembert à Lagrange, 29 avril 1768, *Oeuvres de Lagrange*, vol. 13, 111.

25 Ils s'opposèrent aussi sur leurs conceptions du rapport entre mathématiques et physique, et en particulier sur leurs conceptions de la théorie musicale et de l'acoustique (Darrigol 2007).

26 Voir Taylor 1713, 1715 ; Truesdell 1960, 129-132 ; Cannon & Dostrovsky 1981, 15-22.

27 L'expression $\left(\frac{dy}{dt}\right) = \alpha \left(\frac{dy}{ds}\right)$ est donnée par Euler (1755, 211). D'Alembert écrit quant à lui simplement $\alpha = \beta$ où α et β sont les fonctions de t et de s définies par les différentielles complètes $dp = \alpha dt + \nu ds$ et $dq = \nu dt + \beta ds$, les fonctions p et q étant elles-mêmes les fonctions définies par la différentielle complète $d[\phi(t, s)] = p dt + q ds$ où $\phi(t, s)$ est l'expression de l'ordonnée de la corde. Il n'y a pas dans ces mémoires de D'Alembert de notation propre aux différentielles partielles d'une fonction. Je parlerai néanmoins dans les deux cas d'équations aux dérivées partielles, les différences éventuelles entre les moyens d'expression utilisés n'ayant pas d'incidence sur mon propos ici.

contesté que celui-ci ait pu ainsi donner *toutes* les solutions :

« M. Bernoulli tire toutes ces excellentes réflexions uniquement des recherches, que feu M. Taylor a faites sur le mouvement des cordes, & soutient contre M. D'Alembert & moi, que la solution de Taylor est suffisante à expliquer tous les mouvements, dont une corde est susceptible ; de sorte que les courbes, qu'une corde prend pendant son mouvement, soit toujours, ou une trochoïde allongée simple, ou un mélange de deux ou plusieurs courbes de la même espece. » Euler 1755, 196-7

Il précise un peu plus loin sa critique :

"Mais il y a plus : je n'avois donné cette équation,

$$y = \alpha \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \beta \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) + \gamma \sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right) + \delta \sin\left(\frac{4\pi x}{a}\right) + etc.$$

que comme une solution particulière de la formule, qui contient en général toutes les courbes, qui peuvent convenir à une corde mise en mouvement ; & il y a une infinité d'autres courbes, qui ne sauroient être comprises dans cette équation. Si M. Bernoulli tomboit d'accord là dessus, il n'auroit pas avancé, que toutes les courbes d'une corde frappée résulteroient uniquement de la combinaison de deux ou plusieurs courbes Tayloriennes ; & il auroit reconnu, que le raisonnement fondé sur cette combinaison n'est pas suffisant à fournir une solution complete de la question dont il s'agit." Euler 1755, p. 198

Dénoncer l'incomplétude des solutions de Bernoulli est l'objet de son mémoire :

« La question principale, que j'ai à développer, est donc : si toutes les courbes d'une corde mise en mouvement sont comprises dans l'équation rapportée, ou non? » Euler 1755, 198.

Euler rappelle ici qu'il a aussi trouvé ces solutions mais qu'il ne les tient que pour des solutions particulières et conteste que ce soient là toutes les solutions. Il émet alors l'hypothèse suivante :

« Mais peut-être repliquera-t-on, que l'équation $y = \alpha \sin \pi x / 2a + \&c.$ à cause de l'infinité de coefficients indéterminés, est si générale, qu'elle renferme toutes les courbes possibles » Euler 1755, 200

C'est là un énoncé inaugural par lequel Euler envisage que n'importe quelle courbe peut être exprimée par une série trigonométrique. C'est l'énoncé que l'on a vu avoir été soutenu par Fourier.

Dans un manuscrit de 1755, « Observations sur deux Mémoires de M. Euler et Daniel Bernoulli, insérés dans les mémoires de 1753 »²⁸, D'Alembert répondit aux solutions et objections de Bernoulli et d'Euler. La série de critiques qu'il adresse à Bernoulli commence par le même énoncé inaugural, qu'il énonce et conteste à son tour :

« Il me paroît impossible²⁹ de prouver que toutes les courbes de la corde vibrante puissent être renfermées dans l'équation

28 Ce manuscrit a été édité dans (Jouve 2007, II, 77-113). Soumis en 1755 à l'Académie de Berlin, le Mémoire, jugé trop polémique, sera refusé et servira de base au premier Mémoire des *Opuscules* (D'Alembert 1761 ; 2008). Pour l'histoire de ce Mémoire, voir Jouve (2008).

29 La suite du texte rend clair que « impossible » veut dire ici que cela est faux.

$$y = \alpha \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \gamma \sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right) + \delta \sin\left(\frac{4\pi x}{a}\right) + \text{etc}$$

en supposant même que cette courbe de la corde vibrante soit mécanique et composée de parties égales et semblables situées alternativement au dessus et au dessous de l'axe et liées par la loi de continuité. » D'Alembert , 24 ; Jouve 2007, II, 97-8.

Plus tard, Fourier considèrera lui aussi que la solution de Bernoulli suppose l'énoncé inaugural qu'il soutiendra :

« La solution donnée par ce géomètre [Daniel Bernoulli] suppose qu'une fonction quelconque peut toujours être développée en séries de sinus ou de cosinus d'arcs multiples. » Fourier 1822, art. 230

Ces citations d'Euler, de D'Alembert et de Fourier suggèrent que Daniel Bernoulli aurait soutenu que toute courbe pourrait être représentée par une série trigonométrique. Cependant, cet énoncé n'a pas été introduit par Bernoulli mais par Euler et D'Alembert (la priorité de l'un ou de l'autre étant sans importance ici), et seulement pour le contester, chacun pour des raisons différentes³⁰.

Comme il serait assez fastidieux et de toute façon peu probant de faire une analyse des Mémoires de Bernoulli pour établir qu'il n'est pas à l'initiative de l'introduction de cet énoncé, qu'il *ne* le soutient *pas*, et enfin que ces Mémoires ne sont pas des textes inauguraux, je vais surtout m'attacher à montrer que cet énoncé a été introduit par Euler (les mêmes arguments valant aussi, à des nuances sans importance pour notre propos, pour D'Alembert) et à en mettre en évidence les raisons. Avant cela, je rappellerai néanmoins le principe des systèmes oscillants introduit et défendu par Bernoulli afin d'indiquer que ses mémoires se rapportent bien plutôt à ce principe qu'à l'énoncé inaugural sur les séries trigonométriques avec lequel il ne peut être confondu.

2 - Le principe des systèmes oscillants de Bernoulli

L'analyse des cordes vibrantes proposée par Bernoulli est fondée sur le principe suivant :

"dans tout système les mouvements réciproques [périodiques] des corps sont toujours un mélange de vibrations simples, régulières et permanentes de différentes espèces." Bernoulli 1755, 195

C'est sur ce principe « d'une très grande étendue » (Bernoulli 1758, 160) qu'il fonde sa « théorie sur la pluralité des vibrations coexistentes dans un seul & même système » (Bernoulli 1758, 157)³¹ et à partir duquel il dérive sa « méthode

³⁰ Cette position est aussi celle défendue par Burkhardt (1908, 20 ; Jouve 2007, II, 29) .

³¹ « J'ai évité jusque ici les calculs, & j'ai fondé tout mon raisonnement sur le principe confirmé par l'expérience (§6) qu'il peut se faire un mélange de vibrations dans un seul & même corps sonore, qui soient absolument indépendantes les unes des autres. » Bernoulli 1755, 160 ; « il semble que la Nature n'agit très souvent que par les principes des vibrations isochrones imperceptibles, & infiniment diversifiées, pour produire un grand nombre de Phénomènes. » Bernoulli 1755b, 173 ; « J'ai démontré de plus dans les Mémoires de Berlin, que les vibrations de différens ordres, quels qu'on les prenne, peuvent coexister dans une seule & même corde, sans se troubler en aucune

[qui] s'étend à déterminer les vibrations & mouvemens réciproques dans tous les systèmes de corps pour lesquels on peut déterminer les vibrations simples ; c'est-à-dire, telles que toutes les parties fassent des vibrations parfaitement synchrones, & chacune la sienne, suivant la nature des petites oscillations d'un pendule simple » (Bernoulli 1758, 158). Ce principe de la composition des vibrations est pour lui « le seul & vrai principe », il est « général, sans contredit, pour les cordes uniformément épaisses (...) jusqu'aux cordes inégalement épaisses » (Bernoulli 1767, 306). Sa validité va d'ailleurs au-delà du problème des cordes vibrantes. Suivant ce principe, tous les sons, harmonieux ou non, se composent d'harmoniques qui peuvent être isolées comme Newton a séparé les rayons primitifs qui composent la lumière (Bernoulli 1758, 158). Mais il s'agit d'une *principe physique*, un « principe sur la coexistence des vibrations » (Bernoulli 1758, 160), et non d'un *énoncé inaugural*. Il y a bien réalisme, il y a bien inauguration, mais il n'y aucun dualisme ni aucune incommensurabilité. La question de la conformité, si elle se pose, se pose dès lors aussi différemment. Le Mémoire de Bernoulli publié en 1755, ainsi que les autres sur le même sujet, sont en grande partie consacrés à défendre et illustrer ce *principe*. Bernoulli donne ainsi divers arguments tendant à montrer qu'un son est bien la superposition de sons fondamentaux qui s'entendent distinctement et se combinent sans se mélanger³². Il défend qu'il obtient ainsi toutes les solutions possibles et affirme que les solutions proposées par D'Alembert et Euler sont de

façon, ces différentes especes de vibration coéxistantes étant absolument indépendantes les unes des autres. De là cette pluralité de sons harmoniques qu'on entend à la fois d'une seule & même corde. Si toutes especes de vibration commencent au même instant, il arrivera que la première vibration du premier ordre, la seconde vibration du second ordre, la troisième vibration du troisième ordre &c finiront au même instant. C'est là un synchronisme apparent dans un certain sens, & qui n'est rien moins que général, puisqu'il y a une infinité d'autres vibrations qui ne finissent pas au même instant. » Bernoulli 1767, 283.

- 32 « Effectivement tous les Musiciens conviennent, qu'une longue corde pincée donne en même tems, outre son ton fondamental, d'autres tons beaucoup plus aigus ; ils remarquent sur tout le mélange de la douzième & de la dix-septième majeure : s'ils ne remarquent pas aussi distinctement l'octave & la double octave, c'est n'est qu'à cause de la trop grande ressemblance de ces deux tons avec le ton fondamental. Voilà une preuve évidente, qu'il se faire dans une seule & même corde un mélange de plusieurs sortes de vibrations Tayloriennes à la fois. On entend pareillement dans le son des grosses cloches un mélange de tons differens. Si l'on tient par le milieu une verge d'acier, & qu'on la frappe, on entend à la fois un mélange confus de plusieurs tons, lesquels étant appréciés par un habile Musicien se trouvent extrêmement desharmonieux, de sorte qu'il se forme un concours de vibrations, qui ne commencent & ne finissent jamais dans un même instant, sinon par un grand hazard : d'où l'on voit que l'harmonie des sons, qu'on entend dans une même corps sonore à la fois, n'est pas essentielle à cette matière, & ne doit pas servir de principe pour les systèmes de Musique. L'air n'est pas exempt de cette multiplicité de sons coéxistans : il arrive souvent qu'on tire deux sons differens à la fois d'un tuyau ; mais, ce qui prouve le mieux, combien peu les différentes ondulations de l'air s'entre-empêchent, est qu'on entend distinctement toutes les parties d'un concert, & que toutes les ondulations causées par ces différentes parties se forment dans la même masse d'air sans se troubler mutuellement, tout comme les rayons de la lumière, qui entrent dans une chambre obscure à travers une petite ouverture, ne se troublent point. » Daniel Bernoulli 1755, 152-3

cette forme³³, qu'elles sont donc déjà contenues dans les siennes³⁴, et qu'il peut ainsi leur donner un sens physique³⁵. L'exemple d'une corde avec 1001 ventres lui permet de montrer aussi la diversité de ses courbes³⁶. Il défend inversement de manière récurrente que les corps sonores peuvent produire tous les sons correspondant à ses séries³⁷. Et c'est fort de la conviction que son principe rend compte de la composition des sons qu'il discute les solutions proposées par les deux Géomètres³⁸.

Ainsi, Bernoulli fonde sa résolution du problème des cordes vibrantes sur son principe de composition de vibrations fondamentales, ce problème contribuant inversement à en établir la validité et l'intérêt. C'est ce principe physique que Bernoulli défend. Ses arguments sont eux-mêmes essentiellement physiques, étayés par des expériences sonores. Quand ils ne sont pas exclusivement physiques, comme quand il esquisse une démonstration de l'interpolation d'une courbe par des sinusoides pour répondre à ses détracteurs, ils sont alors exclusivement géométriques. Il n'y a pas plus de dualité.

Un énoncé inaugural est remarquable par le fait de soutenir l'existence d'une représentation uniforme et conforme d'une totalité. Il y a là une prétention exorbitante. Un énoncé inaugural, même pour celui qui le soutient, reste un

33 « si j'ai bien compris leurs énoncés, toutes les nouvelles courbes qu'ils donnent, sont comprises dans notre construction, & sont un simple mélange de plusieurs especes de vibrations, dont chacune a part se fait suivant les loix décrites par M. Taylor. Mais il me semble que ce n'est là qu'une espece de composition de mouvement, qui ne peut donner aucune amplification à la théorie de M. Taylor. » Bernoulli 1755, 155 ; « Voyons encore si les nouvelles courbes trouvées par M. Euler, sont comprises dans notre remarque. » Bernoulli 1755, 156.

34 « Mais il me semble que ce n'est là qu'une espèce de composition de mouvement, qui ne peut donner aucune amplification à la théorie de M. Taylor. » 155

35 « mon intention n'a été principalement que d'exposer ce que les nouvelles vibrations de Mrs D'Alembert & Euler ont de physique » D. Bernoulli, *Réflexions et éclaircissements sur les nouvelles vibrations des cordes exposées dans les Mémoires de l'Académie de 1747 et 1748*, *Histoire Acad. roy. Sc.*, 9, 173-195, 1755, p 158

36 « Pour mieux sentir l'incongruité d'une telle amplification, nous combinerons la courbe fondamentale de M. Taylor, qui est représentée par la première figure, avec la figure anguiforme Taylorienne qui auroit 1001 ventres » 155

37 « Ma conclusion est, que tous les corps sonores renferment en puissance une infinité de sons, & une infinité de manières correspondantes de faire leurs vibrations régulières ; enfin, que dans chaque différentes espece de vibrations les inflexions des parties du corps sonore se font d'une manière différente. » Daniel Bernoulli 1755, 151

38 « aussi n'est-ce à mon avis que sous cette forme que les vibrations peuvent devenir régulières, simples, et isochrones, malgré l'inégalité des excursions. Avec cette idée, que j'ai toujours eue, je ne pouvois qu'être surpris de voir dans les Mémoires des années 1747 & 1748, une infinité d'autres courbures comme douées de la même propriété ; il ne me falloit pas moins que les grands noms de Mrs D'Alembert & Euler ; que je ne pouvois soupçonner d'aucune inattention, pour examiner s'il n'y auroit pas quelque équivoque dans l'aggrégation de toutes ces courbes avec celle de M. Taylor, & dans quel sens on pourroit les admettre. J'ai vû aussi-tôt, qu'on ne pouvait admettre cette multitude de courbes que dans un sens tout à fait impropre ; je n'en estime pas moins les calculs de Mrs D'Alembert & Euler, qui renferment certainement tout ce que l'Analyse peut avoir de plus profond & de plus sublime ; mais qui montrent en même tems, qu'une analyse abstraite, qu'on écoute sans aucun examen synthétique de la question proposée, est sujette à nous surprendre plutôt qu'à nous éclairer. Il me semble à moi, qu'il n'y avoit qu'à faire attention à la nature des vibrations simples des cordes, pour prévoir sans aucun calcul tout ce que ces deux grands Géomètres ont trouvé par les calculs les plus épineux & les plus abstraits, dont l'esprit analytique se soit encore avisé. » Daniel Bernoulli 1755 p. 148

énoncé incroyable. Celui qui l'énonce doit en répondre et d'une certaine manière y faire face. Les textes inauguraux y répondent explicitement. Fourier, on l'a vu, ne manque pas de développer une succession d'arguments spécifiques pour soutenir son énoncé inaugural. Son texte témoigne d'une démarche inaugurale dont la finalité ne fait pas de doute. De même, tout son « Discours préliminaire » présente une philosophie du langage mathématique qui répond à cette prétention exorbitante, étendue à toute l'Analyse mathématique. Il en est de même des articles de Church, de Turing, de la *Begriffsschrift* de Frege ou encore de *La Géométrie* de Descartes. On ne trouve en revanche dans les Mémoires de Bernoulli aucune reconnaissance de ce caractère exorbitant, aucun argument n'est donné pour y répondre. Ses arguments sont donnés pour défendre un *principe physique* sur la nature des phénomènes vibratoires et non pour inaugurer la représentation conforme des fonctions par des séries trigonométriques.

3 - L'énoncé inaugural d'Euler et l'introduction de l'expression d'une fonction arbitraire

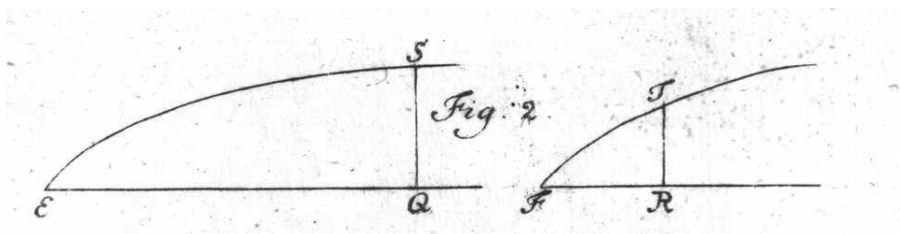
L'énoncé inaugural sur les séries trigonométriques a pourtant bien été énoncé au cours de cette controverse. Mais il l'a été par Euler après que Bernoulli ait répondu aux Mémoires de D'Alembert et à celui d'Euler publié à leur suite. Je voudrais maintenant rendre compte du fait que cet énoncé a été introduit par Euler.

Dans son Mémoire de 1749, D'Alembert a montré que les solutions de l'équation aux dérivées partielles décrivant le mouvement d'une corde vibrante sont toutes les courbes d'équation $y = \Psi(t+x) - \Gamma(t-x)$ où Ψ et Γ sont des *fonctions quelconques*. Comme les extrémités de la corde sont aussi fixes, les solutions doivent de plus être de la forme $y = \Psi(t+x) - \Psi(t-x)$, avec Ψ $2l$ -périodique (l longueur de la corde). D'Alembert considère aussi le cas particulier où la figure initiale de la corde est une droite (pour des oscillations infinitésimales), ce qui impose en plus que la fonction Ψ soit paire. Il appelle « courbe génératrice » la courbe notée Ψ (D'Alembert 1749, 220). Il peut ainsi montrer comme il le voulait qu'il est possible d'engendrer une *infinité* de fonctions satisfaisant ces conditions en reportant au-dessus et en-dessous de l'axe une portion de courbe définie par une fonction génératrice qui peut ne pas être sinusoïdale. Euler (1749, 1755) reprend ces résultats et expose en détail la construction d'une solution en reportant alternativement sous l'axe et au-dessus *n'importe quelle* courbe s'annulant à ses deux extrémités.

L'objectif de D'Alembert était de montrer qu'il existait une infinité de solutions en plus de celles trouvées par Taylor. Ce qu'il réussit à faire. Euler a repris sa démarche mais en faisant valoir qu'il est non seulement possible d'obtenir une infinité de solutions mais aussi de partir de *n'importe quelle* courbe génératrice pour les obtenir. Il souligne lui-même à plusieurs reprises cet aspect :

« Or, sans faire encore attention à ces propriétés, & m'arrêtant uniquement à l'équation $(ddy/dt^2) = cc(ddy/dx^2)$, il est important de remarquer, que les deux courbes ES & FT sont absolument arbitraires, & qu'on les peut prendre à volonté; car, quelles que soient ces deux courbes, si nous y prenons les abscisses $EQ = x + ct$ & $FR = x - ct$ [il faut lire $FR = x - ct$], & que nous posions $y = QS + RT$, ou bien $y = n(QS + RT)$, il est certain que cette valeur satisfait à notre équation ; ce qu'il serait

aussi aisé de prouver indépendamment de l'analyse, que je viens de développer. Or, ce qui est le principal, ces deux courbes appliquées de la manière enseignée, satisfont également, soit qu'elles soient exprimibles par quelque équation, ou qu'elles soient tracées d'une manière quelconque, de sorte qu'elles ne puissent être assujetties à aucune équation. Le Lecteur est prié de réfléchir bien sur cette circonstance, qui contient le fondement de l'universalité de ma solution, contestée par M. D'Alembert. » Euler 1755, 213-4



On encore :

« Mais, de la manière que je viens de conduire la solution, il n'est pas nécessaire, que la courbe directrice soit exprimée par quelque équation, & la seule considération du trait de la courbe suffit à nous faire connoître le mouvement de la corde, sans l'assujettir au calcul. » Euler 1755, 217

L'extension opérée par Euler est aussi reconnue par Lagrange :

« M. Euler est, je crois, le premier qui ait introduit dans l'Analyse ce nouveau genre de fonctions, dans sa solution du problème de *chordis vibrantibus* » Lagrange 1760, œuvres, 1, 158.

La solution du problème donnée par D'Alembert, $y = \Psi(t+x) - \Psi(t-x)$, comprend l'expression d'une fonction *arbitraire*³⁹. Cette expression de la solution établit une correspondance entre la totalité des solutions de ce *problème particulier* et la *totalité des fonctions* quoi que cela recouvre pour chacun des mathématiciens. Le problème de la corde vibrante est donc un problème particulier dont la solution implique *toutes* les fonctions. C'est un problème qui conduit à considérer *toutes* les fonctions. Il est de ce point de vue semblable au problème de Pappus qui permettait aussi à Descartes de considérer toutes les courbes géométriques (Herreman xxxx).

La solution $y = \Psi(t+x) - \Psi(t-x)$ implique cette totalité sans que celle-ci n'ait ici besoin et n'ait d'autre expression qu'une variable de fonction, Ψ , c'est-à-dire un simple symbole de fonction tenant lieu de n'importe quelle fonction. Il est ainsi possible d'exprimer n'importe quelle fonction sans avoir de système d'expressions (analytiques) établi pour leur totalité. Dès lors quand Bernoulli affirme que son principe lui permet de déterminer que toutes les solutions du problème sont des séries de sinus, cela implique immédiatement *pour D'Alembert et Euler* que n'importe quelle fonction devrait être une somme de sinus. Ils en tirent l'un et l'autre cette conséquence et introduisent l'énoncé afférent, mais sans le soutenir. L'introduction de cet énoncé apparaît ainsi comme une *conséquence* du fait que la

³⁹ L'apparition d'une fonction arbitraire dans la résolution d'une équation aux dérivées partielles n'est bien sûr pas propre à ce problème ou à cette équation. Une telle solution apparaît déjà, par exemple, dans D'Alembert (1747a), voir Demidov (1982, 15).

solution donnée par D'Alembert implique l'expression d'une fonction quelconque. C'est l'introduction d'une variable parcourant *toutes* les fonctions qui transforme l'affirmation de Bernoulli en une affirmation sur la possibilité de représenter toutes les fonctions par des séries trigonométriques. La *totalité des fonctions* s'introduit à cette occasion. Considérer *toutes* les fonctions n'est pas un phénomène naturel inhérent à n'importe quelle pratique mathématique ; c'est au contraire un phénomène remarquable qu'il importe d'observer quand il se manifeste et dont il convient ensuite de déterminer les conditions, les modalités et le moment de leur introduction.

Dans le Mémoire de Bernoulli de 1755 la *totalité des fonctions* n'intervient d'aucune manière. A un endroit où quelqu'un qui inaugurerait une telle représentation y aurait sans doute fait référence, Bernoulli écrit lui « Après ces remarques il sera facile de construire une infinité de courbes initiales [et non toutes!] à la corde AB avec cette condition, que chaque point de la corde arrive quelquefois en même tems à un point de repos instantané, & de donner la loi générale pour toutes ces courbes sans aucun calcul préalable. » (Bernoulli 1755, 153).

Euler introduit son énoncé au cours de la *discussion* des différentes solutions proposées. Cet énoncé n'est utile ni à la mise en équation, ni à la résolution de celle-ci. Il est une conséquence du rapprochement, c'est-à-dire de la considération conjointe de la solution proposée par Euler, à la suite de D'Alembert, et de celle proposée par Bernoulli. Il n'est utile ni à l'une, ni à l'autre.

L'expression d'une courbe ou d'une fonction *arbitraire* intervient aussi avec la *figure initiale* de la corde. Avant de considérer le rôle que cette figure initiale *arbitraire* peut aussi jouer, il convient de préciser le rapport du problème des cordes vibrantes à son équation aux dérivées partielles.

4 - Le problème des cordes vibrantes et son équation aux dérivées partielles

La différence de statut de l'équation aux dérivées partielles est l'indice de certaines différences entre les quatre mathématiciens. Elle permet en particulier de préciser la différence entre ce que Lagrange appelle l'« examen synthétique » de Bernoulli (Lagrange 1759, œuvres, 1, 95) et l'« Analyse abstraite » proposée par D'Alembert, Euler et lui-même (Lagrange 1759, Oeuvres, I, 70)⁴⁰. Le problème considéré par Daniel Bernoulli a toujours été et restera celui de la description mathématique du mouvement d'une corde vibrante (en liaison avec des considérations acoustiques). Le souci d'en donner une solution mathématique conditionne l'interprétation et la formulation du problème et l'oblige par exemple à considérer des oscillations infinitésimales. Mais la représentation du problème au moyen d'une équation aux dérivées partielles obtenue par D'Alembert modifie le traitement du problème et l'acception qui peut être donnée de sa résolution.

L'introduction de l'équation aux dérivées partielles contribue à séparer deux temps en même temps qu'elle marque cette séparation : celui de la mise en équation et celui de la résolution de celle-ci. Au cours de la mise en équation sont prises en compte les données et les hypothèses physiques. Il faut se rapporter à la physique du problème. Au terme de cette étape, le problème est réduit à une ou plusieurs

40 Sur D'Alembert et les équations aux dérivées partielles, voir Guilbaud & Jouve 2009.

équations aux dérivées partielles avec des conditions initiales. La résolution de ces équations devient un nouveau problème qui se substitue au précédent (sans être nécessairement tenu pour conforme), et qui doit être résolu suivant les principes du calcul différentiel et intégral⁴¹. Les données physiques utilisées sont supposées avoir toutes été converties en grandeurs et relations mathématiques, et ce faisant éliminées : l'énoncé du problème (déterminer les fonctions satisfaisant telles équations différentielles avec telles conditions initiales) et sa résolution sont dès lors coupés du problème physique d'origine, et aucune considération physique n'intervient plus, sinon marginalement, dans sa résolution. Une telle séparation est par exemple manifeste quand Euler déclare :

« La question mécanique proposée se réduit à ce problème analytique, de chercher des fonctions r & s de x & t , telles que ces formules différentielles $r dx + s dt$, & $s dx + \frac{2M}{FA} r dt$, deviennent intégrables » (Euler 1750, 76-7).

Les équations aux dérivées partielles marquent aussi bien dans le processus de résolution que dans le texte qui l'expose une séparation entre des développements physico-mathématiques et des développements purement mathématiques.

Les équations aux dérivées partielles peuvent donner lieu à des équations autonomes : une même équation ou un même système d'équations étant associé à *différents* problèmes physiques. Lagrange nous en donne un exemple en réduisant aussi bien le problème de la corde vibrante que celui de la propagation du son au même système d'équations du premier ordre⁴². Après avoir dégagé ces équations par une analyse physico-mathématique nécessairement propre à chacun des deux problèmes et exposée dans deux chapitres distincts, il peut ensuite en proposer dans *un même* chapitre une résolution commune qui ne repose plus que sur des développements strictement mathématiques (Lagrange 1759, Oeuvres, I, 72-90). Ce traitement commun à la fois suppose et assure que la suite de la résolution sera strictement mathématique et pure de considérations physiques.

L'autonomie de l'équation aux dérivées partielles se retrouve dans le mémoire d'Euler (1755) quand, après avoir ré-exposé l'analyse qui permet d'obtenir l'équation $(\frac{ddy}{dt^2}) = \frac{Fa}{2M}(\frac{ddy}{dx^2})$, il écrit :

« Voilà donc à quoi le problème sur le mouvement de la corde est réduit : il s'agit de trouver pour y une telle fonction des deux variables x & t , qui satisfasse à cette équation : $(\frac{ddy}{dt^2}) = \frac{Fa}{2M}(\frac{ddy}{dx^2})$, outre qu'elle renferme les propriétés marquées cy-dessus » (Euler 1755, 208).

41 Le rapport des relations différentielles au problème dont elles sont issue est sans aucun doute différent chez D'Alembert et Euler, mais cette différence n'a pas ici d'incidence.

42 « Il est visible que toutes ces équations [du problème de la corde vibrante, $\frac{d^2 y_{m-1}}{dt^2} = \frac{2Ph - 2y_{m-1} + y_{m-2}}{MT^2} \frac{1}{r}$] sont entièrement semblables à celles que nous avons trouvées pour les mouvements des corps élastiques, et qu'il n'y a qu'à faire $P=E$, pour qu'elles deviennent tout à fait les mêmes ; d'où il s'ensuit que les deux problèmes qui y répondent sont de même nature, et qu'en en résolvant un on résout l'autre en même temps. » Lagrange 1759, Oeuvres, vol. 1, 60.

Un peu plus loin, Euler parle de « notre équation [$(\frac{dy}{dt^2}) = \alpha(\frac{dy}{dx^2})$], qui détermine [c'est moi qui souligne] le mouvement de la corde » (Euler 1755, 211).

Les équations aux dérivées partielles marquent une coupure nette entre deux moments bien distincts de la résolution du problème physique initial. Il n'est pas difficile de donner d'autres manifestations de cette séparation chez D'Alembert, Euler ou Lagrange.

Cette séparation est aussi nettement marquée chez Fourier (1822). L'autonomie de l'équation ressort par exemple clairement de cette citation :

« On voit, par exemple, qu'une même expression, dont les géomètres avaient considéré les propriétés abstraites et qui, sous ce rapport, appartient à l'Analyse générale, représente aussi le mouvement de la lumière dans l'atmosphère, qu'elle détermine les lois de la diffusion de la chaleur dans la matière solide, et qu'elle entre dans toutes les questions principales de la Théorie des probabilités. » Fourier 1822, Discours préliminaire, xxiii.

Cette séparation se retrouve aussi dans l'organisation du livre. La *Théorie analytique de la chaleur* présente une hiérarchie linéaire d'unités supra-phrastiques bien distinctes : chapitre, section, article. Ce sont bien les seules unités distinguées à ces niveaux puisque les théorèmes, les définitions et les démonstrations ne font l'objet d'aucune séparation systématique sur le plan de l'expression (ils ne sont pas signalés par un « théorème » ou un « définition » ou par des mises en page particulières). Les chapitres ont un titre et un numéro les sections de même, mais leur numérotation reprend à partir de 1 au début de chaque chapitre et les articles sont dépourvus de titre mais numérotés de manière continue du début jusqu'à la fin du livre. Les chapitres, c'est-à-dire la plus grande unité infra-textuelle, répondent à deux séries d'oppositions. Ils suivent d'une part les trois étapes du processus de mise en équation : définition des grandeurs physiques (chp. I), mise en équation (chp. II), résolution (chp. III-IX) dont la séparation est ainsi nettement marquée. A partir du troisième, la succession des chapitres suit celle des corps considérés. Ainsi, la plus grande unité infra-textuelle reproduit les étapes de la mathématisation avec ses trois moments bien marqués, appliquée à des corps particuliers. Elle domine dans les trois premiers chapitres l'opposition entre les différents corps considérés qui, dans le chapitre II, est maintenue au niveau des sections, avant de remonter ensuite à la surface, c'est-à-dire au niveau des chapitres (III-IX). Les unités textuelles de rang inférieur au chapitre accueillent d'autres oppositions. Elles accueillent en particulier l'entrelacement des développements purement mathématiques et la vérification de leur conformité physique.

On ne retrouve aucune séparation semblable dans les mémoires de Bernoulli. Une équation est donnée, mais celle-ci ne constitue pas un problème mathématique complet et autonome susceptible de se substituer au problème de la corde vibrante. Elle ne marque pas une séparation entre deux moments distincts et autonomes de la résolution. Euler devra, comme on le verra, reformuler le problème en y intégrant les conditions initiales pour qu'il en soit ainsi, faisant de

l'équation un énoncé mathématique complet, et même conforme, au problème physique (reformulé...). Elle n'est pour Bernoulli qu'une étape parmi bien d'autres d'une analyse qui reste physico-mathématique d'un bout à l'autre de la résolution.

La séparation opérée ou non par l'équation dans la résolution du problème de la corde vibrante est un indice du statut de la démarcation entre analyse physique et mathématique. La lecture de ces mémoires et de la correspondance entre ces mathématiciens ne laisse pas de faire apparaître une opposition marquée à cet égard entre Daniel Bernoulli et les trois autres mathématiciens (sans que le statut de cette démarcation soit pour autant le même chez ces derniers). La controverse implique et révèle aussi bien sûr bien d'autres désaccords, y compris entre D'Alembert, Euler et Lagrange sur le principe de continuité ou même sur « la partie du calcul qui est assujettie à des lois rigoureuses et sur lesquelles il n'est pas possible d'avoir deux avis »⁴³, c'est-à-dire sur les principes mêmes du calcul différentiel et intégral. La diversité des oppositions participe du caractère exceptionnel de cette controverse. Mais l'opposition entre Daniel Bernoulli et les trois autres mathématiciens tient, en partie, à la nature de leurs démarches respectives, et en particulier au rôle différent des mathématiques dans celles-ci⁴⁴ et dont la démarcation par les équations différentielles est un des indices objectifs ayant ses conséquences, notamment sur la prise en compte ou non de la courbe initiale. D'Alembert, Euler et Lagrange ne s'entendent pas entre eux sur la place exacte ou le statut de cette démarcation. D'Alembert en particulier accepte volontiers des limites fixes et plus étroites aux mathématiques que les deux autres géomètres. Mais ils partagent tous les trois l'idée d'une telle démarcation qui intervient dans leur résolution du problème de la corde vibrante. Si la présence de cette séparation dans un texte ne suffit évidemment pas à établir son caractère inaugural, il semble difficile d'inaugurer une représentation comme celle des fonctions par des séries entières, voire seulement de l'envisager, sans que celle-ci ne s'y manifeste.

5 - Courbes et conditions initiales

Nous pouvons à présent revenir sur la figure initiale de la corde vibrante. La figure initiale introduit aussi l'expression d'une *courbe quelconque* dans le problème des cordes vibrantes. Il importe donc d'apprécier son rôle dans l'introduction de l'énoncé inaugural. Le statut des conditions initiales des relations différentielles dépend de celui de ces relations, et en particulier de leur autonomie vis-à-vis du problème considéré. Nous avons vu qu'il n'était pas le même chez Bernoulli et les trois autres mathématiciens.

Bernoulli s'intéresse aux cordes vibrantes en tant qu'elles produisent des sons. Or, ces sons ne dépendent pas de la figure initiale de la corde. Celle-ci n'est de ce fait

43 Delambre, « Notice sur la vie et les ouvrages de M. Le Comte J.-L. Lagrange », Oeuvres de Lagrange, I, xiv.

44 Lagrange décrit la voie suivie par Bernoulli comme « une espèce d'induction » (Lagrange 1759, œuvres, I, 69).

pas considérée par Bernoulli. Comme Taylor, il ne s'intéresse à l'aspect de la corde qu'*après* qu'elle ait atteint un certain régime vibratoire indépendant de la figure initiale⁴⁵ :

« Au reste je crois que quelque courbure initiale qu'on donne à la corde, elle ne manquera pas de faire ses vibrations presque aussitôt suivant la simple uniformité des mouvements isochrones, & conformément à la nature de la trochoïde prolongée exposée par M. Taylor » (Bernoulli 1755, 158).

Ainsi, le problème des cordes vibrantes est pour Bernoulli indépendant de la figure initiale de la courbe. Le caractère arbitraire de cette courbe ne saurait donc l'amener à inaugurer une nouvelle représentation des courbes ou des fonctions.

Il n'en est pas de même pour D'Alembert et Euler qui eux résolvent des équations aux dérivées partielles. Une solution mathématique consiste pour eux à décrire le mouvement de la corde *depuis sa figure initiale* jusqu'à son évanouissement complet. La courbe initiale doit pour eux vérifier l'équation associée au problème. *Elle fait partie des solutions*. Même si leurs analyses mathématiques ne sortent pas non plus du cadre infinitésimal⁴⁶, et supposent des oscillations infiniment petites, ils y font entrer la figure initiale. Cette différence ressort nettement du passage suivant dans lequel Euler peut *remonter* du moment où le système satisfait aux conditions de l'analyse de Taylor et de Bernoulli jusqu'à sa figure initiale qui « dépend de notre bon plaisir » :

« Il est effectivement prouvé d'une manière suffisante, que si une seule vibration est conforme à cette règle [avoir une forme sinusoïdale], toutes les suivantes doivent l'observer aussi. On voit en même tems par là, comment l'état des vibrations suivantes dépend des précédentes, & peut être déterminé par elles; comme réciproquement, par l'état des suivantes, on peut conclure la disposition de celles qui ont précédé. C'est pourquoi, si les vibrations suivantes sont régulières, il ne sera en aucune manière possible que les précédentes se soient écartées de la règle : d'où résulte aussi évidemment, que si la première vibration a été irrégulière, les suivantes ne peuvent jamais parvenir à une parfaite régularité. Or la première vibration dépend de notre bon plaisir, puisqu'on peut, avant que de lacher la corde, lui donner une figure quelconque ; ce qui fait que le mouvement vibratoire de la même corde peut varier à l'infini, suivant qu'on donne à la corde telle ou telle figure au commencement du mouvement. » Euler 1750, 70.

A la suite de ce passage Euler précise l'énoncé du problème en y incluant explicitement la figure initiale :

45 Cette manière de considérer le problème, déjà chez Taylor, est aussi soulignée par Euler : « A l'égard de l'autre limitation, qui suppose toutes les vibrations régulières, on tâche de la défendre en disant, que bien qu'elles s'écartent de cette loi au commencement du mouvement, elles ne laissent pas de s'assujettir au bout d'un très court espace de tems à l'uniformité, de sorte qu'à chaque vibration la corde s'étend tout à la fois, & ensemble en ligne droite, affectant hors de cette situation la figure d'une trochoïde prolongée. » Euler 1750, 70.

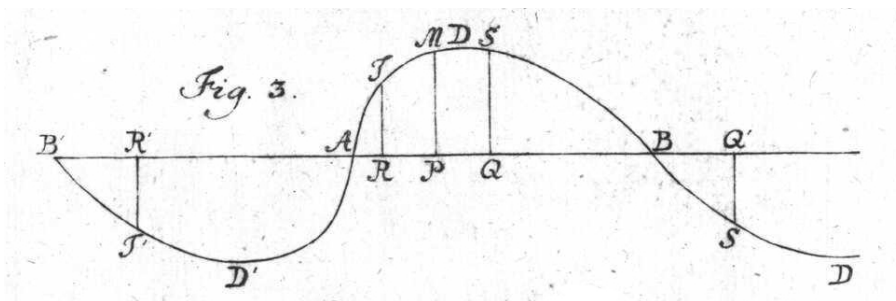
46 « A la vérité la première limitation, par laquelle les vibrations de la corde sont regardées comme infiniment petites, quoique réellement elles conservent toujours une raison finie à la longueur de la corde, cela ne dérange presque en rien les conclusions qu'on en tire, parce qu'en effet ces vibrations sont pour l'ordinaire si petites, qu'elles peuvent être prises pour infiniment petites, sans qu'il en résulte d'erreur sensible. D'ailleurs on n'a pas encore poussé assez loin, ni la Mécanique, ni l'Analyse, pour être en état de déterminer les mouvements dans les vibrations finies. » Euler 1750, 69-70.

« Si une corde de longueur, & de masse donnée, est tendue par une force, ou un poids donné ; qu'au lieu de la situation droite, on lui donne une figure quelconque, qui ne diffère cependant de la droite qu'infiniment peu, & qu'ensuite on la lâche tout à coup ; déterminer le mouvement vibratoire total, dont elle sera agitée. » Euler 1750, 70

Que ce soit par ce mouvement à rebours qui remonte jusqu'à la courbe initiale ou en raison de la constitution de l'équation aux dérivées partielles en un problème mathématique autonome, la courbe initiale est intégrée à l'énoncé et aux solutions du problème. La courbe initiale est ainsi, pour eux, et à la différence de Bernoulli, une donnée du problème et surtout une solution de celui-ci.

Or, avec cette courbe initiale s'introduit l'expression d'une courbe arbitraire :

« Réciproquement donc, dès qu'on connoit la figure initiale, qu'on aura donnée à la corde avant que de la relâcher, rien ne sera plus aisé que de décrire notre courbe infinie B'D'ADB'D & qui nous fera connoître le mouvement, que la corde poursuivra. On tracera la courbe AMDB, égale & semblable à la figure initiale de la corde, & on en réitérera la construction, tant vers la gauche au delà du point A, que vers la droite au delà du point B, alternativement au dessus & au dessous de l'axe, en sorte que partout les bouts qu'on a joints ensemble soient les mêmes. Cette construction a toujours lieu, de quelque nature que soit la figure initiale proposée de la courbe, & il ne s'agit que de la portion ADB; laquelle quand elle-même auroit d'autres continuations de part & d'autre en vertu de sa nature, elles n'entrent en aucune considération. Ainsi, si la figure ADB étoit un arc de cercle, sans se soucier de la continuation naturelle du cercle, on répétera la description de ce même arc de cercle ADB à l'infini alternativement au dessus & au dessous de l'axe ; & la même règle a toujours lieu, de quelque nature que puisse être la figure initiale de la corde [c'est moi qui souligne]. » Euler 1755, 216-7



Pour D'Alembert et Euler la courbe initiale qui peut être une courbe quelconque fait partie des solutions. Dès lors, quand Bernoulli affirme que toutes les solutions sont données par des séries trigonométriques, cela implique, pour D'Alembert et Euler, qu'une courbe quelconque, quoi que chacun entende par cela, devrait pouvoir être exprimée par une série trigonométrique.

Après l'introduction d'une fonction Ψ quelconque dans l'expression des solutions de l'équation différentielle, la figure initiale de la corde introduit une seconde expression générale des courbes ou des fonctions (pour ceux qui, comme D'Alembert et Euler, réduisent le problème à une équation aux dérivées partielles). Un second lien est ainsi effectivement établi entre les solutions de ce problème et le fait de considérer la totalité des courbes ou des fonctions⁴⁷.

47 Par la manière dont il met une courbe ou une fonction arbitraire en rapport avec ses solutions, le

6 - Synthèse sur l'énoncé inaugural dans la controverse des cordes vibrantes

La controverse des cordes vibrantes offre l'exemple d'un énoncé inaugural qui n'a été énoncé que pour être dénoncé. Les conditions qui caractérisent un texte inaugural ne sont pas satisfaites ou sont tout simplement contestées. Seul un certain réalisme se retrouve chez les quatre mathématiciens. La dualité est avérée dans les Mémoires de D'Alembert, Euler et Lagrange, mais ne l'est pas dans ceux de Bernoulli. Il n'y a d'inauguration qu'avec Bernoulli, mais il s'agit alors de défendre la validité d'un principe physique, ce qui ne correspond pas à l'acception donnée ici à l'inauguration. Les trois autres ne sauraient inaugurer un énoncé qu'ils contestent. De même la validité du principe de Bernoulli et les exemples d'expériences qu'il donne pour l'attester ne correspondent pas à l'acception de la conformité adoptée ici.

L'énoncé n'est ici inaugural qu'en tant qu'il vérifie les cinq critères retenus pour caractériser ces énoncés. Mais il n'a pas de fonction inaugurale. Or nous avons vu qu'un texte inaugural devait avant tout être rapporté à sa fonction inaugurale qui est d'introduire une représentation conforme.

D'Alembert, Euler et Bernoulli ont chacun eu un rôle dans l'introduction de cet énoncé. D'Alembert a établi l'équation aux dérivées partielles du problème et en a exprimé la solution au moyen de l'expression d'une fonctions *quelconque*. Une expression a ainsi été donnée aux solutions qui ne fait plus intervenir les expressions analytiques reçues (algébriques ou transcendentes), et qui est indépendante de ce que la notion de fonction quelconque peut recouvrir pour chacun. Mais D'Alembert n'accorde qu'un pouvoir expressif limité aux mathématiques : tous les problèmes physiques n'ont pas selon lui nécessairement une expression mathématique adéquate⁴⁸ qu'il limite essentiellement aux

problème des cordes vibrantes ne s'apparente plus ici au problème de Pappus mais à celui de la distribution de la chaleur dans une lame infinie que Fourier considère pour introduire et soutenir son énoncé inaugural.

48 Par exemple : « On objectera peut-être, qu'il est impossible d'expliquer dans ma théorie, pourquoi la corde frappée d'une manière quelconque, rend toujours à peu près le même son ; puisque ses vibrations, selon moi, peuvent être très-irrégulières en plusieurs cas [163] . J'en conviens ; mais je suis persuadé que la solution de cette question n'appartient point à l'Analyse : elle a fait tout ce qu'on étoit en droit d'attendre d'elle ; c'est à la Physique à se charger du reste. » (D'Alembert 1761, 40 ; Jouve 2007, II, 171) ; « l'expérience & la théorie ne sauroient être d'accord dans la détermination du mouvement des cordes vibrantes, ne fût-ce que par cette seule raison, que le mouvement d'une corde vibrante cesse bientôt, quoique par la théorie il doive durer continuellement. » (D'Alembert 1761, 67 ; Jouve 2007, II, 205). Un autre exemple du refus de mélange des genres : « Avant que de répondre à ce Géometre [Daniel Bernoulli], nous allons rendre sa proposition encore plus générale. Nous prouverons qu'en effet la somme moyenne entre toutes les sommes de la série $\cos .x + \cos .2x + \cos .3x$, &c. à l'infini $= -\frac{1}{2}$; mais nous le prouverons rigoureusement, & non par le calcul probabilités, dont l'usage, nous l'osons dire, est dans le cas présent tout-à-fait chimérique. Il ne s'agit pas ici de conjecturer, mais de démontrer ; & il seroit dangereux, (quoiqu'à la vérité ce malheur soit peu à craindre) qu'un genre de démonstration si singulier s'introduisît en géométrie. Ce qui pourra seulement paroître surprenant, c'est que de pareils raisonnemens soient employés comme démonstratifs par un Mathématicien célèbre, & dans un écrit où il s'exprime avec très-peu de ménagement sur le dixième Mémoire de mes Opuscules, concernant la théorie des probabilités ; théorie qui n'a pourtant (ce me semble)

développements en séries entières⁴⁹ (Jouve 2007, I, 144). Il reste, à cette époque, attaché à ce cadre⁵⁰. Euler a quant à lui repris l'expression de la solution donnée par D'Alembert en y intégrant des « fonctions irrégulières » dont il trouve dans la courbe tracée, à défaut d'expression analytique une expression géométrique. Cette extension à des « fonctions irrégulières » est récurrente avec les équations aux dérivées partielles (Euler 1767 ; Dhombres 1988). Elle est aussi un thème récurrent dans la correspondance d'Euler et un terrain d'entente entre Euler et Lagrange contre Bernoulli mais aussi contre D'Alembert⁵¹. Mais s'il accepte cette extension de l'Analyse au-delà des expressions analytiques reconnues ou existantes, Euler n'a pas pour autant de système d'expressions de substitution à proposer susceptible d'exprimer toutes les « fonctions irrégulières ». Il s'accommode de la nécessité d'appliquer l'Analyse mathématique à des courbes qui n'ont pas d'expression analytique. L'Analyse mathématique a dès lors une portée qui excède ses moyens d'expression⁵².

En exprimant le problème d'une corde vibrante par une équation aux dérivées partielles D'Alembert fait de la courbe initiale une solution du problème physique. Or avec cette courbe initiale s'introduit à nouveau l'expression d'une courbe quelconque. De ce fait, mais aussi à cette condition, prétendre donner toutes les solutions du problème de la corde vibrante revient à prétendre donner une

rien de plus choquant que l'usage qu'il fait ici de l'analyse des jeux de hasard. Quoi qu'il en soit, après avoir prouvé, non par cette analyse, mais par un calcul rigoureux, que la somme moyenne dont il s'agit, est en effet $= -\frac{1}{2}$ dans tous les cas, nous prouverons en suite qu'on n'en peut rien conclure pour la somme réelle de la série, que cette fraction $-\frac{1}{2}$ ne représente point. » (D'Alembert 1761, 157-8 ; Jouve 2007, II, 244-5)

- 49 Par exemple, quand une fonction est impaire, D'Alembert infère qu'elle doit n'avoir que des puissances impaires de x (D'Alembert 1761, 14).
- 50 Par exemple : « le mouvement de la corde ne peut être soumis à aucun calcul analytique, ni représenté par aucune construction, quand la courbure fait un saut en quelque point » (D'Alembert 1761, 22 ; Jouve 2007, II, 148).
- 51 Ainsi, Lagrange fait valoir auprès d'Euler l'intérêt de la nouvelle approche qu'il a trouvé au problème de la corde vibrante : « Cette solution, étant d'un genre tout à fait nouveau, ne sera peut-être pas aussi indigne de votre attention, et elle servira encore plus à établir l'usage des fonctions irrégulières et discontinues dans une infinité d'autres problèmes. » Lagrange à Euler, 24 novembre 1759, Oeuvres de Lagrange, vol. 14, 171-2. Dans une autre lettre, Euler réfute une objection de D'Alembert contre les fonctions arbitraires : « c'est une propriété essentielle des équations différentielles à trois et à plusieurs variables, que leurs intégrales renferment des fonctions arbitraires qui peuvent aussi bien être discontinues que continues. » Euler à Lagrange, 16 février 1765, Oeuvres de Lagrange, 14, 203. On peut encore citer Lagrange : « D'ailleurs, les phénomènes de la propagation du son ne peuvent s'expliquer qu'en admettant les fonctions discontinues, comme je l'ai prouvé dans ma seconde dissertation. » Lagrange à D'Alembert, 20 mars 1765, Oeuvres de Lagrange, vol. 13, 38. Voir encore Lagrange 1760, Oeuvres, 1, 158.

- 52 C'est là typiquement un exemple de *problème d'expression* en l'occurrence consécutif à la considération de nouveaux problèmes exprimés au moyen d'équations aux dérivées partielles, voir (Herreman 2005, et à paraître). C'est un point déjà abordé par Jean Dhombres (1988). Le problème se trouve renforcé quand la considération de grandeurs imaginaires met aussi en défaut l'expression par une courbe : « Mais, si l'on demandait une semblable intégrale complète pour le cas où a serait une quantité négative $-b$, je ne vois pas comment on la pourrait représenter par des courbes arbitraires, puisqu'on n'y saurait assigner les appliquées qui répondent à des abscisses imaginaires. » Euler à Lagrange, 9 novembre 1762, Oeuvres de Lagrange, vol. 14, 203. L'expression de la fonction quelconque pourrait aussi apparaître dans l'équation différentielle, et non seulement dans l'énoncé du problème comme condition initiale. C'est ce qui arrive avec le cas d'une corde d'épaisseur non uniforme.

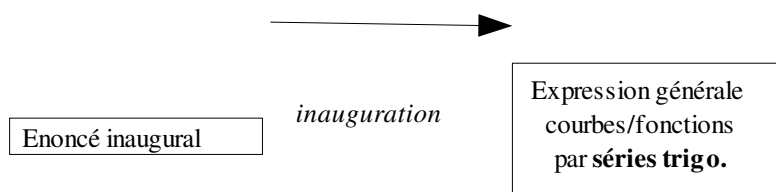
représentation de toutes les fonctions. Daniel Bernoulli est celui qui dans ce contexte va déclencher l'introduction de l'énoncé en affirmant, à partir d'un principe physique sur la décomposition des sons en modes propres, que les séries trigonométriques tenues par D'Alembert et Euler pour des solutions particulières sont en fait *toutes* les solutions du problème de la corde vibrante. La présence de l'expression d'une fonction quelconque dans la solution des relations différentielles et surtout l'expression de la courbe initiale qui pour D'Alembert comme pour Euler doit être intégrée à l'énoncé du problème les conduisent à récuser l'affirmation de Bernoulli et à formuler l'énoncé inaugural qui en résulterait si elle était vérifiée. L'introduction de cet énoncé est la conséquence, dans ce contexte et avec ces conditions, de la forme des solutions proposées par Bernoulli et de la conviction de celui-ci qu'il a ainsi donné *toutes* les solutions. Mais si Euler formule cet énoncé, il ne le soutient pas. Son mémoire publié en 1755 est ainsi largement consacré à le dénoncer. Bernoulli serait le seul à le soutenir, mais il ne l'a pas énoncé. Il se doit néanmoins de répondre aux objections. Ses réponses vont surtout consister en une défense de sa solution, et non en un soutien de l'énoncé inaugural, qu'il va considérer comme un théorème d'interpolation dont il esquissera la démonstration (Bernoulli 1758, 165). Ainsi, son « soutien » se fait soit de manière indirecte sous la forme d'objections aux objections d'Euler soit en l'assimilant à un théorème qu'il s'agirait de démontrer. Si Euler a bien écrit un mémoire de type anti-inaugural pour réfuter cet énoncé, il n'y a pas de texte inaugural écrit par Bernoulli pour le soutenir. Aucun de ces mathématiciens finalement ne soutient l'énoncé : celui qui l'énonce le réfute, celui qui pourrait le soutenir, ni ne le soutient ni ne l'énonce⁵³. Ainsi, cette controverse donne l'exemple d'un énoncé inaugural qui n'a été introduit que pour être dénoncé. Elle aura permis de comparer un texte qui défend un principe physique et un autre, celui de Fourier, qui soutient un énoncé inaugural. Cela confirme leur différence et donne un exemple de principe physique là où l'on pouvait s'attendre, compte tenu des citations données, à trouver un texte inaugural⁵⁴.

Les énoncés inauguraux connus, ceux introduits par Church et Turing, Frege

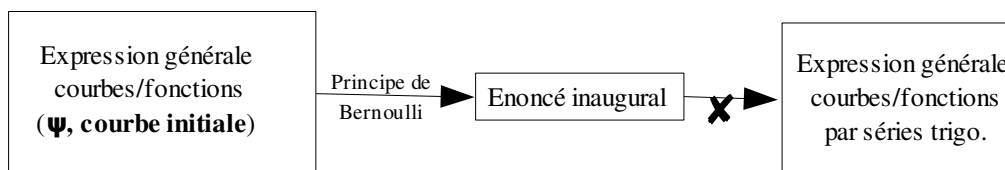
53 Citons la conclusion de l'analyse sur les cordes vibrantes de Darrigol (2007) : « To summarize, Bernoulli, d'Alembert, Euler, and Lagrange held different positions regarding the permissible string curves, the curves that trigonometric series could represent over a finite interval, and the status of partial vibrations. Bernoulli admitted any string curve for which both the ordinate and the radius of curvature remained very small compared to the length of the string; he believed that trigonometric series could represent any such curve; he asserted the physical existence of the partial vibrations. D'Alembert required the string curve to be analytic and close to the axis; he believed that any "discontinuous" curve and even some "continuous" curves could not be represented by trigonometric series; he regarded partial vibrations as mathematical fictions. Euler admitted any continuous string curve with piecewise continuous slope and curvature, and with small ordinate and slope; he denied that trigonometric series could represent non-analytic curves, at least those which coincide with segments of the axis (pulses); he ascribed some physical reality to partial vibrations of non-necessarily sine form. Lagrange originally admitted the same string curves as Euler (except for polygonal curves), but came to believe that his passage from the discrete to the continuous required that all derivatives should be finite; he believed that trigonometric series could in some "asymptotic" sense represent any curve, but sometimes denied perfect identity between the series and the curve when the latter was non-analytic or pulse-like; like d'Alembert, he denied any physical reality of the partial vibrations. » Darrigol 2007, 385.

54 La confusion de l'énoncé imputé à Bernoulli avec celui de Fourier a déjà été clairement dénoncée par Burkhardt (1908, 20 ; Jouve 2007, II, 29).

ou Whitehead & Russell, Descartes ou Fourier, inauguraient une représentation générale : des nombres ou des fonctions calculables, des propositions logiques, des problèmes et des courbes géométriques, des fonctions. Toutes ces représentations vont ensuite rendre possible des énoncés mathématiques qui ne l'auraient pas été sinon. C'est exactement l'inverse qui se produit ici. Au lieu d'inaugurer une représentation générale nouvelle qui aura des conséquences, c'est l'énoncé qui est une conséquence de l'introduction d'expressions générales de toutes les fonctions (que ce soit Ψ et Γ ou l'expression géométrique d'une courbe quelconque par une corde). Cet énoncé n'a de fait aucune fonction inaugurale. Les expressions qui ont ici des conséquences, mais qui ne sont pas inaugurées, sont les variables de fonctions Ψ , Γ et l'expression géométrique d'une corde.



L'énoncé inaugural dans Fourier (1822)



L'énoncé inaugural dans la controverse

IV -Conclusion : un problème de sémiotique et sa solution

Les textes inauguraux introduisent des systèmes d'expressions dont la conformité avec ce qu'ils représentent va permettre de considérer ces systèmes en lieu et place de ce qu'ils représentent. Les caractéristiques de ces systèmes d'expressions vont ensuite permettre des énoncés et des démonstrations se rapportant aux totalités auxquelles ils donnent une nouvelle représentation (cet aspect n'ayant pas été abordé ici). Ainsi, les séries trigonométriques offrent, pour un temps..., une représentation uniforme de *toutes* les courbes et de *toutes* les fonctions quand les séries entières, et déjà avant les polynômes, ne pouvaient plus prétendre jouer ce rôle. Des théorèmes et des théories, notamment pour l'intégration, vont ainsi pouvoir être développés tirant parti de ces nouveaux moyens d'expression de la totalité des courbes et des fonctions. Les textes inauguraux, nécessairement assez rares, marquent des moments toujours singuliers et remarquables dans l'histoire des mathématiques par la constitution des moyens d'expression de totalités, et donc de la généralité, propres aux mathématiques. Les critères retenus pour caractériser ces textes et les énoncés inauguraux aident à les repérer. Il a été ainsi possible de vérifier que la *Théorie analytique de la chaleur* de Joseph Fourier les satisfaisait. Mais il importe surtout de reconnaître la fonction inaugurale de ces textes, c'est-à-dire à la fois leur rôle dans l'introduction de nouvelles représentations, les problèmes sémiotiques qu'ils sont pour une large part consacrés à résoudre, problèmes qui déterminent leurs caractéristiques, et enfin les développements qu'ils rendent ensuite possibles. Les textes inauguraux marquent des moments fondateurs dans l'histoire des moyens d'expression des mathématiques qu'il importe de reconnaître comme tels en raison de leurs caractéristiques et fonctions communes, mais on ne doit évidemment pas s'attendre à ce que de tels changements, et en particulier ceux affectant l'expression de la généralité, se fassent et se signalent toujours par de tels textes. L'analyse de la controverse sur les cordes vibrantes donne un tel contre-exemple.

Une fois établi que *La théorie analytique de la chaleur* de Fourier est un texte inaugural, la présence d'un énoncé inaugural dans la controverse des cordes vibrantes pose un problème sémiotique qui devait être résolu. Explicitons ce problème. L'intérêt de considérer les énoncés inauguraux vient de ce qu'ils introduisent des représentations qui vont permettre des raisonnements et des développements nouveaux sur les totalités représentées. Il s'agit en premier lieu de reconnaître que les énoncés et en particulier les raisonnements mathématiques tirent parti de certains moyens d'expression : ils s'inscrivent dans des conditions sémiotiques qui font partie de leurs conditions de possibilité. Chaque énoncé devient ainsi l'indice de ses conditions de possibilité. La généralité, en particulier, suppose des moyens d'expression qui la rendent possible. Il s'agit ensuite de considérer une sorte de principe de conservation sémiotique : les moyens d'expression ne varient que s'ils sont modifiés. Autrement dit : les changements

dans les caractéristiques sémiotiques des textes mathématiques doivent être rapportés à des causes assignables.

L'énoncé inaugural des séries trigonométriques apparaît au cours de la controverse sur les cordes vibrantes. Le fait d'avoir été introduit sans être soutenu conduit à une situation sémiotique dont il fallait rendre compte : il y aurait une manifestation de généralité sans cause. En effet, reconnaître que l'énoncé inaugural introduit n'a pas été soutenu revient surtout à reconnaître que la conformité des séries trigonométriques aux courbes n'a pas été soutenue. Les séries trigonométriques n'ont pas été inaugurées comme moyen d'expression des courbes et des fonctions, ce qui à ma connaissance ne sera pas fait avant Fourier. Mais Euler et D'Alembert ont bien néanmoins été amenés à envisager que les séries trigonométriques puissent être suffisamment générales pour « renfermer » toutes les courbes. Or, la généralité manifestée dans cet énoncé à ses conditions de possibilité. Quelles sont-elles ? Il est ici indifférent que cet énoncé n'ait été formulé que pour être dénoncé. L'énoncé seul atteste déjà des moyens d'expression qui permettent de l'envisager : la généralité de cet énoncé suppose les moyens d'expression correspondant. Mais comme il n'a pas été soutenu, ces moyens n'ont pas été introduits par les développements qui serviraient à le soutenir. S'ils n'ont pas été inaugurés ils ont été introduits autrement. Tel est le problème sémiotique posé par la présence de cet énoncé inaugural non soutenu : d'où viennent les moyens d'expression de la généralité qui se manifestent dans cet énoncé s'ils n'ont pas été inaugurés ? Le problème, une fois posé, est facile à résoudre : il n'y a plus qu'à repérer les modes d'expression de la généralité (totalité des courbes ou des fonctions) là où celle-ci se manifeste et le cas échéant à remonter jusqu'au moment de leur introduction. On en trouve alors trois : la notation Ψ utilisée par D'Alembert pour désigner une fonction quelconque dans l'expression qu'il donne des solutions de l'équation aux dérivées partielles, l'expression géométrique donnée par la forme initiale de la corde et le principe de Bernoulli. Ces moyens d'expression se manifestent d'ailleurs en partie déjà *avant* l'énoncé inaugural et celui-ci ne les modifiera pas. Les moyens d'expression de la généralité une fois recensés il devient à l'inverse possible de rendre compte de l'introduction de l'énoncé inaugural par la présence conjointe de solutions exprimées au moyen d'une fonction quelconque, de la figure initiale arbitraire de la corde et du principe défendu par Bernoulli. On a aussi vu que la manière de considérer le rapport entre le problème et l'équation aux dérivées partielles déterminait la prise en compte ou non de la courbe initiale dans l'énoncé du problème. D'Alembert et Euler intègrent la courbe initiale à l'énoncé du problème et celle-ci doit être solution de l'équation aux dérivées partielles. La prise en compte de cette expression générale des courbes dépend dès lors elle-même du statut de l'équation aux dérivées partielles et de son rapport au problème physique initial. C'est un élément de la controverse et surtout, on voit que ce rapport des équations aux problèmes, produit de développements antérieurs, et qui ne s'impose pas encore à tous, a lui-même un impact sur la manière de concevoir les problèmes et sur certains développements, comme l'introduction de l'énoncé inaugural.

On voit ainsi se mêler et se propager les expressions de la généralité, mais l'énoncé inaugural n'est pas ici la cause de nouveaux moyens d'expression. Il est la *conséquence* de moyens d'expression déjà reçus que la controverse réunit dans

une configuration particulière qui conduit à l'introduction de cet énoncé.

La démarche suivie, que j'ai tenté ici d'expliciter, se fonde sur le caractère objectif des moyens par lesquels la généralité est exprimée. Il importe en premier lieu de reconnaître la nécessité de ces moyens d'expression : tout énoncé général suppose des moyens d'expression qui rendent possible l'expression de cette généralité. Il n'y a pas de point de vue sans les conditions qui en ont permis l'expression. A la manifestation d'une forme de généralité dans un texte doit répondre les moyens d'expression correspondants. Les énoncés et les raisonnements ont leurs conditions de possibilité. Leur fondement n'est en particulier que partiellement logique ; il est aussi sémiotique. Ces moyens doivent en second lieu avoir été introduits d'une manière ou d'une autre.

Cette double nécessité (existence et introduction) est le point de départ de l'étude des moyens d'expression utilisés. Elle en assure le succès. Ceux-ci peuvent ensuite être repérés, séparés les uns des autres, identifiés et en quelque sorte tracés dans un texte ou un corpus. Il est possible de les prendre comme objets de raisonnement, quasiment de calcul. Il devient possible de se demander comment ils apparaissent, se propagent, disparaissent, etc. L'analyse qui a été présentée de la controverse des cordes vibrantes se résume alors à peu près à ceci : déterminer les moyens d'expression de la généralité des énoncés de cette controverse une fois établi que la représentation des courbes par des séries trigonométriques n'y a aucune part. L'énoncé inaugural des séries trigonométriques a été considéré comme une sorte de réaction non pas chimique mais sémiotique qui doit satisfaire une équation sémiotique. Un bilan sémiotique doit rendre compte de la préservation des caractéristiques sémiotiques. Si le bilan n'est pas équilibré, il faut trouver la source d'apport extérieur. Le soutien de Fourier à l'énoncé inaugural constitue un tel apport. Cet apport n'existe pas dans la controverse des cordes vibrantes. L'équilibre sémiotique doit s'expliquer par les ressources sémiotiques disponibles. C'est ce qui a été fait.

Je me suis surtout intéressé ici aux manifestations et à l'expression de la généralité. Mais d'autres caractéristiques sémiotiques peuvent aussi bien être considérées et ont d'ailleurs dû l'être. Nous avons vu par exemple que l'on pouvait suivre l'incommensurabilité et préciser de quelle manière elle se retrouvait dans la formule intégrale des coefficients de Fourier. Nous avons aussi vu que l'autonomie des équations aux dérivées partielles n'était pas la même dans les textes d'une part de D'Alembert, d'Euler, de Lagrange et de Fourier et d'autre part dans ceux considérés de Bernoulli et qu'elle pouvait avoir une incidence sur la prise en compte ou non de la figure initiale de la corde. Ce sont des caractéristiques ou des invariants sémiotiques que l'on peut étudier et dont il est possible de faire l'histoire.

Bibliographie

Bernoulli, Daniel, "Réflexions et éclaircissements sur les nouvelles vibrations des

cordes exposées dans les mémoires de l'académie de 1747-1748", *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin*, 9, pp. 147-172, 1755.

Bernoulli, Daniel, "Sur le mélange de plusieurs espèces de vibrations simples isochrones, qui peuvent coexister dans un même système de corps", *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin*, 9, pp. 173-195, 1755.

Bernoulli, Daniel, "Lettre de Monsieur Daniel Bernoulli à M. Clairaut au sujet des nouvelles découvertes faites sur les vibrations des cordes tendues", *Journal des savants*, pp. 157-166, 1758.

Bernoulli, Daniel, "Mémoire sur les vibrations des cordes d'une épaisseur inégale", *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin*, 87, pp. 281-306, 1767.

Brian, Eric. *La mesure de l'Etat. Administrateurs et géomètres au XVIIIe siècle*. Paris : Albin Michel, 1994.

Burkhardt, Heinrich, "Entwicklung nach oscillirenden Functionen und Integration der Differentialgleichungen", *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 10, pp. 1-1804, 1901-1908.

Cannon, John T. & Dostrovsky, Sigalia. *The Evolution of Dynamics : Vibration Theory from 1687 to 1742*. New York : Springer-Verlag, Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, 1981.

D'Alembert, Jean Le Rond (1747a). *Réflexions sur la cause générale des vents*. Paris : David l'aîné (Jean-Baptiste Coignard, imprimeur).

D'Alembert, Jean le Rond. "Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration", *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin*, 3, pp. 214-219, (1747b) 1749.

D'Alembert, Jean le Rond. "Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration : Suite", *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin*, pp. 220-249, (1747c) 1749.

D'Alembert, Jean le Rond. "Recherches sur les vibrations des cordes sonores" in *Opuscules*, t. I, pp. 1-73, 1761.

D'Alembert, Jean le Rond. *Opuscules mathématiques ou mémoires sur différents sujets*

de Géométrie, de mécanique, d'optique, d'astronomie etc., 1761.

D'Alembert, Jean le Rond. *Opuscules Mathématiques*, tome IV, 1768.

D'Alembert, Jean Le Rond & Crépel, Pierre (éd) & Guilbaud, Alexandre (éd) & Jouve, Guillaume (éd). *OEuvres complètes de D'Alembert : "Opuscules mathématiques" tome I (1761). volume III/I*. Paris : CNRS Editions, 2008.

Darrigol, Olivier. "The acoustic origins of harmonic analysis", *Archive for History of Exact Sciences*, 61 (4), pp. 343-424, 2007.

Demidov, Sergei S. "D'Alembert et la naissance de la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles" in (Emery & Monzani 1989) , 333-350, 1989.

Demidov, Sergei S. "Création et développement de la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles dans les travaux de J. d'Alembert". *Revue d'Histoire des Sciences* 35 (1), 3-42, 1982.

Dhombres, Jean. "Un texte d'Euler sur les fonctions continues et discontinues, véritable programme de l'analyse du XVIIIe siècle", *Cahiers du Séminaire d'histoire des mathématiques*, 9, pp. 23-68, 1988.

Dhombres, Jean & Robert, Jean-Bernard. *Fourier. Créateur de la physique mathématique*. Paris : Belin, 1998.

Emery, Monique (éd) & Monzani, Pierre. *Jean d'Alembert, savant et philosophe : Portrait à plusieurs voix*. Paris : Editions des archives contemporaines, 1989.

Fourier, Joseph, "Mémoire sur la propagation de la chaleur", 1807.

Fourier, Joseph. *Théorie analytique de la chaleur*. Paris : F. Didot, père et fils, 1822.

Fourier, Joseph & Darboux, Gaston (édité par). *Oeuvres complètes*, tome 1. Paris : Gauthier-Villars, 1888.

Grattan-Guinness, Ivor. *Convolutions in French Mathematics, 1800-1840. From the Calculus and Mechanics to Mathematical Analysis and Mathematical Physics*, 3 vols. Basel, Boston, Berlin : Birkhäuser Verlag, 1990.

Grattan-Guinness, Ivor & Ravetz, J. *Joseph Fourier: 1768-1830*. Cambridge, Mass: MIT Press, 1972.

Grattan-Guinness, Ivo, "Joseph Fourier, Théorie analytique de la chaleur (1822)", in Grattan-Guinness 2005a, pp. 354-365, 2005.

Grattan-Guinness, Ivo. *Landmark Writings in Mathematics*, Elsevier, 2005a.

- Guilbaud, Alexandre & Jouve, Guillaume, "La résolution des équations aux dérivées partielles dans les Opuscles mathématiques de D'Alembert (1761-1783)", *Revue d'histoire des mathématiques*, 15 (1), pp. 59-122, 2009.
- Herivel, John & Costabel, Pierre (collab.). *Joseph Fourier : face aux objections contre sa théorie de la chaleur, Lettres inédites 1808-1816*. Paris : Bibliothèque nationale, Comité des Travaux Historiques et Scientifiques, 1980.
- Herreman, Alain. "La fonction inaugurale de *La Géométrie* de Descartes", *Revue d'histoire des mathématiques*, xxxx.
- Jouve, Guillaume. *Imprévus et pièges des cordes vibrantes chez D'Alembert (1755-1783). Doutes et certitudes sur les équations aux dérivées partielles, les séries et les fonctions*, Thèse Université Lyon 1, 2007.
- Jouve, Guillaume. "Présentation du Mémoire 1" in D'Alembert 2008, pp. xxxv-xlvi, 2008.
- Lagrange, Joseph-Louis, "Recherches sur la nature et la propagation du son", *Miscellanea Taurinensia*, 1, pp, 1759.
- Lagrange, Joseph-Louis & Serret, J.A. (éd.). *Oeuvres de Lagrange*, vol. 1. Paris : Gauthier-Villars, 1867.
- Lagrange, Joseph-Louis & Serret, J.A. (éd.). *Oeuvres de Lagrange*, vol. 13. Paris : Gauthier-Villars, 1882.
- Langer, Rudolph E. "Fourier's series. The Genesis and Evolution of a Theory", *American Mathematical Monthly*, 54 (7), pp. 1-87, 1947.
- Riemann, Bernhard. "Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch trigonometrische Reihen", 1854.
- Taylor, Brook, "De motu nervi tensi", *Philosophical Transactions*, 28, pp. 26-32, 1713.
- Taylor, Brook. *Methodus incrementorum directa et inversa*. Londini : G. Innys, 1715.
- Titchmarsh, E.C, "Godfrey Harold Hardy", *Journal of the London Mathematical Society*, 25, pp. 81-101, 1950.
- Truesdell, Clifford A. « The rational mechanics of flexible and elastic bodies 1638-1789 » in *Leonhardi Euleri Opera omnia*, 2e série, t11 et t.12. Zurich, 1960.
- Youschkevitch, A.P. "The concept of function up to the middle of the 19th century", *Archives for History of Exact Sciences*, 16, pp. 37-85, 1976.