# Énoncés et textes inauguraux. Sur un type d'énoncé et de texte mathématiques

**Alain Herreman**

juillet 2010

# I -Introduction

Les pages qui suivent vont être consacrées à définir et à établir l'existence d'un type d'énoncé et de texte récurrents dans l'histoire des mathématiques : les énoncés et les textes inauguraux[1]. Si ces énoncés et ces textes sont à bien des égards fondateurs, ils ne coïncident néanmoins avec aucune notion de fondement reconnue. L'exemple d'énoncé inaugural le plus connu est sans doute la thèse de Church-Turing selon laquelle les nombres ou les fonctions calculables coïncident avec les fonctions λ-définissables, ou encore avec les fonctions générale récursives ou de manière encore équivalente avec les machines de Turing. Cet énoncé a d'emblée été considéré comme un énoncé singulier. Un terme assez spécifique et plutôt inhabituel, celui de « thèse », a d'ailleurs été introduit pour le désigner. Ce terme qui est resté attaché à cet énoncé sert aussi parfois à en désigner d'autres plus ou moins semblables. Je vais montrer que la thèse de Church-Turing est en fait un type d'énoncé récurrent en histoire des mathématiques que je propose d'appeler des *énoncés inauguraux*. J'en proposerai une caractérisation à partir de la thèse de Church-Turing et je montrerai que des énoncés avec les mêmes caractéristiques se retrouvent dans l'*Idéographie* de Frege, *La Géométrie* de Descartes et *La Théorie analytique de la chaleur* de Joseph Fourier. Malgré la diversité des époques et sujets traités, ces textes présentent un ensemble de caractéristiques communes remarquables qui serviront à définir les *textes inauguraux*.

Les textes inauguraux marquent des moments à la fois singuliers et récurrents dans l'histoire des mathématiques. Ceux qui vont être considérés ici ont tous déjà été largement et très bien étudiés. Mais je propose de les étudier ensemble afin de mieux montrer leurs caractéristiques communes. Sans rien retirer à leur caractère unique et remarquable, ces caractéristiques communes vont néanmoins mettre en évidence que ces textes font essentiellement la même chose : ils inaugurent des représentations nouvelles. La définition des textes inauguraux donnera un sens précis et contraignant à cette notion d'inauguration et en établira le caractère exceptionnel, voire exorbitant. L'analyse de ces textes devrait montrer l'intérêt de reconnaître leur caractère inaugural. Etablir ce caractère inaugural aura pour chacun un intérêt propre. L'*Idéographie* de Frege inaugure une représentation des contenus de jugement et des lois de la pensée pure. La preuve que Frege présente de l'analyticité de l'Arithmétique est une occasion exceptionnelle de mettre en évidence la *transparence* des représentations inaugurées, c'est-à-dire une forme de déni de leur existence en même temps que l'on tire parti de celles-ci. Cette transparence est une constante dans toutes les inaugurations et joue un rôle bien au delà. *La Géométrie* est un texte exceptionnel par le nombre d'inaugurations puisque pas moins de quatre représentations y sont inaugurées. Son analyse conduira notamment à une nouvelle interprétation des rôles du problème et de la

1 Je remercie Catherine Goldstein avec laquelle il a été possible de discuter longuement de ce texte avant même qu'il ne soit écrit. Elle a ainsi beaucoup contribué à ce qu'il le soit. Je remercie aussi François Rastier d'avoir bien voulu discuter d'un sujet qui n'était pas de son genre.

classification de Pappus, des instruments et des courbes géométriques à partir de leurs fonctions inaugurales. Il sera en particulier possible en mettant en évidence la fonction exclusivement inaugurale d'un certain rapport aux courbes (courbes-opérations) de rendre compte de l'incidence de *La Géométrie* dans son élimination alors même qu'il joue un rôle essentiel dans ce texte. Dans la *Théorie analytique de la chaleur* Fourier inaugure la représentation des fonctions par des séries trigonométriques. Son analyse permettra de considérer d'un point de vue inaugural la formule intégrale des coefficients de Fourier et de se pencher sur la différence entre un énoncé inaugural et un théorème de représentation. Je reviendrai ensuite sur le statut de la représentation des fonctions par des séries trigonométriques dans la controverse des cordes vibrantes qui opposa, plus de cinquante ans plus tôt, Daniel Bernoulli, D'Alembert, Euler et Lagrange. Je montrerai qu'il s'agit du cas d'un énoncé inaugural sans texte inaugural, cet énoncé n'ayant été introduit à cette occasion que pour être dénoncé. Je considèrerai enfin d'un point de vue inaugural les *Eléments* d'Euclide. Je montrerai que ce texte à bien des égards fondateur n'est en aucun cas un texte inaugural.
Au delà de leur intérêt propre, le but de ces analyses est de faire reconnaître le rôle, les modalités et les enjeux de l'inauguration des représentations en mathématiques et de commencer à en tirer quelques conséquences épistémologiques et historiographiques sur les mathématiques et leur histoire.

# II - Caractérisation des énoncés et des textes inauguraux

## 1 - La thèse de Church-Turing

La thèse de Church-Turing a été énoncée à peu près simultanément en 1936 par Church, Turing et Post. Stephen Cole Kleene, dans un article de 1943 (Kleene 1943), a utilisé l'appellation de « thèse » (*thesis*) pour désigner cet énoncé au statut particulier (Gandy 1988). Cette appellation, la caractérisation de l'énoncé ainsi que les raisons de l'adopter ont ensuite été reprises dans son livre (Kleene 1952), qui a été pendant longtemps l'exposé de référence de la théorie des fonctions récursives, et se retrouvent sans changement essentiel dans les publications dans lesquelles cette thèse a depuis été souvent présentée.

Je vais commencer par considérer la manière dont la thèse de Church-Turing a été introduite dans les articles de Church (1936) et de Turing (1936). Je considèrerai ensuite l'article de Kleene (1943) dans lequel le terme de « thèse » a été introduit. Les observations faites sur cet énoncé dans ces articles, les arguments que ces mathématiciens ont été amenés à donner pour le soutenir, me serviront à caractériser les énoncés et les textes inauguraux.

### *a) Church 1936*

Church présente ainsi les objectifs de son article :

> « L'objectif de cet article est de proposer une définition de la calculabilité effective qui corresponde de manière satisfaisante à la notion intuitive et assez vague qui entre souvent dans la formulation des problèmes de cette famille [théorie des nombres élémentaire], et de montrer, par un exemple, que les problèmes de cette famille ne sont pas tous résolubles. »[2] Church 1936, 345 ; Davis 1965, 90

Les problèmes évoqués ici sont ceux du type du théorème de Fermat donné en exemple (et alors non résolu), qui affirme que pour tout entier $n$ il n'existe pas d'entiers tous non nuls $x$, $y$ et $z$, tels que (1) $x^n+y^n=z^n$. La résolution de ce problème peut être assimilée à la recherche d'une fonction de $n$, $f(n)$, dont la valeur sera 1 si et seulement il existe des entiers non nuls $x$, $y$ et $z$ satisfaisant (1). Pour que le problème soit *effectivement* résolu, il faut que la fonction soit *effectivement* calculable, c'est-à-dire que pour toute valeur de $n$ il soit possible de calculer $f(n)$ et de décider si elle vaut ou non 1. La condition d'obtenir une fonction *effectivement* calculable est nécessaire puisque l'on pourrait sinon définir $f(n)$ par « $f(n)=1$ si et seulement si il existe des entiers $x$, $y$ et $z$ satisfaisant (1) ». On aurait ainsi bien défini une fonction indépendamment du fait d'avoir ou non

2 "The purpose of the present paper is to propose a definition of effective calculability which is thought to correspond satisfactorily to the somewhat vague intuitive notion in terms of which problems of this class are often stated, and to show, by means of an example, that not every problem of this class is solvable." Church 1936, 345 ; Davis 1965, 90

résolu le problème. Church rappelle ensuite, ce qu'il est ici inutile de faire, les « définitions formelles » des fonctions λ-définissables et des fonctions récursives ainsi que les théorèmes qui affirment leur équivalence (Théorèmes XVI et XVII). Un paragraphe entier, intitulé « la notion de calculabilité effective », est ensuite consacré à la « définition » de cette notion (Church 1936, 356 ; Davis 1965, 100) ; c'est l'énoncé qui nous intéresse :

> « Nous définissons maintenant la notion, déjà discutée, de fonction effectivement calculable de nombres entiers en l'identifiant avec la notion de fonction récursive d'entiers positifs (ou de fonction d'entiers positifs λ-définissable). La définition est justifiée par les considérations suivantes, pour autant qu'une véritable justification puisse jamais être donnée pour le choix d'une définition formelle correspondant à une notion intuitive. » [3]

Church propose ici d'adopter comme « définition » des fonctions effectivement calculables l'une ou l'autre des deux « définitions formelles », celle des fonctions λ-définissables ou des fonctions récursives. Il identifie le problème qui se pose ici comme étant celui de donner « une définition formelle correspondant à une notion intuitive ». Il doute d'ailleurs « qu'une véritable justification puisse jamais être donnée ». Il fait valoir une sorte d'impossibilité inhérente à un tel problème. Ce problème de la conformité d'une « définition formelle » à une « notion intuitive » pourrait sembler se poser pour toutes les définitions mathématiques. Church consacre pourtant un paragraphe entier d'un genre inhabituel à cette question. L'introduction d'une dénomination propre pour désigner cette assertion suggère aussi que ça n'est pas le cas. Il apparaît ainsi plutôt inhabituel de vouloir « justifier » une définition par sa conformité à ce qu'elle définit : on s'attend plutôt à ce que cette conformité aille de soi (un triangle est un triangle...), ou que la généralité de la définition proposée, qui va à l'encontre de la conformité, soit mise en avant[4].

L'article se poursuit avec la justification suivante :

> Il a déjà été indiqué que pour toute fonction entière qui est effectivement calculable au sens qui vient d'être défini, il existe un algorithme qui calcule ses valeurs[5]

Church remarque ici que toute fonction récursive (resp. λ-définissable) satisfait la définition intuitive de la calculabilité ; toute fonction récursive apparaît nécessairement calculable. La correspondance est donc, au moins dans ce sens, parfaitement établie et il est possible d'en donner une « véritable justification ». Il reste ensuite à considérer la correspondance inverse :

> Il est vrai inversement, pour la même définition de la calculabilité effective, que

3 "We now define the notion, already discussed, of an effectively calculable function of positive integers by identifying it with the notion of a recursive function of positive integers (or of a λ-definable function of positive integers). This definition is thought to be justified by the considerations which follow, so far as positive justification can ever be obtained for the selection of a formal definition to correspond to an intuitive notion." Church, Alonzo, "An unsolvable problem of elementary number theory", *American Journal of Mathematics*, 58, pp. 345-363, 1936, p. 356

4 Sur les différentes pratiques de justification en mathématiques voir Flament & Nabonnand (à paraître).

5 « It has already been pointed out that, for every function of positive integers which is effectively calculable in the sense just defined, there exists an algorihtm for the calculation of its values. »

> toute fonction pour laquelle existe un algorithme calculant ses valeurs est effectivement calculable.[6]

Il s'agit cette fois de soutenir que toute fonction tenue pour calculable, c'est-à-dire répondant à l'idée intuitive d'algorithme, pourra être présentée de manière à satisfaire la définition proposée par Church. Une telle justification bute évidemment sur l'absence de représentation de l'idée intuitive d'algorithme au moment d'en introduire une. Church va dès lors supposer donné un algorithme calculant les valeurs d'une fonction et va s'efforcer d'indiquer comment il devrait être possible de le transformer en une fonction satisfaisant la définition d'une fonction récursive ou d'une fonction λ-définissable. Il ne peut évidemment faire autrement que d'introduire une variante de l'affirmation à démontrer sous une forme qui lui semble plus facilement acceptable : « si cette interprétation ou une autre similaire n'est pas permise, il est difficile de voir comment la notion d'algorithme peut être donnée d'une manière exacte quelconque »[7]. Ainsi Church s'efforce-t-il de justifier autant qu'il peut la conformité entre la notion intuitive de fonctions effectivement calculables et la définition de fonctions λ-définissables (resp. générales récursives).

### *b) Turing 1936*

Turing a énoncé indépendamment la même thèse dans Turing (1936). Non seulement il propose un énoncé semblable à celui de Church mais il se livre aussi à une discussion analogue à la sienne sur la conformité de la définition proposée à la notion intuitive de calculabilité et sur l'impossibilité d'établir une telle conformité. La notion de calculabilité de laquelle il part n'est pas rapportée à des fonctions (elle le sera aussi dans la suite de son article) mais à des nombres réels, compris entre 0 et 1, et donnés par leur développement décimal binaire. Au lieu de considérer des fonctions récursives ou des fonctions λ-définissables Turing introduit des « machines à calculer logiques », depuis appelées (et suivant des définitions variées) « machines de Turing ». L'énoncé de la thèse est aussi annoncé dès l'introduction de l'article puis à nouveau donné deux autres fois[8] :

> « Dans les sections 9 et 10, j'expose quelques arguments dans l'intention de montrer que les nombres calculables [suivant la définition qu'il en donne] incluent tous les nombres que l'on aurait naturellement tendance à considérer comme calculables. »[9]

---

6 « Conversely it is true, under the same definition of effective calculability, that every function, an algorithm for the calculation of the values of which exists, is effectively calculable. »

7 « It this interpretation or some similar one is not allowed, it is difficult to see how the notion of an algorithm can be given any exact meaning at all. » Church 1936, Davis 1965, note 19, 101.

8 « Ce que j'affirme, c'est que ces opérations [des machines à calculer logiques] englobent toutes celles qui peuvent être utilisées pour calculer la valeur d'un nombre. » Turing 1936., trad. fr. 52 ; « It is may contention that these operations include all those which are used in the computation of a number. » Turing, Alan Mathison, "On computable numbers, with an application to the entscheidungsproblem", *Proceeding of the London Mathematical Society*, 42 (2), pp. ; 230-265, 1936, Davis 1965, p. 118. « les nombres « calculables » [nombres dont la représentation décimale peut être engendrée par une machine de Turing] incluent tous les nombres que l'on aurait naturellement tendance à considérer comme calculables. » (Turing 1936: 249, Davis 1965, 135 ; trad. fr. 76.) Il est dès lors pour le moins singulier que Kleene considère que la thèse de Church n'ait été énoncée que de manière implicite par Turing (Kleene 1943, Davis 1965, 274 ; Kleene 1952, §60, 300-301).

9 « In §§9, 10 I give some arguments with the intention of showing that the computable numbers

Turing 1936, trad. fr. 49

L'impossibilité d'une justification complète de la conformité de sa définition est aussi reconnue :

> « Les arguments que nous pourrons donner doivent, par principe, faire appel à l'intuition, et seront pour cette raison plutôt insatisfaisants, mathématiquement parlant. » Turing 1936, trad. fr. 76.

Turing y répond par un faisceau d'arguments dont il propose lui-même une typologie :

> « Je défendrai mon point de vue au moyen de trois types d'arguments :
>
> (a) en faisant directement appel à l'intuition ;
>
> (b) en démontrant l'équivalence de deux définitions (au cas où la nouvelle définition aurait un sens intuitif plus évident) ;
>
> (c) en exhibant certaines grandes classes de nombres calculables. »

Le premier type d'argument consiste à établir que les machines de Turing ne font que reproduire les étapes accomplies par une personne lors d'un calcul. Turing expose ainsi sur plusieurs pages une analyse circonstanciée de ce qui est en pratique nécessaire pour effectuer un calcul et présente ses machines comme une réalisation stricte de ces conditions (Turing 1936, trad. fr. 51-52 ; Davis 1965, 117-118). Tout suggère que c'est bien ainsi qu'il est lui-même arrivé à leur définition et qu'il rend ainsi compte d'un cheminement heuristique. Ses machines apparaissent ainsi comme une reproduction exacte et minimale de tout ce qui est nécessaire pour effectuer un calcul.
Le deuxième type d'argument fait appel à l'équivalence des définitions possibles. C'est un argument très fort et le fait qu'il soit possible d'y satisfaire est remarquable. J'y reviendrai. Church l'a aussi de fait utilisé, sans le mentionner dans ses « justifications positives », en faisant précéder la présentation de ses justifications par le rappel de l'équivalence entre les définitions des fonctions générales récursives et celle des fonctions λ-définissables. Pour pouvoir mettre en œuvre cet argument, Turing introduit une deuxième définition au cas où elle «aurait un sens intuitif plus évident » (« *in case the new definition has a greater intuitive appeal* ») (Turing 1936, trad. fr. 77, Davis 1965, 135). Il reprend pour cela le système logique de Hilbert (Hilbert & Ackermann 1928, 73) et construit une formule exprimant dans ce système le prédicat « le nombre $x$ est calculable ». Suivant cette définition, un nombre $\alpha$ est calculable si la formule obtenue en remplaçant x par $\alpha$ est démontrable dans ce système logique. Pour établir l'équivalence des deux définitions Turing démontre que pour chaque nombre $\alpha$ calculable dans le sens que permet de donner à cette notion le système logique de Hilbert il existe une machine qui calcule ce nombre et réciproquement que les nombres calculables par une machine le sont aussi en ce sens. Ayant eu au cours du processus de publication de son article connaissance des travaux de Church et

include all numbers which could naturally be regarded as computable. » Turing 1936, Davis 1965, 116.

de Kleene, il ajoutera un appendice dans lequel il présente les grandes lignes d'une démonstration de l'équivalence de sa définition de la calculabilité avec celle de Church (Adams 1983, 144). L'argument par l'équivalence des définitions est ainsi renforcé par l'équivalence de ces définitions introduites indépendamment.

Le troisième type d'argument consiste à montrer que de vastes classes de nombres tenus pour calculables satisfont la définition proposée. Un paragraphe entier, intitulé « Exemples de grandes catégories de nombres calculables », est consacré à cette vérification. Turing y définit les notions de fonction calculable et de convergence de ces fonctions et énonce, le plus souvent sans démonstration, une série de théorèmes qui en donnent les propriétés attendues (« la composition de deux fonctions calculables est elle-même calculable » etc.). Ces théorèmes lui permettent d'établir que les nombres π, e, les nombres algébriques et les nombres de Bessel (zéros réels des fonctions de Bessel) sont calculables suivant sa définition.

Church et de Turing ne se contentent pas de donner leurs définitions et d'en défendre la conformité avec la notion intuitive de calculabilité. Tous les deux résolvent un problème qui n'avait pas été résolu, qui avait donc été posé avant qu'ils ne formulent leurs définitions et qu'ils n'énoncent leur thèse. Il s'agit du même problème, le « problème de la décision, énoncé par Hilbert (Hilbert & Ackermann 1928), qui ne l'avait donc pas résolu..., et qui demande s'il existe une procédure générale permettant de décider si une formule donnée est ou non démontrable. L'importance reconnue de ce problème justifie qu'il figure dans le titre de leurs articles. Ils peuvent l'un et l'autre démontrer facilement, en admettant leur thèse et en reprenant des techniques éprouvées de Gödel (1931) (codage et diagonalisation), qu'une telle procédure ne peut pas exister.

### *c) Kleene 1943*

Après avoir rappelé les énoncés de la thèse tels qu'ils ont été formulés par Church et par Turing et les commentaires qui les ont accompagnés, on peut maintenant considérer le passage dans lequel Kleene introduit le terme de « thèse » :

> « Maintenant, reconnaître que nous avons affaire à une procédure bien définie qui pour chaque ensemble de valeurs des variables indépendantes s'arrêtera certainement et répondra par « Oui » ou « Non » a une question sur la manière de s'arrêter, autrement dit, la reconnaissance de la décidabilité effective du prédicat, est une question subjective. Il en est de même de ce qui pourrait être appelé la *calculabilité effective* d'une fonction. Nous pouvons supposer pour commencer une capacité intuitive à reconnaître diverses instances particulières de ces notions. En particulier, nous reconnaissons bien les fonctions générales récursives comme étant effectivement calculables, et par conséquent nous reconnaissons les prédicats généraux récursifs comme étant effectivement décidables.
>
> Inversement, les fonctions (prédicats) reconnues, au titre d'un principe heuristique, comme étant effectivement calculables (effectivement décidables), et pour lesquelles la question a été examinée, se sont toujours révélées être générales récursives, ou, dans le langage intensionnel, équivalentes à une fonction générale récursive (prédicats généraux récursifs). Ce fait heuristique, ainsi que des réflexions sur la nature des procédures algorithmiques symboliques, ont conduit Church à énoncer la thèse suivante. La même thèse est implicite dans la description que Turing a donnée des machines à calculer.

Thèse I. *Toute fonction effectivement calculable (prédicat effectivement décidable) est générale récursive*

Comme une définition mathématique précise du terme effectivement calculable (effectivement décidable) était recherchée, nous pouvons prendre cette thèse, avec le principe déjà accepté dont elle est la réciproque, comme une définition de celui-ci afin de permettre le développement d'une théorie mathématique sur ce terme. Dans la mesure où nous avons une notion intuitive de la calculabilité effective (décidabilité effective), la thèse a le caractère d'une hypothèse – un point souligné par Post et Church. Si nous considéron la thèse avec sa réciproque comme une définition alors l'hypothèse est une hypothèse sur l'application de la théorie mathématique développée à partir de la définition. Comme nous l'avons indiqué, il y a des raisons assez fortes (*quite compelling grounds*) pour accepter cette hypothèse. Le propos de cet article n'est pas d'en rendre complètement compte. Ce qui nous importe plutôt ici c'est d'en présenter les conséquences.» (Kleene 1943, 6; Davis 1965, 274-75)[10]

Kleene considère ici les « théories algorithmiques » pour lesquelles il existerait un algorithme permettant de déterminer si chaque proposition est vraie ou non. Il s'agirait donc de théories décidables dont Church et Turing ont montré qu'elles n'existaient pas (dès lors qu'elles sont suffisamment riches pour permettre la reproduction de leurs arguments). Il commence par souligner que l'effectivité est « une question subjective » et que c'est « un principe heuristique » qui permet à chaque fois d'en juger. C'est donc subjectivement que nous apprécions si une procédure donnée est ou non effective. C'est aussi par la même « capacité » que « nous reconnaissons les fonctions générales récursives comme étant

10 Trad. AH. « Now, the recognition that we are dealing with a well defined process which for each set of values of the independent variables surely terminates so as to afford a definite answer, "Yes" or "No," to a certain question about the manner of termination, in other words, the recognitiion of effective decidability in a predicate, is a subjective affair. Likewise, the recognition of what may be an intuitive ability to recognize various individual instances of these notions. In particular, we do recognize the general recursive functions as being effectively calculable, and hence recognize the general recursive predicates as being effectively decidable.

Conversely, as a heuristic principle, such functions (predicates) as have been recognized as being effectively calculable (effectively decidable), and for which the question has been investigated, have turned out always to be general recursive, or, in the intensional language, equivalent to general recursive fucntions (general recursive predicates). This heuristic fact, as well as certain reflections on the nature of symbolic algorithmic processes, led Church to state the following thesis. The same thesis is implicit in Turing's description of computing machines.

THESIS I. *Every effectively calculable function (effectively decidable predicate) is general recursive.*

Since a precise mathematical definition of the term effectively calculable (effectively decidable) has been wanting, we can take this thesis, together with the principle already accepted to which it is converse, as a definition of it for the purpose of developing a mathematical theory about the term. To the extent that we have already an intuitive notion of effective calculability (effective decidability), the thesis has the character of an hypothesis - a point emphasized by Post and Church. If we consider the thesis and its converse as definition, then the hypothesis is an hypothesis about the application of the mathematical theory developed from the definition. For the acceptance of the hypothesis, there are, as we have suggested, quite compelling grounds. A full account of these is outside the scope of the present paper. We are here concerned rather to present the consequences." Kleene 1943, Davis 1965, p. 274-75 effectivement calculables ». Il considère ensuite la question récriproque, c'est-à-dire si les fonctions effectivement calculables sont des fonctions générales récursives. Il invoque ici le constat empirique selon lequel toutes les fonctions effectivement calculables (resp. prédicats effectivement décidables) observées se sont avérées être des fonctions générales récursives. C'est là encore « un fait heuristique ». La thèse désigne l'affirmation réciproque : *Toute fonction effectivement calculable (prédicat effectivement décidable[11]) est générale récursive*. Kleene fait ensuite valoir le besoin d'« une définition mathématique précise » et propose d'adopter pour celle-ci la thèse avec sa réciproque. La notion de « fonction effectivement calculable » devient ainsi une notion mathématique à partir de laquelle il est possible de « développer une théorie mathématique» de la calculabilité. On notera ici, et plus explicitement à la fin de la citation, l'idée que la théorie mathématique se développe à partir d'une *définition*. Kleene souligne ensuite à son tour les difficultés inhérentes à la définition d'une notion qu'il qualifie lui aussi d' « intuitive ». Ces difficultés confèrent à la thèse « le caractère d'une hypothèse ». Les rapports entre « thèse », « définition » et « hypothèse » sont récapitulés dans une phrase synthétique qui se présente comme une inférence (« si ... alors... ») : « Si nous considérons comme définition la thèse et sa réciproque alors l'hypothèse est une hypothèse sur l'application de la théorie mathématique développée à partir de la définition ». Les théorèmes établis à partir de la définition adoptée s'appliqueront aux fonctions effectivement calculables dans la mesure où, nous dit Kleene, la définition adoptée (récursivité générale, λ-définissabilité, marchines de Turing) est conforme à la « notion intuitive » de fonction effectivement calculable. Constituée des conséquences qui en sont tirées, la théorie mathématique déploie la définition sur laquelle elle se fonde, elle hérite du statut de celle-ci. Kleene établit ainsi une sorte d'homologie entre le statut épistémologique de la théorie et celui de la définition qui la fonde. Il tempère ces dernières remarques sur le caractère hypothétique de la thèse mais en faisant valoir que des « raisons assez fortes » (*quite compelling grounds*) justifient son adoption. Il en a rappelé quelques-unes et renvoie, en note, aux références données dans Kleene (1938), qui sont aussi, essentiellement, celles que nous avons considérées et exposent des raisons qui ont déjà été présentées.

La citation de Kleene fait apparaître une « thèse I » qui suggère l'existence d'une « thèse II ». Son énoncé est en effet donné peu après (voir aussi Kleene 1952, §60, 300-301) :

> « Thèse II. Pour tout système formel donné et pour tout prédicat *P(a)* donné, le prédicat disant que *P(a)* est démontrable est exprimable par *(Ex)R(a,x)* où R est générale récursive. »[12] Kleene 1943, Davis 1965, 276

La formule *(Ex)R(a,x)* est la formule exprimée dans le système logique considéré qui traduit, au moyen du codage établi par Gödel, le prédicat métamathématique disant que la formule *P(a)* est démontrable dans ce système. L'énoncé exprime

11 L'énoncé concerne simultanément les fonctions et les prédicats, mais la notion de prédicat général récursif a préalablement été définie à partir de celle de fonction générale récursive (Kleene 1943 ; Davis 1965, 259).

12 « For any given formal system and given predicate P(a), the predicate that P(a) is provable is expressible in the forme (Ex)R(a,x) where R is general recursive. » Kleene 1943, Davis 1965, 276

donc une condition sur le système logique pour que la démonstrabilité d'une formule dans celui-ci soit effective, l'effectivité de *R(a,x)* étant, avec la thèse de Church-Turing, assimilée à la récursivité générale. Cet énoncé n'est pas une nouvelle thèse mais plutôt une application ou une reformulation de la thèse de Church-Turing pour un système logique et reprenant à nouveau le dispositif mis en place par Gödel pour la démonstration de ses théorèmes d'incomplétude (Gödel 1931). Kleene peut dès lors refaire brièvement à son propos certaines des remarques déjà faites à propos de la thèse de Church-Turing. Mais cet énoncé est bien trop dépendant de son cadre logique pour être utile dans la recherche de caractéristiques qui en soient indépendantes.

## 2 - Caractérisation des énoncés et des texte inauguraux

A partir de ce qui précède il est possible de proposer une caractérisation générale de l'énoncé d'une thèse et des textes qui les introduisent. J'introduis ici ces caractérisations qui, après avoir été présentées, seront ensuite appliquées à d'autres textes. Pour éviter de confondre la conception des thèses de Kleene, à laquelle on peut vouloir reconnaître d'autres caractéristiques que celles que je retiens, j'utiliserai le syntagme d'« énoncé inaugural ». Les textes associés à de tels énoncés, dont je donnerai la caractérisation ensuite, seront appelés des « textes inauguraux ». Je parlerai d' « inauguration » pour désigner la fonction accomplie par ces énoncés et ces textes.

### *a) Caractérisation d'un énoncé inaugural*

Je propose de définir un énoncé inaugural par la conjonction des cinq conditions suivantes :

1. l'énoncé met en jeu deux totalités (dualisme) ;
2. l'une des totalités est tenue pour pré-établie (réalisme),
3. l'autre totalité n'est pas tenue pour pré-établie sous la forme considérée ou dans le rapport considéré à la totalité pré-établie (inauguration) ;
4. l'énoncé affirme que la deuxième totalité, celle qui n'est pas pré-établie, est une représentation conforme de la première (conformité) ;
5. la démonstration de la conformité des deux totalités est impossible (incommensurabilité[13]) ;

On peut commencer par vérifier que ces conditions sont satisfaites par les énoncés et les textes de Church et de Turing. Cela permettra aussi de mieux les comprendre et de commencer à en appréhender le statut.

### *b) Les thèses de Church et de Turing : exemples d'énoncés inauguraux*

L'énoncé de Church de sa thèse met bien en jeu deux totalités ; d'une part les fonctions calculables et d'autres part les fonctions λ-définissables ou encore les

13 La notion d'incommensurabilité est ici une notion sémiotique qui ne doit pas être confondue avec celle de Kuhn. Il n'est cependant pas exclu, comme cela pourra apparaître progressivement, de rapporter certains aspects d'une partie des phénomènes considérés par Kuhn à des incommensurabilités sémiotiques.

fonctions générales récursives (dualisme). La première a bien un caractère pré-établi dans la mesure où elle a dans le texte considéré le statut d'une notion « intuitive » (réalisme). Le caractère *pré-établi* ne renvoie pas à ma conception des fonctions calculables, mais au statut de ces fonctions dans le texte considéré. Il se trouve que Church fait des remarques explicites à ce propos et conformes à leur statut dans son article. Il en sera d'ailleurs généralement ainsi dans les textes que nous considèrerons. Ce caractère pré-établi pourrait ainsi être en partie dégagé à partir de ces remarques. Pour l'examen de la condition d'inauguration, il faut rappeler que la λ-définissabilité a d'abord été introduite par Church (1932) pour construire un système logique alternatif à celui des *Principia Mathematica* afin de pouvoir en démontrer la consistance. Ce projet fut abandonné quand des doutes apparurent dès la fin de l'année 1933 sur sa consistance, doutes confirmés au printemps 1934 par la preuve de l'inconsistance de ce système logique[14]. Avant cela, Kleene avait commencé à étudier la partie arithmétique de ce système dans le cadre d'une thèse (au sens académique, Ph. D.) dirigée par Church (Kleene 1935). Cette thèse, admise pour soutenance en septembre 1933, dut être en partie réécrite en raison de cette inconsistance[15]. Au cours de ce travail Kleene put établir que la fonction prédécesseur était elle-même λ-définissable alors que Church avait fini par se convaincre qu'elle ne l'était pas. A la suite de cela, Church « évoqua clairement l'intérêt de la λ-définissabilité comme notion de la théorie des nombres, séparée de tout système logique formel » (Kleene 1981, 57). Les fonctions λ-définissables ont donc d'abord été considérées au sein d'une totalité plus vaste, la totalité des propositions mathématiques. Mais la découverte de leur conformité avec la notion de calculabilité a joué un rôle déterminant dans leur reconnaissance et leur constitution comme une totalité propre indépendante du système logique dont elles faisaient partie. En fait, cette histoire fait intervenir une deuxième inauguration qui sera étudiée. Il s'agit de l'inauguration de la représentation de la totalité des propositions mathématiques par des formules logiques. La condition d'inauguration est ainsi bien satisfaite même si sa vérification est rendue un peu confuse par une inauguration antérieure, celle d'un système alternatif à celui des *Principia mathematica*, qui a mal tournée du fait de l'inconsistance du système proposé. La satisfaction de la condition d'inauguration ne préjuge évidemment pas de l'influence possible d'autres représentations existantes, par exemple ici de celle de Schönfinkel (1924). Il va aussi de soi qu'elle ne suppose pas que Church ait introduit tous les aspects des expressions qu'il utilise : si son usage du λ est sans doute original, ce n'est évidemment pas le cas de celui des variables ou encore des parenthèses. L'inauguration s'apprécie pour la représentation considérée dans son ensemble. L'énoncé de Church affirme bien que les fonctions λ-définissables, ou les fonctions générales récursives, offrent une représentation conforme de la notion intuitive de calculabilité, c'est-à-dire que non seulement cette notion définit exactement les fonctions calculables (toute fonction λ-définissable est calculable et inversement), mais qu'elle restitue aussi toutes les propriétés de ces fonctions (conformité). Enfin, il est bien impossible de démontrer cette conformité comme le reconnaît en l'occurrence

14 Gödel 1934 [Review of Church 1933] in Gödel 1986, 381 ; Kleene & Rosser 1935 ; Curry 1942 ; Kleene 1981, 57 ; Rosser 1984, 340 ; Shoenfield 1995, 9-10

15 Crossley 1975, 4 ; Kleene 1981, 57 ; Adams 1983, 62-70 ; Davis 1982, 10 ; Rosser 1984, 344 ; Sieg 1997

explicitement Church, puisque l'on ne dispose d'aucune autre représentation des fonctions calculables, ni moins encore de l'ensemble de leurs propriétés, permettant de démontrer une telle équivalence (incommensurabilité).
De la même manière l'énoncé de Turing met en jeu deux totalités (dualisme) : les nombres calculables et les machines logiques. Les nombres calculables ont bien un caractère pré-établi : c'est à partir d'une analyse de ces nombres, reproduite dans son article, que Turing nous dit avoir dégagé la définition de ses machines (réalisme). Son énoncé affirme bien la conformité des machines logiques à la notion intuitive de nombres calculables (conformité). Enfin, il souligne lui-même l'impossibilité de vraiment démontrer cette équivalence (incommensurabilité)[16].

### *c) Caractérisation d'un texte inaugural*

Church et Turing n'ont pas seulement énoncé simultanément la même thèse, ils ont aussi écrit à cette occasion des textes qui présentent un certain nombre de caractéristiques communes qui sont des conséquences de celles d'un énoncé inaugural.
Je définis un texte inaugural comme un texte qui vérifie les cinq conditions suivantes :

1. il met en jeu deux totalités (dualisme) ;
2. l'une des totalités est tenue pour pré-établie (réalisme) ;
3. l'autre totalité n'est pas tenue pour pré-établie sous la forme considérée ou dans le rapport considéré à la totalité pré-établie (inauguration) ;
4. une fonction du texte est de soutenir que la deuxième totalité, celle qui n'est pas pré-établie, est une représentation conforme de la première (conformité) ;
5. la démonstration de la conformité des deux totalités est impossible (incommensurabilité) ;

### *d) Le statut des caractérisations proposées*

Dans les analyses que je vais présenter je me reporterai systématiquement aux caractérisations qui ont été données pour décider si des énoncés et des textes sont ou non inauguraux. C'est à chaque fois par la vérification de ces conditions que sera établi le caractère inaugural ou non des énoncés et des textes considérés. Cette vérification se doit donc d'être la plus contraignante possible. J'ai à chaque fois pu constater qu'elle l'était. Cette exigence a participé au choix de ces conditions qui correspondent de ce fait toutes à une caractéristique qui peut être testée objectivement. Cela ne veut pas dire qu'il suffise pour cette vérification d'avoir pris connaissance de leur énoncé. Cela supposerait qu'on ait défini une « totalité », ce que signifie la « mettre en jeu », ce qu'est une totalité «tenue pour pré-établie », le « rapport » entre deux totalités, une « représentation conforme », une « démonstration », ou même seulement, ce qui n'est guère mieux, une «démonstration de la conformité de deux totalités », et enfin l'« impossibilité » de donner une telle démonstration. Si la définition ou la caractérisation *a priori* de ces termes conduirait immanquablement à des discussions sans fin, l'expérience

16 Ces conditions sont aussi vérifiées par l'énoncé de la thèse de Post (1936). L'impossibilité de vraiment établir cette équivalence l'a empêché de publier ses travaux.

montre que ce n'est pas le cas si on les rapporte à un texte. Les formulations qui en ont été données, le titre associé à chacune, en circonscrivent les usages possibles. Le lecteur a aussi à sa disposition le sens donné à ces termes et à ces conditions lors de l'examen de la thèse de Church-Turing qui nous a servi à les introduire. Mais je ne crois pas que l'on puisse en l'occurrence faire guère mieux que de montrer des usages de ces termes et de ces conditions. Les définir impliquerait surtout un parti pris sur la nature des mathématiques et de leur développement historique. Il serait même contradictoire avec le caractère inaugural de ces textes de pouvoir, et donc de vouloir, donner des définitions de ces termes. Le réalisme peut par exemple le cas échéant être mis en rapport avec un réalisme, au sens philosophique, de l'auteur du texte analysé mais il ne le présuppose pas. Vérifier que la condition appelée « réalisme » soit satisfaite ne signifie pas que les totalités pré-établies le soient dans tous les textes de la même manière. *La Géométrie* de Descartes est un texte qui soutient quatre énoncés inauguraux et dans lequel le réalisme prend trois formes différentes. Peut-être cela pourra-t-il aider le lecteur, sinon le satisfaire, de savoir qu'il ne doit pas s'inquiéter de ne pas pouvoir donner dès à présent un sens parfaitement déterminé à ces conditions, mais qu'il n'en sera néanmoins pas fait un usage libre. Il devra donc à la fois en comprendre le sens et l'usage lors de leur application à des textes et dans le même temps vérifier, voire apprécier..., leur caractère contraignant. Cela n'est évidemment possible qu'en faisant l'analyse de *plusieurs* textes. Les premières analyses auront forcément *pour le lecteur* un caractère ambivalent : elles se présenteront comme une vérification de ces conditions mais elles lui permettront aussi de cerner ce que signifient ces conditions et leur vérification. Afin de mieux en juger, les analyses peuvent être lues ou relues dans un autre ordre que celui dans lequel elles sont données, mais il importe surtout de ne pas les isoler et de confronter chaque analyse aux précédentes, voire à toutes les autres, afin de se rendre compte de leur caractère contraignant. En revanche, comme toutes les analyses celles-ci pâtiront immanquablement du fait que l'analyse, comme procédure, n'est jamais vraiment présentée qu'au travers de ses résultats[17]. Ces résultats ne peuvent manquer d'être soupçonnés d'être une présentation avantageuse et sélective de celle-ci. Cet inconvénient ne peut guère être réduit qu'en se reportant au texte analysé (c'est-à-dire inanalysé...), ce que le lecteur remet généralement à plus tard, inconvénient que les citations données, aussi nombreuses soient-elles, ne suffisent pas à pallier.

Les cinq conditions retenues visent à donner des critères qui permettent d'établir que des énoncés et des textes sont ou non inauguraux. Cela requiert qu'elles puissent être considérées séparément. Ces conditions sont néanmoins étroitement liées et cohérentes. C'est leur conjonction qui justifie de distinguer les énoncés et les textes qui les satisfont. Ainsi, la distinction des deux totalités qui fonde le dualisme est précisée par la condition portant sur le réalisme et la condition d'inauguration. Cette opposition est elle-même précisée par la condition d'incommensurabilité. La conformité est une exigence très forte, voire exorbitante, qui même si elle n'est pas toujours explicite dans l'énoncé est

17 Le *Résumé d'une théorie du langage* de Louis Hjelmslev (http://resume.univ-rennes1.fr) est un exemple unique d'une tentative d'exposer l'analyse séparément de son résultat. Voir Herreman, « Analyser l'analyse, décrire la description. Une introduction au *Résumé d'une théorie du langage* de L. Hjelmslev ».

néanmoins toujours saillante. Elle contribue fortement au caractère exceptionnel de ces énoncés. Il paraît justifié de distinguer les énoncés qui satisfont cette condition en plus des quatre autres. Elle est à la fois rare, facile à tester et très utile pour repérer des textes qui satisfont les autres conditions. La condition d'inauguration, notamment, est précisée par la conformité : nombre de questions sur l'influence possible d'autres travaux sont ainsi considérablement réduites si l'on tient compte de la conformité, et plus encore de la forme qu'elle prend, c'est-à-dire en particulier de la totalité reçue considérée. La conformité confère aussi une acception très particulière au réalisme[18]. La condition d'incommensurabilité stipule quant à elle qu'un énoncé inaugural ne saurait être démontré. J'aurais bien sûr à y revenir, mais je désigne bien là une caractéristique objective. Il se trouve que cette caractéristique a été reconnue et soulignée, à leur manière, par Church et Turing, et à leur suite par Kleene et bien d'autres. Il est ainsi sans doute plus facile de la reconnaître, même s'il y a eu aussi ensuite des propositions de démonstration de la thèse de Church-Turing. Néanmoins, l'incommensurabilité ne désigne pas le fait que celui qui énonce un énoncé inaugural le tienne pour indémontrable, mais bien le fait que cet énoncé soit indémontrable parce qu'une des deux totalités considérées ne permet pas qu'il le soit. Cette incommensurabilité est néanmoins toujours d'une certaine manière reconnue dans les textes inauguraux puisque c'est elle qui va leur conférer leurs caractéristiques : le caractère inaugural du texte est un indice de cette incommensurabilité parce qu'il en est une conséquence. C'est là d'ailleurs une des raisons pour les distinguer et les étudier. Pour marquer la différence avec une démonstration, je dirai que les arguments donnés *soutiennent* l'énoncé inaugural. Ainsi, un texte est inaugural dans la mesure où il soutient un énoncé inaugural.

Même si elle n'est pas la seule, la condition d'incommensurabilité est un critère de démarcation important entre les énoncés inauguraux et un autre type d'énoncés proches, aussi remarquables, les théorèmes de représentation, qu'il importe de ne pas confondre :

Caractérisation d'un « théorème de représentation » :

1. l'énoncé met en jeu deux totalités (dualisme) ;
2. l'énoncé affirme une équivalence entre ces deux totalités (équivalence) ;
3. l'équivalence est démontrée (commensurabilité) ;

La distinction de ces deux types d'énoncés peut aider à comprendre la définition des énoncés inauguraux et prévenir leur confusion. Un théorème de représentation est ainsi essentiellement un énoncé inaugural sans l'incommensurabilité. Comme cela modifie aussi la manière dont se pose la question de la conformité, j'emploie plutôt le terme d'équivalence. Il est aussi utile en pratique de ne pas les confondre. Nous le verrons sur des exemples. Enfin, certains théorèmes de représentation s'inscrivent dans l'histoire de énoncés inauguraux ; ils peuvent être l'indice d'énoncés inauguraux.

Les conditions qui servent à caractériser les énoncés et les textes inauguraux

18 Goldstein (2000, 2008, 2010) donne des exemples de conceptions « naturalistes » des mathématiques, en l'occurrence en théorie des nombres (Frenicle de Bessy et Charles Hermite), assorties d'expérimentations sur les nombres. Ce « naturalisme » conditionne aussi le rapport de ces mathématiciens aux exemples, aux calculs, aux définitions, aux démonstrations, aux fondements, à l'écriture et à la présentation des mathématiques. C'est bien sûr une forme de réalisme (au sens considéré ici), mais il semble, pour ces deux mathématiciens, exclure la possibilité d'arriver à satisfaire la condition de conformité.

sont ainsi effectives. Elles serviront à décider si un énoncé ou un texte est inaugural. Elles ont aussi, séparément ou ensemble, un intérêt propre. Il serait par exemple possible de faire une typologie, voire un codage, des énoncés et surtout des textes suivant celles de ces conditions qu'ils satisfont ou non. Ce n'est pourtant pas dans cette perspective qu'elles sont introduites : ces conditions sont ici avant tout un *procédé* servant à faire reconnaître un type d'énoncé et de texte. Notre intérêt n'est pas pour le procédé, mais pour ce qu'il sert à identifier. Il ne s'agit pas tant ici de proposer des critères que de faire reconnaître des énoncés et des textes qui présentent des caractéristiques communes. Il s'agit avant tout d'établir un fait épistémologique et historiographique, la récurrence d'un type d'énoncé et de textes, puis d'en comprendre la nécessité et les implications. Ces conditions s'efforcent évidemment de saisir au mieux ce que font ces énoncés et ces textes, avec le souci de les rendre autant que possible effectives, et de cerner ce qui en fait la nécessité ainsi que leurs conséquences éventuelles. Mais l'attention ne doit pas tant porter sur les conditions que sur les caractéristiques des textes considérés que ces conditions permettent d'identifier mais dont elles n'épuisent ni la description ni l'intérêt.

#### *e) Ni une définition, ni un théorème,...*

Si la thèse de Church-Turing a d'emblée été reconnue comme un énoncé majeur, elle ne l'a été qu'en tant qu'énoncé singulier. La catégorie générale de thèse, ou d'énoncé inaugural, ne fait pas partie des catégories usuelles de la logique, de l'épistémologie ou de la grammaire. La thèse de Church-Turing est souvent associée à une définition, celle des fonctions calculables. Mais cette thèse n'est évidemment pas la définition des fonctions calculables ; une chose est la définition des fonctions calculables, une autre la thèse. La thèse affirme la conformité de la définition donnée à une conception reçue, intuitive, naturelle, etc. des fonctions calculables. Un énoncé inaugural n'est donc pas une définition. La thèse de Church-Turing s'apparente aussi à un théorème, et plus précisément à un théorème de représentation. Mais ce n'en est pas un dans la mesure où l'incommensurabilité des deux totalités rend toute démonstration impossible. Il faudrait pour une telle démonstration une définition préalable des fonctions calculables, or c'est précisément ce qu'il s'agit d'introduire. Si l'on a plusieurs de ces définitions, par exemple celle de Church et celle de Turing, il devient possible de démontrer leur équivalence, mais ça n'est pas une démonstration de la thèse ; tout au plus un argument en faveur de celle-ci. Un énoncé inaugural n'est donc pas plus un théorème qu'il n'est une définition. Ce n'est pas non plus un axiome. Aucune conséquence ne peut être tirée de la thèse de Church-Turing dans un exposé mathématique de la théorie des fonctions calculables ; toutes se rapporteront à la *définition.* La validité, sinon l'intérêt, des propositions de cette théorie est indépendante de la vérité de la thèse. Le fait d'en appeler à la thèse pour s'épargner la vérification que des fonctions sont des fonctions calculables n'est qu'un expédient. Et si l'on ne veut pas supposer que toutes les propriétés seraient données par la définition (ce qui serait en effet préjuger du statut des définitions), ce ne serait pas l'énoncé inaugural qui interviendrait, mais la représentation pré-établie associée. Un énoncé inaugural ne prédique rien : il affirme une conformité qui ne saurait être confondue avec une propriété. Compte-tenu du caractère pré-établi d'une des deux totalités et de l'inauguration de l'autre, la conformité ne peut pas être une propriété imputée à la totalité constituée ; cela reviendrait à faire entrer dans la notion intuitive de fonction calculable la représentation inaugurée. Le dualisme des énoncés inauguraux empêche de les confondre avec aucun des types d'énoncés reconnus en épistémologie ou en logique. Et quand ça n'est pas le dualisme, comme pour les théorèmes, c'est l'incommensurabilité.

Le terme de « thèse » (*thesis*) introduit par Kleene pour la thèse de Church-Turing marque cette différence de statut[19] (Gandy 1988, 71). En introduisant la λ-définissabilité, Alonzo Church avait donné une définition des fonctions générales récursives. Emil Post, qui avait lui-même trouvé une définition équivalente avec les systèmes normaux, lui reprocha de n'avoir pas suffisamment fait valoir le statut particulier d'une telle définition (Post 1936). Il considéra que cela revenait à ignorer « le fait qu'une découverte fondamentale a été faite quant aux limitations des possibilités de mathématisation de l'*Homo Sapiens* » et à manquer une « loi de la nature »[20]. En ne la considérant que comme une définition[21], Church ne marquait pas assez selon lui le problème posé par son adéquation au sens intuitif de calculable. Mais l'intérêt de l'énoncé reste en l'occurrence très spécifique et indissociable des notions auxquelles il se rapporte. C'est en l'occurrence un énoncé singulier qui a été distingué, et non un type d'énoncé.

Au cours des nombreuses discussions auxquelles la thèse de Church-Turing a donné lieu, plusieurs propositions ont été faites pour considérer cet énoncé comme une occurrence d'un type plus général comprenant d'autres exemples[22]. Certains des exemples donnés sont aussi des énoncés inauguraux. D'autres non.

19 "Church's Thesis is not defined in terms of general recursive functions. Church's Thesis is not a definition; rather it states that the class of general recursive functions has the same extension as the class of effectively computable functions; and the latter class has its own independent intuitive meaning. Thus, there is no vicious circle implicit in Church's Thesis." Mendelson 1963, 203

20 "The writer expects the present formulation to turn out to be logically equivalent to recursiveness in the sense of the Gödel-Church development. Its purpose, however, is not only to present a system of a certain logical potency but also, in its restricted field, of psychological fidelity. In the latter sense wider and wider formulations are contemplated. On the other hand, our aim will be to show that all such are logically reducible to formulation 1. We offer this conclusion at the present moment as a *working hypothesis*. And to our mind such is Church's identification of effective calculability with recursiveness [note : cf. Church, loc. cit., pp. 346, 356-358. Actually the work already done by Church and others carries this identification considerably beyond the working hypothesis stage. But to mask this identification under a definition hides the fact that a fundamental discovery in the limitations of the mathematizing power of Homo Sapiens has been made and blinds us to the need of its continual verification.] . Out of this hypothesis, and because of its apparent contradiction to all mathematical development starting with Cantor's proof of the non-enumerability of the points of a line, independently flows a Gödel-Church development. The success of the above program would, for us, change this hypothesis not so much to a definition or to an axiom but to a natural law. Only so, it seems to the writer, can Gödel's theorem concerning the incompleteness of symbolic logics of a certain general type and Church's results on the recursive unsolvability of certain problems be transformed into conclusions concerning all symbolic logics and all methods of solvability." Post, Emil, "Finite combinatory processes-formulation I", *Journal of Symbolic Logic*, 1, pp. 103-10, 1936 in Davis 1965 p. 290 Près de dix ans plus tard, Post rappellera sa préférence pour « loi » : «We still feel that, ultimately, « Law » will best describe the situation » (Post 1944, 286 note 4).

21 Post a pu réagir à cette déclaration qui ouvre la note de Church publiée en 1936 : « In a recent paper the author has proposed a definition of the commonly used term « effectively calculable » » Church, A Note on the Entscheidungsproblem, 1936, Davis 1965, p. 110.

Aucune des quelques définitions proposées ne coïncide avec celle des énoncés inauguraux. Aucune non plus ne fait le lien avec un type particulier de texte. Plutôt que d'en faire ici la critique, il me semble préférable de montrer la pertinence des caractéristiques retenues, et surtout de montrer l'intérêt de reconnaître la récurrence de ces énoncés et de ces textes.

Je me propose dans la suite de montrer que l'*Idéographie* de Frege, *La Géométrie* de Descartes et la *Théorie analytique de la chaleur* de Fourier sont des textes inauguraux et de préciser de quelle manière ils soutiennent les énoncés inauguraux qu'ils soutiennent. L'énoncé inaugural soutenu par Fourier nous donnera l'occasion de considérer le statut de cet énoncé introduit au cours de la controverse des cordes vibrantes qui opposa un demi-siècle avant Daniel Bernoulli, D'Alembert, Euler et Lagrange. Ce sera l'occasion de considérer l'exemple d'un énoncé inaugural énoncé sans être soutenu. Nous aurons du même coup plusieurs exemples de textes non inauguraux. Les *Eléments* d'Euclide en sera un autre. Je montrerai, en considérant plusieurs totalités possibles, qu'il n'est pour aucune, et pour des raisons différentes, un texte inaugural.

22J'ai relevé : Kreisel 1967 ; Barwise 1977, 41 ; Shapiro 1981 ; Epstein & Carnielli 1989, chp 25 ; Mendelson 1990 ; Soare 1996 ; 296-7, Sieg 1997, 173 ; Black 2000, 250-1.

# III - L'Idéographie de Frege. La représentation des jugements et de leurs contenus

L'*Idéographie* de Frege est généralement reconnue comme l'un des textes fondateurs de la logique mathématique[23]. Au début de sa deuxième partie on peut lire l'affirmation suivante :

> « De cette manière on parvient à un petit nombre de lois dans lesquelles, si l'on ajoute celles qui sont contenues dans les règles, le contenu de toutes, bien que latent, est inclus.» Frege, *Begriffschrift*, §13 trad. Corine Besson, p. 40[24]

Dans un fragment d'un manuel de logique écrit dans la foulée de la publication de son *Idéographie,* on peut lire :

> « Mais l'ensemble des termes techniques est d'autant plus approprié qu'il arrive à exprimer adéquatement et de façon plus concise tout le système des lois [de la pensée] » Frege 1994, 13

Il s'agit de vérifier que ces énoncés ont les caractéristiques d'un énoncé inaugural et que l'*Idéographie* est un texte inaugural.

## 1 - Vérification des caractéristiques d'un énoncé inaugural

Les lois auxquelles font explicitement référence les deux énoncés cités sont les lois de la pensée[25] (*Denkgesetze*). Frege précise dans l'avant-propos de

23 Church 1956, 23 ; Kneale & Kneale 1962, 511 ; Heijenoort 1967, vi ; Blanché 1970, 310 ; Coffa 1991, 123 ; Barnes 1999, 119 ; Sullivan 2004, 661

24 « Auf diese Weise gelangt man zu einer kleinen Anzahl von Gesetzen, in welchen, wenn man die in den Regeln enthaltenen hinzunimmt, der Inhalt aller, obschon unentwickelt, eingeschlossen ist. » Frege 1879, §13, 25.

25 Citons intégralement le début du paragraphe qui est aussi le début de la deuxième partie de l'*idéographie* : « Quelques principes de la pensée ont déjà été mis à contribution dans la première partie avec le but de les transformer en règles pour l'application de nos signes. Ces règles, ainsi que les lois desquelles elles sont des copies, ne peuvent être exprimées dans l'idéographie, parce qu'elles en sont son fondement. Dans cette partie, quelques jugements de la pensée pure, ceux pour lesquels cela est possible, vont être représentés en signes. Il est aisé de dériver les plus composés de ces jugements à partir de plus simples, non pas pour les rendre plus certains, ce qui serait pour la plupart inutile, mais pour mettre en évidence les relations des jugements entre eux. Ce n'est manifestement pas la même chose que de connaître simplement les lois ou de savoir aussi comment les unes sont données par les autres. De cette manière on parvient à un petit nombre de lois dans lesquelles, si l'on ajoute celles qui sont contenues dans les règles, le contenu de toutes, bien que latent, est inclus.» Frege 1879, trad. 1999, p. 40. « Einige Grundsätse des Denkens sind schon im ersten Abschnitte herangezegen worden um in Regeln für die Anwendung unserer

l'*Idéographie* que ces lois se rapportent à des contenus conceptuels ou contenus de jugements (*Begrifflichen Inhalt*) : « L'objet exclusif de mes recherches, je l'ai appelé (...) « contenu conceptuel » »[26]. Il avertit le lecteur que « cette explication doit être toujours présente à l'esprit si l'on se soucie d'entendre correctement l'essence du « langage formulaire », auquel je donne le nom d' « idéographie » pour cette raison»[27] (Frege 1879, trad. 1992, 99-100). Frege considère ces contenus conceptuels et les lois de la pensée qui s'y rapportent comme constitués[28]. Il les caractérise en reprenant l'opposition kantienne entre jugements analytiques et synthétiques : les contenus de jugements sont ceux qui ont un caractère « purement logique » par opposition à ceux qui ont un caractère empirique (Frege 1879, trad. 1992, 99). *Il y a* des contenus de jugement et les lois de la pensée sont les jugements (assertions) universellement vrais relatives à ces contenus. Elles forment une totalité pré-établie à laquelle ces énoncés font référence. La condition « réalisme » est ainsi satisfaite. En regard, Frege propose une représentation de ces lois, une idéographie. C'est ce système d'expressions qu'il présente et défend. Il peut bien prétendre l'avoir inventé, découvert ou imaginé. Ces expressions ont aussi de ce fait un statut différent des contenus de jugement et des lois qu'elles représentent. Il y a donc bien un « dualisme » avec d'une part les lois et d'autre part les expressions introduites pour les exprimer. Il y a bien aussi « inauguration» de l'idéographie[29]. Ces énoncés affirment bien aussi que cette représentation est conforme aux lois de la pensée. Elle offre en particulier une expression de toutes ces lois et, inversement, toutes ses expressions sont des expressions de telles lois. La condition « conformité » est donc aussi satisfaite. Cette conformité apparaît aussi impossible à établir. Il faudrait en effet pour cela établir qu'à tout jugement logique correspond une expression de l'idéographie. Mais justement, il n'y a pas, avant l'idéographie, de représentation uniforme de tous ces jugements qui puisse permette une telle

Zeichen verwandelt zu werden. Diese Regeln und die Gesetze, deren Abbilder sie sind, können in der Begriffsschrift deshalb nicht ausgedrückt werden, weil sie ihr zu Grunde liegen. In deisem Abschnitte sollen nun einige Urtheile des reinen Denkens, bei denen dies möglish ist, in Zeichen dargestellt werden. Es liegt nehe, die zusammengesetzteren dieser Urtheile aus einfacheren abzuleiten, nicht um sie gewisser zu machen, was meistens unnöthig wäre, sondern um die Beziehungen der Urtheile zu einander hervortreten zu lassen. Es is offenbar nicht dasselbe, ob man blos die Gesetze kennt, oder ob man auch weiss, wie die einen durch die andern schon mitgegeben sind. Auf diese Weise gelangt man zu einer kleinen Anzahl von Gesetzen, in welchen, wenn man die in den Regeln enthaltenen hinzunimmt, der Inhalt aller, obschon unentwickelt, eingeschlossen ist. » Frege 1879, §13, 25.

26 La distinction qu'il fera plus tard entre sens et signification l'aménera à abandonner la notion de contenu jugeable, remplacée par pensée et valeur de vérité (Frege 1994, 119).

27 « I ch habe das, worauf allein es mir ankam (...) als *begrifflichen Inhalt* bezeichnet. Diese Erklärung muss daher immer im Sinne behalten werden, wenn man das Wesen meiner Formelsprache richtig auffassen will. Hieraus ergab sich auch der Name « Begriffsschrift ». » Frege 1879, iv.

28 « En reconnaissant intérieurement quelque chose comme vrai, nous jugeons. Ainsi, un contenu jugeable est, par exemple, le contenu de l'égalité 2+3=5. Comme nous l'avons vu, ce contenu n'est ni le résultat d'un processus interne, ni le produit d'une activité mentale de l'homme, mais quelque chose d'objectif, autrement dit quelque chose qui, pour tous les êtres rationnels, pour tous ceux qui peuvent le saisir, est exactement le même, tout comme, par exemple, le soleil est quelque chose d'objectif. » Frege, fragment pour un manuel de logique écrit entre 1879 et 1891, trad. in Frege 1994, 16.

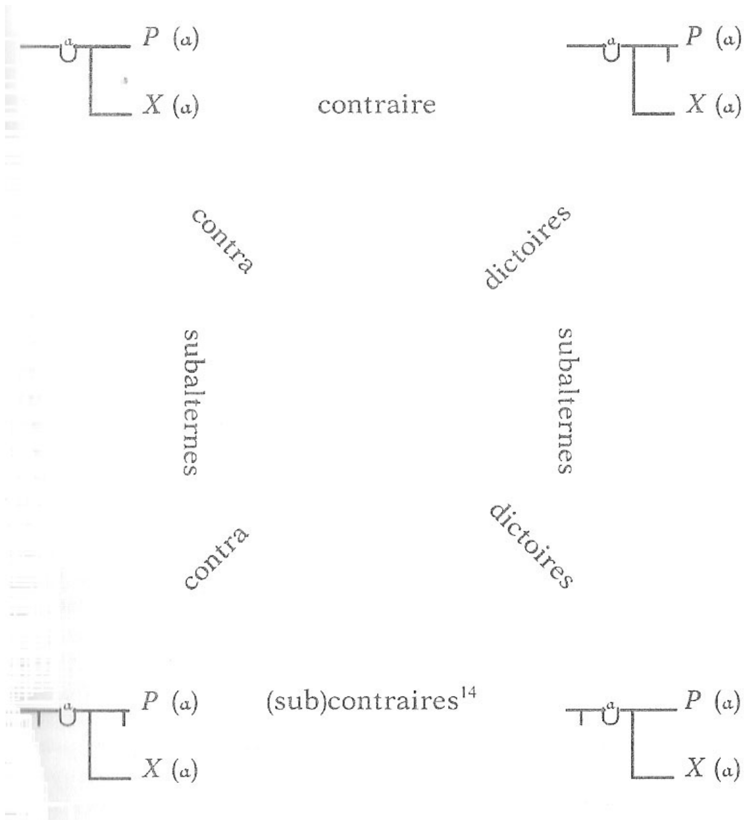
29 La satisfaction de cette condition ne préjuge pas de l'influence possible d'autres représentations plus ou moins semblables à celle introduite (notamment Boole 1854).

démonstration. L'idéographie proposée est bien incommensurable avec les jugements et les lois qu'elle représente.
Les cinq conditions qui caractérisent un énoncé inaugural sont donc bien toutes satisfaites.

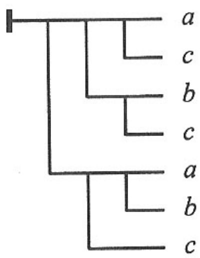
## 2 - L'*Idéographie* : un texte inaugural

Vérifions maintenant que l'*Idéographie* est un texte inaugural. Nous allons pour cela examiner le dispositif argumentatif présenté pour soutenir son énoncé inaugural.
L'énoncé inaugural est introduit au début de la deuxième partie, mais Frege a déjà commencé à le soutenir dès la première partie consacrée à l'« Explication des symboles » (*Erklärung der Bezeichnungen*, §§1-12). Il introduit en effet dans cette partie les éléments de son idéographie en montrant que les expressions élémentaires qui la composent (tiret de la condition, négation, etc.) permettent de former des contenus de jugement reconnus.
Le trait de la condition


est ainsi l'expression du jugement « si la lune se trouve en quadrature, alors elle apparaît en demi-cercle » , en posant B : la lune se trouve en quadrature et A : elle apparaît en demi-cercle . Il indique ainsi la conformité de cette expression avec un contenu de jugement reçu. La négation est introduite de la même manière. Il montre aussi que la négation et la conditionnalité permettent d'exprimer l'incompatibilité (« on ne peut affirmer A et B à la fois »), la conjonction (« A ou B »), ou encore « ni A ni B ». Il s'assure ainsi que son idéographie peut exprimer des contenus et des jugements reçus sans que de nouvelles expressions *ad hoc* aient toujours à être introduites : les expressions introduites peuvent se composer et leur composition donne des expressions qui correspondent à nouveau à des jugements établis. Il vérifie ainsi cette sorte de stabilité et initie son lecteur au rapport entre ses expressions et les jugements qu'elles expriment. Cette partie s'achève en point d'orgue puisque Frege montre que son idéographie permet d'exprimer le carré logique d'Aristote (contraire, contradictoire, subalterne et subcontraire). Il montre qu'il est en mesure d'exprimer toutes les oppositions du système logique le plus ancien et le mieux établi.




La deuxième partie de l'*Idéographie* (§§ 13-22) est consacrée à la « Représentation et [à la] dérivation de quelques jugements de la pensée pure » (« *Darstellung und Ableitung einiger Urtheile des reinem Denkens* »). Frege y exprime en mots (*in Worten ausdrücken*) quelques expressions de son idéographie. Il s'assure ainsi encore de la conformité des expressions de son système avec des jugements reçus. Par exemple (§14), l'expression ci-dessous, en donnant à *a* et *b* les interprétations qui conviennent, correspond à « si la somme des angles du triangle ABC s'élève à deux angles droits, alors cela est aussi valide dans le cas où l'angle ABC est un angle droit ».




Frege s'attache à préciser « ce que veut dire » (*besagt*) chacune de ses expressions. Il montre du même coup que des jugements habituellement exprimés en mots s'expriment dans son idéographie. Il montre aussi que son inférence rend compte de dérivations connues, comme par exemple celle du *modus tollens* à partir du *modus ponens* (§17). Ainsi la conformité ne consiste pas seulement à établir une correspondance entre les contenus de jugements et les expressions de l'idéographie mais à montrer que les *relations* entre les contenus de jugements sont aussi conformes aux *relations* entre leurs expressions. Cette conformité ressort aussi de la remarque suivante :

> « Il est aisé de dériver les plus composés de ces jugements [de la pensée pure] à partir de plus simples, non pas pour les rendre plus certains, ce qui serait pour la plupart inutile, mais pour mettre en évidence les relations des jugements entre eux. » (Frege 1879, 25, trad. 1992, 40).

Frege indique fait ici valoir que l'inférence (de l'expression) des jugements à partir des neuf (expression de) jugements retenus ne sert pas tant à établir leur vérité qu'à faire ressortir les relations entre ces jugements. En effet, leur vérité ne saurait être mieux établie que par l'évidence intrinsèque de chaque jugement[30] . Il montre enfin comment exprimer les raisonnements *Felapton* et *Barbara*, c'est-à-dire deux des modes d'inférences aristotéliciens, en laissant au lecteur le soin de poursuivre la vérification pour les autres[31].

Ainsi, dans les deux premières parties, soit deux tiers des paragraphes, Frege s'attache à soutenir la conformité de son idéographie à des jugements logiques reconnus en montrant la capacité de celle-ci à reproduire un ensemble de distinctions reçues. L'*idéographie* est ainsi en grande partie consacrée à établir que l'idéographie permet de *reproduire* fidèlement et, pour autant que cela soit possible, toutes les lois de la pensée. Cela en fait, par nécessité, un texte éminemment pragmatique, dont l'action consiste à soutenir l'énoncé inaugural proposé. Frege fait lui-même valoir cette conformité en parlant d' « un système adéquat de notation » (*angemessenen Bezeichnungsweise*) (Frege 1879, v, trad. 1992, 100) ou encore d'« un système de notation conforme aux choses mêmes » (*die Sachen selbst treffenden Bezeichnungsweise entspringen würde*) (Frege 1879, v-vi, trad. 1992, 101). Ce souci de conformité donne lieu à une argumentation tout à fait spécifique. Ainsi observe-t-il que « si [l'idéographie] est dans une certaine mesure adaptée à son propos, on pourrait bien déplorer que cette œuvre n'apporte pas de vérités nouvelles. » (Frege 1879, trad. 1992, 100). Et en effet, un système d'expressions aussi conforme ne pourra conduire à formuler aucun résultat qui ne soit conforme à des lois établies de la pensée. La conformité est même telle que l'idéographie est présentée comme ayant été dictée par les lois de la pensée elles-mêmes[32] : « J'espère que les logiciens, non rebutés par une première impression d'étrangeté, ne refuseront pas leur consentement aux innovations qui s'imposèrent à moi par une nécessité inhérente à la chose même. »

---

30 On peut rapporter son rejet de la démarche axiomatique introduite par Hilbert dans ses *Grundlagen der Geometrie* à ce souci de conformité dont Hilbert ne fait pas un préalable. Les axiomes servent pour Hilbert à définir les notions qui y figurent, avec pour conséquence que les acceptions données aux notions considérées (point, droite, incidence, etc.) fluctuent selon que l'on retient ou rejette tel ou tel axiome. Pour Frege au contraire : « Les axiomes et les théorèmes ne peuvent (…) jamais établir la référence d'un signe ou d'un mot qui y figure. (…) Quant aux axiomes, j'appelle ainsi des propositions qui sont vraies mais qui ne peuvent être prouvées parce que la connaissance qu nous en avons découle d'une source entièrement étrangère à la logique, et que l'on peut nommer l'intuition de l'espace. De la vérité des axiomes il suit qu'ils ne se contredisent pas. Aucune preuve supplémentaire de ce fait n'est donc exigible» Frege à Hilbert, 27 septembre 1899 (Rivenc & de Rouilhan 1992 , 223).

31 « Der Leser, der sich in die Ableitungsart der Begriffschrift bineingedacht hat, wird im Stande sein, auch die Urtheile herzuleiten, welche den andern Schlussweisen entsprechen. Hier mögen diese alse Beispiele genügen. » (§ 22).

32 Cette nécessité est souvent invoquée, on la retrouve notamment chez Grothendieck (Herreman 1999).

(Frege 1879, trad. fr. 102). Ce déni de création apparaît assez inévitable quand on soutient un énoncé inaugural. C'est encore ce souci de conformité qui a conduit Frege à développer un système d'expression *spécifique* au lieu de simplement adapter celui de l'arithmétique ou de l'algèbre comme il reproche à Boole de l'avoir fait. C'est une différence effectivement importante entre son approche et celle de Boole sur laquelle il insiste et revient régulièrement (Frege 1879, trad. 1992, 100 ; Frege 1994, 20, 61).

Frege n'entend pas faire accepter de déductions qui ne l'étaient pas déjà. Il ne saurait s'agir pour lui d'introduire des possibilités de *généralisations.* Les mathématiques ne se développent pas ici, comme il arrive parfois de croire qu'elles le font toujours, dans une recherche de la plus grande généralité, ni d'ailleurs d'une quelconque généralité, mais au contraire dans la plus complète conformité[33]. Le mathématicien s'efforce ici d'établir, comme il le peut, la conformité de son idéographie à la conception reçue de son objet. Ce qui est remarquable en l'occurrence, ce n'est pas le niveau d'abstraction auquel le texte se déploierait, mais la conformité parfaite de la représentation proposée. Il ne s'agit pas non plus de se dégager d'intuitions sous-jacentes pour permettre le transfert de théorèmes avec leur démonstration d'un domaine à un autre mais au contraire d'assurer et d'établir une reproduction exacte de chaque déduction singulière. La représentation présente bien sûr des caractéristiques avantageuses sur ce qu'elle reproduit, elle est introduite pour cela et Frege les a fait valoir, mais ces avantages doivent aussi préserver la conformité. C'est un paradoxe inhérent à tous les énoncés inauguraux. Il en sera bientôt rendu compte par la notion de *transparence*.

La conformité requiert que les expressions de l'idéographie soient mises en rapport avec les contenus de jugement. Cela suppose une autre expression de ces jugements, de ces lois ou de ces propositions arithmétiques. Cette expression est ici le plus souvent la langue naturelle et ce rapport est établi quand Frege « exprime en mots » (Frege 1994, 48) les formules de son idéographie. Il voudrait d'ailleurs s'en dispenser considérant que ses formules « devraient parler d'elles-mêmes » (Frege 1994, 37).

Dans l'article non publié écrit en 1880 dans lequel il présente l'*Idéographie* en la comparant à la logique de Boole, Frege met bien en évidence la caractère inaugural de sa démarche :

> « Le principe de la plus grande limitation possible du nombre des lois primitives ne serait pas complètement satisfait sans la preuve que le peu qui reste est encore suffisant. C'est cette considération qui a déterminé la forme de la deuxième et troisième sections de mon écrit. » Frege 1994, 48.

Frege indique ici clairement que la deuxième et la troisième parties de l'*Idéographie*, qui n'en compte que trois, sont consacrées à donner la « preuve » que les neuf lois primitives retenues suffisent à dériver *toutes* les autres. Le passage suivant, extrait du même article, est encore plus précis :

> « Mais fournir un échantillon d'exécution brève et commode de ces **inférences**, ce n'était pas là mon intention, mais plutôt de donner la preuve que j'ai assez de mes **lois primitives** pour tout faire. Ne pouvait certes ici être atteinte qu'une simple

33 Sur l'importance de la généralisation dans la justification de développements mathématiques voir Flament & Nabonnand (à paraître).

> probabilité, du fait que j'y étais arrivé par ce moyen dans de nombreux cas. Mais le choix de l'exemple sur lequel le montrer n'était pas indifférent. Afin de ne pas risquer de négliger précisément des transformations importantes pour l'usage scientifique, j'ai choisi la dérivation continue d'une **proposition** qui me semble être indispensable à l'**arithmétique**, bien qu'en tant qu'allant de soi elle soit peu prise en considération. » Frege 1994, 49

Frege prévient que les exemples qu'il donne ne sont pas que des exemples. C'est-à-dire qu'ils ont une dimension supplémentaire, en l'occurrence pragmatique : ils participent *en plus* d'une preuve. Il ne s'agit pas pour lui de présenter un « échantillon » d'inférences mais de « donner la preuve » qu'il peut les obtenir *toutes*. Mais le principe de cette preuve est aussi tout entier dans ces exemples qui font la preuve. Il reconnaît ici explicitement que l'inauguration ne saurait être complètement achevée. Il exprime cette impossibilité en terme de « probabilité », une probabilité bien sûr impossible à quantifier. A nouveau, le terme est sans doute impropre. La stratégie qu'il annonce, et qui se retrouvera dans toutes les thèses que nous étudierons, consiste à choisir un exemple crucial[34], c'est-à-dire un ou plusieurs exemples qui peuvent sembler valoir pour *tous* les autres, des sortes de *représentants*. Il est bien sûr impossible d'avoir un tel représentant car c'est bien l'intérêt du système d'expressions introduit que d'avoir des expressions (les neuf lois primitives) à partir desquelles *toutes* les autres peuvent être dérivées. Cette description de l'*Idéographie* serait valable pour tous les textes inauguraux. Il suffirait de remplacer les quatre mots que j'ai mis en gras pour obtenir une description étonnamment adéquate des articles de Church ou de Turing, de *La Géométrie* de Descartes ou encore de *La théorie analytique de la chaleur* de Fourier.

## 3 - Présentation de l'idéographie

Pour une meilleure intelligence de la suite, rappelons brièvement les principes de l'idéographie. Le contenu d'un jugement, ou contenu jugeable, est exprimé par un trait horizontal placé à gauche de l'expression d'un contenu jugeable.

$$—\!\!—\!\!—\, A$$

Le jugement est lui-même exprimé en plaçant un petit trait vertical, appelé trait de jugement, à la gauche du trait horizontal du contenu de jugement auquel il se rapporte.

$$\vdash\!\!—\!\!—\, A$$

C'est un exemple, le plus simple, d'expression complète de ce système. Le contenu de jugement « si A, alors B »[35] sera exprimé en reliant par un trait vertical, appelé trait de condition (*Bedingungsstrich*), les traits horizontaux

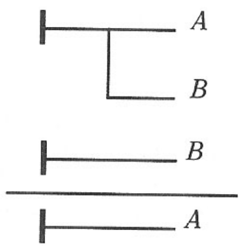
34 L'exemple choisi est en l'occurrence l'inférence suivante : « Si on forme une suite en appliquant un procédé univoque, qui n'a pas besoin d'être arithmétique, d'abord à un objet, puis à tout résultat de son application successive, et si dans cette suite deux objets suivent un même et unique troisième, alors le premier précède le second dans cette suite, ou le suit, ou coïncide avec lui. » Frege 1994, 49

exprimant les contenus de jugement de A et de B. Le jugement correspondant s'obtient en mettant le trait de jugement à gauche.

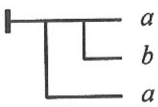
De manière semblable, un autre trait vertical, appelé trait de négation, placé cette fois sur le trait horizontal de contenu du jugement exprime le contenu de jugement contraire, c'est-à-dire sa négation :

La généralité (quantification universelle), est exprimée par un creux placé aussi au sur le trait horizontal du contenu de jugement, contenant la variable sur laquelle porte la quantification :

Un système d'expressions pour les contenus de jugements est ainsi décrit qui permet à partir d'expressions de jugements A et B (A pouvant être par exemple 2+3=5 et B $2^2$=4), de former l'expression désignant leur contenu de jugement, puis celle d'un autre contenu de jugement. Ces expressions de contenus de jugement sont transformées en l'expressions des jugements correspondants en ajoutant le trait de jugement à la gauche du trait horizontal de l'expression du contenu de jugement.
Frege n'a besoin d'introduire qu'une seule opération sur les jugements, l'inférence[36], qui transforme deux jugements en un troisième :

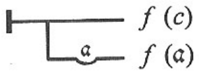


Des jugements peuvent ainsi être dérivés d'autres jugements par une succession d'inférences et de substitutions.
Il distingue enfin un noyau de neuf jugements dont voici pour exemples le premier et le dernier :



35 Il s'agit plus exactement de la négation de la troisième des quatre alternatives suivantes : « A est affirmé et B est affirmé », « A est affirmé et B est nié », « A est nié et B est affirmé » et « A est nié et B est nié ».

36 Il est amené à en introduire une deuxième, la substitution. Nous commettrons parfois l'abus de ne mentionner que l'inférence alors que des substitutions sont aussi nécessaires.



A partir de ces neuf expressions, d'autres expressions peuvent être dérivées qui seront aussi des expressions de jugements logiques.
L'idéographie permettrait d'envisager une démonstration de son adéquation aux lois de la pensée. Si cela n'est pas possible, cela ne vient pas de l'idéographie mais de la manière dont les lois de la pensée étaient exprimées avant que l'idéographie ne soit introduite, cela tient aux caractéristiques de la totalité *reçue.* L'inauguration de l'idéographie change cette situation.

## 4 - L'analyticité de l'arithmétique : la transparence et ses effets

La troisième et dernière partie de l'*Idéographie* (§§23-31), « Quelques éléments d'une théorie générale des suites » (*Einiges aus einer allgemeinen Reihenlehre*), est entièrement consacrée à établir que les jugements arithmétiques relèvent de la logique, c'est-à-dire que leur vérité n'a pas de fondement empirique[37]. Ce problème est présenté par Frege lui-même comme étant à l'origine de son idéographie :

> « Alors que je me demandais sous laquelle des deux catégories se rangeaient les jugements arithmétiques, je dus tenter d'abord de voir jusqu'où l'on irait en arithmétique en procédant uniquement par une voie purement déductive, appuyée seulement sur les lois de la pensée qui transcendent tous les cas particuliers. » Frege 1879, Avant-Propos, trad. fr 1992, 99[38]

Pour établir l'analyticité de l'arithmétique Frege montre comment reproduire au sein de son idéographie les notions de successeur, de suite et de propriété héréditaire (§24), afin de « réduire le concept de succession dans une suite à celui de succession logique, pour, de là, passer au concept de nombre »[39] (Frege 1879, trad. 1992, 99). Pour cela il dérive par inférence et substitution diverses formules correspondant à des propriétés habituelles des suites de nombres[40]. Il ne s'agit

37 Paul Benacerraf écrit à propos de ce résultat : « When I was young I was taught a number of fundamental propositions: Frege was the father of logicism – he showed that arithmetic was really only logic (ingeniously disguised), and consequently that it was really analytic, which was really why it was a priori, all of which showed where Kant had gone wrong about arithmetic, and probably about the rest of the alleged synthetic a priori as well. » Benacerraf 1981, 17 ; 1995, 41.

38 « Indem ich mir nun die Frage vorlegte, zu welcher dieser beiden Arten die arithmetischen Urtheile gehörten, musste ich zunächst versuchen, wie weit man in der Arithmetik durch Schlüsse allein gelangen könnte, nur gestützt auf die Gesetze des Denkens, die über allen Besonderheiten erhaben sind. » Frege 1879, iv

39 « Der Gang war hierbei dieser, dass ich zuerst den Begriff der Anordnung in einer Reihe auf die *logische* Folge zurückzuführen suchte, um von hier aus zum Zahlbegriff fortzuschreiten. » Frege 1879, iv.

40 Par exemple, traduit en mots : « Si y appartient à la suite déterminée par f commençant par z, alors chaque résultat d'une application de la procédure f a y appartient à la suite déterminée par f commençant par z, ou précède z dans la suite déterminée par f. » (§30). Pour une présentation de

donc plus maintenant de montrer que des jugements logiques admettent une représentation idéographique mais d'établir à l'inverse le caractère logique de propositions en montrant qu'elles ont une représentation idéographique. Frege n'en est plus à inaugurer son idéographie ; il l'utilise pour démontrer que l'arithmétique fait bien partie de la logique et pour résoudre un problème philosophique posé depuis Kant.
La suite de cette analyse va être entièrement consacrée à cette preuve de l'analyticité de l'arithmétique. Cette preuve très particulière va nous amener à découvrir la *transparence* du système d'expressions introduit par Frege. Cette transparence n'est pas propre à ce système d'expressions. C'est elle qui rend compte de ce paradoxe inhérent à toute inauguration qui consiste à soutenir la conformité d'une représentation et en même temps de l'introduire en raison de ses avantages. La preuve de l'analyticité de l'arithmétique est comme nous allons le voir une occasion particulièrement favorable pour la mettre en évidence. Inversement, cette transparence mettra en évidence le ressort sémiotique de cette preuve.

### a) Une preuve pragmatique

Un intérêt majeur de l'*Idéographie* est de réduire la démonstration d'une formule à une succession d'inférences (au sens défini ici) et de substitutions à partir des neuf formules primitives[41]. C'est aussi le mode d'engendrement des expressions de son idéographie. Mais l'analyticité de l'arithmétique, c'est-à-dire le fait qu'une proposition arithmétique n'implique aucun jugement empirique, n'est pas une loi de la pensée pure. Ce n'est donc pas un jugement susceptible d'être représenté dans l'idéographie. Sa preuve ne va donc pas consister à démontrer la formule qui correspondrait à ce jugement. L'analyticité de l'arithmétique va être prouvée en démontrant dans l'idéographie des formules correspondant à diverses propriétés de l'arithmétique. L'argument est simple : l'arithmétique est analytique si toutes les propositions de l'arithmétique le sont. Cela vu, en quoi consiste alors la preuve de l'analyticité d'une proposition arithmétique ? Chaque dérivation à partir du noyau de formules primitives donne une formule de l'idéographie. Cette formule est ainsi démontrée au sens de l'idéographie. Mais qu'est-ce qui établit que la formule ainsi démontrée est en plus analytique ? C'est le *fait* de l'avoir démontré de cette manière qui établit *de surcroit* que le jugement exprimé par la formule n'a aucun caractère empirique. La formule est analytique parce qu'il est admis que son écriture et sa dérivation dans l'idéographie n'implique aucun jugement empirique. Ainsi démontrer dans l'idéographie une formule, c'est en plus de la démonstration de cette formule prouver qu'elle est analytique. Chaque démonstration établit donc deux choses : la formule et son analyticité. La preuve de l'analyticité d'une proposition suppose donc de reconnaître *deux* démonstrations en *une*. Une seule de ces deux démonstrations est conforme à la

cette partie (Boolos 1985).

41 Pour Frege, les expressions de l'idéographie sont les expressions qu'il peut inférer de son noyau primitif. Il importe en effet de remarquer qu'il ne considère pas l'analogue des « formules bien formées » et qu'il ne considère donc pas d'autres totalités que celle des expressions dérivables à partir de son noyau. Une expression de l'idéographie est ainsi toujours une formule dérivée de ce noyau.

notion de démonstration définie dans l'*Idéographie*. La preuve de l'analyticité consiste quant à elle dans le *fait* de dériver, ou simplement de donner, cela revient en l'occurrence au même, ces formules dans l'idéographie. Elle n'est pas une démonstration au sens de l'*Idéographie*. C'est une *propriété* de l'expression, celle de la démonstration ou simplement de la formule, qui fait la preuve de l'analyticité. Cela vaut sans doute pour d'autres démonstrations que celles de l'idéographie : une démonstration, en raison de son expression, n'est jamais qu'*une* démonstration.

La preuve de l'analyticité de l'arithmétique, revendiquée par Frege, implique un autre type de démonstration que celui qu'il définit et auquel il s'agit de réduire toute démonstration. Elle n'est composée que de démonstrations de ce type, mais elle leur est néanmoins irréductible. Pour en rendre compte il faut aussi reconnaître le rôle propre des *expressions.* Cette démonstration ne ressortit pas de la notion de démonstration formalisée par Frege mais d'une *propriété* de l'expression de ces démonstrations, c'est-à-dire, en l'occurrence, des formules de l'idéographie. C'est une preuve que l'on peut qualifier de *pragmatique*. Deux types de démonstration coexistent sans se mêler. Il ne s'agit pas du cas d'une démonstration qui mêlerait par exemple des manipulations algébriques ou des calculs à des raisonnements géométriques. Les deux genres de démonstrations peuvent dans ce cas être assez bien isolées ; elles se succèdent (même si c'est en fait plus compliqué que cela...). Ici, au contraire, elles se superposent. Il est impossible de démontrer une formule, au sens de l'idéographie, sans en même temps démontrer son analyticité. Il est tout aussi impossible de démontrer son analyticité, sans démontrer la formule au sens de l'idéographie. Les deux démonstrations sont parfaitement distinctes et en même temps inséparables. La même expression sert aux deux. Il est bien sûr intéressant d'observer l'intervention de cette dimension pragmatique dans le texte qui vise à donner des démonstrations totalement formalisées. Cela étant, il n'y a aucune contradiction puisque l'analyticité de l'arithmétique n'est pas considérée comme une proposition arithmétique, ou même seulement mathématique ; sa démonstration n'est donc pas non plus une démonstration mathématique. Mais il faut aussi reconnaître que si l'analyticité de l'arithmétique n'est pas une proposition arithmétique, sa démonstration n'en est pas moins inséparable de celle des propositions de l'arithmétique. Jamais sans doute la philosophie et les mathématiques n'ont été ainsi maintenues distinctes tout en étant inséparables! Alors que l'*Idéographie* est une contribution essentielle à la formalisation de la déduction logique un de ses principaux résultats revendiqués et reconnus est établi par une déduction d'un autre type ; une déduction pragmatique qui fait intervenir des caractéristiques des expressions utilisées.

### b) La transparence de l'idéographie

L'analyticité de l'arithmétique est établie en démontrant que ses propositions n'ont aucun caractère empirique. Frege en apporte la preuve en montrant que son idéographie permet d'inférer et d'exprimer une partie suffisante d'entre elles pour se convaincre qu'elles pourraient l'être toutes. Cette preuve est fondée sur le fait que l'idéographie (ses expressions, ses inférences et ses substitutions), n'*a essentiellement aucun caractère empirique* : c'est parce que les expressions et les démonstrations de l'idéographie n'ont aucun caractère empirique que les jugements qu'elle exprime et qui y sont dérivés n'ont eux-mêmes aucun caractère empirique. L'analyticité de l'arithmétique est établie dans la mesure où l'idéographie est tenue pour dépourvue de tout caractère empirique. Si Frege, et d'autres après lui, ont considéré que cette preuve avait été donnée c'est donc qu'ils ont considéré que l'idéographie était dépourvu tout caractère empirique. Or nous avons vu que la démonstration de l'analyticité d'une proposition est une démonstration pragmatique qui vient en surcroit de la démonstration de cette proposition fondée sur une *propriété* des expressions de l'idéographie. Ces expressions sont ainsi à la fois reconnues et niées. Reconnues parce que la preuve de l'analyticité est fondée sur une propriété de ces expressions, qui sont dans cette mesure reconnues (il n'y aurait autrement aucune démonstration là où l'on en compte deux), niées parce que la qualité qui leur est reconnue est précisément de garantir que ce qu'elles expriment, par le fait qu'elles en soient l'expression, est pur de tout jugement empirique. Ces expressions sont ainsi tenues pour *transparentes* (Recanatti 1979)[42] ; elles interviennent tout en étant ignorées. Que Frege, comme aussi Whitehead & Russell, n'ait pas reconnu le rôle dans ses démonstrations des *substitutions de* et *dans* ses formules, opération qui n'a pas d'équivalent pour les jugements de la pensée pure, peut aussi, à mon avis, être tenue pour une autre manifestation de cette transparence.

L'analyticité des propositions arithmétiques est fondée sur la transparence de l'idéographie. Inversement, l'étude de l'*Idéographie* met en évidence cette transparence. Mais celle-ci ressort aussi plus explicitement de diverses considérations de Frege.

Par exemple :

> « Si briser l'emprise du mot sur l'esprit humain est une tâche de la philosophie, dans la mesure où elle décèle les illusions rendues souvent presque inévitables par l'application de la langue usuelle aux relations entre concepts, alors mon idéographie, libérant la pensée de toutes les surcharges dues uniquement aux caractéristiques des moyens d'expression, et développée plus amplement à cette fin, sera sans doute un instrument précieux entre les mains du philosophe. Certes, elle ne restitue pas purement et simplement la pensée – il ne saurait en être autrement pour un moyen d'exposition tout extérieur. Seulement, il est possible, d'une part, de réduire les écarts à un minimum inévitable et sans danger et, d'autre part, par cela même qu'ils diffèrent spécifiquement de ceux du langage usuel, les moyens d'expression idéographiques nous gardent de l'influence unilatérale de ces derniers. » (Frege 1879, trad. 1992, 101-102).

Frege dénonce ici « les illusions rendues souvent presque inévitables par l'application de la langue usuelle aux relations entre concepts ». Il dénonce ces déformations « presque inévitables » que toute langue, avec son vocabulaire, sa grammaire fait subir aux concepts qu'elle exprime. Ailleurs, Frege d'éclare qu'«il appartient donc au logicien de mener un combat constant contre le psychologique et en partie contre la langue et la grammaire, dans la mesure où elles ne donnent pas une expression du logique dans sa pureté. » (Frege 1994, 15). Le logicien se bat contre l'opacité des langues et l'idéographie serait une langue exempte de ce

42 La dénonciation de cette transparence est un des fondements de la linguistique intégrationniste (Harris 1998, Herreman « Linguistique intégrationniste et histoire sémiotique des mathématiques »)

défaut. Elle ne jette aucune ombre et ne déforme pas ce qu'elle exprime. C'est une langue « sans danger ». Elle libère « la pensée de toutes les surcharges dues uniquement aux caractéristiques des moyens d'expression ». Elle est transparente et adéquate, l'un et l'autre étant indissociables. Selon Frege l'idéographie « doit donc servir à contrôler de la manière la plus infaillible la validité d'une déduction, et débusquer toute hypothèse qui se glisserait furtivement afin de l'examiner quant à sa provenance. » (Frege 1879, trad. fr. 1992, 99).
La transparence de l'idéographie n'est donc pas seulement le ressort de la preuve de l'analyticité de l'arithmétique. Mais cette preuve a permis d'en établir le rôle effectif au-delà de déclarations dont l'incidence resterait incertaine. Elle fait aussi de l'I*déographie* un révélateur privilégié d'une transparence qui ne lui est pas propre.
Nous avons commencé par montrer que l'analyticité était établie à partir des caractéristiques des expressions de l'idéographie. Cette preuve oblige à ne plus regarder au travers des démonstrations de l'idéographie mais à les regarder de biais et à les rendre ainsi opaques. Qu'il s'agisse d'une preuve d'analyticité ne joue là à peu près aucun rôle. Mais cela ne suffit pas non plus à cette preuve. Car celle-ci résulte de ce qu'on voit en considérant de biais les démonstrations et les expressions idéographiques. Elle résulte de ce que l'on découvre quand on n'en ignore plus les expressions. Et que voit-on ? Leur transparence! La preuve de l'analyticité est en effet fondée sur le fait que ce serait la transparence des expressions de l'idéographie que l'on découvrirait en les opacifiant ; c'est cette transparence qui établit l'analyticité des jugements exprimés. L'*Idéographie* est donc bien, en raison de l'analyticité qu'elle vise à établir, un révélateur de la transparence de ses expressions. C'est la transparence qu'il *faut* voir pour donner cette preuve. Cette preuve n'est en rien spécifique à l'arithmétique. Elle vaut pour tout jugement exprimé dans l'idéographie. L'idéographie est une machine à prouver l'analyticité de tout ce qu'elle exprime. Il vaut sans doute la peine de se demander pourquoi elle serait plus susceptible qu'un autre système d'expressions d'apporter cette preuve ? Pourquoi serait-elle transparente quand les autres langues sont au contraire dénoncées pour leur opacité ? Comment rendre compte de cette exception ?! Cette transparence semble n'être que celle que Frege veut reconnaître à son idéographie. Sans doute l'a-t-il finement poli. Sans doute en apprécie-t-il mieux que quiconque les qualités et les possibilités. Mais il ne peut ni en affirmer, ni en voir la transparence. Et de toute évidence, il ne nous l'a pas fait voir comme cela serait pourtant nécessaire pour sa preuve de l'analyticité. L'*Idéographie* est un révélateur privilégié de la transparence. Non pas la transparence, comme le croit Frege, d'expressions sans incidence sur ce qu'elles expriment (au point de servir à en établir la pureté!), mais la transparence comme déni par Frege de l'opacité de ses expressions. Et si l'*Idéographie* est un révélateur priviligié de cette transparence, celle-ci n'est propre ni à l'idéographie ni à Frege. Elle est au contraire manifeste dans tous les énoncés et les textes inauguraux : les fonctions λ-définissables, les machines de Turing, les diagrammes de l'idéographie, et toutes les autres représentations inaugurées doivent être transparentes pour pouvoir être tenues pour conformes à ce qu'elles représentent et pour pouvoir rendre compte compte en même temps de l'intérêt de leur introduction et de ses conséquences.

## 5 - Conclusion

Cette analyse de l'*Idéographie* a été l'occasion de présenter un exemple d'énoncé et de textes inauguraux autres que ceux attachés à la thèse de Church-Turing qui nous a servi à distinguer ce type d'énoncé et de texte. Elle a été l'occasion d'appliquer les cinq conditions proposées pour caractériser ces énoncés et ces textes. Le dualisme ne vient plus cette fois du fait de considérer d'une part l'idée intuitive de fonction calculable et d'autre part les expressions du λ-calcul, les machines logiques ou encore celles des fonctions générales récursives mais du fait de considérer d'une part des contenus conceptuels ou des lois de la pensée et d'autre part des diagrammes. Le réalisme ne renvoie plus au statut des fonctions calculables, tenues pour intuitives, naturelles, etc. mais à celui des contenus de jugement ou des lois de la pensée. Ce sont sans aucun doute des acceptions philosophiques différentes du réalisme, mais seul nous importe le statut pré-établi qui leur est bien commun. Il y a bien aussi inauguration, non plus du λ-calcul, des machines logiques ou des fonctions générales récursives pour représenter les fonctions calculables, mais de l'idéographie pour représenter les contenus de jugement ou les lois de la pensée. La conformité est aussi commune et tous ces textes consistent pour une grande part à donner divers arguments pour l'établir. Nous avons enfin un autre exemple d'incommensurabilité. Ce n'est plus l'incommensurabilité des expressions du λ-calcul, des machines logiques ou des fonctions générales récursives relativement aux diverses expressions des fonctions calculables mais l'incommensurabilité des expressions de l'idéographie avec les contenus de jugement ou avec les lois de la pensées, mais aussi avec leur expression dans la langue naturelle par laquelle, malgré tout, elles sont données et avec laquelle il importe à Frege de rompre. L'incommensurabilité est non seulement attestée, mais elle a de surcroit une fonction revendiquée constitutive du projet de développer un idéographie. Comme pour le réalisme, et en partie de ce fait, l'incommensurabilité n'est pas la même ici et dans les textes relatifs aux fonctions calculables. Mais il est néanmoins dans tous ces cas pour des raisons semblables impossible de donner une démonstration de la conformité revendiquée. Cette impossibilité confère des caractéristiques communes à ces textes largement consacrés à soutenir cette conformité. Au delà d'une application des critères proposés qui permet de mieux en comprendre le sens, le statut et la fonction, cette analyse à surtout permis de reconnaître que l'*Idéographie* est aussi un texte inaugural soutenant un énoncé inaugural. Il est ainsi établi que les catégories d'énoncé et de texte inauguraux ont un intérêt au delà du seul cas de la thèse de Church-Turing, dès lors ramenée au statut de cas particulier. Cela établit surtout que l'inauguration est un phénomène récurrent dans l'histoire des mathématiques. Certes, les énoncés et les textes considérés relèvent d'une période courte et ils ont tous un lien à la logique. Les autres exemples permettront de lever cette objection.

De manière plus spécifique, cette analyse de l'*Idéographie* effectuée en vue d'en établir le caractère inaugural nous a conduit à expliciter le ressort argumentatif de la preuve de l'analyticité de l'arithmétique. Il est ainsi apparu que le sens restreint de la notion de démonstration mis en œuvre dans l'idéographie, appelée à couvrir toutes les démonstrations mathématiques, n'en rendait singulièrement pas compte. Ainsi la preuve de l'analyticité n'est pas une preuve logique bien qu'aucune autre expression ne puisse lui être donnée. C'est une preuve que j'ai qualifiée de *pragmatique* parce qu'elle est fondée sur des caractéristiques des expressions utilisées : la nature des expressions participe à la preuve. L'*Idéographie* présente à cet égard un intérêt propre. En effet, puisqu'il s'agit de démontrer que les jugements arithmétiques sont dépourvus de déterminations empiriques, la caractéristique considérée des expressions est précisément d'être exemptes de toute détermination empirique. Les expressions sont ainsi en même temps reconnues (elles font preuve) et niées (elles sont tenues pour n'avoir aucune détermination empirique). Elles sont de ce fait *transparentes* : elles jouent un rôle, tout en étant ignorées, voir niées. La particularité de l'*Idéographie* est de mettre en évidence cette transparence. Mais celle-ci est nécessairement à l'œuvre dans tous les textes inauguraux puisqu'il s'agit pour eux d'introduire une nouvelle représentation qui sera de ce fait considérée et reconnue, mais qui devra aussi être niée sans quoi ses caractéristiques mettraient immanquablement en défaut la conformité revendiquée. La transparence n'est pas propre aux textes inauguraux. En revanche, nous pouvons être assurés de l'y voir à l'œuvre. C'est une raison supplémentaire pour distinguer ces textes.

# IV - *La Géométrie* de Descartes

## 1 - Un texte inaugural

*La Géométrie* de Descartes commence par l'affirmation :

> « Tous les problèmes de Géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin, par après, que de connaître la longueur de quelques lignes droites, pour les construire. » *Descartes, La géométrie, Livre I, p. 170*

Tout le livre atteste qu'il s'agit ici d'exprimer les problèmes de géométrie au moyen d'expressions algébriques. Deux totalités sont ainsi en jeu : les problèmes de géométrie et les expressions algébriques. Les problèmes de géométrie forment une totalité constituée d'énoncés, de figures, de méthodes et de solutions reçus par Descartes et ses contemporains. L'Algèbre n'est pas, loin s'en faut un procédé nouveau[43]. Descartes y fait référence comme à un procédé reconnu : il ne la présente pas, ne s'explique pas sur son recours et ne mentionne aucun ouvrage. Mais son usage des équations algébriques ne suggère pas qu'elles aient d'existence préalable propre, qu'elles seraient des expressions reçues ayant un rapport déjà établi avec la Géométrie[44]. Leur introduction se présente comme l'inauguration d'un nouveau rapport entre ces expressions et les problèmes de la Géométrie. L'énoncé considéré fait valoir la possibilité de transformer tout problème de géométrie en une équation algébrique, c'est-à-dire de le mettre en équation de telle sorte que la résolution algébrique de l'équation soit équivalente à la résolution géométrique du problème, leurs solutions respectives se correspondant exactement. La conformité entre les équations algébriques et les problèmes de géométrie est un thème récurrent chez Descartes[45]. Elle est aussi impossible à établir dans toute sa généralité : l'impossibilité de parcourir d'une quelconque manière la totalité des problèmes de géométrie, l'hétérogénéité entre leur expression et celle d'une expression algébrique interdisent une telle démonstration. Cet énoncé a donc bien toutes les caractéristiques d'un énoncé

43 van Egmond 1988 ; Scholz 1990 ; Giusti 1992 ; Cifoletti 1996.

44 Il ne s'agit évidemment pas ici d'ignorer l'Algèbre arabe ou, plus proche de Descartes, de celle de Nicolas Chuquet (1484), Pedro Nuñez (1567), Paolo Bonasoni (1575) et surtout de François Viète (1591, 1593abc, etc). Nous ne considérons ici que le statut des expressions polynomiales que Descartes présente et dont il trait comme si elles n'avaient jamais été introduites auparavant. Ces différents auteurs et leurs livres ont pu avoir une influence sur les arguments qu'il donne pour soutenir les énoncés inauguraux qu'il introduit. Comme pour les autres textes inauguraux, l'examen présenté dans cette partie de ces arguments est un préalable au traitement de cette question qui ne sera pas plus traitée ici pour ce texte que pour les autres.

45 On peut citer par exemple : « Par ce moyen, non seulement nous ferons l'économie d'un grand nombre de mots, mais, ce qui est plus important, nous présenterons les termes de la difficulté si purs et si dépouillés que, sans rien oublier d'utile, on n'y trouvera jamais rien de superflu et qui occupe inutilement l'esprit, quand la pensée devra embrasser plusieurs choses à la fois. » Descartes, *Regulae*, Règle XVI, trad. 108. On retrouve certaines caractéristiques d'une citation de Frege.

inaugural. Cet ensemble de caractéristiques ressort aussi clairement du paragraphe qui conclut l'ouvrage :

> « Mais mon dessein n'est pas de faire un gros livre, & je tasche plutost de comprendre beaucoup en peu de mots, comme on jugera peutestre que j'ay fait, si on considere qu'ayant reduit a une mesme construction tous les Problesmes d'un mesme genre, j'ay tout ensemble donné la façon de les reduire a une infinité d'autres diverses, & ainsi de resoudre chascun d'eux en une infinité de façons ; puis, outre cela, qu'ayant construit tous ceux qui sont plans, etc. » 412-413

Comme cette conformité ne peut être démontrée, *La Géométrie* va être à peu près entièrement consacrée à la soutenir.
Mais *La Géométrie* comprend aussi un deuxième énoncé inaugural :

> « Et en quelque autre façon qu'on imagine la description d'une ligne courbe, pourvû qu'elle soit du nombre de celles que je nomme Géométriques, on pourra toujours trouver une équation pour déterminer tous ses points en cette sorte. » *Descartes, La Géométrie,* Livre II, *322-323*

La dualité concerne cette fois la totalité des courbes, et non plus des problèmes de la Géométrie, avec toujours en regard les équations algébriques. Il s'agit bien aussi d'affirmer la conformité de ces deux totalités et d'inaugurer ainsi un nouveau rapport entre elles. L'incommensurabilité de ces expressions rend impossible une démonstration de cette conformité, impossibilité renforcée par l'absence d'une description des courbes qui permettrait de les considérer *toutes* ce dont une démonstration aurait besoin d'une manière ou d'une autre. Il s'agit bien à nouveau d'un énoncé inaugural à ceci près tout de même que les courbes géométriques ne sont pas une totalité constituée. En fait elle le sera *au cours* de *La Géométrie* parce qu'avant d'introduire cet énoncé Descartes aura lui-même inauguré la totalité des courbes géométriques. Cette inauguration se fera au moyen d'instruments qui ont bien, eux, le statut de totalité pré-établie. Elle se double d'une autre inauguration : celle des équations polynomiales par les instruments. Cela fait deux inaugurations supplémentaires, soit un total de quatre[46].
Le tableau ci-dessous récapitule ces quatre inaugurations.

| | *Totalité pré-établie* | *Totalité inaugurée* | *Enoncé* |
|---|---|---|---|
| 1 | Problèmes de géométrie | équations polynomiales | Tous les problèmes de Géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin, par après, que de connaître la longueur de quelques lignes droites, pour les construire. Livre I, 170 |
| 2 | courbes géométriques | équations polynomiales | Et en quelque autre façon qu'on imagine la description d'une ligne courbe, pourvû qu'elle soit du nombre de celles que je nomme |

46 Ces deux dernières inaugurations ne sont pas associées à des énoncés inauguraux donnés dans le texte. Ces inaugurations, on le verra, ne font néanmoins aucun doute, et l'absence d'énoncé inaugural proprement dit se justifie simplement par le caractère secondaire de ces inaugurations. Néanmoins, pour indiquer que ces énoncés ne sont pas donnés j'utiliserai un astérisque et j'y ferai référence en écrivant « énoncé* inaugural ».

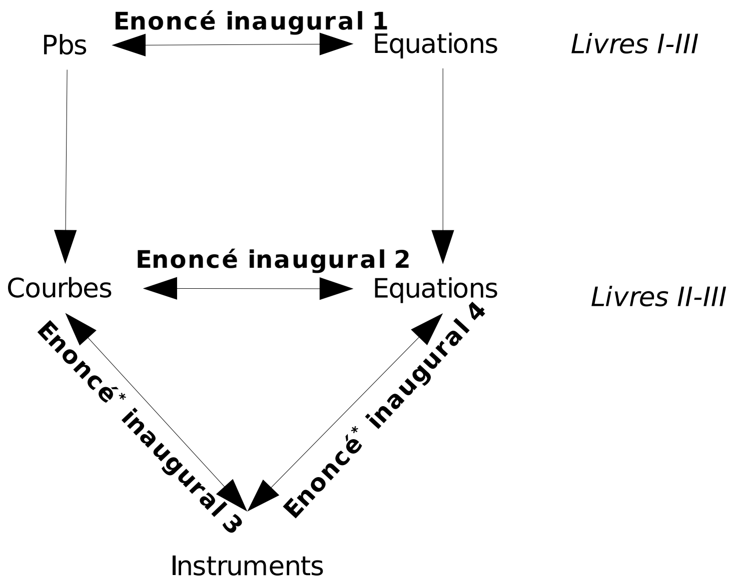
| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | Géométriques, on pourra toujours trouver une équation pour déterminer tous ses points en cette sorte. Livre II, 322-323 |
| 3 | instruments | courbes géométriques | |
| 4 | instruments | équations polynomiales | |

**Les quatre inaugurations**

L'ordre adopté dans le tableau ne correspond pas à l'ordre d'introduction des énoncés inauguraux ou des inaugurations. L'énoncé inaugural de la première est bien, comme on l'a vu, introduit en premier, et le début de son inauguration coïncide avec le début de *La Géométrie.* L'une et autre se terminent aussi ensemble. Mais les deux dernières inaugurations sont introduites avant le deuxième énoncé inaugural afin d'inaugurer la totalité des courbes géométriques qui intervient dans celui-ci. L'ordre retenu, qui sera utilisé pour faire référence aux énoncés inauguraux et aux inaugurations, est conforme à l' « ordre inaugural », c'est-à-dire qu'il rend compte de l'implication de ces énoncés dans le soutien des autres. Ainsi, les énoncés* 3 et 4 participent au soutien de l'énoncé 2 qui participent au soutien de l'énoncé 1. En notant « B participe au soutien de A » par A ⇐ B, on a :

Enoncé 1 ⇐ Enoncé 2 ⇐ Enoncé* 3, Enoncé* 4

*La Géométrie* est évidemment un texte bien connu et sa structure a déjà maintes fois été présentée[47]. Mon propos est de montrer que ce texte répond bien aux caractéristiques d'un texte inaugural et d'en décrire les quatre inaugurations ainsi que leurs rapports mutuels. Le schéma ci-dessous en propose une première représentation d'ensemble.

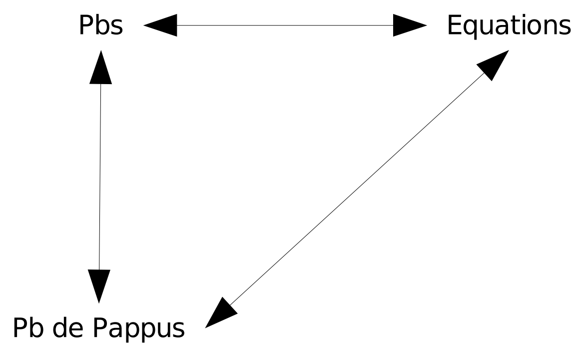



47 Tannery 1926, 530-536 ; Boyer 1956 ; Jullien 1996 ; Bos 1998 ; 2001.

Ce schéma fait apparaître les diverses totalités en jeu et met en correspondance les inaugurations avec les trois Livres de *La Géométrie*[48]. Le soutien du premier énoncé inaugural se fait tout au long des trois Livres. Le deuxième énoncé inaugural, introduit au Livre II, fait partie de l'inauguration du premier et son soutien s'achève, avec celui du premier, à la fin du texte. Les troisième et quatrième énoncés* inauguraux, qui interviennent dans le Livre II, servent à leur tour au soutien du deuxième et du premier.

De nombreux thèmes sont abordés dans *La Géométrie* : le problème de Pappus et sa résolution, la construction point par point des courbes, la classification de Pappus des problèmes de géométrie, la définition des courbes géométriques, la méthode algébrique pour déterminer la normale à une courbe, la réduction des équations polynomiales, etc. La simplicité de ce schéma au regard du nombre et de la variété de ces thèmes laisse entrevoir une certaine adéquation entre l'analyse inaugurale de *La Géométrie* et son découpage en trois Livres. Mais il nous faudra aussi rendre compte plus précisément du rôle et de la place de ces différents thèmes dans ces différentes inaugurations ainsi que de leurs rapports mutuels.

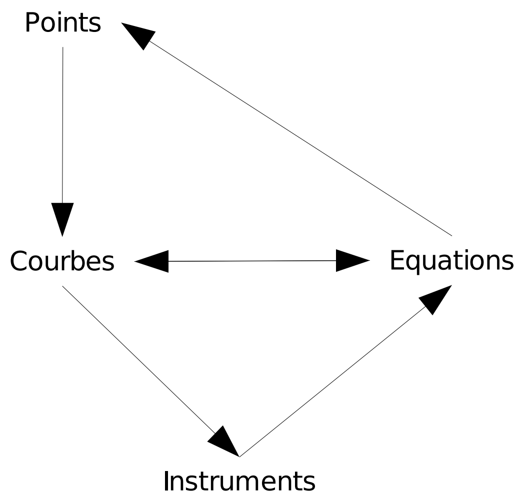
Le soutien du premier énoncé inaugural peut être représenté comme suit :




Ce schéma, qui sera établi progressivement et discuté en détails, met en évidence le rôle essentiel du problème de Pappus dans cette inauguration. Nous verrons que ce problème sert à représenter tous les problèmes de géométrie (flèche verticale). Sa mise en équation (flèche oblique vers la droite) conduit à une équation qui dépend du nombre de lignes considérées. La résolution de ces équations qui parcourt toute *La Géométrie* soutient la possibilité de résoudre ainsi tous les problèmes. Inversement, dans la mesure où Descartes considère que toute équation polynomiale s'obtient par la mise en équation du problème de Pappus pour un certain nombre de droites dans une certain configuration (flèche oblique

48 Je rappelle les titres de ces trois Livres :
Livre I : « Des problèmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles et des lignes droites » ;
Livre II : « De la nature des lignes courbes » ;
Livre III : « De la construction des problèmes qui sont solides, ou plus que solides ».

vers la gauche), toute équation correspond inversement à un problème de géométrie.
On peut donner du soutien du deuxième énoncé inaugural la représentation suivante :




Ce schéma indique que la possibilité de faire correspondre une équation polynomiale à une courbe géométrique est soutenue par la possibilité de tracer cette courbe au moyen d'un instrument et ensuite de lui faire correspondre une équation (partie inférieure du schéma). La possibilité de faire correspondre une courbe géométrique à une équation polynomiale est inversement soutenue par la possibilité de tracer point par point les solutions d'une telle équation et d'obtenir ainsi une courbe géométrique (partie supérieure du schéma). Les troisième et quatrième énoncés* inauguraux interviennent bien évidemment dans l'inauguration représentée dans la partie basse du schéma, mais aussi dans celle représentée par la partie haute pour assurer que les courbes tracées point par point sont bien géométriques.
Afin de rendre compte autant que possible du déroulement de ces diverses inaugurations, de saisir leurs rapports mutuels et leur rôle dans *La Géométrie* je suivrai l'ordre d'exposition adopté par Descartes. Les trois Livres seront considérés successivement. Je rappellerai brièvement leur contenu en précisant la contribution des thèmes traités aux diverses inaugurations. Des synthèses spécifiques seront ensuite faites sur les deux principaux énoncés inauguraux ainsi que sur le rôle de la classification et du problème de Pappus dans ces inaugurations. Nous combinerons ainsi une présentation linéaire et thématique de *La Géométrie.*

## 2 - Livre I : début du soutien du premier énoncé inaugural (les problèmes plans)

### *a) Le livre I :* « Des problèmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles et des lignes droites »

Le premier Livre est consacré aux problèmes plans, c'est-à-dire à ceux qu'il est possible de résoudre uniquement au moyen de droites et de cercles. Descartes commence néanmoins par montrer comment construire la différence de deux segments, leur somme, leur produit, leur rapport et la racine carrée d'un segment (en précisant qu'il reviendra sur les racines cubiques). Il tire ici parti du fait qu'il dispose d'une description des *expressions algébriques* en tant que combinaisons d'additions, de soustractions, de divisions et de racines carrées qui lui permet de *toutes* les parcourir[49]. Il établit ainsi non seulement qu'il est possible d'interpréter géométriquement toute expression algébrique mais aussi que la construction *algébrique* de l'expression algébrique est conforme à la construction *géométrique* du segment associé, autrement dit que les segments géométriques associés aux expressions algébriques sont construits conformément aux moyens propres de la géométrie, autrement dit encore que les opérations algébriques sont géométriquement constructibles[50]. Il ne s'agit pas, et il ne saurait s'agir pour Descartes de se contenter d'affirmer, comme nous pourrions être enclins à le faire aujourd'hui, qu'une expression algébrique représente un *nombre* et qu'à tout nombre est associé un segment. C'est là un autre énoncé inaugural qui n'est ni énoncé ni moins encore mis en œuvre par Descartes. Les lettres de l'Algèbre désignent des *segments* sans que n'intervienne une quelconque notion séparée de « nombre réel ». Une lettre est associée à un segment par *référence*, c'est-à-dire que leur rapport est celui d'une expression à son contenu. Ce qui veut aussi dire que ces lettres *présupposent* un contenu géométrique.

Cette interprétation géométrique des expressions algébriques introduite d'emblée servira aussi bien pour construire, point par point, une courbe à partir de son équation (par exemple p. 314), que pour s'assurer *a priori* que toutes les expressions algébriques qui interviendront dans la mise en équation d'un problème de Géométrie ou dans sa résolution auront bien un contenu géométrique. Elle participe au soutient des deux énoncés inauguraux. Descartes poursuit en expliquant « comment il faut venir aux équations qui servent à résoudre les problèmes », c'est-à-dire comment s'obtient l'équation correspondant à un tel problème. Dans ce sens de l'énoncé inaugural, il ne peut qu'indiquer les règles à suivre pour obtenir une équation (supposer le problème résolu, donner un nom à toutes les lignes, etc.), sans pouvoir établir que l'on arrive nécessairement à une équation algébrique et *a fortiori* à une équation d'un degré déterminé. Après avoir ainsi indiqué la méthode pour mettre un problème en équation, il ne peut en définitive que réaffirmer pour l'énoncé inaugural général selon lequel « on peut toujours reduire ainsi toutes les quantités inconnuës a une seule, lorsque le Problesme se peut construire par des cercles & des lignes droites, ou aussy par

49 « Et comme toute l'Arithmétique n'est composée que de quatre ou cinq opérations, qui sont : l'Addition, la soustraction, la Multiplication, la Division, & l'Extraction des racines, etc. » 297.

50 Ce point a été particulièrement souligné et étudié par H. Bos.

des sections coniques, ou mesme par quelque autre ligne qui ne soit que d'un ou deux degrés plus composée » (301). Descartes se restreint ensuite au premier segment de la totalité des problèmes : les problèmes plans. Il *soutient* alors qu'en réduisant correctement l'équation obtenue « il n'y restera, tout au plus, qu'un quarré inconnu esgal a ce qui se produit de l'addition, ou soustraction, de sa racine multipliée par quelque quantité connue, & de quelque autre quantité aussi connue. » (302). Il soutient donc que les problèmes plans correspondent exactement aux équations du second degré. Changeant à nouveau de sens de lecture de l'énoncé inaugural, il peut cette fois *démontrer* que les solutions de ces équations sont constructibles à la règle et au compas (302-304), et soutenir finalement à nouveau qu' « on peut construire tous les Problesmes de la Géométrie ordinaire [plans], sans faire autre chose que le peu qui est compris dans les quatre figures que j'ay expliquées » (304).
Descartes introduit ensuite le problème de Pappus[51]. La fin du premier Livre lui est consacrée. Il en donne l'énoncé pour un nombre quelconque de lignes puis procède à sa mise en équation. Il décrit cette équation plus qu'il ne l'écrit[52]. Il s'attache à la résolution du problème jusqu'à cinq lignes : en « prenant une quantité connuë pour *y* », la quantité *x* est alors déterminée par une équation du second degré qui peut être construite au moyen de droites et de cercles. La solution peut ainsi être construite *point par point* (304-314), sans qu'il soit nécessaire de donner une expression algébrique de *y* en fonction de *x*. Le Livre I s'achève sur cette résolution du problème de Pappus jusqu'à cinq lignes.

### b) Le problème de Pappus et le premier énoncé inaugural

Descartes a décrit dans ce premier Livre la méthode générale pour mettre un problème en équation, étape évidemment nécessaire pour soutenir son premier et principal énoncé inaugural. Mais bien sûr, il ne dispose pas d'expression qui lui permette de considérer *tous* les problèmes. Il est donc pleinement confronté à la

51 A & T, VI, 721 ; Vuillemin 1960, 99-112 ; Bos 1992 ; 2001, 313-334 ; Maronne 2008. Descartes cite le problème de Pappus à partir de l'édition latine de la *Collection* par Commandino (Pappus 1588-1589). Je reproduis un extrait de la traduction qu'en donne Paul Tannery (A & T, VI, 721-722) à partir de Hultsch (1877, 676-680) : « Voici quel est ce lieu à 3 et 4 lignes, à propos duquel Apollonius se décerne de grands éloges pour ses additions et dont il aurait dû savoir gré au premier qui en a écrit. Si, trois droites étant données de position, on mène d'un même point, sur ces trois droites, trois autres sous deux angles donnés, et qu'on donne le rapport du rectangle compris sous deux des menées au carré de la troisième, le point se trouvera sur un lieu solide donné de position, c'est-à-dire sur l'une des trois coniques. Si c'est sur quatre données de position que l'on mène des droites sous des angles donnés, et qu'on donne le rapport du rectangle de deux des menées à celui des deux autres, le point se trouvera de même sur une section conique donnée de position. D'autre part, si les droites son seulement au nombre de deux, il est établi que le lieu est plan ; mais, s'il y a plus de quatre droites, le lieu du point n'est plus de ceux qui soient connus ; il est de ceux qu'on appelle simplement lignes (sans en savoir davantage sur leur nature ou leurs propriétés), et on n'a fait la synthèse d'aucune de ces lignes, ni montré qu'elle servît pour ces lieux, pas même pour celle qui semblerait la première et la plus indiquée. »

52 « Puis vous voyés aussi que, multipliant plusieurs de ces lignes l'une par l'autre, les quantités x & y, qui se trouvent dans le produit, n'y peuvent avoir que chascune autant de dimensions qu'il y a eu de lignes, a l'explication desquelles elles servent, qui ont esté ainsi multipliées. En sorte qu'elles n'auront jamais plus de deux dimensions, en ce qui ne sera produit que par la multiplication de deux lignes , ny plus de trois, en ce qui ne sera produit que par la multiplication de trois ; & ainsi a l'infini. » 312-313.

dualité et à l'incommensurabilité entre les problèmes et les équations. Il est dans l'impossibilité de parcourir l'ensemble des problèmes comme il est dans l'impossibilité de parcourir le chemin qui va de l'expression d'un problème *quelconque* à celle de son équation[53]. Ce chemin ne peut être parcouru que pour un problème particulier. En même temps il s'agit de soutenir qu'il peut l'être pour tous. Descartes se restreint alors aux problèmes plans auxquels il associe de manière systématique les trois expressions (générales) pour les équations du deuxième degré. La *totalité* des problèmes plans est dès lors représentée par seulement *trois* expressions d'équations. Descartes peut démontrer que la construction des solutions de ces équations est elle-même, si l'on peut dire, un problème plan. Ce qui contribue au soutien de l'énoncé inaugural pour les problèmes plans.

Descartes introduit alors le problème de Pappus. Il se donne ainsi un *énoncé* de problème. Une mise en équation devient dès lors possible. Comme Frege qui reprend des propositions de l'Arithmétique, il doit s'appuyer sur un exemple qui soit plus qu'un exemple et qui puisse d'une certaine manière représenter tous les problèmes. Cela est nécessaire pour l'inauguration. Ce problème joue en outre un rôle comparable au problème de l'Analyticité dans l'*Idéographie* de Frege ou au « problème de la décision » dans les articles de Church et de Turing : ce sont tous des problèmes qui préexistent aux représentations introduites mais que celles-ci vont permettre de résoudre. Il ne s'agit pas ici de conformité, mais d'efficacité.

Mais le problème de Pappus est en l'occurrence à la fois *un* problème et *un ensemble* de problèmes. C'est une sorte d'*expression générale de problèmes* puisqu'il est à la fois l'expression d'un problème et d'une infinité de problèmes. Descartes dispose ainsi du moyen pour traiter d'une infinité de problèmes à partir de l'énoncé d'un seul. De plus, sa mise en équation est non seulement possible, mais Descartes peut établir qu'elle conduit à *tous les degrés* possibles d'équations, et même, selon lui, à *toutes les équations* possibles[54] (324-325). Le problème de Pappus n'est donc pas seulement une expression pour une infinité de problèmes : sans être une expression générale de *tous* les problèmes, il est néanmoins une expression générale de *tous* les *genres* de problèmes[55]. Il offre donc une expression uniforme pour la totalité des problèmes rapportés à leur genre, ce qui est tout à fait remarquable et permet de supporter des développements généraux sur la *totalité* des genres[56]. Le problème de Pappus est ainsi une sorte de

53 C'est l'impossibilité à laquelle se heurte, par exemple, Church quand il veut montrer comment une fonction intuitivement calculable peut être transformée en une fonction satisfaisant la définition d'une fonction récursive ou d'une fonction λ-définissable (Church 1936 ; Davis 1965, 100-103).

54 Dans le Livre II, Descartes à montré que les solutions du problème de Pappus pour 3 et 4 lignes pouvaient être n'importe quelle conique : « Au reste, a cause que les equations qui ne montent que jusques au quarré sont toutes comprises en ce que je viens d'expliquer, non seulement le problesme des anciens en 3 & 4 lignes est icy entierement achevé, mais aussy tout ce qui appartient a ce qu'ils nommoient la composition des lieux solides, &, par consequent, aussy a celle des lieux plans, a cause qu'ils sont compris dans les solides. » 334. Il étend ensuite ce résultat aux autres genres : « il est impossible d'en [ligne] imaginer aucune qui ne soit utile à cete question [problème de Pappus] » (308). Cette extension sera notamment dénoncée par Newton (Whiteside 1971, 341 ; Bos 1981, 332-338).

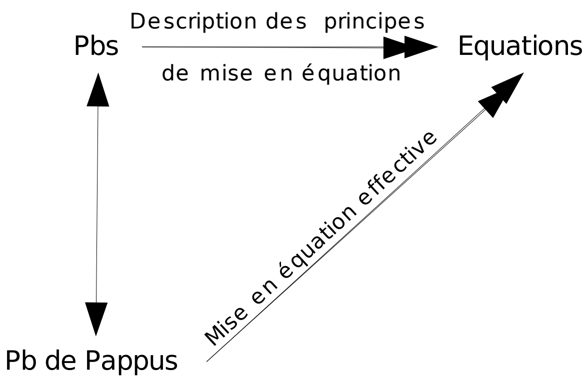
55 Genre a toujours, dans cette partie, le sens que lui donne Descartes.

56 Le problème de Pappus nous donne un exemple d'expression d'invariante génératrice pour les genres de problèmes (Herreman 2005) : c'est une expression pour des problèmes de n'importe quel genre qui est elle-même l'expression d'un problème. Remarquons incidemment que le problème de

« problème géométrique universel » un peu comparable à la machine universelle de Turing. Cela dit, il faut aussi en souligner les différences. En premier lieu, l'existence d'une machine de Turing universelle est un théorème. C'est un théorème parce que les machines de Turing constituent un système d'expressions qui rend possible des démonstrations impliquant la totalité de ces machines. C'est ici l'inverse. Les problèmes de Géométrie n'ont pas d'expression uniforme et le problème de Pappus en est une sorte de succédané.

Résoudre le problème de Pappus c'est donc résoudre un problème de *chaque* genre, et ce serait en définitive résoudre *tous* les problèmes puisque leur résolution ne dépend que de leur genre. L'énoncé inaugural pourrait, au lieu d'être soutenu au cas par cas, ou pour quelques grandes familles de cas, être dès lors soutenu à partir du seul problème de Pappus. Mais si le cas par cas pouvait être ainsi effectivement éliminé, il ne s'agirait plus de *soutenir* un énoncé mais de le *démontrer*, et il ne s'agirait donc plus d'un énoncé inaugural. S'il n'en est en l'occurrence pas ainsi, c'est d'abord parce que la résolution du problème de Pappus va devoir elle-même se faire au cas par cas suivant le nombre de droites considérées avec de plus une démultiplication des cas en raison de la variété des positions relatives des droites. Cette réduction présuppose de plus que *tous* les problèmes puissent être mis en équation, ce qui revient à admettre l'énoncé inaugural.

Cette caractéristique remarquable du problème de Pappus joue néanmoins bien un rôle essentiel dans la *Géométrie*. Elle intervient dans la mise en équation de ce problème. Descartes peut en effet faire *une* description de la mise en équation commune à tous les nombres de lignes et donner une description générale de l'équation obtenue (sans toutefois en donner une expression algébrique unique). C'est la seule exploitation effective de cette propriété remarquable dans toute l*a Géométrie* mais elle permet à Descartes au moyen d'un nombre fini de mises en équation, en l'occurrence *une seule,* d'obtenir les équations de *tous* les genres de problèmes, et même d'obtenir *toutes* les équations (tout du moins le pense-t-il). Cette mise en équation est celle qui va ensuite servir tout au long du livre.

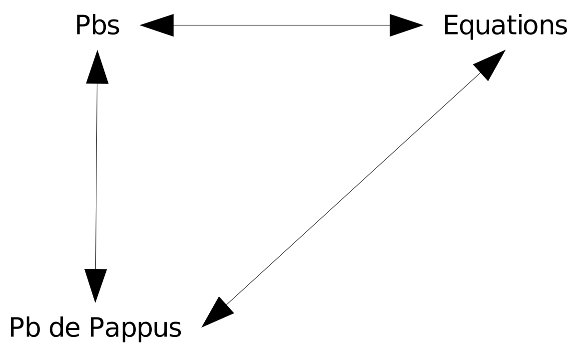



Le problème de Pappus permet ainsi de résoudre un des principaux problèmes que pose un énoncé inaugural : pouvoir parcourir une *totalité* qui ne peut l'être,

---

Pappus n'entre lui-même dans aucun genre. Il constitue une sorte d'argument diagonal (sans négation) et il introduit d'emblée la nécessité d'une extension de la classification des problèmes et de leur représentation algébrique

l'intérêt d'un tel énoncé étant justement de remplacer cette totalité par une représentation qui peut ou pourra l'être. Par la mise en équation du seul problème de Pappus, le soutien du sens difficile de l'énoncé inaugural est ainsi d'emblée presque acquis. Descartes peut aussi faire valoir que ce problème n'avait été complètement résolu ni par les anciens ni par les modernes et ainsi en faire aussi une pierre de touche pour sa méthode (AT, I, 478).
Dans la mesure où Descartes pense que toute équation provient de la mise en équation d'un cas particulier du problème de Pappus, toute équation correspond ainsi à un problème de géométrie. De ce fait, le problème de Pappus soutient aussi le sens inverse de l'énoncé inaugural. La correspondance entre problèmes et équations est ainsi complètement établie dès le Livre I.




Mais l'énoncé inaugural ne consiste pas seulement à faire correspondre aux problèmes des équations. Ces équations doivent être conformes aux problèmes, c'est-à-dire qu'elles doivent en refléter *toutes* les propriétés pertinentes. Cela comprend en premier lieu leur solution : il faut bien sûr, mais il importe de noter que c'est une question de conformité, que l'on puisse trouver les solutions du problème à partir de son équation. Il faut aussi que le genre du problème soit conservé. Comme celui-ci est donné par le genre des courbes impliquées dans sa résolution, il faut donc qu'il soit le même que celui des courbes impliquées dans la résolution de son *équation*.
Jusqu'à cinq lignes, les équations à considérer pour la construction point par point de la solution du problème sont du second degré. Descartes a montré au début de ce premier Livre que ces points pouvaient être construits à la règle et au compas. Il est ainsi vérifié que l'on peut construire les solutions de ces problèmes (via leurs équations).
La résolution du problème de Pappus s'interrompt ici et sera reprise après que le deuxième énoncé inaugural, relatif aux courbes et aux équations, ait été énoncé et soutenu. A la fin du Livre I Descartes a partiellement vérifié son énoncé inaugural principal : dans un sens en se restreignant aux problèmes plans et en contruisant les solutions des équations du second degré, dans l'autre sens, en mettant en équation le problème de Pappus et en montrant que ces équations sont du second degré quand ce problème est plan. L'interruption à ce moment de la résolution du problème de Pappus va contribuer à nous renseigner sur le rapport du deuxième énoncé inaugural au premier.

## 3 - Livre II : soutien du deuxième énoncé inaugural (courbes-équations)

### *a) Le livre II :* « De la nature des lignes courbes »

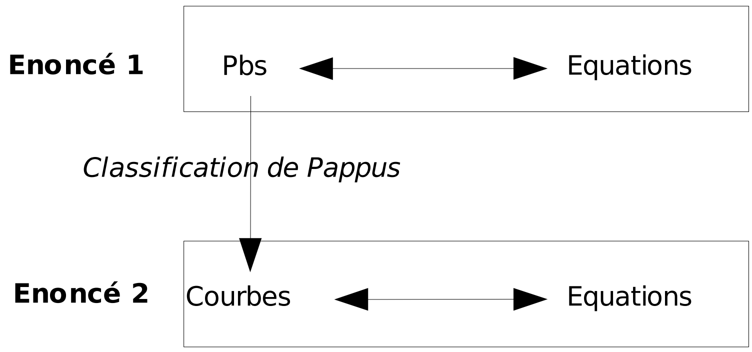
Le livre II s'ouvre sur des considérations sur « la nature des lignes courbes» (315-323). Descartes rappelle la classification des problèmes de Géométrie présentée par Pappus qui distingue d'une part les problèmes plans, dont la solution ne requiert, pour sa construction, que des droites et des cercles, d'autre part les problèmes solides, dont la construction de la solution ne requiert que les trois sections coniques (paraboles, hyperboles, ellipses) et enfin les problèmes linéaires, qui requièrent l'introduction de courbes comme la spirale, la quadratrice, la conchoïde ou la cissoïde. Il revient ensuite sur la distinction entre courbes mécaniques et géométriques qui ne doit pas, selon lui, reposer sur le fait de recourir ou non à des instruments pour les tracer, puisque les droites et les cercles devraient alors être tenus pour mécaniques, mais sur les caractéristiques des instruments utilisés (315-323). Il caractérise alors les courbes géométriques comme étant celles « descrites par un mouvement continu, ou par plusieurs qui s'entresuivent & dont les derniers soient entièrement reglés par ceux qui les precedent » (316).
Descartes reprend ensuite à la résolution du problème de Pappus pour trois et quatre lignes et donne la construction effective des courbes solutions trouvées à la fin du Livre I. Il transforme pour cela l'équation obtenue de manière à exprimer $y$ en fonction de $x$ en distinguant différents cas selon la position des droites données (parallélisme) puis en identifiant et en caractérisant la conique correspondant à chaque équation. Ceci achève la résolution du problème de Pappus pour trois et quatre lignes. Descartes remarque, réciproquement, que toutes les coniques s'obtiennent comme solution du problème de Pappus pour 3 ou 4 lignes (334). Il aborde ensuite le problème de Pappus pour 5 lignes, d'abord supposées parallèles, puis pour le cas qu'il juge le plus simple, quatre droites parallèles équidistantes et une droite perpendiculaire et un angle droit, dont la solution est aussi considérée comme la courbe la plus simple du genre (« parabole de Descartes »). Pour les autres cas, Descartes considère pouvoir se satisfaire de la construction point par point[57]. Il défend ensuite la possibilité de déterminer les autres propriétés d'une courbe à partir de son équation (341-352). La fin du Livre II est consacrée à l'étude d'ovales et à leurs propriétés optiques de réflexion et de réfraction.

### *b) La classification de Pappus : courbes et problèmes de géométrie*

La classification de Pappus associe des courbes à chaque problème de géométrie. Mais les courbes associées aux problèmes sont celles qui servent à *construire* la solution plutôt que la solution elle-même. Cette classification, qui n'a évidemment pas été introduite par Descartes, instaure une correspondance entre les problèmes et les courbes, c'est-à-dire entre les deux totalités reçues de

57 « Pour les lignes qui servent aux autres cas, je ne m'aresteray point a les distinguer par especes; car je n'ay pas entrepris de dire tout; &, ayant expliqué la façon de trouver une infinité de poins par où elles passent, je pense avoir assez donné le moyen de les descrire. » 339

ses énoncés inauguraux (voir figure[58]). Elle établit de ce fait un lien entre ces deux énoncés inauguraux et va jouer un rôle essentiel dans *La Géométrie.*




Il peut paraître au premier abord singulier de classer les problèmes par les courbes qui servent à construire leur solution plutôt que, comme l'on s'y attendrait, par les courbes qui en sont les solutions. Je me propose d'en rendre compte à partir d'une caractéristique sémiotique particulière des figures et des courbes dans la Géométrie grecque que je vais mettre en évidence à partir d'un exemple élémentaire : le théorème de Pythagore.

Rappelons d'abord la place et une des fonctions du théorème de Pythagore dans les *Eléments* d'Euclide. Les deux premiers Livres des *Eléments* sont en grande partie consacrés à résoudre le problème de la quadrature des figures rectilignes. Ce problème demande de transformer toute figure rectiligne en un carré équivalent (de même aire, mais sans faire intervenir de mesure). Il est énoncé et sa résolution achevée à la fin du Livre II dans la proposition 14[59] :

14
*Construire un carré égal à une figure rectiligne donnée*

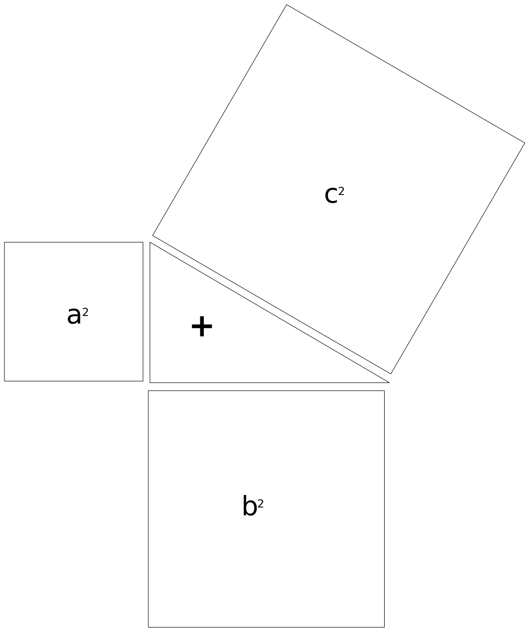
C'est là typiquement un problème qui entrerait dans la classification de Pappus et qui serait, nous allons le voir tout de suite, classé parmi les problèmes plans.
Le théorème de Pythagore est quant à lui l'avant dernière proposition du Livre I (la dernière étant sa réciproque) :

47
*Dans les triangles rectangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle droit est égal aux carrés sur les côtés contenant l'angle droit.*

Ce théorème intervient dans la quadrature des figures rectilignes parce qu'il permet de *transformer* deux carrés quelconques (placés sur les côtés opposés à l'hypoténuse) en un carré équivalent (construit sur l'hypoténuse).

58 Cette figure comprend des imprécisions qui seront ensuite corrigées. La discussion qui suit sert à introduire les distinctions utiles à ces corrections.

59 Toutes les citations des *Eléments* sont extraites de l'édition et de la traduction de Bernard Vitrac (1990-2001).




Il permet de la même manière de faire la *différence* de deux carrés dont il donne aussi le résultat sous forme de carré (différence du carré placé sur l'hypoténuse avec celui placé sur l'un des côtés opposés, le troisième carré étant celui cherché). Euclide démontre au Livre I que toute figure rectiligne peut être transformée en un *rectangle* (en fait plus généralement un parallélogramme dont on peut choisir librement un angle et un côté, c'est la proposition I-45). Cela établi, il ne reste plus pour achever la quadrature des figures rectilignes qu'à démontrer que tout rectangle peut être transformé en un carré. Cette dernière transformation se fait en deux temps, d'abord en transformant un rectangle en différence (*gnomon*) de deux carrés, puis en transformant le *gnomon*, grâce aux théorème de Pythagore (version soustraction), en un carré. Le théorème de Pythagore est donc bien considéré dans les *Eléments* comme un moyen permettant de *transformer* la figure formée de deux carrés (par leur somme ou leur différence) en un carré équivalent. Or, et c'est la notre point, c'est le *triangle rectangle* qui sert à réaliser cette transformation. Autrement dit, le triangle est ici l'*expression d'une opération géométrique.* Il est bien sûr *aussi* une figure comme nous sommes habitués à les considérer quand nous faisons aujourd'hui de la « Géométrie euclidienne » : c'est une figure, composée de sommets et de côtés, qui peut être accolée à d'autres, etc. C'est d'ailleurs exclusivement à ce triangle-figure que se rapporte la *démonstration* du théorème de Pythagore. Mais le triangle-opération[60] intervient dans la démonstration d'autres propositions, comme celle de la proposition II-14. Le triangle est donc à la fois l'expression d'une figure et l'expression d'une opération *sur* les figures. Les expressions de la Géométrie grecque présentent cette caractéristique sémiotique remarquable de supporter deux interprétations conjointes. Et il en est bien ainsi de toutes les figures puisque n'importe quelle qui peut être considérée comme l'expression servant à construire une figure d'un type donné à partir de figures, généralement du même type, construites sur elle. Ainsi, la figure-opération présuppose la figure-figure, mais toute figure peut être considérée comme une figure-figure ou comme une figure-opération. La figure-figure nous est restée familière, la figure-opération l'est moins. Ce sont les figures-opérations qui interviennent dans la classification de Pappus.

Le théorème de Pythagore peut facilement être énoncé comme *un problème* : « construire le carré somme (resp. différence) de deux carrés ». La construction demandée se fera avec le triangle rectangle. La « solution » de ce problème n'est donc pas le carré (somme ou différence), mais bien plutôt le triangle rectangle qui sert à construire le carré cherché. Le carré est bien sûr cherché, mais c'est une figure en grande partie donnée puisque l'on sait que c'est un carré (le problème n'est pas par exemple : « trouver la somme de deux carrés », ce qui serait soit trivial soit n'aurait aucun sens). Le moyen de construire ce carré est bien plus indéterminé que le carré cherché. Or nous venons de voir que cette construction n'était pas moins naturellement associée à une figure. Le problème de Pythagore a pour solution un triangle, c'est donc, suivant la classification de Pappus, un problème plan. La quadrature des figures rectilignes impliquera les figures-opérations qui servent à transformer une figure quelconque en un rectangle, puis celles qui servent à transformer ce rectangle en un *gnomon* de deux carrés, et enfin celle qui sert à transformer ce *gnomon* en un carré. Comme toutes ces figures-opérations sont des figures rectilignes planes (la dernière étant le triangle rectangle du théorème de Pythagore), ce problème est un problème plan suivant la classification de Pappus.

L'étrangeté de la classification de Pappus pourrait s'expliquer par le fait de ne reconnaître que les figures-figures. Dans ce cas, seule une figure-figure peut être envisagée comme la solution d'un problème de Géométrie. Il peut dès lors apparaître un peu étrange de faire intervenir les constructions qui n'ont pas pour nous d'expression bien claire, et qui n'ont pas de rapport établi, constant et uniforme, avec des expressions géométriques. Mais si on rapporte en revanche les figures à leurs caractéristiques sémiotiques historiques et que l'on reconnaît qu'elles sont autant des figures-opérations que des figures-figures, il devient alors possible et tout à fait naturel de considérer que les figures-opérations soient les solutions cherchées et de classifier les problèmes à partir d'elles.

Remarquons incidemment que nous avons là un exemple du lien qui peut exister entre les caractéristiques sémiotiques des expressions et l'interprétation des énoncés, ici des problèmes, qui s'y rapportent. En effet, suivant notre hypothèse, le lecteur « moderne » ne connaît que les figures-figures. Ce sont là pour lui les seules caractéristiques sémiotiques des figures qu'il « réduit » de ce fait à des

60 Au lieu d'*opération* on pourrait aussi bien parler de *fonction* et considérer le triangle comme l'*expression d'une fonction* de deux variables qui associe aux figures semblables construites sur deux de ses côtés, la figure semblable construite sur le troisième de ses côtés.

figures-figures. Cela détermine ensuite son interprétation spontanée des problèmes de géométrie grecs qu'il va lire à partir de ces caractéristiques : un problème de géométrie se devant d'avoir pour solution une expression géométrique, il va interpréter le problème conformément aux caractéristiques sémiotiques qu'il attribue aux expressions géométriques. La solution ne peut qu'être une figure-figure. Et la classification de Pappus ne peut manquer de lui sembler un peu étrange... Reconnaître d'autres caractéristiques sémiotiques aux figures, permet une autre interprétation des problèmes : il devient possible et tout aussi naturel de considérer que leur solution est une figure-opération. Et la classification de Pappus semble alors elle-même tout à fait naturelle. Cet exemple a ceci de particulier que les deux interprétations sont compatibles avec les caractéristiques non plus des figures mais des énoncés considérés, c'est-à-dire des problèmes. En effet, les problèmes ont comme particularité d'être des énoncés auxquels sont associées des solutions, et plus précisément : aux problèmes de géométrie sont associées des expressions de la Géométrie. Les deux interprétations des figures préservent cette caractéristique, mais les solutions associées ne sont pas les mêmes! La différence d'interprétation est ainsi rendue flagrante quoiqu'en même temps masquée par le fait que les problèmes ont bien toujours dans les deux cas des solutions.
Cet exemple peut aussi servir à illustrer la différence entre le rapport que l'on peut avoir à un système d'expressions selon qu'il est ou non pour nous établi, ce qui est un des principaux enjeux de l'étude des textes inauguraux. Ainsi, selon mon hypothèse, les figures-opérations ne sont pas pour le lecteur « moderne » un système d'expressions constitué, ce qu'elles devaient être quand Pappus proposait sa classification. De ce fait, ces expressions ne peuvent pas être la base d'une classification des problèmes dont les expressions dans la langue naturelle apparaissent de ce point de vue mieux constituées que celles des moyens requis pour les résoudre.

Les exemples de la quadrature des figures rectilignes et du théorème de Pythagore ont permis de mettre en évidence le statut de figure-opération, et ainsi de rendre compte du principe de la classification de Pappus pour les figures rectilignes planes. Mais ce qui est précède est aussi valable pour les courbes qui sont de manière plus évidente encore des figures-opérations associées à la construction de problèmes. Ainsi, d'après Proclus, la parabole, l'hyperbole et l'ellipse ont toutes été à l'origine des figures-opérations associées à des problèmes de quadrature et l'étaient toujours pour Euclide[61]. De même, la quadratrice, dont le

61« Les disciples d'Eudème disent que la parabole des aires, leur hyperbole et leur ellipse sont d'anciennes découvertes qui appartiennent à la Muse des Pythagoriciens. Mais les auteurs récents, qui ont emprunté des dénominations à ces derniers, les ont transférées dans les lignes dites coniques, et ont appelé l'une d'elles la parabole, l'autre l'hyperbole et la dernière l'ellipse, bien que ces hommes anciens et divins eussent envisagé les choses signifiées par ces termes dans le sens de la description des aires sur une droite déterminée dans le plan. En effet, si, exposant une droite, on étend en même temps une aire donnée sur cette droite entière, cela se dit faire la parabole de cette aire ; et, si l'on fait la longueur de l'aire plus grande que celle de cette droite, cela se dit faire l'hyperbole, et, si l'on fait cette longueur plus petite, de telle sorte qu'une portion de la droite soit en dehors de l'aire décrite, cela se dit faire l'ellipse. C'est d'ailleurs de cette manière qu'Euclide fait mention de l'hyperbole et de l'ellipse dans son sixième livre ; tandis qu'ici, voulant appliquer un parallélogramme équivalent à un triangle donné le long d'une droite donnée, il a besoin de la parabole, afin que nous ayons, non seulement l'établissement d'un parallélogramme équivalent à un triangle donné, mais encore sa parabole suivant une droite déterminée. Ainsi, par exemple, si nom même indique la fonction (Pappus IV, 30, 250 ; Tannery 1912, 3), est la figure-opération qui résout le problème de la quadrature du cercle ou encore le problème de la division d'un arc selon un rapport donné exactement comme le triangle rectangle est la solution du problème de Pythagore. De même la spirale est la courbe qui résout la rectification du cercle, c'est-à-dire la construction d'un segment de même longueur que la circonférence d'un cercle, etc.

J'ai essayé de rendre compte du principe d'une classification des problèmes de géométrie au moyen des courbes impliquées dans leur construction. Mon propos n'était pas uniquement d'expliquer une classification à laquelle Descartes fait référence. La reprise par Descartes de cette classification n'implique évidemment pas que les caractéristiques sémiotiques que je lui ai associées se retrouveraient dans *La Géométrie* ou y seraient d'une quelconque manière supposées. La classification de Pappus participe d'un certain rapport entre les problèmes et les courbes. Il importait pour la suite de marquer la différence entre les courbes-figures et les courbes-opérations. C'est une distinction qui se retrouve dans *La Géométrie*. Elle s'y retrouve parce que la classification de Pappus y est reprise, ce qui conduit évidemment Descartes à considérer les courbes-opérations qui servent à construire la solution d'un problème. Elles interviennent aussi dans la construction des points d'une courbe-figure. Mais si cette distinction se retrouve, nous verrons qu'une des conséquences de *La Géométrie* est bien d'éliminer les courbes-opérations de la Géométrie. Il importera donc d'être attentif aux rôles respectifs des courbes-figures et des courbes-opérations dans les diverses inaugurations. En inaugurant dans *La Géométrie* un nouveau rapport entre les problèmes de géométrie et les courbes, Descartes va contribuer à « désinaugurer », si l'on peut dire..., les figures et les courbes-opérations.

### *c) Soutien du deuxième énoncé inaugural (courbes - équations)*

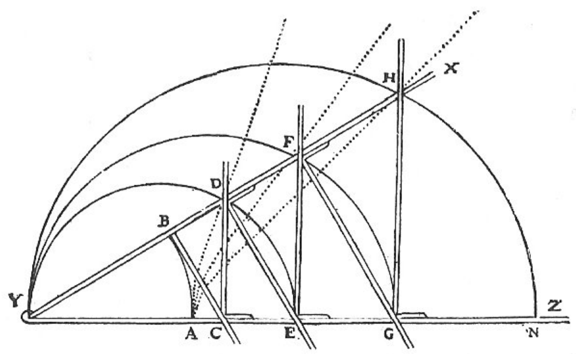
#### i) Un troisième énoncé* inaugural : les instruments et les courbes

Le Livre I se terminait par la description du principe de la construction point par point de la courbe solution du problème de Pappus jusqu'à cinq lignes, mais sans que le tracé en ait été donné. Le cours de *La Géométrie* change brusquement avec le Livre II. Descartes en donne lui-même la raison plus loin au moment de reprendre la résolution du problème de Pappus laissée inachevée à la fin du Livre I :

> « Or, après avoir ainsi reduit toutes les lignes courbes a certains genres, il m'est aysé de poursuivre en la demonstration de la response que j'ay tantost faite a la question de Pappus. » (323)

l'on donne un triangle ayant une aire de douze pieds, et si l'on expose une droite d'une longueur de quatre pieds, on fait la parabole d'un parallélogramme équivalent à ce triangle lorsque, après avoir pris la longueur totale de quatre pieds, on trouve de combien de pieds doit être la largeur pour que le parallélogramme devienne équivalent au triangle. Trouvant dans ce cas que la largeur est de trois pieds, et, multipliant la longueur par la largeur, nous aurons l'aire pour autant que l'angle proposé soit droit.
Voilà en quoi consiste le fait de paraboler qui nous a été transmis originairement par les Pythagoriciens. » Proclus, 356-8.

Les considérations sur la nature des lignes courbes sont donc introduites pour permettre la poursuite de la résolution du problème de Pappus. Nous allons donc prendre connaissance de ces considérations afin d'être en mesure d'apprécier ce qui les rendait nécessaires et de déterminer leur rôle dans l'inauguration des équations polynomiales et des courbes géométriques.
Venons-en donc maintenant aux considérations sur les courbes géométriques (315-323). Descartes part de la classification de Pappus des problèmes en plans, solides et linéaires. Il y dénonce l'absence de distinction au sein des courbes définissant les problèmes linéaires et le fait qu'elles soient indistinctement qualifiées de mécaniques et à ce titre toutes rejetées. Invoquant les droites et les cercles tracés au moyen d'une règle et d'un compas, il fait valoir que l'usage d'un instrument ne saurait être une raison suffisante pour rejeter une courbe. Il peut alors donner une première caractérisation des courbes géométriques : « Et il n'est besoin de rien supposer, pour tracer toutes les lignes courbes que je pretens icy d'introduire, sinon que deux ou plusieurs lignes puissent estre meuës l'une part l'autre, & que leurs intersections en marquent d'autres » (316). Remarquons qu'il s'agit bien ici de justifier l'*introduction* de courbes et qu'il s'agit de les introduire dans leur *totalité*. Faisant valoir ensuite que ce qui est « précis & exact » est géométrique il soutient qu'il faut tenir pour géométriques toutes les courbes tracées avec des instruments décrits par « un mouvement continu, ou par plusieurs qui s'entresuivent & dont les derniers soient entièrement reglés par ceux qui les précèdent » (316).
Il introduit alors son système d'équerres (317 ; Vuillemin 1960 ; Serfati 1993 ; Bos 2001, 338-342) :



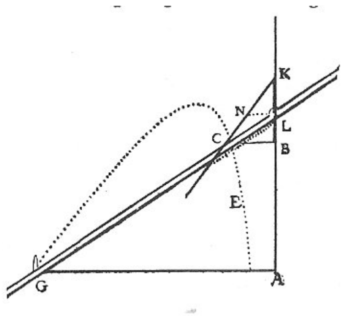

C'est un exemple de système articulé qui satisfait aux conditions pour tracer des courbes géométriques. Mais c'est bien plus que cela : c'est un instrument qui permet de tracer une infinité de courbes. Et, mieux encore : il permet de tracer des courbes de plus en plus composées, et même de tous les genres. Comme il peut tracer une courbe géométrique de chaque genre, il peut donc dans une certaine mesure tenir lieu de tous les instruments qui tracent des courbes géométriques. C'est en définitive un instrument qui a vis-à-vis des instruments un rôle tout à fait semblable à celui du problème de Pappus vis-à-vis des problèmes de géométrie. Nous verrons que le problème de Pappus joue un rôle essentiel dans le soutien du premier énoncé inaugural. Cet instrument intervient en fait de la même manière dans le soutien d'un autre énoncé* inaugural. Descartes est en effet en train de soutenir que la totalité des instruments qu'il vient de caractériser correspond exactement aux courbes géométriques. C'est un énoncé* inaugural, le troisième, qui est introduit pour soutenir l'énoncé inaugural relatif aux courbes et aux

équations algébriques. Il y a bien deux totalités (dualisme) : celle des instruments et celle des courbes. Les instruments ont, du fait de leur matérialité supposée, un caractère pré-établi (réalisme). Leurs caractéristiques sont susceptibles de conférer aux courbes leur caractère géométrique (conformité). Il est tout aussi impossible de démontrer que les instruments sont conformes aux courbes géométriques que de démontrer que les machines de Turing sont conformes aux fonctions calculables (incommensurabilité). Comme la condition d'inauguration est aussi satisfaite, les conditions qui caractérisent un énoncé inaugural le sont toutes. Avant d'examiner comment cet énoncé* participe au soutien précédent, nous devons terminer d'examiner comment il est lui-même soutenu.
L'instrument composé d'équerres trace une série de courbes : la première tracée est un cercle, et toutes les courbes suivantes sont tracées par la répétition du même dispositif, présentant les mêmes caractéristiques. Tracer une courbe établit un rapport entre l'instrument et la courbe tracée. Ce rapport se fait par un *contact*, celui de l'instrument avec la feuille, qui résout l'incommensurabilité qui sépare une courbe d'un système articulé. Par ce rapport, les caractéristiques de la courbe peuvent être entièrement et exclusivement rapportées à l'instrument. C'est ce qui permet à Descartes de caractériser les courbes géométriques à partir d'une caractérisation des instruments : si l'instrument peut tracer la courbe, c'est d'une certaine manière que les caractéristiques de la courbe lui sont entièrement données par l'instrument, autrement dit que l'instrument et la courbe sont conformes. Mais cet instrument ne fait pas que cela : il met les courbes qu'il trace en rapport. Ce rapport est à nouveau un *contact*. Non plus le contact de l'instrument avec la feuille, mais le contact entre les équerres. Ce sont ces contacts qui supportent la série d'implications qui font de cet instrument un *argument* : reconnaître que le cercle est une courbe géométrique parce qu'il peut être ainsi tracé oblige à reconnaître, au travers trois contacts de deux sortes (les deux contacts en C et D entre les équerres, et le contact en D avec la feuille), que la courbe suivante est aussi géométrique, *et ainsi de suite*. L'instrument est essentiel pour chaque inférence qui, on le voit, ne saurait être tenue pour seulement logique. C'est lui qui établit la recevabilité de chacune de ces courbes en les inscrivant dans une même série qui commence par le cercle déjà reçu. C'est lui qui supporte l'induction qui propage de proche en proche le caractère géométrique reconnu du cercle à chacune des suivantes. La possibilité d'étendre indéfiniment les genres des courbes est ainsi rapportée à la possibilité de prolonger indéfiniment l'instrument. L'instrument est un *argument* qui permet à Descartes de conclure :

> « Mais je ne voys pas ce qui peut empescher qu'on ne conçoive aussy nettement & aussy distinctement la description de cete premiere [la courbe AD, la première après le cercle AB], que du cercle ou, du moins, que des sections coniques; ny ce qui peut empescher qu'on ne conçoive la seconde, & la troisième, & toutes les autres qu'on peut descrire, aussy bien que la premiere, ny, par consequent, qu'on ne les reçoive toutes en mesme façon, pour servir aux speculations de Geometrie. » 318-319

L'instrument prouve la « géométricité » des courbes exactement comme les expressions de l'idéographie prouvent l'analyticité de l'Arithmétique.

Descartes introduit ensuite un deuxième dispositif semblable au précédent (319-323) :




Cette fois la ligne GL tourne autour du point fixe G et glisse le long de la droite AK, L étant leur point d'articulation. De même, la ligne KC tourne autour du point K, fixe sur KA, et glisse le long de GL. Le point de contact C est quant à lui mobile et décrit une courbe. Descartes détermine l'équation de la courbe obtenue et à partir de celle-ci établit qu'il s'agit d'une hyperbole. Mais il établit surtout ainsi la possibilité de tracer une conique par un de ses systèmes articulés, ce qui revient à vérifier sur un cas important l'énoncé* inaugural qu'il est en train de soutenir. Il établit ainsi le pouvoir expressif de ces instruments. Il remplace ensuite la règle KC par une hyperbole. C'est-à-dire qu'il construit le système articulé composé du précédent avec lui-même pour former ainsi son « double » ou son « carré », obtenant alors une courbe du second genre. En remplaçant KC par un cercle centré en L, la courbe tracée sera une conchoïde. Enfin, en la remplaçant par une parabole de diamètre KB, il obtient la courbe trouvée au Livre I comme solution du problème de Pappus à cinq lignes (ces résultats sont donnés par Descartes sans démonstration)[62].

Faisons le point sur le rôle joué par les instruments dans le soutien du deuxième énoncé inaugural (courbes-équations). Descartes a commencé par introduire une caractérisation des courbes géométriques à partir d'une caractérisation générale des instruments servant à les tracer. Il a ensuite donné deux exemples d'instruments pour défendre l'extension infinie des genres des courbes géométriques. Le premier est d'une certaine manière l'instrument le plus simple permettant de justifier l'extension de ces genres[63]. Mais cet instrument n'apparaît guère susceptible de tracer d'autres courbes. L'intérêt du deuxième dispositif est dans son pouvoir expressif : Descartes fait bien valoir qu'il permet de tracer des courbes de genre et de statut aussi différents qu'une hyperbole, une conchoïde et une solution du problème de Pappus pour cinq lignes.

Les deux dispositifs ont des rôles spécifiques dans l'inauguration des courbes. Le premier, celui avec les équerres, établit la nécessité d'étendre les genres de courbe géométrique admis. Le second soutient qu'il existe un système articulé pour chaque courbe géométrique. Le troisième énoncé* inaugural relatif aux instruments et aux courbes a ainsi été soutenu d'une part par un principe général touchant « la nature des lignes courbes » et d'autre part par deux dispositifs instrumentaux qui permettent de tracer des courbes de tous les genres et plusieurs

62 L'importance de ce procédé de construction des courbes dans la *Géométrie* a été particulièrement bien mis en évidence par Bos (2001) qui lui fait jouer un rôle central dans cette œuvre et sa genèse.

63 On peut remarquer que Descartes ne fait pas valoir ici que cet instrument permet de construire toutes les moyennes proportionnelles. Si cette caractéristique a pu jouer un rôle dans la conception de l'instrument, elle n'en joue aucun dans l'argument proposé ici.

courbes cruciales.
Soulignons que Descartes considère bien un *système d'expressions* constitué d'instruments. Cela est d'abord nécessaire pour espérer tracer *toutes* les courbes géométriques dès lors que celles-ci ne sont pas en nombre fini. Mais cela ressort aussi du fait que les instruments soient des *expressions composées.* Ce caractère composé permet et est indissociable de la possibilité d'y faire des substitutions, qui est une des opérations qui permet d'engendrer un nouvel instrument à partir d'un instrument existant. Ce sont aussi des expressions qui peuvent être *concaténées* pour former à l'infini de nouvelles expressions/instruments. C'est ainsi que Descartes peut engendrer une infinité de courbes de plus en plus composées. Les courbes ne sont elles-mêmes ici « composées » que du fait de leur association à des expressions/instruments composées. La composition des instruments fonde celle des courbes. Celle des équations algébriques, exprimée par leur degré, ne joue ici aucun rôle. Les instruments interviennent donc à la fois comme des expressions *au sein* desquelles des substitutions peuvent être opérées et comme expressions que l'on peut substituer. Ils forment bien à ce titre un système d'expressions.

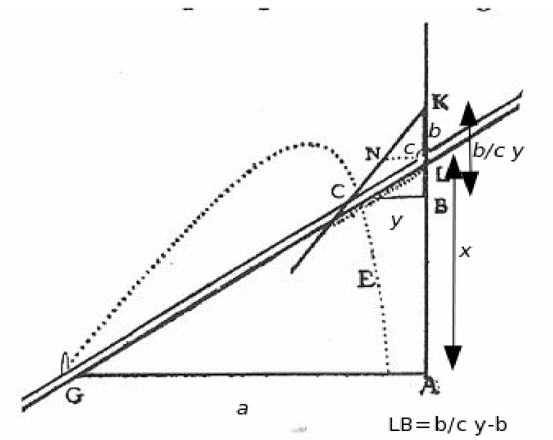
### ii) Le deuxième énoncé inaugural (courbes ↔ équations)

Le deuxième énoncé inaugural est introduit au Livre II juste après l'inauguration des courbes géométriques au moyen des instruments (troisième énoncé* inaugural) :

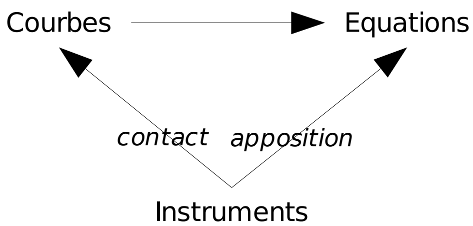
> « Et en quelque autre façon qu'on imagine la description d'une ligne courbe, pourvû qu'elle soit du nombre de celles que je nomme Géométriques, on pourra toujours trouver une équation pour déterminer tous ses points en cette sorte. » *Descartes, La Géométrie,* Livre II, 322-323

**Courbes** ⟶ **Equations**

Un énoncé inaugural suppose une totalité reçue et une autre qui ne l'est pas ou qui ne l'est pas dans le rapport considéré avec la première. Dans l'inauguration des courbes par les instruments les courbes ne sont pas reçues, mais les instruments le sont. Ainsi, on voit à nouveau l'intervention d'une forme d'intuition associée à la totalité établie, celle des instruments. Mais surtout Descartes semble devoir inaugurer les courbes géométriques. C'est-à-dire qu'il doit en constituer la totalité, et il fait ce qu'il faut pour cela, et il semble que cela était *nécessaire*. C'est en effet seulement une fois que les courbes ont été inaugurées qu'il introduit le deuxième énoncé inaugural. Dans cet énoncé, les courbes sont maintenant en position de totalité pré-établie et les équations algébriques vont être inaugurées à partir d'elles (et non l'inverse). Ainsi, pour justifier l'association d'une équation à une courbe Descartes a commencé par constituer la totalité des courbes en soutenant sa conformité avec celle des instruments. Ensuite, l'expression même de l'instrument, notamment par le deuxième dispositif, rend presque évidente la mise en équation de la courbe qu'il sert à tracer (une quatrième et dernière inauguration intervient ici). L'instrument se prête à une double lecture. Il est d'une part l'instrument qui trace la courbe, avec laquelle il est *en contact*. Mais en suivant les lignes qui le *composent* on *compose* l'équation de la courbe.




L'équation, au travers de sa composition, peut être ainsi *apposée* à l'instrument. Comme nous l'avons fait pour LB (voir figure), il est aussi possible de n'apposer que des lettres marquant les points sur le diagramme et de mettre ensuite celles-ci en rapport avec les composantes de l'équation : $LB=\frac{b}{c}y-b$ [64]. C'est l'évidence et la possibilité de cette apposition qui établit la conformité entre la totalité des instruments et la totalité des équations (quatrième énoncé* inaugural). L'instrument, *en tant qu'expression*, met l'équation et la courbe en rapport. Et il faut aussi considérer les courbes et les équations comme *expressions* pour qu'elles puissent, chacune à leur manière, être mises en contact ou apposées à l'instrument. Les concepts ou des idées ne permettent pas de tels contacts ou appositions. Si l'on ajoute le contact entre les *composantes* du mésolabe qui intervenaient pour étendre le genre des courbes reçues à partir du cercle, à peu près toutes les caractéristiques sémiotiques des instruments ont été mobilisées.
L'intervention des instruments permet de *décomposer* le deuxième énoncé inaugural relatif aux courbes et aux équations en deux énoncés* inauguraux et de ramener son soutien à celui de chacun des deux énoncés* inauguraux. Cette décomposition ne fait évidemment pas disparaître l'incommensurabilité des courbes et des équations mais elle la ramène à ces formes remarquables d'incommensurabilité que sont le contact et l'apposition.
La figure ci-dessous représente la manière dont les équations sont associées aux courbes :




Cette inauguration des équations polynomiales à partir des courbes ne fait pas

64 Sur l'association des lettres aux figures dans les mathématiques grecques voir (Netz 1999).

intervenir le degré ou le genre. Elle n'a donc pas besoin de l'intégralité de *La Géométrie* qui progresse suivant les genres croissants. Quand le degré ou le genre interviennent, l'inauguration devra inévitablement se déployer sur l'ensemble du texte et ne pourra être effectivement considérée que sur les premiers degrés ou genres, les autres devant faire appel à une sorte d'induction. C'est le cas en particulier pour le soutien du sens inverse du deuxième énoncé inaugural, c'est-à-dire des équations polynomiales vers les courbes qui passe par la construction point par point des courbes.

### iii) La construction point par point des courbes géométriques (courbes ← équations)

Nous allons considérer maintenant comment est soutenu l'autre sens de l'association des courbes aux équations :

$$\text{Courbes} \longleftarrow \text{Equations}$$

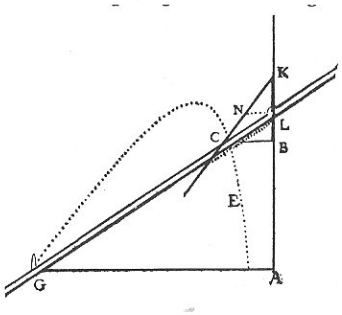
L'association des courbes aux équations se fait au moyen de la construction point par point des solutions des équations. En voici l'énoncé :

> « Et pource que cete façon de trouver une ligne courbe, en trouvant indifferemment plusieurs de ses poins, ne s'estend qu'a celles qui peuvent aussy estre descrites par un mouvement regulier & continu, on ne la doit pas entierement rejetter de la Geometrie. » 340

Cet énoncé *conclut* la résolution du problème de Pappus dans le Livre II. On se souvient que la résolution du problème de Pappus avait été interrompue au Livre I pour laisser place au Livre II et ses considérations sur les courbes géométriques et les instruments. L'énoncé qui associe des équations aux courbes venait en conclusion de ces développements. Descartes fermait ainsi la parenthèse ouverte au début du Livre I et pouvait ensuite reprendre la résolution suspendue du problème de Pappus. C'est donc à la fin de cette résolution qu'il énonce la correspondance inverse. Ainsi, la résolution du problème de Pappus jusqu'à cinq lignes reprend après que l'association d'équations aux courbes (uniquement dans ce sens) ait été soutenue et se conclut par l'énoncé de l'association contraire. Elle est ainsi encadrée par les deux énoncés qui composent l'énoncé complet du deuxième énoncé inaugural relatif aux courbes et aux équations. Il nous faut donc maintenant considérer ce qui devait encore être fait pour terminer cette partie de la résolution du problème de Pappus afin de comprendre pourquoi l'un de ces énoncés la précède et l'autre la conclut.

Descartes reprend au cours du Livre II la résolution du problème pour trois et quatre lignes puis celle pour cinq lignes, dont quatre sont parallèles. L'achèvement de la résolution du problème pour trois et quatre lignes consiste à identifier les coniques solutions à partir de leurs équations et à en déterminer les paramètres à partir de leurs coefficients de telle sorte que leur construction puisse être faite par les procédés établis par Apollonius (329, 331, 332). Descartes montre ainsi que la construction point par point obtenue à la fin du Livre I peut être ressaisie au moyen des procédés de construction les plus classiques.

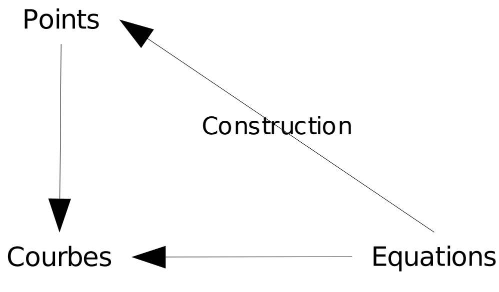
La solution pour le problème à cinq lignes a aussi déjà été donnée au Livre I au moyen d'une construction *point par point* de son équation de degré trois, et dont il a aussi déjà été établi et remarqué au Livre I qu'elle pouvait se faire au moyen d'une section conique (314). Descartes en donne ici une construction par son deuxième système articulé. Cette construction a déjà été évoquée lors de la présentation de ce système et s'obtient en remplaçant la ligne/tige KC par une parabole dont le diamètre est sur KA (337).




Ce dispositif permet de tracer une courbe dont la construction garantit le caractère géometrique. Pour établir qu'il s'agit de la solution du problème considéré, Descartes n'a qu'à mettre en équation ce système articulé et vérifier qu'il retrouve l'équation de la courbe. Pour d'autres configurations du problème à cinq lignes il se contente de donner des indications sur la nature de la ligne solution et conclut en faisant valoir qu' « ayant expliqué la façon de trouver une infinité de poins par où [les lignes solution] passent, [il] pense avoir assés donné le moyen de les descrire » (339). Ses derniers mots sont donc pour dire que la solution *donnée à la fin du Livre I* devrait à présent être tenue pour suffisante.
Cette reprise du problème de Pappus aura donc permis de ressaisir les constructions point par point des solutions qui avaient été données par des constructions qui établissent que les courbes obtenues sont bien géométriques. Rappelons que la construction point par point d'une courbe est aussi une construction géométrique dans laquelle interviennent aussi des courbes dont le genre est aussi pris en compte.

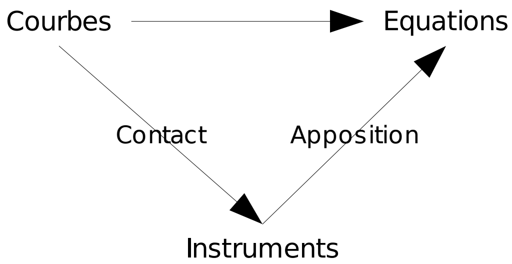
### iv) Bilan intermédiaire sur l'inauguration des équations polynomiales (deuxième énoncé inaugural)

Récapitulons les étapes de l'inauguration des équations polynomiales à partir des courbes géométriques.
La situation à la fin du Livre I peut être représentée par le schéma suivant :

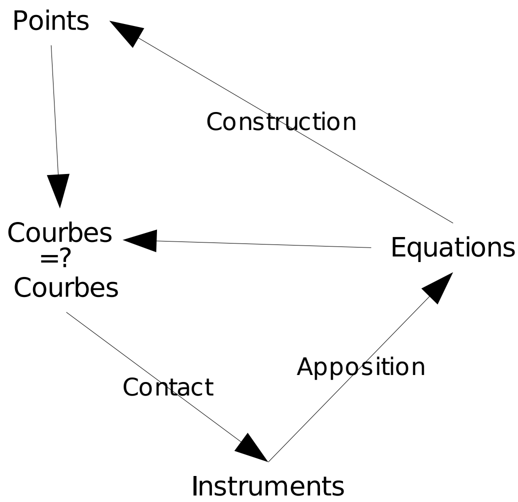



Une équation polynomiales étant donnée, il est possible de construire

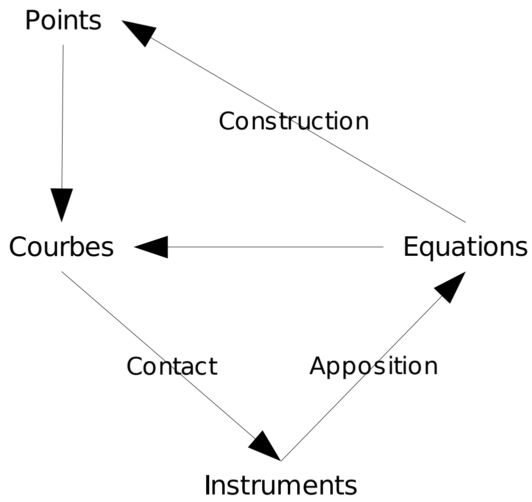
géométriquement des points qui la satisfont et d'obtenir ainsi une construction point par point d'une courbe.
Au début du Livre II, en introduisant les instruments, Descartes inaugure un nouveau rapport entre les courbes et les équations (dans ce sens) représenté par le schéma suivant :



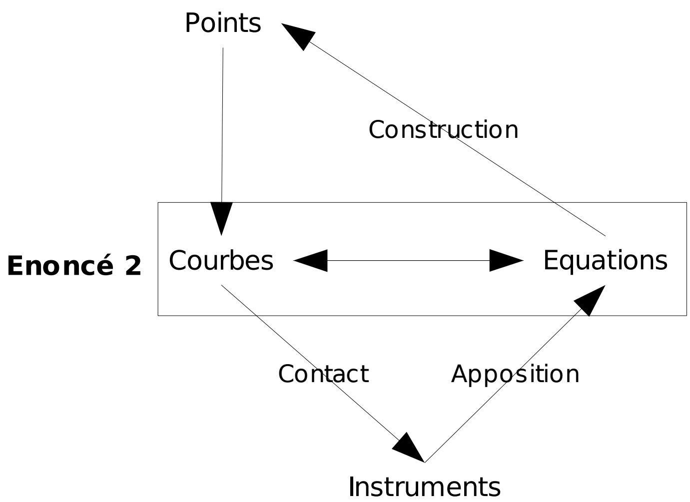

Dans les deux schémas, les équations sont les mêmes. La reprise du problème de Pappus au Livre II permet d'établir que les courbes sont elles aussi les mêmes, autrement dit que l'on peut recoller les deux schémas précédents :




Le sens des flèches est conforme au chemin suivi par Descartes pour démontrer l'identité des courbes au Livre II. En effet, la partie du haut, correspondant au Livre I, représente la construction des courbes à partir de leur équation. Lors de la reprise du problème de Pappus, l'identité des courbes n'est pas établie directement à partir de leurs expressions mais, en suivant le schéma du bas qui représente les développements du début Livre II, en introduisant l'instrument qui en permet la construction puis en le mettant en équation. C'est à partir de leur équation que s'établit l'identité des courbes. Ce schéma rend ainsi compte de contraintes qui déterminent le déroulement des arguments donnés par Descartes.
Mais c'est bien néanmoins l'identité des courbes qu'il s'agit d'établir et la situation qui résulte de celle-ci peut dès lors être représentée par le schéma suivant :

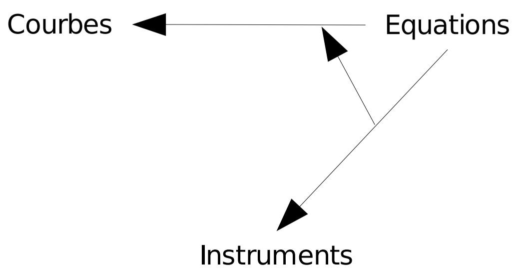



Autrement dit, ce que Descartes peut soutenir *à l'issue* de la reprise de la résolution du problème de Pappus (jusqu'à cinq lignes) c'est la possibilité d'associer aux équations des courbes *géométriques*. Et c'est bien l'énoncé qu'il donne à cet endroit.
Si l'on ajoute l'association inverse, *courbes* → *équations*, déjà soutenue pour la partie inférieure du schéma, on obtient le schéma complet, avec au centre l'énoncé inaugural qu'il s'agit de soutenir :




Ainsi, les considérations sur les courbes développées dans le Livre II permettent de faire accepter cette solution, c'est-à-dire de *soutenir* le deuxième énoncé inaugural, relatif aux courbes et aux équations, et plus précisément de soutenir le sens qui va des équations aux courbes, construites point par point. Les deux sens ont bien été ainsi énoncés et soutenus, alors que seul le sens *courbes* ← *équations* est nécessaire pour défendre les solutions déjà obtenues au Livre I.
Le soutien du sens c*ourbes* → *équations* est indépendant du genre. Il est donc découplé de la marche d'ensemble de *La Géométrie*. Au contraire, le soutien du

sens *courbes* ← *équations* en dépend[65]. En effet, l'identité des courbes n'est établie qu'au terme d'un parcourt complet du chemin qui part des équations et y revient en suivant le contour extérieur du dernier schéma. Cela requiert la construction point par point des solutions de toutes les équations. Mais c'est aussi l'endroit où Descartes introduit l'énoncé de ce sens de l'énoncé inaugural considérant qu'il l'a suffisamment soutenu et qu'il peut donc tenir pour établi que les courbes construites point par point sont géométriques. Il est ainsi le premier à bénéficier de cette partie de l'inauguration. Il pourra ainsi se limiter à donner au Livre III les constructions *point par point* des solutions de toutes les équations de degré trois et quatre (389-394), puis de toutes les équations de degré cinq et six (403-413), et terminer *La Géométrie* en soutenant que ces constructions peuvent être étendues aux degrés supérieurs. Comme le Livre III commence par expliquer la réduction des équations, c'est-à-dire les transformations qui permettent de passer de l'équation *du problème* à celle de sa *courbe* solution*,* il s'agit dès lors autant du soutien de l'énoncé inaugural relatif aux courbes que de celui relatif aux problèmes sur lequel nous allons bientôt pouvoir revenir.
Indiquons ici le lien qui existe entre le soutien du deuxième et du quatrième énoncé* inaugural : *toutes* les courbes construites point par point à partir des équations sont géométriques si la mise en équation de *tous* les instruments couvre *toutes* les équations. Ce que l'on peut représenter par le schéma suivant qui indique que la « surjectivité » de la flèche vers le bas implique celle de la flèche horizontale :




### v) Le problème de Pappus dans l'inauguration des équations

Il nous faut avant cela considérer le rôle du problème de Pappus dans le soutien de cet énoncé inaugural. Son rôle dans celui relatif aux problèmes a déjà été établi. Nous venons de voir pour soutenir l'énoncé inaugural relatif aux courbes pour établir que les courbes construites point par point à partir de leurs équations sont des courbes géométriques. Si l'on considère, comme le fait Descartes, que la mise en équation de ce problème couvre toutes les équations, celui-ci participe de la même manière au soutien du fait que *toutes* les courbes construites point par point à partir de leurs équations sont des courbes géométriques. La reprise au Livre II de la résolution interrompue au Livre I du problème de Pappus ne sert pas seulement à achever la résolution de ce problème mais participe de la stratégie suivie pour soutenir l'énoncé inaugural relatif aux

65 L'énoncé inaugural est ainsi énoncé pour le premier genre : « De plus, on voit icy que ce que j'ay pris pour le premier genre des lignes courbes n'en peut comprendre aucunes autres que le cercle, la parabole, l'hyperbole & l'ellipse : qui est tout ce que j'aurois entrepris de prouver » 335

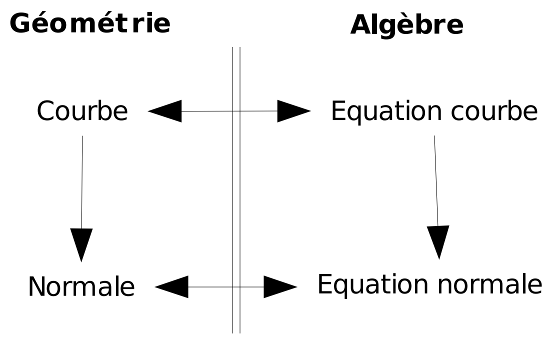
courbes et aux équations. Il faudrait établir que toutes les courbes construites point par point sont des courbes géométriques, ce qui suppose de donner l'instrument dont la mise en équation donnera l'équation de départ. Mais on a vu que Descartes considérait avoir alors déjà suffisamment soutenu ce point. L'erreur commise par Descartes sur le problème de Pappus et les équations n'a aucun rôle dans la résolution de ce problème, elle est en revanche essentielle dans sa stratégie pour soutenir cet énoncé inaugural. On ne peut pas manquer de souligner les rôles multiples joués dans ce texte à des niveaux très divers par le problème de Pappus, même s'il y entre des propriétés qu'il n'a pas!

### vi) Détermination de la normale et inauguration

Mais l'inauguration ne se réduit pas à soutenir une correspondance (une bijection) entre deux totalités. Elle consiste à soutenir qu'une totalité introduite peut être substituée à une autre, et en l'occurrence que les équations peuvent rendre compte de toutes les propriétés des courbes géométriques. C'est bien ce que soutient Descartes :

> « Que, pour trouver toutes les propriétés des lignes courbes, il suffit de fsavoir le rapport qu'ont tous leurs poins à ceux des lignes droites, & la façon de tirer d'autres lignes qui les couppent en tous ces poins a angles droits » (341).

La méthode algébrique pour déterminer la normale ou la tangente à une courbe en un point, que Descartes expose ensuite dans le Livre II, participe ainsi du soutien de cet énoncé. Et il est en effet tout à fait remarquable que l'on puisse uniquement à partir de l'équation algébrique de la courbe déterminer l'équation de la normale à cette courbe.

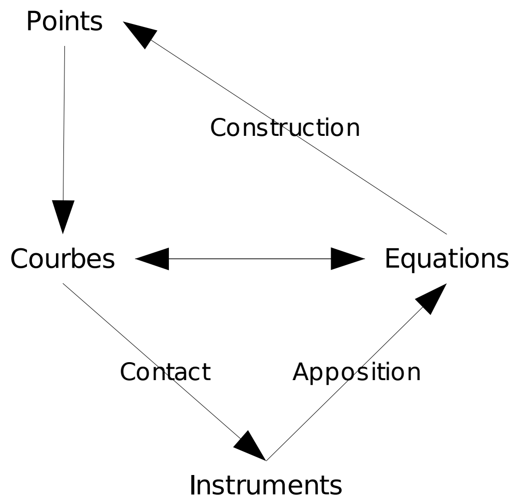



Montrer que cela est possible est donc aussi un argument en faveur de la possibilité de *remplacer* les courbes par leurs équations, autrement dit d'*éliminer* les courbes et de ne garder que les équations, de considérer pour elles-mêmes les expressions algébriques et d'en faire ainsi un système d'expressions constitué et autonome. Car c'est bien de cela qu'il s'agit, et c'est de cela dont il faut aussi rendre compte. De la même manière, la conformité du degré de l'équation algébrique au genre de la courbe associée participe du même soutien.
Le Livre II se termine par l'étude d'ovales et de leurs propriétés de réfraction et de réflexion. Il s'agit à nouveau de montrer la nécessité de dépasser l'étude des coniques et de soutenir l'extension opérée en montrant leur utilité pour la catoptrique et la Dioptrique : « Au reste, affin que vous fçachiés que la

consideration des lignes courbes, icy proposée, n'est pas sans usage, & qu'elles ont diverses propriétés qui ne cedent en rien a celles des sections coniques, je veux encore adjouster icy l'explication de certaines Ovales, que vous verrés estre très utiles pour la Theorie de la Catoptrique & de la Dioptrique » (352).

### d) La nécessité de l'inauguration

Au-delà du dispositif d'inauguration qui vient d'être décrit, il convient peut-être surtout de reconnaître la nécessité de l'inauguration.
Descartes aurait pu déclarer : « j'appelle courbes géométriques les courbes définies par une équation algébrique ». Il ne l'a pas fait. *La Géométrie* aurait ainsi pu être réduite à quelques pages. Il aurait pu se contenter de faire correspondre aux équations algébriques les courbes construites point par point. Nous le faisons volontiers. Il ne l'a pas fait non plus.




Au lieu de cela, il commence par constituer la totalité des courbes géométriques via les instruments et indépendamment de leur expression algébrique (troisième énoncé* inaugural), puis il soutient, au terme du dispositif que nous avons décrit et qui fait intervenir un quatrième énoncé* inaugural, que la totalité des courbes qu'il vient de constituer est conforme aux courbes que l'on peut construire point par point à partir des équations algébriques (deuxième énoncé inaugural). L'inauguration des courbes géométriques à partir des instruments comprend deux temps. Les instruments servent d'une part à justifier l'*extension* des courbes. Cette extension est présentée comme une extension des deux premiers genres de la classification de Pappus, donc en continuité plutôt qu'en rupture avec les principes antiques (ou présentés comme tels). Les instruments servent ensuite à *constituer* la nouvelle *totalité* des courbes : ils en donnent une certaine expression uniforme au moyen de la totalité des systèmes articulés qui apparaît comme *déjà constituée*.
Le détour par les instruments semble indiquer que la totalité des expressions algébriques n'était pas en mesure d'établir elle-même la totalité des courbes, ni même d'en justifier l'extension. Descartes aurait pu *a priori* partir des équations

associées aux cercles et aux coniques et considérer qu'il n'y a pas de raison de s'en tenir aux équations de degré deux et de ne pas recevoir toutes les courbes définies par de telles équations dès lors que les cercles et les coniques sont admis. C'est bien exactement ce dont il a besoin pour soutenir son premier et principal énoncé inaugural. C'est aussi précisément au moment où cette extension se présente qu'il s'interrompt dans le Livre I. Et c'est enfin exactement ce qu'il a fait... mais avec les instruments au lieu des équations. La conformité des équations et des courbes ne saurait être mise en cause, Descartes la soutient. Mais justement, il a besoin de la soutenir. Si l'on considère les deux totalités ainsi mises en présence, les courbes et les équations, aucune n'est déjà constituée. Descartes commence par inaugurer les courbes géométriques à partir des instruments. La totalité des courbes a dès lors le statut d'une totalité établie, fraîchement établie, mais établie ; il peut alors inaugurer les équations à partir des courbes. Il faut aussi prendre en considération la manière dont les unes et les autres sont mises en *rapport* : l'introduction des instruments décompose le rapport entre les courbes et leurs équations en deux *rapports*, l'un par contact et l'autre par apposition, de telle sorte que leur incommensurabilité semble avoir ainsi presque disparu.

La façon dont Descartes introduit ses « machines » (315) à partir d'une analyse de la construction d'une courbe au moyen d'un instrument[66] peut être rapprochée de la façon dont Turing dégageait sa notion de machine logique à partir d'une analyse approfondie des étapes d'un calcul. De même, Frege fait aussi valoir que son idéographie est « un système de notation conforme aux choses mêmes ». C'est une démarche et un argument que nous retrouverons aussi avec Fourier. Avec Turing il s'agissait de représenter la calculabilité, avec Descartes la constructibilité et la mesurabilité[67]. Ces démarches apparaissent refléter cette conjonction de réalisme et de conformité inhérente aux inaugurations. Les troisième et quatrième énoncés* inauguraux de Descartes peuvent d'ailleurs être respectivement comparés à la « thèse de Turing », dans la version Turing, pour celle impliquant les machines, et à la « thèse de Church », version Church ou Kleene, pour celle impliquant les équations algébriques, Descartes introduisant ainsi lui-même les deux versions introduites indépendamment par Turing et Church. Dans les deux cas, la version « machines » apparaît comme un argument fort pour soutenir l'énoncé inaugural dans sa version algébrique ; on se souvient que les machines de Turing ont été souvent, en en premier lieu par Gödel, considérées comme un des principaux arguments en faveur de la validité de la thèse de Church[68].

Le Livre II est en définitive intégralement consacré à l'inauguration des

66 « Et il n'est besoin de rien supposer, pour tracer toutes les lignes courbes que je pretens icy d'introduire, sinon que deux ou plusieurs lignes puissent estre meuës l'une par l'autre, & que leurs intersections en marquent d'autres » (316).

67 « considerant la Geometrie comme une science qui enseigne generalement a connoistre les mesures de tous les cors ; on n'en doit pas plutost exclure les lignes les lus composées que les plus simples, pourvû qu'on les puisse imaginer estre descrites par un mouvement continu, ou par plusieurs qui s'entresuivent & dont les derniers soient entièrement réglés par ceux qui les precedent : car, par ce moyen, on peut toujours avoir une connoissance exacte de leur mesure. » (316)

68 Sur l'histoire de la résolution graphique des équations algébriques nous renvoyons aux travaux de Dominique Tournès (2000, 2005). Pour les procédés mécaniques de résolution des équations différentielles, voir Tournès (2009).

équations à partir des courbes[69]. Ce qui ne veut évidemment pas dire qu'il se réduise à cela ; bien des choses peuvent être faite au cours d'une inauguration, comme proposer une nouvelle méthode pour déterminer les normales ou étudier des ovales qui ont aussi un intérêt propre. Mais cette inauguration rend compte de l'unité de ce Livre et des rapports entre ses parties. Elle se prolonge dans le Livre III, mais elle se confond alors avec le soutien du premier et principal énoncé inaugural sur les problèmes. Le troisième énoncé* inaugural, relatif aux courbes et aux instruments, apparaît de ce fait secondaire par rapport au deuxième, relatif aux courbes et aux équations, dans la mesure où il a été introduit *pour le soutenir*. C'est ce qui justifie que nous appelions l'énoncé relatif aux courbe et aux équations le « deuxième », alors qu'il est introduit *après* le « troisième ». Quand Descartes considère avoir suffisamment inauguré les courbes à partir des instruments, il se dispense de revenir aux systèmes articulés et se contente de constructions point par point des équations. Cette inauguration peut bien être considérée comme plus fondamentale, mais elle devient immanquablement *superflue* une fois réalisée, ce qui, contrairement à celle des deux premiers énoncés inauguraux, arrive avant la fin de *La Géométrie*.

## 4 - Livre III : fin du soutien du premier énoncé inaugural (problèmes solides et au delà)

### *a) Le livre III :* « De la construction des problèmes qui sont solides, ou plus que solides »

Le Livre III est celui dans lequel Descartes expose « quelque chose en général de la nature des équations » (371). C'est dans ce Livre que sont présentés tous les résultats et les règles d'Algèbre sur le nombre de racines et la réduction des équations (Bos 2001, chp 27). Ces développements sont motivés par le fait que « ce serait une faute en Geometrie que (...) d'employer » des courbes d'un genre supérieur à celui requis, c'est-à-dire d'utiliser pour construire la solution des courbes plus composées qu'il n'est nécessaire. Descartes donne plusieurs exemples d'une telle faute. Ses équerres permettent bien de construire toutes les moyennes proportionnelles mais la construction obtenue pour deux moyennes proportionnelles fait intervenir une courbe du deuxième genre alors que la construction classique qui utilise les sections coniques est du premier genre (371). Ainsi une grande partie de la suite de ce Livre est consacrée à l'étude de la réduction des équations polynomiales qui est le moyen de réduire le degré d'une équation et d'arriver au genre véritable du problème (371-389). Descartes achève de soutenir son premier énoncé inaugural par la construction d'abord des équations de degré trois et quatre associées aux problèmes solides (les problèmes plans ayant été traités au Livre I), avec comme exemples la double moyenne proportionnelle et la trisection de l'angle (389-403 ; Bos 2001, 364-368), puis des équations de degré cinq et six (403-413 ; Bos 2001, 368-372). Exactement comme

69 La recherche de l'expression la plus simple est un thème qui parcourt toute *La Géométrie*, et au-delà une grande partie de l'œuvre de Descartes. Cette question relève aussi d'une analyse sémiotique mais nous l'avons délibérément laissée de côté car elle est tout à fait indépendante de l'analyse des thèses.

il l'a fait au Livre I pour les problèmes plans, il montre comment construire les solutions de ces équations puis affirme que la méthode proposée s'étend aux autres degrés.

### *b) Fin du soutien du premier énoncé inaugural*

Le soutien du premier énoncé inaugural a commencé au Livre I. Descartes a exposé dans ce Livre la méthode générale pour mettre un problème en équation, méthode ensuite appliquée au problème de Pappus qui tient lieu, dans une certaine mesure, d'expression générale pour la totalité des problèmes de géométrie. Sa mise en équation conduisant à des équations de tous les degrés, sinon à toutes les équations, la résolution de tous les problèmes se ramène à celle de ce seul problème. Dans le Livre I, Descartes avait soutenu la correspondance entre les problèmes plans et les équations de degré 2. Dans le Livre III, il soutient la même correspondance entre les problèmes solides et les équations de degré 3 :

> « Il seroit superflus de je marestasse a donner icy d'autres exemples ; car tous les Problesmes qui ne sont que solides se peuvent reduire a tel point, qu'on n'a aucun besoin de cete regle pour les construire, sinon en tant qu'elle sert a trouver deux moyenes proportionnelles, ou bien a diviser un angle en trois parties esgales ; ainsi que vous connoistrés, en considerant que leurs difficultés peuvent toujours estre comprises en des Equations qui ne montent que jusques au quarré de quarré ou au cube; et que toutes celles qui montent au quarré de quarré se reduisent au quarre, par le moyen de quelques autres qui ne montent que jusques au cube : et enfin qu'on peut oster le second terme de celles cy. En sorte qu'il n'y en a point qui ne se puisse reduire a quelqu'une de ces trois formes :
>
> $$z^3 = * - pz + q$$
>
> $$z^3 = * + pz + q$$
>
> $$z^3 = * + pz - q \text{ »}$$
>
> 398

Ainsi, *tous* les problèmes solides sont exprimés par ces trois seules expressions (comme tous les problèmes plans ont pu aussi l'être par trois autres). Remarquons tout de même qu'ils l'étaient dans la classification de Pappus, non par des équations, mais par les trois coniques. Les modes d'expression ne sont évidemment pas les mêmes, mais il n'entre pas dans notre propos ici de les comparer.
Les développements algébriques sur la réduction des équations par lesquelles commence le Livre III participent entièrement du soutien de cet énoncé inaugural. En effet, il ne suffit pas d'associer à un problème de Géométrie une équation algébrique. Pour qu'il y ait conformité, il faut encore que l'équation restitue les caractéristiques du problème, comme elle devait, pour le deuxième énoncé, restituer les caractéristiques de la courbe. Or, la principale caractéristique d'un problème est son genre, c'est-à-dire le genre des courbes nécessaires à sa résolution. L'inauguration commande que l'on puisse déterminer le genre d'un problème à partir de son équation. Comme la mise en équation d'un problème

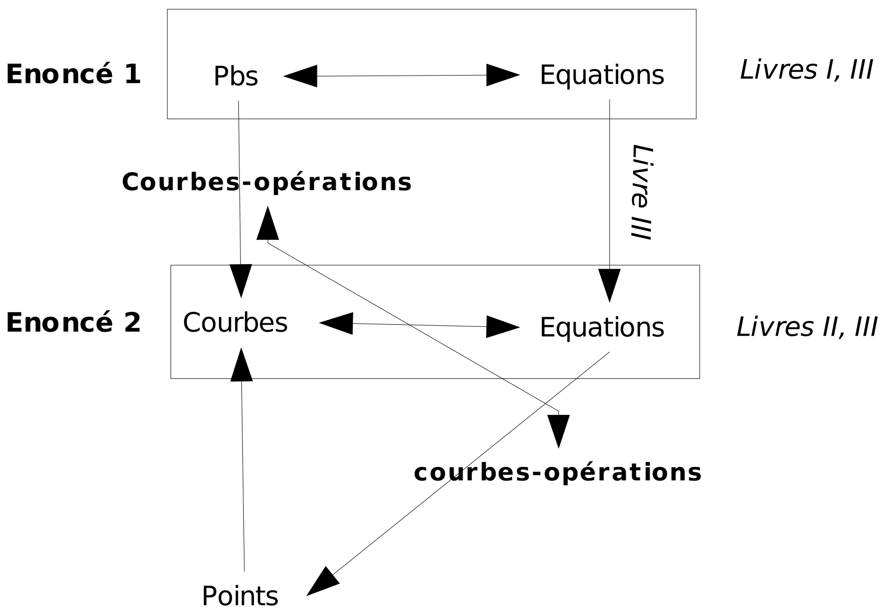
peut conduire à une équation d'un degré aussi élevé que l'on veut, Descartes doit établir qu'il est possible, par les moyens propres du système d'expressions considéré (équations algébriques), de réduire l'équation obtenue à une expression susceptible de faire connaître directement le genre du problème. Pour qu'il y ait conformité, il est nécessaire de pouvoir réduire *à l'intérieur du système d'expressions* la pluralité d'équations pourtant produite par une mise en équation qui articule les deux totalités, exactement comme il est nécessaire de pouvoir déterminer (l'équation de) la normale à partir de l'équation de la courbe. Ceci est essentiel pour sceller la séparation entre les expressions algébriques et les problèmes de Géométrie auxquelles elles sont associées. Cela étant, une chose est la possibilité de réduire à une seule toutes les équations qui résultent de toutes les mises en équation possibles d'un problème (ce qui ne se fera pas sans introduire quelques conventions), sans laquelle aucune conformité n'est soutenable, une autre que l'équation réduite donne le genre du problème. Il faut bien distinguer ce qui est susceptible d'être *démontré* et ce qui ne saurait l'être en raison de l'incommensurabilité qui demeure. Descartes peut établir des règles pour la réduction des équations (sans pouvoir les rapporter à la totalité des équations résultant de la mise en équation d'un problème), qu'il donne d'ailleurs sans démonstration, mais il ne peut que *soutenir* la conformité revendiquée en la vérifiant au cas par cas. C'est exactement ce qu'il fait en considérant un autre problème extrait de la *Collection* de Pappus (Descartes 1637, 387 ; Brigaglia & Nastasi 1986, 125-127 ; Bos 2001, 393-396). Ce problème est connu parce que son énoncé fait intervenir une *neusis,* et se présente donc comme un problème solide, alors que sa solution peut néanmoins être construite au moyen de droites et de cercles, ce qui en fait donc, en dépit des apparences, un problème plan. La résolution algébrique la plus naturelle de ce problème conduit aussi à une équation du quatrième degré. Ce qui fait à nouveau apparaître le problème comme un problème solide. Mais cette équation se décompose en un produit de deux polynômes de degré deux, ce qui montre qu'il s'agit d'un problème plan. La conformité est totale : l'algèbre est en mesure aussi bien de reproduire l'illusion que de la dissiper.

La conformité est aussi assurée par la correspondance, pour les premiers genres, entre la hiérarchie des problèmes donnée par Pappus et celle entre les degrés des équations. Pappus distinguait trois genres de problèmes : plans, solides, linéaires. Les deux premiers sont bien caractérisés et le troisième comprend en quelque sorte les problèmes restants. Traduites en termes algébriques, ces caractéristiques conduisent à distinguer les équations du premier et deuxième degré (problèmes plans), du troisième et quatrième degré (problèmes solides) et les autres. Au lieu d'adopter une classification proprement algébrique, c'est-à-dire par le degré, Descartes adopte une classification par paires de degrés plus *conforme* à celle de Pappus, association qu'il peut aussi justifier par des règles de réduction des équations, et qu'il prolonge pour les cas non couverts par la classification antique. Il n'introduit donc pas une classification algébrique *ex nihilo* concurrente de celle de Pappus. Il donne au contraire à la classification de Pappus une unité qu'elle n'avait pas avant, compensant un peu ainsi son extension. Dans cette classification, chacun des genres était fondé sur les *courbes* utilisées. Toutes ces courbes, quelque soit leur genre, sont dans une certaine mesure des expressions semblables ; il est possible de composer avec les unes et les autres des figures et

c'est bien ainsi que leurs propriétés et relations sont établies. Néanmoins, il n'y a pas de description uniforme de ces courbes susceptible de justifier à la fois la distinction et l'unité des trois genres. Il n'y a pas pour toutes ces courbes de « cône » qui les inscrirait dans une même description. Les équations algébriques offrent cette représentation à la fois uniforme et en mesure de reproduire les distinctions reçues. Mais au prix d'un rapport d'une tout autre nature puisque si le cône diffère des coniques par la dimension, la différence est tout autre entre les équations et les courbes. Ainsi, la représentation par des équations renforce l'*uniformité* de l'expression des courbes. C'est là une conséquence de toute inauguration, sans doute une des plus importantes par ses implications.
Pour que l'équation reflète le genre du problème, la mise en équation ne doit faire intervenir aucune opération géométrique susceptible de le modifier. L'équation associée dépendrait sinon de ces opérations géométriques. Pour s'en convaincre, il suffit de se placer dans le cas extrême et admettre pour la mise en équation toutes les courbes requises par la résolution du problème lui-même. L'équation du problème pourrait alors toujours être réduite à $x=a$. Comme le tracé de droites et de cercles interviennent dans tous les genres, ce sont les constructions qu'il est possible d'utiliser lors de la mise en équation sans modifier le genre. Ce sont aussi exactement les transformations que Descartes s'autorise pour la réduction des équations (Bos 2001, 390). A nouveau, le souci de conformité rend compte des écarts entre la réduction des équations pratiquée par Descartes et celle attendue par un lecteur pour lequel les équations algébriques forment déjà un système d'expressions constitué avec des distinctions rapportées à ses propres expressions.

## 5 - Les deux principaux énoncés inauguraux et leurs relations

Les relations entre les deux principaux énoncés inauguraux peuvent être représentées par la figure suivante (les relations venant de leur *soutien* ne sont pas prises en compte) :



Je voudrais à partir de cette représentation faire quelques remarques sur les implications possibles de ces inaugurations. La classification des problèmes de Géométrie se fait à partir de la classification des courbes qui entrent dans leur résolution. Cette classification tire parti du remarquable système d'expressions des courbes et des figures (on fait de la géométrie avec...) et résout en quelque sorte la difficulté posée par l'absence d'un système d'expressions des problèmes à partir duquel leur classement pourrait être directement opéré (ce que la logique permettra de faire à partir de Frege et de Whitehead & Russell). Descartes inaugure une représentation remarquable des problèmes : leur équation. C'est une représentation qui est d'ailleurs plus facile à obtenir à partir des énoncés des problèmes que les courbes de la classification de Pappus qui supposent leur résolution complète. Les énoncés des problèmes et les courbes impliquées dans leur résolution sont ainsi à la fois distingués et plongés dans le même système d'expressions, celui des équations algébriques. Leur *rapport* devient celui de deux équations, et devient ainsi une question de réduction d'équations. En lisant la figure de gauche à droite, on voit que les problèmes ont gagné une nouvelle expression mathématique : l'équation polynomiale. Et leur *rapport* à leur propre résolution, en l'occurrence aux courbes, devient lui-même plus susceptible d'une expression mathématique puisqu'il devient un rapport entre deux équations polynomiales, c'est-à-dire entre deux expressions du même système d'expressions. Il y a eu un gain dans l'expression.
Considérons maintenant les relations entre les quatre énoncés inauguraux à partir de leur rôle respectif dans le soutien des trois autres. La *correspondance* entre les problèmes et les équations est intégralement soutenue dès le Livre I à la fois par la description générale de la mise en équation et par la considérations du problème de Pappus. En revanche, le soutien de leur *conformité,* et en particulier le fait que la résolution des équations permet de résoudre tous les problèmes, qui est l'affirmation centrale de *La Géométrie*, s'étend sur l'ensemble du texte. Or le deuxième énoncé inaugural, dans le sens *courbes* ← *équations*, est nécessaire pour soutenir cette affirmation. Ce sens, lié à la construction point par point, est à son tour soutenu en étant décomposé au moyen de deux énoncés* inauguraux ; le troisième et le quatrième sont les deux énoncés* relatifs aux instruments. L'autre sens du deuxième énoncé inaugural, énoncé et soutenu, grâce à la même décomposition, n'est pas utile pour soutenir le premier et principal énoncé inaugural. Le rapport entre les quatre énoncés inauguraux peut dès lors être simplement représenté comme suit (où A ⇐ B signifie : « B soutient A ») :

Enoncé 1 ⇐ Enoncé 2 ⇐ Enoncé 3, Enoncé 4

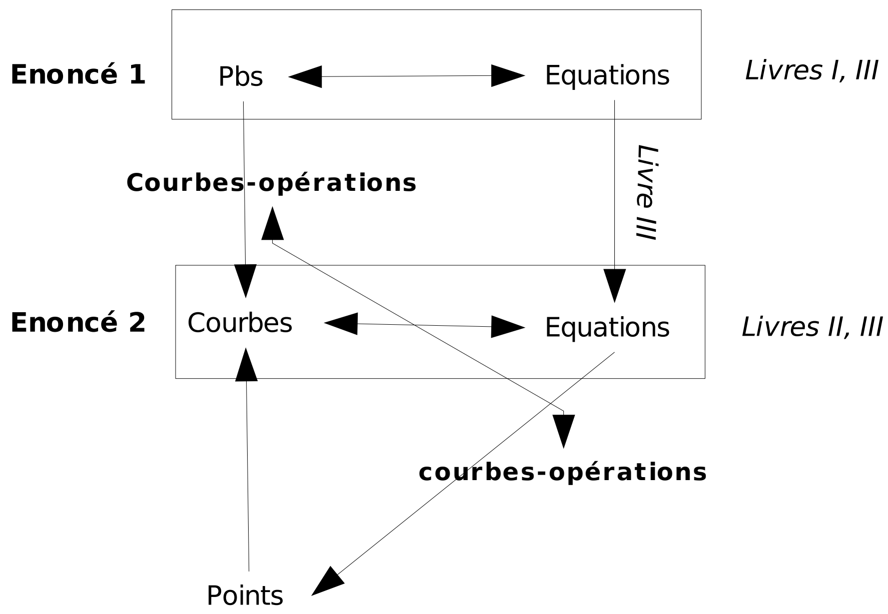
L'énoncé relatif aux courbes et aux équations apparaît ainsi, comme on l'a vu, secondaire par rapport à celui relatif aux problèmes. De même, les deux énoncés* relatifs aux instruments apparaissent de ce même point de vue secondaires par rapport à celui relatif aux courbes et aux équations.
Il convient aussi de faire un bilan des dualités et des incommensurabilités. Le deuxième énoncé ne servant pas à établir la correspondance intervenant dans le premier, l'incommensurabilité du premier demeure indépendante de celle du

deuxième. L'introduction du deuxième énoncé introduit donc une nouvelle dualité et une nouvelle incommensurabilité. En revanche, les troisième et quatrième énoncés* servent à établir la *correspondance* soutenue par le deuxième de sorte que l'incommensurabilité de celui-ci est, comme on l'a vu, décomposée en deux et réduite à des formes de *juxtapositions*. L'incommensurabilité du premier énoncé demeure donc pleine et entière. Elle se retrouve d'ailleurs bien dans le texte. Par exemple dans l'affirmation selon laquelle les problèmes plans (resp. solides) conduisent à des équations de degré deux (resp. trois ou quatre). Une telle affirmation générale ne saurait être démontrée car la mise en équation bute sur cette incommensurabilité. La conformité que doit satisfaire la mise en équation suppose que les relations entre grandeurs géométriques puissent être traduites par des relations algébriques de telle sorte qu'il n'y ait pas de propriété géométrique pertinente qui n'ait été ainsi ressaisie par l'équation. Mais il faut distinguer ici le fait que l'on puisse traduire une à une des relations géométriques (que tel segment soit dans tel rapport avec tel autre, etc) et le fait qu'en en ayant ainsi traduites certaines ont aurait traduit *toutes* les propriétés géométriques en quelque sorte à notre insu. La détermination de la normale en est un exemple favorable : quand on donne l'équation d'une courbe, on ne met pas en équation ses normales (on peut déterminer cette équation sans même savoir ce qu'est une normale...), mais un raisonnement algébrique permet néanmoins de l'en déduire grâce à la possibilité d'une traduction algébrique de la relation entre la courbe et sa normale en un point. D'innombrables exemples peuvent être ajoutés. Mais la conformité voudrait qu'il en soit ainsi de *toutes* les propriétés et relations. Les titres marginaux dans lesquels sont à la fois mentionnés les problèmes et leurs équations sont aussi à cet égard intéressants à considérer : « La réduction des Equations cubiques, lorsque le problesme est plan » (380) ; « Quels problesmes sont solides, lorsque l'Equation est cubique » (383) ; « La reduction des Equations qui ont quatre dimensions, lorsque le Problesme est plan ; et quels sont ceux qui sont solides » (383) ; « Façon générale pour construire tous les problesmes solides, reduits a une Equation de trois ou quatre dimensions » (389) ; « Façon générale pour construire tous les problesmes solides, reduits a une Equation qui n'a point plus de six dimensions » (403). Tous ces titres mentionnent à la fois le genre du problème et le degré des équations comme si *tous* les problèmes du genre considéré n'avaient pas pour équations celles des degrés considérés ou comme si toutes les équations des degrés considérés n'étaient pas les équations de problèmes du genre considéré. En revanche, dans les parties du texte associées à ces titres, les équations sont bien des substituts des problèmes qui ne jouent plus aucun rôle.

## 6 - Retour sur la classification de Pappus

La classification de Pappus n'est introduite qu'au début du Livre II. Mais elle donnait déjà son unité au Livre I dont le sous-titre est «des problesmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles & des lignes droites ». Plus généralement, elle rend compte en partie de la progression d'ensemble de *La Géométrie*. On a aussi vu que la classification de Descartes étendait celle de Pappus qui en est le socle et dont elle tire sa légitimité. Le soutien du premier et principal énoncé inaugural, en particulier, se fait en suivant cette classification.

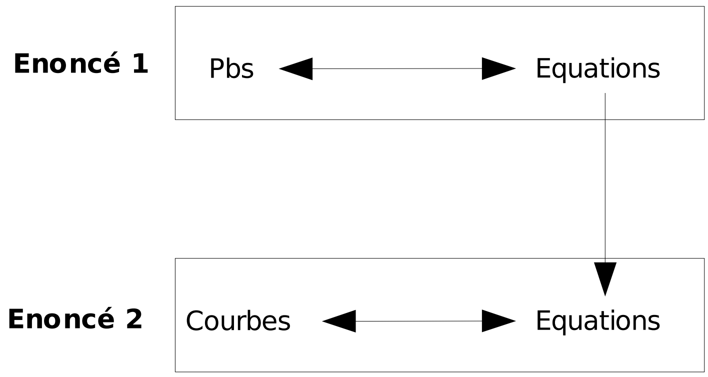
Son énoncé est décliné pour les problèmes plans, puis pour les problèmes solides. La conformité de la classification par les équations avec la classification de Pappus fait partie de l'inauguration de la représentation des problèmes par des équations. La référence à cette classification n'est donc pas de pure convenance et *La Géométrie* étend cette classification bien plus qu'elle ne rompt avec elle.
La classification de Pappus est fondée sur un rapport étroit dans la Géométrie grecque entre les problèmes et les courbes impliquées dans leur résolution. Considérons ce qu'il advient de ce rapport dans *La Géométrie* en nous aidant du schéma représentant les relations entre les deux premiers énoncés inauguraux :




Les courbes impliquées dans la construction des problèmes sont indiquées en gras *au-dessus* de la flèche verticale entre les problèmes et les courbes. Pour reprendre une distinction déjà introduite, ce sont des courbes-opérations. A l'extrémité de cette flèche on a les *courbes-solutions* des problèmes. Ce sont des courbes-figures. Ce sont les courbes-figures qui sont communes aux deux inaugurations et les courbes-opérations servent à les construire[70]. On a vu que les courbes-opérations impliquées dans les constructions, aussi bien la construction des problèmes que celle des équations, jouent un rôle essentiel dans l'ensemble de *La Géométrie*. Mais elles sont essentielles pour *soutenir* la conformité de la résolution des problèmes avec celle des équations. Elles ne sont essentielles qu'à l'inauguration. Elles ne jouent en revanche aucun rôle dans la *correspondance* entre les problèmes et les équations. Rien ne fait peut-être mieux ressortir leur statut dans *La Géométrie* que le fait qu'elles *ne* soient *pas* mises en équations. Elles interviennent donc pour soutenir la conformité, mais pas dans le circuit de la résolution algébrique d'un problème de géométrie. Elles sont aussi essentielles pour soutenir l'énoncé inaugural relatif aux courbes et aux équations et notamment pour que soient reçues les courbes associées aux équations. Mais une

70 C'est là l'imprécision dans la figure que nous avons donnée en présentant au début la classification de Pappus.

fois ces courbes reçues, elles ne sont plus utiles ; tous les moyens pour les tracer seront bons puisque la nature de ces courbes a été établie une fois pour toute, justement dans *La Géométrie...*, et il suffit à présent qu'elles correspondent à des équations pour être admises. Le schéma de résolution devient le schéma suivant dans lequel on voit que ces courbes ne jouent plus aucun rôle. C'est bien sûr le schéma que tout lecteur de *La Géométrie* formé à la géométrie analytique a en tête. A partir des différences entre les deux schémas il serait d'ailleurs possible de rendre compte d'un certain nombre d'interprétations de ce texte.




La classification de Pappus procède d'un certain rapport entre les problèmes et les courbes impliquées dans leur résolution. Cette classification, les problèmes de géométrie et ces courbes se retrouvent tous dans *La Géométrie*. Mais *La Géométrie* inaugure un rapport entre les problèmes et les courbes impliquées dans leur résolution tout autre que celui au principe de cette classification. Cette classification est fondée sur une assimilation possible de l'énoncé d'un problème à une construction géométrique. *La Géométrie,* en leur associant des équations, conduit aussi à une assimilation des problèmes et des courbes mais les modalités et les relations établies sont tout à fait différentes. Ainsi, la classification de Pappus intervient dans un texte qui modifie radicalement les caractéristiques sémiotiques des courbes au principe de cette classification.

## 7 - Conclusion

Comme la *Begriffschrift*, *La Géométrie* a été analysée en recourant aux distinctions qui fondent les notions d'énoncé et de texte inauguraux. Il a ainsi été établi que *La Géométrie* était bien un texte inaugural. Quatre énoncés inaugurés ont été mis en évidence avec leurs rapports mutuels. Le premier est énoncé d'emblée. Il soutient que tous les problèmes de géométrie correspondent à des équations algébriques. L'ensemble de *La Géométrie* est consacré à le soutenir, c'est-à-dire à inaugurer les équations algébriques comme représentation des problèmes de géométrie. Pour cela Descartes est amené à soutenir un deuxième énoncé, introduit au Livre II, qui soutient l'équivalence entre les courbes géométriques et les équations algébriques. Ces deux énoncés inauguraux ont ainsi entre eux un rapport bien déterminé : le deuxième participe au soutien du premier. Pour soutenir ce deuxième énoncé, et ce faisant pour poursuivre le soutien du premier, Descartes soutient deux autres énoncés* : l'un relatif aux courbes géométriques et à certains instruments que Descartes caractérise, l'autre relatif à ces mêmes instruments et aux équations algébriques. Ces deux autres énoncés* inauguraux ont ainsi un rapport bien déterminé entre eux, un autre avec le deuxième énoncé inaugural et, seulement au travers de celle-ci, au premier. Reconnaître le caractère inaugural de *La Géométrie* permet d'expliquer une structure qui a pu être présentée comme « incohérente », « énigmatique » etc. et évite d'introduire des hypothèses relatives à sa genèse ou de recourir à des partis pris philosophiques pour rendre compte de ces défauts. Inversement, ce caractère inaugural permet de rendre compte de l'abandon d'un dispositif qui ne sera plus utile, donc guère repris, et bientôt plus compris.

L'énoncé relatif aux problèmes apparaît sans conteste comme le principal, celui auquel à peu près toute *La Géométrie* peut être rapportée. Son soutien repose à la fois sur une description générale de la mise en équation et des caractéristiques remarquables du problème de Pappus, pour certaines avérées, pour d'autres simplement fausses, puis sur la résolution progressive de ce problème à partir de sa mise en équation. Le problème de Pappus intervient à différents niveaux du soutien des deux principaux énoncés inauguraux. Il n'apparaît pas possible de séparer le soutien de ces énoncés et la résolution de ce problème. Leur soutien apparaît ainsi inextricablement lié à la résolution d'un problème particulier. Nous retrouverons une situation analogue dans l'inauguration des séries trigonométriques par Fourier.

Le deuxième énoncé inaugural soutient la conformité des courbes et des équations polynomiales. Cette conformité est reconnue comme une des conséquences les plus importantes de ce texte sans en être l'objectif principal[71]. La notion d'énoncé inaugural confirme ce jugement avec quelques précisions. En premier lieu, il est établi que cette conformité est introduite en tant qu'énoncé inaugural ; elle est *énoncée* et elle est *soutenue* dans *La Géométrie*. Ce qui déjà en précise le statut. Par ailleurs, c'est un énoncé inaugural introduit pour soutenir l'énoncé inaugural principal. Son soutien n'en tient pas moins une place importante dans *La Géométrie* et se fait principalement en établissant la recevabilité des courbes construites point par point à partir des équations algébriques. Mais une fois soutenue, et par le fait de l'avoir été, cet inauguration dispense ensuite de cette construction. La construction des courbes est ainsi mise en facteur. Elle est à la fois garantie et éliminée. Un changement, dont l'importance historique est reconnue, peut ainsi être introduit par des arguments de conformité. Reconnaître que cette conformité est un énoncé inaugural conduit aussi à reconnaître la *nécessité* de la soutenir, et notamment la nécessité de constituer la totalité des courbes géométriques. Descartes ne semble pas pouvoir simplement introduire les *courbes algébriques*, c'est-à-dire dériver directement la constitution de la totalité des courbes de celle des équations algébriques : il commence de fait par constituer indépendamment la totalité des courbes géométriques, en recourant pour cela aux instruments, pour seulement ensuite soutenir que cette totalité

71 « l'équivalence entre courbe et équation (…) apparaît comme un thème plutôt marginal dans la Géométrie » (Bos 1998, 293). « My analysis of the *Geometry* in the preceding chapters has shown, however, that Descartes' main motivation in writing the book was not to expose the equivalence of curve and equation. Rather, it was to provide and exact, complete method for solving « all the problems of geometry. » » Bos 2001, 416 .

coïncide avec les courbes construites point par point à partir des équations. Les équations algébriques feront progressivement la preuve de leur utilité que ce soit pour résoudre des problèmes ou pour représenter des courbes. Elles seront de plus en plus grosses de ces expériences accumulées et bénéficieront d'un soutien cumulé et varié. Il n'en est semble-t-il pas ainsi quand Descartes écrit *La Géométrie* et il semble devoir soutenir ces représentations et les extensions requises. Les instruments sont à leur tour introduits en soutien du deuxième énoncé inaugural, ce qui contribue à préciser leur statut dans ce texte et en particulier leur fonction dans la correspondance entre les courbes géométriques et les équations algébriques. Toutes ces relations sont à la fois objectives et susceptibles d'une analyse complète du point de vue de leur soutien à chacun des énoncés inauguraux. Il est sans doute intéressant qu'elles puissent être dégagées indépendamment de toute considération préalable sur la découverte et la maîtrise progressives par Descartes des divers instruments introduits, de sa découverte du problème de Pappus et de sa solution, de la classification de Pappus, de l'Algèbre et de leurs incidences mutuelles.
Le nombre des énoncés inauguraux soutenus dans ce texte donne une mesure de son importance inaugurale. Je n'en connais actuellement pas d'autre qui en soutienne autant. Cela permet de voir dans un même texte la condition de réalisme satisfaite différemment et la coexistence de totalités diversement pré-établies. Ainsi, les problèmes de géométrie, les instruments et les courbes géométriques ne sont pas pré-établis de la même manière. Les problèmes de géométrie le sont comme une sorte d'héritage culturel constitué et qui paraît relativement figé. Les instruments le sont en raison de leur matérialité qui paraît aussi, mais différemment, en circonscrire les possibilités. Les courbes géométriques le sont en raison des caractéristiques propres qui en font des courbes géométriques ; sans doute Descartes ne conçoit-il pas que des progrès dans la conception des instruments conduirait à concevoir de nouvelles courbes. La condition d'inauguration est elle même satisfaite de manière différente et pourra de ce fait être aussi diversement contestée. L'inauguration des équations polynomiale à partir des problèmes pourra être contestée à partir de la mise en équation des problèmes déjà effectuée par Viète. Celle des équations polynomiales à partir des courbes pourra l'être en convoquant Fermat (1636). L'inauguration par les instruments pourrait sans doute l'être aussi. La diversité même des directions vers lesquelles il faut se tourner pour les contester toutes conduit à relativiser la contestation de chacune au regard de leur intrication étroite dans ce texte. Leur concours dans le soutien du premier et principal énoncé inaugural doit être pris en compte dans une évaluation de l'originalité inaugurale de ce texte. L'incommensurabilité prend aussi des formes variées. L'incommensurabilité des problèmes et des équations polynomiales, des courbes et des équations polynomiales, des instruments et des courbes, des instruments et des équations polynomiales sont toutes différentes les unes des autres. Ces différences renvoient à autant de systèmes d'expressions différents dont on pourrait vouloir rendre compte.
Inversement, la considération des énoncés inauguraux pour l'étude de ce texte apparaît d'autant plus efficace que chaque énoncé inaugural, facilement repérable par son énoncé (à l'exception du troisième et du quatrième), ou part ce qui est mis en œuvre pour les soutenir, oblige ensuite à déterminer à la fois de quelle manière

il est soutenu et le statut des deux totalités qu'il implique. Cet examen mené au fur et à mesure pour les quatre énoncés conduit inexorablement à l'analyse de l'ensemble de *La Géométrie* qui vient d'être présentée. Si *La Géométrie* est un texte inaugural particulièrement complexe en raison du nombre d'énoncés soutenus, les suivre permet en retour d'en faire ensuite facilement l'analyse. Les catégories, les oppositions, etc. utilisées pour cette étude ne sont pas elles-mêmes dérivées du système des expressions algébriques qu'elle ne fait intervenir d'aucune manière. Sans doute faut-il le souligner. Or nous avons vu que leur introduction s'accompagnait d'une modification des acceptions données aux problèmes, aux courbes et à leurs rapports. La notion d'inauguration a permis à la fois de mettre en évidence et de rendre compte du changement de statut des courbes impliquées dans la résolution des problèmes et de bien les différencier des courbes qui en sont les solutions. Toutes ces courbes ont incontestablement des rôles majeurs dans *La Géométrie* mais les unes sont impliquées comme totalité reçue d'un des énoncés inauguraux, les autres servent à les soutenir. Cette répartition est respectée tout au long du texte, sans exception. Les unes sont inaugurées, les autres servent exclusivement à leur inauguration. Les courbes-opérations impliquées dans la résolution des problèmes ont bien ainsi un rôle majeur dans la *Géométrie*, mais elles interviennent exclusivement pour *soutenir* des énoncés inauguraux qui conduisent à leur élimination. Leur présence même masque leur disparition. Inversement, les courbes solutions acquièrent une importance, et en tout cas une exclusivité, qu'elles n'avaient sans doute pas. Cela va de pair avec une transformation, subreptice celle-ci, de la notion de problème. Descartes fait des problèmes de lieux, comme celui de Pappus, l'archétype des problèmes qu'il substitue aux problèmes qui étaient au principe de la classification du même Pappus, et qui pour nombre d'entre-eux ne sont pas de ce type (cubatures, quadratures, rectifications, moyennes proportionnelles, trisection de l'angle, etc.). Les courbes-figures remplacent ainsi les courbes-opérations. Compte tenu des transformations opérées par ce texte, comme par tout texte inaugural mais particulièrement par celui-ci en raison du nombre d'énoncés inauguraux soutenus, il importe de pouvoir adopter un point de vue symétrique sur l'ensemble de l'inauguration sans en privilégier le terme final. Cela évite d'imputer au texte les biais d'une analyse et de faire à partir de là de la philosophie à bon compte. L'étude des énoncés inauguraux permet une analyse de tous les textes inauguraux fondée sur les mêmes principes, ce qui permet à la fois au lecteur de mieux connaître le rapport du produit de l'analyse au texte analysé et rend possible la comparaison des résultats des analyses de différents textes. Il a ainsi été possible de montrer que la transparence des instruments établissait la « géométricité » des courbes comme la transparence des formules de l'idéographie intervient dans la preuve donnée par Frege de l'analyticité de l'Arithmétique. Ce n'est pas le moindre intérêt des énoncés inauguraux que de permettre d'identifier aussi facilement des moments de transition dont l'analyse est particulièrement propice à de délicats anachronismes, en raison même des transformations opérées par des inaugurations qui articulent ce qu'elles transforment.

L'analyse proposée conduit à adopter un point de vu en quelque sorte dual de celui de Bos (2001). En effet Henk Bos propose une analyse de *La Géométrie* et de sa genèse axée sur l'exigence d'un critère de démarcation des courbes géométriques et la recherche d'une caractérisation de l'exactitude d'une construction. La dynamique historique et l'analyse qu'il propose sont donc essentiellement épistémologiques, par ailleurs servies par une présentation mathématique remarquable des problèmes considérés. L'inauguration remplace le problème de la *démarcation* par celui de la *constitution des totalités,* celui de l'*exactitude* par celui de la *conformité* et finalement les contraintes épistémologiques considérées par des contraintes sémiotiques. Cela conduit notamment à une appréciation tout à fait différente des développements sur la nature des lignes courbes du début du Livre II. Henk Bos y voit des considérations épistémologiques *contraignantes* qu'il inscrit dans une genèse finement reconstruite des travaux de Descartes jusqu'à *La Géométrie.* Nous les avons pour notre part exclusivement inscrits dans le texte de *La Géométrie* où ils apparaissent alors surtout *contraints* par la nécessité de l'inauguration[72]. Le fait de constituer ces totalités et de soutenir ces énoncés a une histoire, mais il est au moins possible de faire une analyse de l'ensemble de *La Géométrie* pour laquelle la reconstitution de cette histoire n'est pas un préalable.

L'analyse des énoncés inauguraux revient à accorder une attention particulière aux totalités qui interviennent en mathématiques en les étudiant au moment de leur constitution. L'idée sous-jacente est que certaines caractéristiques des mathématiques sont à rapporter aux caractéristiques de ces totalités et que leurs énoncés, et en particulier leur généralité, y trouvent leurs conditions de possibilité. Si Descartes introduit une méthode générale pour déterminer les tangentes des courbes, c'est aussi parce qu'il a introduit un système d'expressions permettant cette généralité. Ce sont ici les expressions auxquelles elle s'applique qui rendent possible cette généralité. Et ce n'est pas diminuer le mérite de Descartes, au contraire, que de reconnaître qu'il a dû d'abord lui-même constituer les conditions d'expression d'une telle méthode. Comme ces totalités, avec leurs caractéristiques, ne sont nullement naturelles, elles doivent être introduites et même soutenues.

*La Géométrie* est un texte qui inaugure la totalité des équations algébriques. Notre propos n'était ici que d'établir ce fait. Ce faisant, ce texte introduit une représentation remarquable à la fois des problèmes et des courbes, d'autant plus remarquable qu'elle leur est aussi commune : une représentation uniforme est ainsi donnée de tous les problèmes et des courbes qui permet à Descartes de considérer qu'il peut les *parcourir dans leur totalité* et dès lors affirmer « qu'il n'est pas malaysé de faire un dénombrement de toutes le voyes » pour trouver les racines des équations et considérer qu'il est possible de « demonstrer qu'on a choisi la [voye] la plus generale & la plus simple » (401). Les énoncés inauguraux soutenus dans *La Géométrie* inaugurent la totalité des expressions algébriques et rendent ainsi possibles des énoncés et des démonstrations qui ne l'étaient pas auparavant. Reconnaître la nécessité d'inaugurer ces totalités, c'est-à-dire reconnaître l'inauguration comme un moment récurrent au cours du développement des mathématiques, permet aussi de retrouver des observations, déjà faites, sur la différence de statut de la Géométrie et de l'Algèbre dans ce

72 La recherche de l'expression la plus simple est un thème qui parcourt aussi toute la *Géométrie*, et au-delà une grande partie de l'œuvre de Descartes. Cette question relève aussi d'une analyse sémiotique générale mais nous l'avons délibérément laissée de côté car elle est indépendante de l'analyse des thèses. Une étude spécifique devrait lui être consacrée.

texte[73]. La totalité des expressions algébriques n'étant pas constituée, il semble dès lors assez improbable que les distinctions, en particulier le degré des équations, les critères de simplicité (irréductibilité algébrique) inhérents à ce système d'expressions soient appliqués aux expressions géométriques. Le texte s'attache en effet plutôt à établir que les expressions algébriques permettent de *reproduire* l'analyse géométrique, ses distinctions, ses classifications, etc. L'adoption d'une classification par paires de degrés plutôt que par degrés en est une des manifestations les plus évidentes : Descartes remarque explicitement que les équations de degré deux définissent aussi bien le cercle, la parabole, l'hyperbole et les ellipses mais il les laisse néanmoins dans deux genres distincts[74]. Il convient d'abord d'inaugurer les expressions algébriques, de soutenir leur conformité aux courbes et aux problèmes géométriques avant de pouvoir développer des distinctions propres à ces expressions[75].

L'étude de *La Géométrie* du point de vue de l'inauguration a aussi ceci d'intéressant que la plupart des arguments donnés pour soutenir les deux principaux énoncés inauguraux, fondés sur des extensions indues de résultats vérifiés seulement pour les premiers genres ou degrés, se sont très vite avérés tout simplement faux. Si l'inauguration apparaît nécessaire la validité des arguments et

73 A propos du statut de l'Algèbre dans la Géométrie, René Taton écrivait : « [Descartes] avait conçu cette science [la géométrie analytique] comme « une application de l'algèbre à la géométrie », nom qu'elle conservera d'ailleurs jusqu'au premières décades du XIXe siècle et que Monge lui-même adoptera, c'est-à-dire comme une technique de structure algébrique, adaptée à la résolution des problèmes d'essence géométrique et spécialement des problèmes des lieux à la manière d'Apollonius. Ainsi, apparaît-elle, non pas comme une branche autonome de la science, mais plutôt comme un outil permettant de résoudre de nombreux problèmes géométriques qui n'entrent pas dans le champ normal d'application directe des propriétés classiques tirées des *Eléments* d'Euclide. Les courbes ne s'y trouvent pas étudiées pour elles-mêmes d'après leurs équations, mais l'intérêt se porte quasi exclusivement sur celles qui apparaissent comme solutions de problèmes à résoudre. » Taton 1951, 101. Boyer souligne : « There is in the whole of *La Géométrie* not a single new curve plotted directly from its equation. » (Boyer 1956, 86). Boyer souligne aussi : « Descartes was not interested in curves as such. He derived equations of curves with one purpose in mind – to use them in the construction of determinate geometrical problems wich had been expressed by polynomial equations in a single variable. » (Boyer 1956, 101). Giorgio Israel remarque à propos du statut de l'Algèbre dans la *Géométrie* qu' « il n'existe pas de problèmes algébriques donnés par l'algèbre en tant que telle » (Israel 1998, 207) et souligne sa subordination à la Géométrie : « Il y a d'abord la géométrie, qui, en tant que science de l'extension, est l'instrument permettant de décrire et d'analyser la substance des choses. L'algèbre joue un rôle essentiel certes, mais qui lui est subordonné. » (Israel 1998, 215). Henk Bos remarque de même que « Descartes was not interested in algebra for its own sake. (…) Each of the special algebraic techniques he explained in the *Geometry* had its purpose within the geometrical rationale of the book and was not developed further than necessary for that purpose. We may therefore characterize Descartes' algebra as subservient to geometry, more precisely to the canon of construction that Descartes elaborated in order to solve « all the problems of geometry ». » Bos 2001, 396-7.

74 « lorsque cete equation ne monte que iusques au rectangle de deux quantités indeterminées, ou bien au quarré d'une mesme, la ligne courbe est du premier & plus simple genre, dans lequel il n'y a que le cercle, la parabole, l'hyperbole & l'ellipse qui soient comprises. » Descartes 1637, 319

75 Ce caractère conservateur de la *Géométrie* a déjà été clairement établi par Henk Bos : « Descartes' aim was to give geometry its definitive form. That aim, though exalted, was essentially conservative ; Descartes' view of geometry as the art of solving geometrical problems was based on the contemporary tradition of geometrical problem solving, which by the 1630' was no longer a vigouros field and was soon afterwards superseded by other mathematical interests. Yet the influence of the Geometry was far from conservative; on the contrary, it was the most innovative treatise in mathematics of the fist half of the seventeenth century. » Bos 2001, 411

l'adhésion aux énoncés inauguraux ne semblent pas eux nécessaire à la réception des représentations inaugurées : les expressions polynomiales ont été reçues sans qu'aucun des quatre énoncés inauguraux de Descartes n'ait eu besoin d'être repris.

# V - La *Théorie analytique de la chaleur* de Joseph Fourier

Cette partie va être consacrée à montrer que la *Théorie analytique de la chaleur* de Joseph Fourier est aussi un texte inaugural introduisant un énoncé inaugural[76]. Cela établira l'existence de ce type d'énoncé et de texte à une époque, le début du 19ème siècle, et traitant d'un sujet, la physique mathématique, bien distincts des époques et des sujets des autres textes inauguraux déjà analysés. L'importance de la *Théorie analytique de la chaleur* dans l'histoire des mathématiques, comme de chacun des autres textes considérés, justifie aussi de le considérer d'un point de vue inaugural et de décrire son dispositif d'inauguration. Ce texte présente aussi un intérêt propre du point vue de ces analyses inaugurales. Il nous confronte à un exemple où la distinction entre théorème de représentation et énoncé inaugural peut sembler brouillée et l'incommensurabilité éliminée. En effet, la représentation d'une fonction par une série trigonométrique repose sur la formule intégrale des coefficients de Fourier qui permet de donner le développement en série trigonométrique d'une fonction à partir de l'expression de la fonction elle-même. Par comparaison, l'existence d'une formule semblable pour le premier énoncé inaugural de *La Géométrie* reviendrait à disposer d'une formule qui permettrait de calculer les coefficients de l'équation polynomiale associée à un problème à partir de l'énoncé du problème. Pour la thèse de Turing, cela reviendrait à disposer d'un moyen mathématique permettant de déterminer la machine logique calculant un nombre à partir de ce nombre. Enfin, dans le cas de l'*Idéographie*, cela reviendrait à disposer d'une formule permettant de déduire la représentation idéographique d'un jugement logique à partir de celui-ci. L'existence d'une telle formule contredit l'incommensurabilité qui fondamentalement distingue un énoncé inaugural d'un théorème de représentation. Il nous faudra donc découvrir comment concilier le caractère inaugural de ce texte et l'existence d'une telle formule. L'étude de ce texte nous servira aussi dans l'analyse que nous ferons ensuite du statut des séries trigonométriques introduite par Daniel Bernoulli pour décrire le mouvement d'une corde vibrante dans le cadre de la controverse qui l'opposa à D'Alembert, Euler et Lagrange. Nous verrons alors un exemple d'énoncé inaugural non inauguré.

76 Pour une présentation et des commentaires du développement de la théorie de la chaleur de Fourier voir Grattan-Guinness (1990 ; 2000) ; Dhombres & Robert (1998), notamment le chapitre « Le physicien-mathématicien de La Théorie analytique de la chaleur » (Dhombres & Robert 1998, 443-620).

## 1 - L'énoncé inaugural

Dans l'avant dernier article du troisième chapitre de la *Théorie analytique de la chaleur*, Fourier tire les conséquences des développements qui précèdent :

> « Il résulte de tout ce qui a été démontré dans cette Section concernant le développement des fonctions en séries trigonométriques que, si l'on propose une fonction *f(x)* dont la valeur est représentée, dans un intervalle déterminé, depuis x=0 jusqu'à x=X, par l'ordonnée d'une ligne courbe tracée arbitrairement, on pourra toujours développer cette fonction en une série qui ne contiendra que les sinus ou les cosinus, ou les sinus et cosinus des arcs multiples, ou les seuls cosinus des multiples impairs. » art. 235.

Fourier soutient ainsi qu'une fonction arbitraire définie sur un intervalle borné (la borne inférieure étant en l'occurrence en 0), peut toujours être développée en une série trigonométrique. Cet énoncé, qui se retrouve dans les divers Mémoires dans lesquels Fourier a exposé sa théorie avant la publication de ce livre en 1822, présente toutes les caractéristiques d'un énoncé inaugural[77]. Il y a bien un dualisme avec d'une part les courbes (« ligne courbe tracée arbitrairement ») et d'autre part l'expression analytique des fonctions au moyen d'une série trigonométrique. Les courbes ont bien le statut d'une totalité pré-établie (réalisme). Fourier les assimile ici à des tracés, ailleurs à une distribution de température. Fourier soutient bien aussi la conformité de ces deux totalités : toute courbe est la courbe d'une fonction qui peut être développée en une série trigonométrique, la réciproque, tenue pour évidente, n'a pas besoin d'être énoncée. L'incommensurabilité est vérifiée par le fait qu'il n'y a pas de rapport établi entre l'expression d'une courbe ou une distribution de chaleur dans un corps et l'expression d'une série trigonométrique. C'est une incommensurabilité semblable à celle entre les courbes géométriques et les équations polynomiales de *La Géométrie* en dépit des différences qu'il y a entre les expressions polynomiales de Descartes et celles des fonctions. Cette incommensurabilité n'est pas directement commentée par Fourier mais il trouve tout de même qu'« il est remarquable que l'on puisse exprimer par des séries convergentes et, comme on le verra dans la suite, par des intégrales définies les ordonnées des lignes et des surfaces qui ne sont pas assujetties à une loi continue » (Fourier 1822, art. 230). L'incommensurabilité est aussi ressaisie dans son « Discours préliminaire », sur

77 On peut citer comme autres énoncés : "Il résulte de mes recherches sur cet objet que les fonctions arbitraires même discontinues peuvent toujours être représentées par les développements en sinus ou cosinus d'arcs multiples, et que les intégrales qui contiennent ces développements sont précisément aussi générales que celles où entrent les fonctions arbitraires d'arcs multiples." Fourier 1806, cité in Grattan-Guinness 1972, 183 ; « L'exposition détaillée des résultats de notre analyse ne peut laisser aucun doute sur le véritable sens dans lequel ils doivent être pris ; les développements de sinus et de cosinus multiples ont évidemment toute la généralité que comporte les fonctions arbitraires. » Fourier 1807, 113 ; « une fonction quelconque peut toujours être développée en séries de sinus ou de cosinus d'arcs multiples » Fourier 1807, 115 ; « cette remarque est essentielle, en ce qu'elle conduit à connaître comment les fonctions entièrement arbitraires peuvent aussi être développées en séries de sinus d'arcs multiples." Fourier 1807, voir aussi Fourier 1822, p. 234. "Les théorèmes dont il s'agit donnent le moyen de réduire une fonction arbitraire et même discontinue en séries trigonométriques. Cette nouvelle extension de la théorie des suites était nécessaire pour autoriser l'emploi des solutions particulières des équations aux différences partielles." "Notes jointes à l'extrait du mémoire sur la chaleur", cité in Hérivel 1980, p 59.

lequel nous reviendrons, par des considérations philosophiques sur le rapport étroit qui lie l'Analyse mathématique aux phénomènes naturels. Elle est aussi avérée, et avec elle la condition d'inauguration, par le dispositif argumentatif développé pour soutenir cet énoncé. Et si Fourier, contrairement à Church, Turing ou Frege, ne s'étend pas sur l'impossibilité d'établir la conformité qu'il revendique, il avertit lecteur qu'il a dû déroger au mode d'exposition habituel des Mémoires scientifiques qu'il reviendra dans ses publications ultérieures au mode d'exposition traditionnel plus concis[78].

## 2 - Un texte inaugural

Pour établir que la *Théorie analytique de la chaleur* est bien un texte inaugural nous allons simplement en suivre la progression et mettre en évidence en quoi les exemples et les développements mathématiques proposés participent à l'inauguration des séries trigonométriques.

### *a) Présentation d'ensemble*

La *Théorie analytique de la chaleur* est composée de neuf chapitres et un « Discours préliminaire ». Le premier est un chapitre d'introduction. Fourier y définit les grandeurs physiques considérées (température, capacité spécifique, $C$, conductibilité extérieure, $h$, et intérieure, $K$) et leur mesure, le modèle et les principes adoptés pour décrire la diffusion de la chaleur à l'intérieur et à la surface d'un corps fondés sur une représentation moléculaire des phénomènes thermiques. Il étudie le flux de la chaleur dans divers solides simples (solide homogène compris entre deux plans infinis, parallélipipède de longueur infinie, etc.), chauffés à leur surface mais ayant atteint leur état permanent de telle sorte que la chaleur diffuse mais la température en chaque point ne varie plus. Ce ne sont bien sûr pas à proprement parler des solides, mais des cas de figure, voire des « cas de solides ». Le chapitre II établit les équations différentielles partielles de la propagation de la chaleur pour différents « cas de solides » (armille, sphère, cylindre, parallélipipède de longueur infinie, etc.) dans lesquels la chaleur se diffuse à l'intérieur et se dissipe vers l'extérieur par sa surface et dont la température en chaque point varie avec le temps. Les chapitres III à VIII sont chacun consacrés à l'analyse de la propagation de la chaleur dans l'un de ces solides à partir de l'équation différentielle trouvée au chapitre II. Le neuvième et dernier chapitre est consacré à la diffusion dans une masse solide homogène dont toutes les dimensions sont infinies.

78 « Nous avons démontré dans cet Ouvrage tous les principes de la Théorie de la chaleur, et résolu toutes les questions fondamentales. On aurait pu les exposer sous une forme plus concise, omettre les questions simples, et présenter d'abord les conséquences les plus générales ; mais on a voulu montrer l'origine même de la Théorie et ses progrès successifs. Lorsque cette connaissance est acquise, et que les principes sont entièrement fixés, il est préférable d'employer immédiatement les méthodes analytiques les plus étendues, comme nous l'avons fait dans les recherches ultérieures. C'est aussi la marche que nous suivrons désormais dans les Mémoires qui seront joints à cet Ouvrage, et qui ne forment en quelque sorte le complément, et par là nous aurons concilié, autant qu'il peut dépendre de nous, le développement nécessaire des principes avec la précision qui convient aux applications de l'Analyse. » Fourier 1822, Discours préliminaire, Oeuvres I, xxiv-xxv.

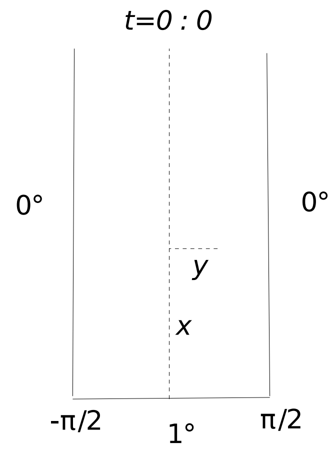
La structure du texte, décomposé en de nombreux articles, est simple et claire. Comme pour une variation infinitésimale du temps, les températures aux bords peuvent être supposées constantes, les solides étudiés au chapitre I sont ceux qui apparaissent lors de l'analyse infinitésimale des différents corps considérés aux chapitres suivants. Le bilan des entrées et des sorties de chaleur dans ces éléments de volume au cours d'une variation infinitésimale de temps permet d'obtenir au chapitre II les équations différentielles régissant la variation de la chaleur dans ces solides (armille, sphère, cylindre, parallélépipède d'une longueur infinie, cube et enfin un parallélépipède rectangle).

### *b) Le chapitre III*

L'énoncé inaugural est énoncé à la fin du chapitre III. Ce chapitre, consacré au cas d'un solide rectangulaire infini, est le premier des cinq chapitres dans lesquels Fourier détermine la distribution de la chaleur pour les différents cas de solides considérés à partir de l'équation différentielle partielle qui a été établie au chapitre II. Il s'agit donc pour nous de déterminer de quelle manière le soutien de cet énoncé s'articule à l'étude de la distribution de la chaleur dans ce « cas de solide ». Nous allons pour cela suivre les phases successives de la résolution de ce problème dans ce chapitre jusqu'à l'énoncé de la thèse à la fin de celui-ci.

### i) La solution de l'équation différentielle avec ses conditions aux bords

Le « cas de solide » considéré est donc une lame de longueur infinie dont la température à la base est maintenue à 1, et celle à ses deux côtés infinis est maintenue à 0, la température initiale de la barre étant supposée nulle.




Fourier cherche à déterminer la distribution de la chaleur dans cette lame quand la chaleur a atteint un état permanent. D'après l'équation obtenue pour un parallélépipède de longueur infinie, l'équation différentielle régissant la variation de la chaleur en un point de la lame est $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$ avec les conditions initiales déterminées par les conditions aux bords, $x$ variant de 0 à $+\infty$ et $y$ de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$ (ces valeurs sont choisies pour simplifier les expressions obtenues). Fourier cherche une solution en séparant les variables, c'est-à-dire en posant *v=F(x)f(y)*. Il obtient comme solutions $F(x)=e^{-mx}, f(y)=\cos(my)$ , où *m* est une constante quelconque. Il obtient ainsi une infinité de solutions de la forme $v=e^{-mx}\cos(my)$ , où *m* doit, pour satisfaire aux conditions physiques du problème, être positif et annuler le cosinus pour les valeurs extrêmes de *y*, ce qui limite ses valeurs possibles à *m =1, 3, 5, etc*. L'expression $v=e^{-mx}\cos(my)$ , *m =1, 3, 5, etc*., est une solution qui est à la fois générale, puisqu'elle n'est pas l'expression d'une seule fonction mais d'une infinité (autant que de valeurs possibles de *m*), et particulière, puiqu'elle ne prend en compte que les solutions de la forme particulière *v=F(x)f(y)*. Compte tenu de la linéarité de l'équation différentielle, toute combinaison linéaire de ces solutions est aussi une solution. L'expression

$$v=a\,e^{-x}\cos(y)+b\,e^{-3x}\cos(3y)+c\,e^{-5x}\cos(5y)+d\,e^{-7x}\cos(7y)+\dots$$

est donc à nouveau l'expression d'une solution de l'équation plus générale que les précédentes qu'elle comprend. Pour être une solution du problème elle doit aussi satisfaire la condition sur la base, soit :

$$1=a\cos(y)+b\cos(3y)+c\cos(5y)+d\cos(7y)+\dots \quad .$$

Au terme d'un assez long calcul faisant intervenir le développement de $\pi$ en produit infini, Fourier peut déterminer la valeur des coefficients *a, b, c*, etc. (art. 171-177) :

$$\frac{\pi}{4}=\cos(y)-\frac{1}{3}\cos(3y)+\frac{1}{5}\cos(5y)-\frac{1}{7}\cos(7y)+\dots \quad .$$

L'expression de la fonction *v* de la distribution de la chaleur dans la lame est donc (art. 190) :

$$\frac{\pi v}{4}=e^{-x}\cos(y)-\frac{1}{3}e^{-3x}\cos(3y)+\frac{1}{5}e^{-5x}\cos(5y)-\frac{1}{7}e^{-7x}\cos(7y)+\dots$$

Fourier a ainsi trouvé l'expression d'un état permanent (fonction de *x* et de *y* indépendante du temps), qui satisfait à toutes les conditions aux bords. Un simple changement de variable donne l'expression de cette solution pour une base de longueur *2l* au lieu de π (art. 196):

$$v=\frac{4A}{\pi}\left(e^{\frac{-\pi x}{2l}}\cos\frac{\pi y}{2l}-\frac{1}{3}e^{-3\frac{\pi x}{2l}}\cos 3\frac{\pi y}{2l}+\frac{1}{5}e^{-5\frac{\pi x}{2l}}\cos 5\frac{\pi y}{2l}-\frac{1}{7}e^{-7\frac{\pi x}{2l}}\cos 7\frac{\pi y}{2l}+\dots\right)$$

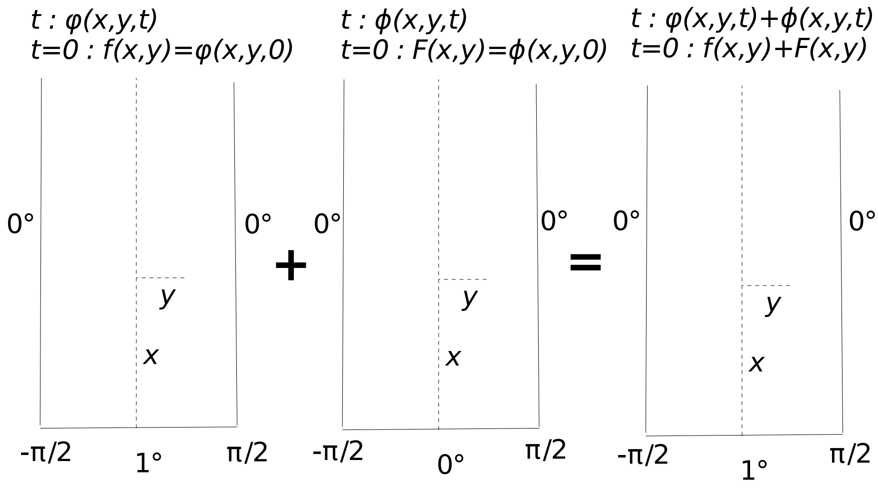
Il peut alors conclure :

> « Cette équation représente exactement le système des températures permanentes dans un prisme rectangulaire infini, compris entre deux masses de glace B et C et une source de chaleur constante. » Fourier 1822, art. 196

### ii) L'unicité de la solution et la décomposition d'une lame

Fourier s'attache ensuite à établir que la solution qu'il a trouvée est la seule, c'est-à-dire que l'équation différentielle, avec ses conditions aux bords, n'admet pas d'autre solution (art. 200-204).

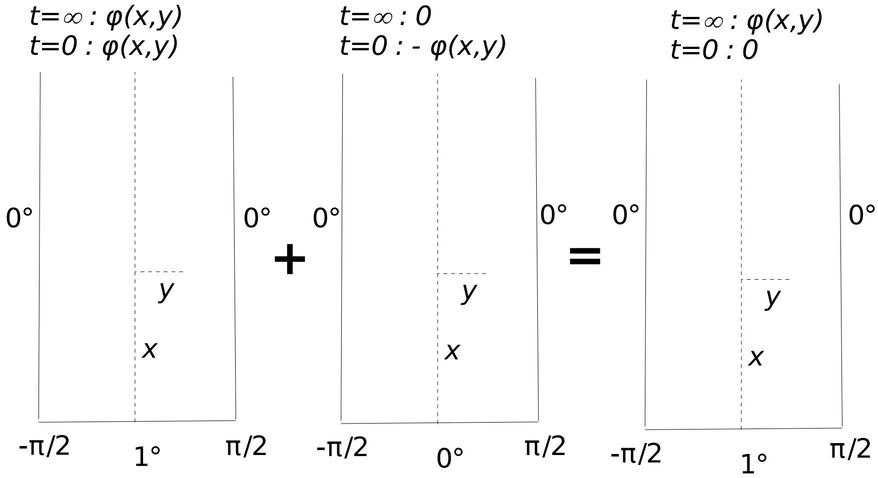
La preuve de cette unicité est fondée sur une sorte de principe de *décomposition* d'une lame en deux autres lames. Voyons quel est ce principe. On considère pour cela deux lames. Les conditions aux bords de la première sont celles du problème (0 sur les bords infinis, 1 sur la base) avec une distribution de chaleur initiale $f(x,y)$ et pour un temps quelconque $\varphi(x,y,t)$ . Les conditions aux bords de la deuxième sont celles du problème, mais avec une température à la base maintenue à 0 au lieu de 1, avec une distribution initiale $F(x,y)$ et pour un temps quelconque $\Phi(x,y,t)$ .




La « somme » de ces deux lames définit une troisième lame dont les conditions aux bords sont les mêmes que celles du problème et la distribution initiale de la chaleur dans la lame est $f(x,y)+F(x,y)$ . Fourier démontre, en revenant au bilan des échanges moléculaires et en faisant intervenir diverses *hypothèses physiques* que son évolution doit être la somme des distributions initiales de chacune des deux lames, soit $\varphi(x,y,t)+\Phi(x,y,t)$ (art. 202) :

> « La proposition précédente s'applique à toutes les questions relatives au mouvement uniforme ou varie de la chaleur. Elle fait voir que ce mouvement peut toujours être décomposé en plusieurs autres dont chacun s'accomplit séparément comme s'il avait lieu seul. Cette superposition des effets simples est un des éléments fondamentaux de la théorie de la chaleur. Elle est exprimée dans le calcul par la nature même des équations générales et tire son origine du principe de la communication de la chaleur. » art. 203

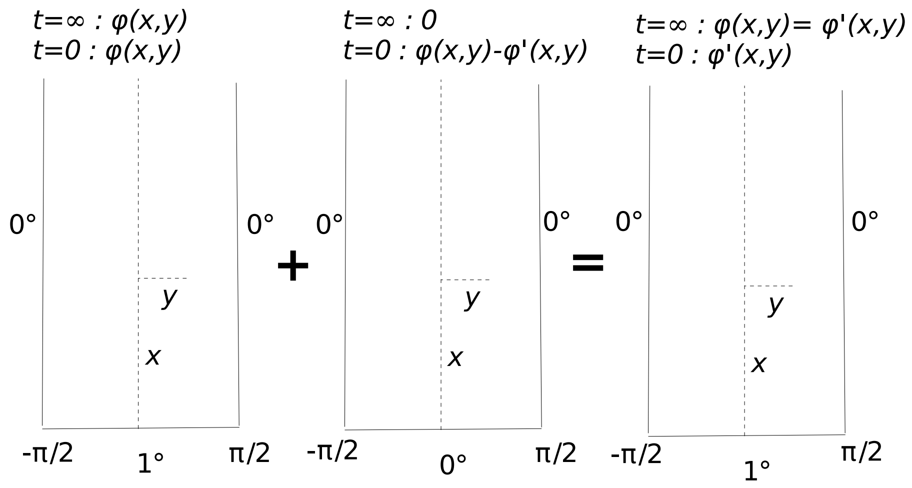
La diffusion de la chaleur dans une lame peut être ainsi décomposée en faisant intervenir la diffusion dans deux autres lames, cette décomposition étant aussi valable pour les états permanents.
Le système étudié peut alors être décomposé en deux lames ayant une distribution de température initiale $\varphi(x,y)$ et $-\varphi(x,y)$ , où $\varphi(x,y)$ est l'état permanent trouvé dont il s'agit d'établir l'unicité.



Comme $\varphi(x,y)$ est solution de l'équation différentielle qui l'évolution du système et correspond donc à un état permanent, la température de la première lame restera constante malgré l'apport de chaleur à la base (l'apport compense exactement les pertes sur les côtés). La seconde lame ayant sa température sur les trois bords maintenue à zéro, Fourier a établi, *en en appelant à une évidence physique*, que la température finale ne pourra être que nulle (art. 201). L'état permanent du système résultant sera donc aussi $\varphi(x,y)$ (203). Il donne alors à ce résultat l'interprétation générale suivante :

> « Si l'on suppose la lame solide dans un autre état initial, la différence entre ce dernier état et l'état fixe forme un état partiel qui disparaît insensiblement. Après un temps considérable, cette différence est presque évanouie, et le système des températures fixe n'a subi aucun changement. C'est ainsi que les températures variables convergent de plus en plus vers un état final, indépendant de l'échauffement primitif. » art. 203

Il est alors possible d'établir l'unicité de la solution. Il suffit de supposer que le problème admette une autre solution $\varphi'(x,y)$ différente de $\varphi(x,y)$ , et de décomposer ce système comme indiquer sur la figure :




Ce système étant stationnaire conservera indéfiniment la température $\varphi'(x,y)$ . Mais d'après sa décomposition cet état permanent devrait être $\varphi(x,y)$ . La solution trouvée doit donc être unique (art. 204).

### iii) Expression finie de la solution

L'unicité ainsi établie, l'étude de l'état permanent d'une lame se termine par la transformation de la série trigonométrique infinie en une expression finie. Pour cela Fourier met la solution trouvée sous la forme $\frac{\pi v}{2} = arctang\, e^{-(x+y\sqrt{-1})} + arctang\, e^{-(x-y\sqrt{-1})}$ , ce qui fait apparaître la forme générale connue de la solution de l'équation différentielle (sans les conditions aux bords) $\varphi(x+y\sqrt{-1})+\psi(x-y\sqrt{-1})$ , forme que nous retrouverons dans la partie de cette étude consacrée à Bernoulli, qu'il peut réduire à « la forme la plus simple sous laquelle on puisse présenter la solution de la question » (art. 205) :

$$\frac{1}{2}\pi v = arctang \frac{2\cos y}{e^{x}-e^{-x}} \quad .$$

### iv) Le développement d'une fonction impaire en série trigonométrique

A ce stade, Fourier a déterminé et établi l'unicité de l'expression de la température permanente dans une lame infinie dont la température sur les deux côtés est nulle et celle à la base est maintenue à 1 :

$$\frac{\pi v}{4} = e^{-x}\cos(y) - \frac{1}{3}e^{-3x}\cos(3y) + \frac{1}{5}e^{-5x}\cos(5y) - \frac{1}{7}e^{-7x}\cos(7y) + \ldots \quad .$$

Cette expression a été obtenue à partir d'une solution générale $v = a\,e^{-x}\cos(y) + b\,e^{-3x}\cos(3y) + c\,e^{-5x}\cos(5y) + d\,e^{-7x}\cos(7y) + \ldots$ de l'équation différentielle dont les coefficients ont été déterminés en tenant compte de la température au bord inférieur, ce qui se traduisait par l'équation :

$$1 = a\cos(y) + b\cos(3y) + c\cos(5y) + d\cos(7y) + \ldots$$

Autrement dit, déterminer le régime permanent à partir de la solution générale de l'équation différentielle revient à trouver le développement en série trigonométrique de la distribution de la température à la base de la lame (ici, uniforme et égale à 1). Déterminer le régime permanent dans une lame dont la température à la base est une fonction arbitraire et non plus constante et égale à 1, conduit dès lors à considérer le problème du développement d'une fonction arbitraire en série trigonométrique :

> « on n'a traité qu'un seul cas d'un problème plus général, qui consiste à développer une fonction quelconque en une suite infinie de sinus ou de cosinus d'arcs multiples. Cette question est liée à la théorie des équations aux différences partielles et a été agitée dès l'origine de cette analyse. Il était nécessaire de la résoudre pour intégrer convenablement les équations de la propagation de la chaleur ; nous allons en exposer la solution. » art. 207

L'étude d'une lame infinie dont la température à la base est maintenue constante et égale à 1 a donc permis de soutenir la thèse pour la fonction constante égale à 1 (et donc en fait pour toutes les fonctions constantes). Fourier poursuit en montrant maintenant qu'une fonction donnée par son développement de Taylor en 0, celui-ci ne comprenant que des puissances *impaires*, peut être développée en une série trigonométrique en sinus. Cela le conduit à résoudre un système infini d'équations linéaires infinies à coefficients constants. Au terme d'un longue calcul faisant intervenir diverses manipulations de séries infinies, Fourier peut donner l'expression des coefficients de la série trigonométrique en fonction des dérivées successives de la fonction en 0 (art. 202) ou en $\pi$ (art. 217)[79]. L'expression en $\pi$, plus simple, conduit à l'expression suivante de $\varphi(x)$ :

$$\frac{\pi}{2}\varphi(x)=s_1\frac{\sin(x)}{1}-s_2\frac{\sin(2x)}{2}+s_3\frac{\sin(3x)}{3}-\ldots \quad \text{(a)}$$

avec :

$$s_n=\varphi(\pi)-\frac{1}{n^2}\varphi''(\pi)+\frac{1}{n^4}\varphi^{IV}(\pi)-\frac{1}{n^6}\varphi^{VI}(\pi)+\ldots$$

En posant[80] :

$$\sigma_n(x)=\varphi(x)-\frac{1}{n^2}\varphi''(x)+\frac{1}{n^4}\varphi^{IV}(x)-\frac{1}{n^6}\varphi^{VI}(x)+\ldots$$

on a :

$$\sigma_n(\pi)=s_n$$

et en dérivant deux fois la relation qui définit $\sigma_n(x)$ , $\sigma_n(x)$ apparaît comme solution de l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre :

$$\sigma_n+\frac{1}{n^2}\frac{d^2\sigma_n}{dx^2}=\varphi(x)$$

Il existe donc deux nombres *a* et *b* tels que :

$$\sigma_n(x)=a\cos nx+b\sin nx+n\sin nx\int_0^x\varphi(u)\cos nu\,du-n\cos nx\int_0^x\varphi(u)\sin nu\,du \quad .$$

Comme $s_n=\sigma_n(\pi)$ , on a :

$$s_1=\sigma_1(\pi)=+\int_0^\pi\varphi(x)\sin x\,dx\,;$$
$$s_2=\sigma_2(\pi)=-2\int_0^\pi\varphi(x)\sin 2x\,dx\,;$$
$$s_3=\sigma_3(\pi)=+3\int_0^\pi\varphi(x)\sin 3x\,dx\,;$$
$$etc.$$

En remplaçant ces valeurs dans (a), on obtient :

(M)[81]

$$\frac{\pi}{2}\varphi(x)=\sin x\int\sin x\,\varphi(x)dx+\sin 2x\int\sin 2x\,\varphi(x)dx+\sin 3x\int\sin 3x\,\varphi(x)dx+\ldots+\sin ix\int\sin ix\,\varphi(x)dx+\ldots$$

La fonction $\varphi(x)$ a ainsi été développée en une série trigonométrique dont les coefficients sont explicitement donnés à partir de la fonction elle-même.

### v) Le développement d'une fonction arbitraire en séries trigonométriques

La possibilité de développer une fonction en série de sinus a ainsi été *démontrée* pour toutes les fonctions dont le développement de Taylor en 0 n'a que des puissances impaires de la variable. La généralisation à une fonction arbitraire, définie entre 0 et π, est faite dans le passage suivant :

> « Cette remarque [c'est-à-dire le fait que les coefficients de la série trigonométrique soient donnés par l'expression intégrale] est importante, en ce qu'elle fait connaître

79 Darboux critique ce calcul mais le corrige aussi facilement (Fourier 1888, notes p. 189 et 191).

80 Fourier n'introduit pas la notion $\sigma_n(x)$ et note ces fonctions $s$ comme les coefficients, sans utiliser d'indice.

81 La relation (M) désigne dans le livre de Fourier la même relation sur l'intervalle [0 ; r] au lieu, comme ici, d'être sur l'intervalle [0 ; π]. Cette distinction étant sans conséquences pour notre propos, (M) désignera ici indifféremment l'une ou l'autre de ces expressions.

comment les fonctions entièrement arbitraires peuvent aussi être développées en séries de sinus d'arcs multiples. En effet, si la fonction $\varphi(x)$ est représentée par l'ordonnée variable d'une courbe quelconque, dont l'abscisse s'étend depuis x=0 jusqu'à x=π, et si l'on construit sur cette même partie de l'axe la courbe trigonométrique connue dont l'ordonnée est y=sinx, il sera facile de se représenter la valeur d'un terme intégral. Il faut concevoir que, pour chaque abscisse x à laquelle répond une valeur de $\varphi(x)$ et une valeur de sin x, on multiplie cette dernière valeur par la première, et qu'au même point de l'axe on élève une ordonnée proportionnelle au produit $\varphi(x)sinx$ . On formera, par cette opération continuelle, une troisième courbe dont les ordonnées sont celles de la courbe trigonométrique, réduites proportionnellement aux ordonnées de la courbe arbitraire qui représente $\varphi(x)$ . Cela posé, l'aire de la courbe réduite, étant prise depuis x=0 jusqu'à x=π, donnera la valeur exacte du coefficient de sin x ; et, quelle que puisse être la courbe donnée qui répond à $\varphi(x)$ , soit qu'on puisse lui assigner une équation analytique, soit quelle ne dépende d'aucune loi régulière, il est évident qu'elle servira toujours à réduire d'une manière quelconque la courbe trigonométrique ; en sorte que l'aire de la courbe réduite a, dans tous les cas possibles, une valeur déterminée qui donne celle du coefficient de sin x dans le développement de la fonction. Il en est de même du coefficient suivant *b* ou $\int \varphi(x)\sin 2x\,dx$ » art. 220.

Fourier explique en détail dans ce passage comment obtenir à partir de la courbe de $\varphi(x)$ les coefficients $\int_0^\pi \varphi(x)\sin x\,dx, \int_0^\pi \varphi(x)\sin 2x\,dx, etc.$ . Il ne justifie pas en revanche que l'on obtienne ainsi un développement de $\varphi(x)$ .
En supposant $\varphi(x)$ développable en série trigonométrique

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \ldots + a_j \sin jx + \ldots$$

et en multipliant par $\int_0^\pi \varphi(x)\sin ix\,dx$ , il peut vérifier que l'on doit avoir $a_i = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(x)\sin ix\,dx$ (art. 221). Si donc la fonction admet un développement en série trigonométrique, ses coefficients seront donnés par la formule intégrale (en acceptant les interversions entre signes d'intégration et de sommation[82]).
A ce stade, Fourier doit encore soutenir son énoncé inaugural au-delà de la famille de fonctions pour laquelle il a été possible de le *démontrer*. Comme Church, Turing, Frege et Descartes il va considérer des exemples cruciaux. Il va ainsi montrer qu'il est possible de développer la fonction *cos x* en somme de sinus (« un exemple qui ne laisse aucun doute sur [cette] possibilité ». L'exemple est extrême puisqu'il consiste à montrer qu'une fonction paire peut être développée en une somme de fonctions impaires, ce qui avait été un des arguments opposés à Daniel Bernoulli pour réfuter la possibilité de tels développements (voir plus bas). Cela étant, même dans ce cas, Fourier ne fait que calculer les coefficients avec les formules intégrales et écrire, sans vérifier l'égalité pour toutes les valeurs de la variable (art. 223) :

$$\frac{\pi}{4}\cos x = \frac{2}{1.3}\sin 2x + \frac{4}{3.5}\sin 4x + \frac{6}{5.7}\sin 6x + \frac{8}{7.9}\sin 8x + \frac{10}{9.11}\sin 10x + \ldots$$

En remplaçant $\int_0^\pi \varphi(x)\sin ix\,dx$ par $\int_0^\pi \varphi(x)\cos ix\,dx$ il peut de la même

82 Cette condition n'est pas anodine puisqu'elle suppose une théorie *générale* de l'intégration qui doit faire intervenir, par un moyen ou un autre, la *totalité* des fonctions à laquelle elle s'applique.

manière, sans plus de justifications et avec les mêmes réserves, obtenir le développement en série de *cosinus* (art. 224-225). Il considère aussi des fonctions discontinues, comme la fonction égale à $\frac{\pi}{2}$ pour $0 \le x \le \alpha$ et nulle pour $\alpha < x \le \pi$ (art. 226), ou encore la fonction égale à $\sin\frac{\pi x}{\alpha}$ pour $0 \le x \le \alpha$ et nulle pour $\alpha < x \le \pi$ (art. 226), une fonction définie par un arc de courbe et une ligne droite (art. 227), un contour de trapèze (art. 228) et la surface d'une pyramide (art. 229). Tous ces exemples illustrent le pouvoir expressif des séries trigonométriques. Fourier peut alors introduire son énoncé inaugural pour les fonctions définies entre -π et +π :

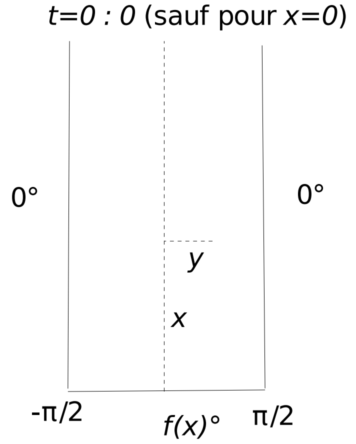
> « Les suites formées de sinus ou de cosinus d'arcs multiples sont donc propres à représenter, entre des limites déterminées, toutes les fonctions possibles, et les ordonnées des lignes ou des surfaces dont la loi est discontinue. Non seulement la possibilité de ces développements est démontrée, mais il est facile de calculer les termes des séries ; la valeur d'un coefficient quelconque dans l'équation
>
> $$\varphi(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \ldots + a_i \sin ix + \ldots$$
>
> est celle d'une intégrale définie, savoir
>
> $$\frac{2}{\pi}\int \varphi(x) \sin ix \, dx \quad .$$
>
> Quelle que puisse être la fonction $\varphi(x)$ , ou la forme de la courbe qui la représente, l'intégrale a une valeur déterminée qui peut être introduite dans le calcul. Les valeurs de ces intégrales définies sont analogues à celle de l'aire totale $\int \varphi(x) dx$ comprise entre la courbe et l'axe dans un intervalle donné, ou à celles des quantités mécaniques, telles que les ordonnées du centre de gravité de cette aire ou d'un solide quelconque. Il est évident que toutes ces quantités ont des valeurs assignables, soit que la figure des corps soit régulière, soit qu'on leur donne une forme entièrement arbitraire. » art. 229

Le développement d'une fonction quelconque définie entre -π et +π (au lieu de l'être entre 0 et +π) se fait avec des séries de sinus *et* de cosinus (art. 233). Fourier peut ainsi conclure par son énoncé inaugural pour des fonctions définies sur un intervalle borné quelconque :

> « Il résulte de tout ce qui a été démontré dans cette Section concernant le développement des fonctions en séries trigonométriques que, si l'on propose une fonction *f(x)* dont la valeur est représentée, dans un intervalle déterminé, depuis x=0 jusqu'à x=X, par l'ordonnée d'une ligne courbe tracée arbitrairement, on pourra toujours développer cette fonction en une série qui ne contiendra que les sinus ou les cosinus, ou les sinus et cosinus des arcs multiples, ou les seuls cosinus des multiples impairs. » art. 235.

### vi) Application à une distribution à la base définie par une fonction arbitraire

Le chapitre se termine en reprenant le problème de la distribution de la chaleur dans une plaque infinie dans laquelle la distribution à la base est maintenant définie par une *fonction arbitraire f(x)*.




La solution générale de l'équation différentielle est toujours la même :

$$v=a_1 e^{-\frac{\pi y}{r}} \sin \frac{\pi x}{r}+a_2 e^{-2\frac{\pi y}{r}} \sin 2 \frac{\pi x}{r}+a_3 e^{-3\frac{\pi y}{r}} \sin 3 \frac{\pi x}{r}+\ldots$$

La condition à la base devient (*y=0*) :

$$f(x)=a_1 \sin \frac{\pi x}{r}+a_2 \sin 2 \frac{\pi x}{r}+a_3 \sin 3 \frac{\pi x}{r}+\ldots$$

La relation (M) permet alors de calculer la valeur des coefficients de la solution générale satisfaisant les conditions aux bords et ainsi d'obtenir dans ce cas aussi l'expression du régime permanent dans la lame (art. 236). Le dernier article est consacré à donner une expression finie (avec néanmoins une intégrale) de la solution.

Le cas de la lame avec à sa base une distribution de chaleur définie par une fonction arbitraire est donné comme une *application* des développements précédents. Et en effet, la relation (M) permet de déterminer les coefficients cherchés et donc de reprendre pour une fonction quelconque la résolution donnée pour la fonction constante égale à 1. Mais ce dispositif est aussi une sorte de *preuve physique* de la possibilité de représenter n'importe quelle fonction $f(x)$ par une série trigonométrique. Cette lame peut en effet être vue comme un *instrument* donnant le développement d'une fonction en série trigonométrique comme il existe des instruments pour en calculer l'intégrale. En admettant que la lame atteindra de fait un état permanent, l'expression de l'état permanent prise en *y=0* donnera bien une représentation de $f(x)$ , en l'occurrence sous la forme d'une série trigonométrique puisqu'il a été démontré que l'expression générale était de cette forme. Ainsi, en appliquant à la base d'une lame infinie une température dont la distribution est donnée par $f(x)$ , l'état permanent atteint par la lame considéré au bord donnera un développement en série de sinus de cette fonction. Toutes les questions mathématiques de convergence des séries trigonométriques ont ainsi un sens physique, à savoir la continuité de la distribution de la chaleur à la base de la lame une fois l'état permanent atteint. La relation (M) ne joue ici plus aucun rôle. Le rôle de son expression dans le soutien de la thèse est remplacé par celui de l'expression du modèle de la lame, soit schématique soit physique, dans lequel il est possible de *placer* l'expression de n'importe quelle fonction. L'expression schématique ou physique de la lame est ainsi l'expression d'une relation fonctionnelle comme la relation (M) en est une expression mathématique.

## 3 - Conformité et dualisme

### *a) Conformité*

Ce qui précède restitue l'étude mathématique de la distribution de la chaleur dans une lame infinie et la manière dont la question de la représentation d'une fonction arbitraire par une série trigonométrique s'inscrit dans celle-ci. Mais à nouveau, l'inauguration ne se réduit pas à soutenir une correspondance. Tout au long de cette étude Fourier s'assure systématiquement de la complète interprétabilité des expressions mathématiques qu'il considère, c'est-à-dire de la conformité des séries trigonométriques avec les phénomènes auxquelles elles se rapportent. Il s'agit bien de soutenir que l'Analyse mathématique "réduit toutes les recherches physiques sur la propagation de la chaleur à des questions de Calcul intégral dont les éléments sont donnés par l'expérience." (art. 1). Il fait donc valoir que les séries trigonométriques donnent des valeurs de la température en un point donné de la lame conformes aux expériences :

> « Il restait encore à comparer les faits avec la Théorie. On a entrepris, dans cette vue, des expériences variées et précises dont les résultats sont conformes à ceux du calculs et lui donnent une autorité qu'on eût été porté à lui refuser dans une matière nouvelle et qui paraît sujette à tant d'incertitude. » Fourier 1822, 10

L'expression de séries offre aussi une représentation de la chaleur qui se diffuse, de son mode fondamental, de ses modes propres etc :

> « Les intégrales que nous avons obtenues ne sont point seulement des expressions générales qui satisfont aux équations différentielles : elles représentent de la manière la plus distincte l'effet naturel, qui est l'objet de la question. C'est cette condition principale que nousa vons eue toujours en vue, et sans laquelle les résultats du calcul ne nous paraîtraient que des transformations inutiles. Lorsque cette condition est remplie, l'intégrale est, à proprement parler, *l'équation du phénomène* ; elle en exprime clairement le caractère et le progrès, de même que l'équation finie d'une ligne ou d'une surface courbe fait connaître toutes les propriétés de ces figures. Pour découvrir ces solutions, nous ne considérons point une seule forme de l'intégrale ; nous cherchons à obtenir immédiatement celle qui est propre à la question. C'est ainsi que l'intégrale qui exprime le mouvement de la chaleur dans une sphère d'un rayon donné est très différente de celle qui exprime ce mouvement dans un corps cylindrique, ou même dans une sphère d'un rayon supposé infini. Or chacune de ces intégrales une forme déterminée, qui ne peut pas être suppléée par une autre. Il est nécessaire d'en faire usage si l'on veut connaître la distribution de la chaleur dans le corps dont il s'agit. En général, on ne pourrait apporter aucun changement dans la forme de nos solutions sans leur faire perdre leur caractère essentiel, qui est de représenter les phénomènes. » (art. 428).

Ainsi, l'expression $v=a e^{-x}\cos(y)+b e^{-3x}\cos(3y)+c e^{-5x}\cos(5y)+d e^{-7x}\cos(7y)+\ldots$ est intégralement signifiante et son analyse est conforme à l'analyse des phénomènes thermiques[83]. Elle rend la propagation de la chaleur visible comme nos oreilles nous font entendre les résonances harmoniques d'un corps sonore (xxiv). Elle ne « laisse rien de vague et d'indéterminé » (xxii). On peut avec elle « déterminer toutes les circonstances du mouvement permanent de la chaleur dans une lame rectangulaire échauffée à son origine » (art. 192), elle « représente exactement toutes les circonstances du mouvement de la chaleur » (art. 206). La conformité ne saurait être affirmée de manière plus explicite. Le réalisme n'est pas en reste puisque selon Fourier cette expression nous fait aussi pénétrer les

83 « L'irradiation de la chaleur a une relation manifeste avec les Tables de sinus ; car les rayons, qui sortent d'un même point d'une surface chauffée, diffèrent beaucoup entre eux, et leur intensité est rigoureusement proportionnelle au sinus de l'angle que fait leur direction avec l'élément de la surface. Si l'on pouvait observer pour chaque instant, et en chaque point d'une masse solide homogène, les changements de température, on retrouverait dans la série de ces observations les propriétés des séries récurrentes, celles des sinus et des logarithmes ; on les remarquerait, par exemple, dans les variations diurnes ou annuelles des températures des différents points du globe terrestre qui sont voisins de la surface. » art. 20

Ou encore : « L'équation

$$v=\frac{4}{\pi}e^{-x}\cos(y)$$

représente ainsi un état du solide qui se conserverait sans aucun changement, s'il était d'abord formé ; il en serait de même de l'état exprimé par l'équation

$$v=\frac{4}{3\pi}e^{-3x}\cos(3y)$$

et en général, chaque terme de la série correspond à un état particulier qui jouit de la même propriété. Tous ces systèmes partiels existent à la fois dans celui que représente l'équation ($\alpha$) ; ils se superposent, et le mouvement de la chaleur a lieu pour chacun d'eux de la même manière que s'il était seul. Dans l'état qui répond à l'un quelconque de ces termes, les températures fixes des points de la base A diffèrent d'un point à un autre, et c'est la seule condition de la question qui ne soit pas remplie ; mais l'état général qui résulte de la somme de tous les termes satisfait à cette même condition.

(...)

On voit donc que les valeurs particulières

$$ae^{-x}\cos(y), be^{-3x}\cos(3y), ce^{-5x}\cos(5y), \ldots$$

prennent leur origine dans la question physique elle-même et ont une relation nécessaire avec les phénomènes de la chaleur. Chacune d'elle exprime un mode simple suivant lequel la chaleur s'établit et se propage dans une lame rectangulaire, dont les côtés infinis conservent une température constante. Le système général des températures se compose toujours d'une multitude de systèmes simples, et l'expression de leur somme n'a d'arbitraire que les coefficients a, b, c, d, ... » art. 191

Citons enfin : « La décomposition dont il s'agit n'est point un résultat purement rationnel et analytique ; elle a lieu effectivement et résulte des propriétés physiques de la chaleur. » Fourier, "Extrait du corps[84]. Il fait valoir que toute sa théorie offre « un exemple singulier des rapports qui existent entre la science abstraite des nombres et les causes naturelles » (art. 20). Cette complète conformité n'est pas propre à sa théorie, c'est toute l'Analyse mathématique qui a ainsi un rapport nécessaire aux phénomènes sensibles :

> « On reconnaitrait encore les mêmes résultats et tous les éléments principaux de l'Analyse générale dans les vibrations des milieux élastiques, dans les propriétés des lignes ou des surfaces courbes, dans les mouvements des astres et dans ceux de la lumière ou des fluides. C'est ainsi que les fonctions obtenues par des différentiations successives, et qui servent au développement des séries infinies et à la résolution numérique des équations, correspondent aussi à des propriétés physiques. La première de ces fonctions, ou la fluxion proprement dite, exprime, dans la Géométrie, l'inclinaison de la tangente des lignes courbes, et, dans la Dynamique, la vitesse du mobile pendant le mouvement varié : elle mesure, dans la Théorie de la chaleur, la quantité qui s'écoule en chaque point d'un corps à travers une surface donnée. L'Analyse mathématique a donc des rapports nécessaires avec les phénomènes sensibles ; son objet n'est point créé par l'intelligence de l'homme ; il est un élément préexistant de l'ordre universel et n'a rien de contingent et de fortuit ; il est emprunt dans toute la nature. » art. 20

Cette conformité générale de l'Analyse mathématique aux phénomènes naturels est aussi un thème central de son « Discours préliminaire » sur lequel nous reviendrons.

### *b) Dualisme*

Cette conformité s'accompagne d'une *séparation* stricte de l'Analyse mathématique et des phénomènes physiques :

> « Les questions relatives à la propagation uniforme ou au mouvement varié de la chaleur dans l'intérieur des solides sont réduites, par ce qui précède, à des problèmes d'Analyse pure, et les progrès de cette partie de la Physique dépendront désormais de ceux que fera la science du calcul. Les équations différentielles que nous avons démontrées contiennent les résultats principaux de la théorie ; elles expriment, de la manière la plus générale et la plus concise, les rapports nécessaires de l'analyse numérique avec une classe très étendue de phénomènes, et réunissent pour toujours aux sciences mathématiques une des branches les plus importantes de la Philosophie naturelle. Il nous reste maintenant à découvrir l'usage que l'on doit faire de ces équations pour en déduire des solutions complètes et d'une application facile. » art. 163

L'Analyse mathématique *ne* fait *pas* partie des phénomènes physiques ; ses expressions ne peuvent se substituer à celles qui composent les phénomènes physiques.

Cette séparation, dont on a vu une mise en place dans *La Géométrie* pour les expressions algébriques, apparaît très nettement à différents niveaux de la structure du texte. Le chapitre I est consacré à la définition et à la mesure des grandeurs physiques. Le chapitre II est consacré à la mise en équation de la distribution de la chaleur dans les différents modèles étudiés : « nous nous

mémoire sur la chaleur", 1807, Hérivel 1980, 55

84 « l'Analyse mathématique a devancé les observations ; elle supplée à nos sens et nous rend en quelque sorte témoins des mouvements réguliers et harmoniques de la chaleur dans l'intérieur des corps. » Fourier 1822, 12.

bornerons d'abord à former les équations différentielles, et nous en donnerons les intégrales dans les Chapitres suivants. » (art. 101). Et les chapitres suivants sont effectivement consacrés à la résolution de ces équations.
Le système d'expressions de l'Analyse mathématique est tenu pour tel que d'une part toutes les questions relatives à la propagation uniforme de la chaleur peuvent y être exprimées et que d'autre part tous les problèmes auxquels ces questions sont réduites peuvent y être complètement résolus, leurs solutions donnant les réponses aux questions posées. Les phénomènes thermiques peuvent ainsi être entièrement saisis par des équations différentielles et décrits par leurs solutions, obtenues par une analyse mathématique qui ne doit plus rien aux phénomènes considérés, menée suivant ses propres règles, mais qui néanmoins en restitue tous les aspects. La conformité de l'analyse mathématique et les phénomènes thermiques va de paire avec leur séparation et l'existence propre et autonome de chacune.
La démonstration de l'unicité de la solution de l'équation différentielle est à cet égard intéressante à considérer. Fourier s'est en effet attaché par des développements assez longs (cinq articles) à démontrer cette unicité qu'il aurait pu inférer de l'unicité phénoménale (la lame n'hésite pas entre plusieurs états permanents...). En montrant que l'un comme l'autre ont une seule solution, il contribue à établir, au lieu de la présupposer, la conformité du problème mathématique (équation différentielle avec conditions aux bords) à la question physique ainsi que la capacité de l'Analyse mathématique à résoudre elle-même les problèmes que l'on peut y formuler. Pour démontrer cette unicité il introduit son théorème sur l'additivité des lois d'évolution de la distribution de la chaleur dans deux lames mais doit, pour le démontrer, faire une analyse moléculaire des échanges thermiques et ainsi revenir aux phénomènes physiques au cours de l'analyse mathématique. C'est là une entorse, la seule dans tout ce chapitre, à la séparation des deux analyses. Fourier ne réussit pas ici à reproduire exactement *dans le cours de son exposé* la séparation entre les phénomènes et leur représentation mathématique. Mais cette entorse intervient dans la démonstration d'un problème qui n'est posé que pour mieux établir cette séparation qui, si elle n'est pas complète, a pu ainsi être poussée un peu plus loin. Elle n'en met pas moins en évidence un défaut d'indépendance du système d'expressions mathématiques qui apparaît en l'occurrence incapable d'établir par ses propres moyens cette unicité.

### c) Le Discours préliminaire : une philosophie du langage mathématique

La *Théorie analytique de la chaleur* est précédée d'un « Discours préliminaire ». Son examen va permettre, un peu comme il avait été possible de le faire pour Frege, de retrouver les caractéristiques des énoncés inauguraux dans la philosophie de la nature défendue par Fourier.
Ce Discours commence par un panorama des progrès de la mécanique rationnelle, en particulier depuis Newton, et des phénomènes naturels dont elle a pu rendre compte : le mouvement et la forme des astres, les marées, les phénomènes vibratoires, la propagation de la lumière, etc. Mais cette mécanique n'a pas jusqu'à présent été appliquée aux phénomènes thermiques qui « composent un ordre

spécial de phénomènes » (xvi) dont Fourier fait valoir l'importance à la fois domestique (chauffage) et climatique : répartition de la température à la surface de la Terre et dans le sol, dans l'atmosphère et dans les mers, et leur évolution dans le temps (en supposant toujours que les températures sont devenues permanentes...). Comme Newton, il entend faire une analyse exempte d'hypothèse[85] sur la nature des phénomènes même si, comme lui aussi, il adopte le modèle moléculaire adapté au calcul différentiel. Ces phénomènes sont aussi supposés être régis par des lois dont il convient de trouver « l'expression mathématique » (xix), de sorte que « tous les phénomènes » soient interprétés « par le même langage » (xxiv).
L'Analyse mathématique est ainsi conçue comme un *langage*. Ce langage donne une expression conforme des phénomènes dont il est tenu séparé. Il est aussi nécessaire à l'expression de leurs lois[86]. Il doit être constitué et ne saurait l'être sans une étude des phénomènes[87] :

> « Il ne peut y avoir de langage plus universel et plus simple, plus exempt d'erreurs et d'obscurités, c'est-à-dire plus digne d'exprimer les rapports invariables des êtres naturels.
>
> Considérée sous ce point de vue, l'Analyse mathématique est aussi étendue que la nature elle-même ; elle définit tous les rapports sensibles, mesure les temps, les espaces, les forces, les températures » xxiii

On retrouve dans ce Discours un dualisme, avec d'un côté la totalité des phénomènes naturels et de l'autre ce langage, l'Analyse mathématique. On retrouve la conformité. Leur différence de nature les rend aussi incommensurables.
Devant rendre compte du fait que ce langage est commun à des phénomènes aussi différents que le mouvement de la lumière dans l'atmosphère, la diffusion de la chaleur et les probabilités, Fourier stipule qu'il nous en fait connaître « les éléments fondamentaux » (xxiii) : s'il y a une expression commune c'est qu'il y a un contenu commun. Et inversement, cette expression commune est là « comme pour attester l'unité et la simplicité du plan de l'univers, et rendre encore plus manifeste cet ordre immuable qui préside à toutes les causes naturelles » (xxiv). Ainsi, en dépit de l'incommensurabilité de ces divers phénomènes entre eux, une totalité uniforme est constituée qui permet de préserver la conformité et la dualité avec l'Analyse mathématique.
Les propos tenus dans une telle introduction peuvent être convenus. En l'occurrence la philosophie du langage mathématique développée ici est en

85 « Les principes de cette théorie sont déduits, comme ceux de la Mécanique rationnelle, d'un très petit nombre de faits primordiaux, dont les géomètres ne considèrent point la cause, mais qu'ils admettent comme résultant des observations communes et confirmées par toutes les expériences. » (xxi).

86 "Les effets de la chaleur sont assujettis à des lois constantes que l'on ne peut découvrir sans le secours de l'Analyse mathématique. La Théorie que nous allons exposer a pour objet de démontrer ces lois ; elle réduit toutes les recherches physiques sur la propagation de la chaleur à des questions de Calcul intégral dont les éléments sont donnés par l'expérience." (art. 1).

87 « L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques. (...) [Elle] est encore un moyen assuré de former l'Analyse elle-même, et d'en découvrir les éléments qu'il nous importe le plus de connaître, et que cette science doit toujours conserver : ces éléments fondamentaux sont ceux qui se reproduisent dans tous les effets naturels » (xxii)

adéquation complète avec les caractéristiques de la *Théorie analytique de la chaleur* qui ont été dégagées. Elle est aussi très semblable à celle que Frege introduit au début de sa *Begriffschrift* quand il veut préciser le statut et le rapport de son idéographie aux contenus conceptuels (*begrifflichen Inhalt*). Il y a ainsi une homologie entre la philosophie ou l'épistémologie déployées, singulièrement concernées par le langage..., et les caractéristiques sémiotiques des textes qu'elles introduisent. On ne saurait préjuger du rôle éventuel et de l'antériorité de cette philosophie du langage sur le développement de la théorie. Il n'en reste pas moins qu'elle ne produit pas ce langage qui est l'œuvre des mathématiciens. Et même quand elle le décrit exactement, elle ne dispense pas non plus de son inauguration. Fourier expose une philosophie du langage conforme au livre qu'il écrit. Mais son livre est pour une large par une inauguration dont sa philosophie ne rend pas compte et dont elle ne lui a pas non plus permis de se dispenser. Une philosophie du langage ne tient semble-t-il pas lieu d'inauguration. Elle ne rend pas non plus compte de la nécessité celle-ci à laquelle pourtant Fourier semble avoir dû se soumettre.

## 4 - Le déroulement de l'inauguration

La présentation des trois premiers chapitres, et plus particulièrement du troisième, a permis d'établir que la *Théorie analytique de la chaleur* est un texte inaugurant la représentation de toutes les fonctions définies sur un intervalle borné par des séries trigonométriques. L'inauguration commence par la considération d'une lame infinie avec une température uniforme et constante à sa base. La détermination du régime permanent de la température dans cette lame aboutit au développement en série trigonométrique d'une fonction constante (et partant, de n'importe quelle fonction constante). Fourier a pu ensuite *démontrer* que la relation (M), qui donne le développement en série trigonométrique de la fonction, est valable pour une classe infinie de fonctions (celles dont le développement de Taylor en 0 ne comprend que des puissances impaires). Il a ensuite donné le développement de quelques fonctions cruciales, comme on parle d'expérience cruciale, n'appartenant pas à cette classe. L'inauguration procède ainsi essentiellement par l'extension progressive de la validité de la relation (M), c'est-à-dire par l'extension de la validité de la formule intégrale des coefficients de Fourier. Nous avons aussi vu que le dispositif de la lame pouvait lui-même être considéré comme faisant partie de l'inauguration. Je voudrais maintenant examiner plus précisément le rôle de la relation (M) dans cette inauguration.

### *a) La relation (M) dans l'inauguration : l'incommensurabilité mise en défaut*

La possibilité de représenter une fonction arbitraire $\varphi(x)$ entre 0 et $\pi$ par une série trigonométrique est essentiellement fondée sur la relation (M)[88] :

(M)

88 Il faut ajouter les deux relations analogues (N) et (P) pour le développement en cosinus ou celui d'une fonction définie sur un intervalle centré en 0. Dans le livre de Fourier, les relations (M), (N) et (P) désignent les relations obtenues en remplaçant l'extrémité $\pi$ par un nombre positif *r* quelconque. Ces distinctions n'ont aucune incidence sur notre propos que nous pouvons présenter à partir de la relation (M) donnée.

$$\frac{\pi}{2}\varphi(x)=\sin x\int_0^\pi \varphi(x)\sin x\,dx+\sin 2x\int_0^\pi \varphi(x)\sin 2x\,dx+\sin 3x\int_0^\pi \varphi(x)\sin 3x\,dx+\ldots$$

Le statut de la thèse de Fourier dépend pour une grande part de celui de cette relation.

Dans aucune des inaugurations que nous avons présentées il n'existe de *procédé uniforme* et *a fortiori* d'expression unique de procédé qui transforme les expressions d'une des totalités en celles de l'autre. Dans le cas de la thèse de Turing, on doit pour chaque nombre ou chaque fonction calculable donner la machine de Turing qui les calcule. Il n'y a pas de machine (logique?!) pour le faire. La conformité du calcul effectué par la machine avec celui qu'elle est supposée reproduire n'est garantie que par notre capacité à les considérer simultanément et à les comparer. Les erreurs dans les exemples de machines données par Turing ou, plus généralement, les erreurs dans les programmes informatiques attestent des problèmes bien réels de conformité posés par cette incommensurabilité. De même la méthode qui permet à Descartes de mettre en équation n'importe quel problème de géométrie n'est ni un problème de géométrie dont il pourrait donner une expression géométrique générale ni un problème d'Algèbre dont il pourrait donner l'équation. Là non plus, aucun dispositif uniforme ne réalise cette mise en équation. Et s'il peut donner pour chaque courbe un instrument qui la trace, il ne dispose pas d'instrument universel susceptible de tracer n'importe quelle courbe à partir de son équation. Frege, Whitehead & Russell doivent aussi construire pas à pas leurs formules faute d'une expression en mesure de le faire pour toute formule logique. Il faut dans chaque cas construire l'expression dont l'existence est soutenue par l'énoncé inaugural.

L'obtention d'un tel procédé uniforme bute immanquablement sur l'incommensurabilité. L'énoncé inaugural y pallie en introduisant directement un système d'expressions sans l'engendrer par une procédure uniforme à partir des expressions de la totalité pré-établie. L'intérêt de la représentation inaugurée et la nécessité de la soutenir résident dans l'impossibilité de donner une expression uniforme du *rapport* entre les deux systèmes d'expressions considérés, impossibilité qui tient, dans les exemples rencontrés, à l'absence d'expression uniforme de la totalité pré-existante. Or, Fourier donne ici une telle expression. La relation (M) est bien en effet l'expression d'un *procédé uniforme* qui convertit n'importe quelle fonction en une série trigonométrique. L'incommensurabilité inhérente à l'inauguration semble de ce fait avoir disparu. Nous devons la retrouver...

### ***b) Une dualité et une incommensurabilité enfouies dans les signes***

Considérons un peu plus précisément la relation (M) :

(M)

$$\frac{\pi}{2}\varphi(x)=\sin x\int_0^\pi \varphi(x)\sin x\,dx+\sin 2x\int_0^\pi \varphi(x)\sin 2x\,dx+\sin 3x\int_0^\pi \varphi(x)\sin 3x\,dx+\ldots$$

Cette expression permet de donner le développement en série trigonométrique de n'importe quelle fonction grâce à une formule, $\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(x)\sin ix\,dx$ , qui donne l'expression de chaque coefficient en fonction de son indice et de la fonction $\varphi(x)$ . Pour obtenir ce développement il n'est ici besoin que d'une expression qui puisse être *substituée* à $\varphi(x)$ . L'expression $\varphi(x)$ intervient comme une variable, variable non pas de grandeurs comme *x*, mais de fonctions[89]. Ces *substitutions* supposent une expression analytique[90] . En revanche, elles ne font pas intervenir la *courbe* de la fonction ni la température que cette fonction représente. Un certain usage et donc aussi un certain sens peut être donné à la relation (M) sans que $\varphi(x)$ ne soit associée à une quelconque expression géométrique ou thermique.

Si l'expression $\varphi(x)$ intervient dans (M) comme expression *à* laquelle on peut substituer d'autres expressions (variable fonctionnelle), elle intervient aussi comme expression *dans* laquelle on peut substituer d'autres expressions (des valeurs). Son statut de variable fonctionnelle vient d'ailleurs de là, et non d'une *convention* par laquelle deux *types* de variables seraient distingués (les lettres romaines étant par exemple associées aux grandeurs et les lettres grecques aux fonctions). Elle intervient en tant qu'occupant d'un lieu (la relation (M) considérée comme une relation fonctionnelle) et constitue elle-même un lieu dans lequel d'autres substitutions peuvent être faites. De plus, comme la calculabilité est, pour Fourier, une propriété nécessaire des fonctions, il est aussi important que $\varphi(x)$ puisse être séparée comme elle l'est à gauche du signe d'égalité de telle sorte que (M) soit aussi un moyen de *calculer* les valeurs $\varphi(x)$ .

La relation (M) est ainsi le lieu d'un double jeu de substitutions. Donner un sens à cette expression suppose de comprendre ces différents jeux et la manière dont ils se coordonnent. La compatibilité et la conjonction de ces deux types de substitution est ce qui permet d'avoir à la fois un développement d'une fonction (variation en *x*) qui soit un développement de n'*importe quelle* fonction (variation en $\varphi$ ). C'est dans la mesure où ces substitutions sont libres, toujours possibles, qu'elles s'étendent à des fonctions arbitraires. La relation (M) n'est pas ici qu'un moyen d'expression transparent, elle fait partie d'un jeu de substitutions qu'elle rend possible et qui, par conséquent, en dépend. La coordination de ces jeux supporte ici la possibilité de développer n'importe quelle fonction en série trigonométrique.

Si le rapport de la fonction à une courbe a pu être suspendu, et il importe de noter qu'il peut l'être, il n'a pas pour autant disparu. La relation (M) s'applique à une fonction arbitraire dans la mesure aussi où les intégrales qui y figurent sont définies pour une fonction *arbitraire.* Or ces intégrales désignent pour Fourier des mesures d'aires[91]. Elles impliquent donc des *courbes*. C'est à partir d'un *courbe quelconque* que Fourier peut inférer l'existence, pour une fonction quelconque,

89 Sur la place des équations fonctionnelles dans l'histoire des mathématiques, voir (Dhombres 1986).

90 C'est d'ailleurs ainsi que nous pourrions définir, s'il le fallait, ce que nous entendons ici par « expression analytique ».

91 « On ne peut résoudre entièrement les questions fondamentales de la théorie de la chaleur, sans réduire à cette forme les fonctions qui représentent l'état initial des températures.

Ces séries trigonométriques, ordonnées selon les cosinus ou les sinus des multiples de l'arc, appartiennent à l'analyse élémentaire comme les séries dont les termes contiennent les puissances successives de la variable. Les coefficients des séries trigonométriques sont des aires définies, et ceux des séries de puissances sont des fonctions données par la différentiations, et dans lesquelles on attribue aussi à la variable une valeur définie.» art. 235. Voir aussi ci-dessus, la citation de l'art. 220.

des intégrales qui figurent dans (M). La possibilité de considérer que les intégrales dans (M) sont définies pour une *fonction arbitraire* fait intervenir la possibilité de se référer à la *totalité des courbes* ou à n'*importe quelle courbe*. Les notions de fonctions et de courbes sont l'objet d'autres associations dans ce texte, mais celle-ci serait sans doute l'une des plus difficiles à éliminer. L'histoire de la théorie de l'intégration après Fourier en donne une bonne indication.

La relation (M) implique donc à la fois les expressions analytiques des fonctions et leurs expressions géométriques (courbes). Il est impossible de rendre complètement compte de l'usage de l'expression $\varphi(x)$ au sein de (M) sans lui reconnaître ces deux contenus[92]. Ainsi, un certain usage, largement attesté dans ce texte, permet de considérer la relation (M) comme une relation fonctionnelle pour laquelle l'expression $\varphi(x)$ suffit. Il n'est alors pas nécessaire d'associer un contenu géométrique aux fonctions. Mais si l'on veut rendre compte complètement de la relation (M), et notamment l'appliquer à une fonction quelconque, il est nécessaire de reconnaître aux fonctions un double contenu, analytique et géométrique[93]. Il est nécessaire de faire intervenir un contenu thermique si l'on tient compte, par exemple, de la dernière section du chapitre. Mais ce contenu thermique, et il importe sans doute de le remarquer, n'est pas nécessaire à la relation (M) comme l'est en l'occurrence le contenu géométrique. A nouveau, la suite de l'histoire de la théorie de l'intégration et des séries de Fourier le confirme[94].

L'incommensurabilité n'a donc pas disparu de la relation (M). L'incommensurabilité désigne en effet l'hétérogénéïté de deux systèmes d'expressions qui empêche ou limite la possibilité d'*exprimer* dans l'un ou l'autre de ces systèmes des relations entre les expressions de l'un et de l'autre. Or, (M) est ici une expression de l'Analyse mathématique qui met en relation $\varphi(x)$, une fonction quelconque, qui appartient à la première totalité de l'énoncé inaugural, et son développement en série trigonométrique, qui appartient à la totalité inaugurée. Il n'y aurait dès lors aucune nécessité à mettre en avant la dualité de l'énoncé inaugural si celle-ci est absente de la relation qui en rend compte. Mais cette dualité se retrouve dans le double contenu qu'il est bien nécessaire de reconnaître à $\varphi(x)$. La dualité, et avec elle l'incommensurabilité, n'ont donc pas disparu, elles ont été enfouies dans le signe de fonction.

92 Pour la description d'autres signes en mathématiques faisant intervenir plusieurs plans de contenu voir (Herreman 2000).

93 « Ce théorème et le précédent conviennent à toutes les fonctions possibles, soit que l'on en puisse exprimer la nature par les moyens connus de l'Analyse, soit qu'elles correspondent à des courbes tracées arbitrairement. » art. 224.

94 La citation suivante de Titchmarsh (1950, 85) atteste de la possibilité de séparer la théorie des séries de Fourier de ses applications, et en particulier de la théorie de la chaleur : «I worked on the theory of Fourier integrals under his [Hardy] guidance for a good many years before I discovered that this theory has applications in applied mathematics, if the solution of certain differential equations can be called « applied » ».
Il serait difficile de trouver une citation semblable dans laquelle la théorie des séries de Fourier serait séparée d'une théorie de l'intégration!

## 5 - Conclusion

Le « théorème » de Fourier soutenant la possibilité de représenter n'importe quelle fonction définie par une série trigonométrique est bien un *énoncé inaugural*. Sa validité repose pour une large part sur la formule des coefficients de Fourier qui donne chaque coefficient du développement en fonction de la fonction considérée. C'est un fait évident d'un point de vue mathématiques qui ressort aussi d'une analyse de l'inauguration des représentations. Du fait de cette relation fonctionnelle il n'y a plus guère de dualité, plus guère d'incommensurabilité, plus guère d'énoncé inaugural mais un théorème. Ni la dualité ni l'incommensurabilité n'ont pourtant disparu. On les retrouve à un autre niveau, dans le rapport que l'expression $\varphi(x)$ a avec d'autres expressions ou contenus que ce soit sa courbe ou la distribution de chaleur qu'elle représente. La dualité et l'incommensurabilité passent ainsi des totalités ou des systèmes (totalité des courbes ou des fonctions, totalité des séries trigonométriques) aux contenus des signes des fonctions[95]. La suite de l'histoire de la théorie des séries de Fourier et de la théorie de l'intégration montrerait comment cette dualité et cette incommensurabilité ont pu, et dans quelle mesure, être éliminées.

Comme l'*expression* des coefficients de Fourier établit une relation entre les fonctions et les développements en séries trigonométriques, l'*énoncé inaugural* n'est pas *nécessaire* comme il l'est en l'absence d'une telle expression. Cet énoncé devient une expression relativement secondaire par rapport à ce qui est déjà et mieux exprimé par la relation (M). Il fait *référence* à cette expression mathématique au lieu d'être la principale expression du rapport entre les deux totalités considérées.

La *Théorie analytique de la chaleur* de Joseph Fourier est bien un texte qui inaugure la représentation des fonctions par des séries trigonométriques. L'inauguration se présente à nouveau comme un argument progressif et inachevé déployé ici tout au long du chapitre III : d'abord le cas particulier de la fonction constante égale à 1, il est ensuite étendu à une classe infinie de fonctions pour laquelle Fourier dispose d'une représentation uniforme et adaptée à son propos, puis il revient à nouveau à plusieurs cas particuliers cruciaux non encore couverts. Cette inauguration est aussi inextricablement liée à la résolution d'un problème particulier : l'étude de la distribution de la chaleur dans une lame infinie. Le développement de la théorie de Fourier détachera cet énoncé inaugural de ce problème particulier. La situation est à bien des égards analogue à celle de *La Géométrie* où le soutien des deux principaux énoncés inauguraux est aussi intriqué à la résolution d'un problème particulier, le problème de Pappus, qui lui aussi ne jouera ensuite plus aucun rôle dans la relation entre les équations algébriques, les problèmes et les courbes. Leur rôle, essentiel, dans ces inaugurations n'a plus dès lors qu'un intérêt historique.

Fourier inaugure ici la totalité des séries trigonométriques et introduit une représentation uniforme des fonctions. Le développement de l'algèbre et du calcul différentiel ont conduit à l'usage d'expressions d'une autre nature que celles des courbes (polynômes, séries entières, fonctions transcendantes, etc.) et en même temps avantageuses pour en exprimer certaines propriétés et les soumettre au calcul. L'examen d'un point de vue inaugural de *La Géométrie* nous a donné

95

l'occasion d'en étudier un moment important. Mais aucun de ces systèmes d'expressions ne pouvait plus, depuis longtemps, prétendre servir à exprimer *toutes* les courbes ou seulement en délimiter la partie utile comme Descartes avait pu prétendre le faire en son temps. L'étude des équations différentielles tout au long du 18ème siècle a conduit à considérer des fonctions dont les expressions à la fois traversent et débordent ces systèmes. Descartes avait contribué à instaurer un système d'expressions remarquable dans lequel le même type d'expressions pouvait représenter aussi bien les *problèmes* que leurs *solutions*. Il n'en est plus de même avec la représentation des problèmes au moyen d'équations différentielles qui sont des expressions distinctes de celles de leurs solutions. L'introduction des équations différentielles rompt cette situation remarquable, qui prévalait aussi, sous une autre forme dans la Géométrie grecque, où les mêmes expressions servent à exprimer les problèmes et leurs solutions. C'est au regard de cette diversité de systèmes d'expressions que doit être appréciée l'uniformité du système formé par les séries trigonométriques.

Le livre de Fourier est entièrement consacré à *soutenir* pas à pas, solide par solide, la possibilité de représenter la distribution de la chaleur dans ces solides par des expressions de l'Analyse mathématique. Il met en œuvre la conviction plus générale que l'Analyse mathématique donne l'expression des lois qui régissent les phénomènes naturels. Ce souci le conduit à veiller systématiquement au sens physique de ses expressions mathématiques et à vérifier leur conformité à ce qu'elles expriment. Toute recherche qui irait à l'encontre de cette conformité apparaît devoir être exclue. Toute généralisation apparaît inutile. Cela conduit à cette philosophie du langage mathématique défendue par Fourier selon laquelle « le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels ». Jacobi opposera à celle-ci dans une lettre à Legendre, datée du 2 juillet 1830, que « le but unique de la science , c'est l'honneur de l'esprit humain » (Jacobi 1881, 454)[96]. L' « épistémologie « naturaliste » » présentée dans le « Discours préliminaire » participe en définitive de la conviction selon laquelle tout phénomène naturel peut être mis en équation différentielle. Pour donner lieu à un énoncé inaugural, il faudrait avoir une représentation relativement uniforme de ces équations différentielles.

96 Les enjeux politiques de cette philosophie du langage ont bien été mis en évidence par Roy Harris dans le cadre de sa critique du « mythe du langage ».

# VI - Daniel Bernoulli et la représentation des sons : un principe physique et un énoncé inaugural[97]

La possibilité de représenter toute fonction par une série trigonométrique a été envisagée avant Fourier. Il sait lui-même que c'est une « conclusion que le célèbre Euler a toujours repoussée » (Fourier 1806, cité in Grattan-Guinness 1972, 183). Les exemples de développements en séries trigonométriques qu'il donne dans ses mémoires ou dans sa correspondance (Herivel 1980) sont autant de contre-exemples aux objections qui ont déjà été avancées contre la généralité de ces séries[98]. L'énoncé inaugural soutenu par Fourier a en effet déjà été énoncé dans les années 1750 au cours de la controverse sur les cordes vibrantes[99]. Dans ce qui suit je voudrais préciser le statut de cet énoncé introduit au cours de cette controverse. Je vais montrer qu'il s'agit d'un énoncé inaugural qui n'a été énoncé que pour être contesté et qu'il n'a été soutenu, pour des raisons parfois très différentes, par aucun de ces mathématiciens. Nous verrons que Bernoulli défend pour sa part un principe physique, et non un énoncé inaugural. Ce sera donc l'occasion d'apprécier leur différence. Mais nous verrons surtout l'incidence qu'a pu avoir sur l'émergence de cet énoncé la représentation du problème des cordes vibrantes par l'équation différentielle trouvée et résolue par D'Alembert. Nous verrons que cet énoncé au lieu d'inaugurer une représentation de la totalité des fonctions (par les séries trigonométriques) est à l'inverse une conséquence de l'introduction d'expressions donnant une représentation de toutes les fonctions.

---

97 Je remercie Olivier Darrigol qui a bien voulu répondre à mes questions et me faire bénéficier de sa vue d'ensemble sur la physique-mathématique de cette période. Je remercie aussi Alexandre Guilbaud et Guillaume Jouve qui ont accepté d'éprouver l'analyse proposée à la connaissance qu'ils ont du contexte, des œuvres de D'Alembert et de la controverse des cordes vibrantes. Les dates indiquées sont toujours celles de la publication qui peut différer sensiblement de la date à laquelle le Mémoire à été écrit et à laquelle il a commencé à circuler. Les écarts induits ne donnent pas lieu à des inversions et n'ont donc aucune incidence pour mon propos.

98 "A l'égard des recherches de D'Alembert et d'Euler ne pourrois-je point ajouter que s'ils ont connu ces développements il n'en ont fait qu'un usage bien imparfait, car ils étoient persuadés l'un et l'autre qu'une fonction arbitraire et discontinue ne pourroit jamais être résolue en séries de ce genre, et il ne paroit pas même que personne eut encore développé une constante en cosinus d'arcs multiples, ce qui est le premier problème que j'ai eu à résoudre dans la théorie de la chaleur. » Fourier à Lagrange (Herivel 1980, 21).

99 Parmi les travaux consacrés à cette controverses on peut citer : Riemann 1854 ; Burkhardt 1908, 10-47 trad. fr. in Jouve 2007, II, 21-51 ; Langer 1947 ; Truesdell 1960 ; Ravetz 1961 ; Youschkevitch 1976 ; Darrigol 2007 ; Jouve 2007, I, 23-25 ; Jouve 2008. L'édition annotée des mémoires de D'Alembert sur le sujet se trouve dans Jouve 2007. Sur les problèmes vibratoires avant cette controverse, voir Cannon & Dostrovsky 1981. Sur D'Alembert et les équations aux différences particelles, voir Guilbaud & Jouve 2009.

## 1 - La thèse sur les séries trigonométriques dans la controverse sur les cordes vibrantes

La controverse sur les cordes vibrantes opposa D'Alembert, Euler, Daniel Bernoulli et Lagrange[100]. La description mathématique d'une corde vibrante débouche en particulier sur la question de savoir s'il est possible de donner une expression mathématique unique décrivant le mouvement continu d'une corde qui peut avoir une forme initiale quelconque, avec notamment des tangentes discontinues (corde pincée), mais aussi celle d'une droite au cours ou à la fin de son excursion. Cette controverse mis aux prises quelques-uns des plus grands mathématiciens de l'époque qui à cette occasion s'opposèrent notamment sur la représentation générale des fonctions et l'extension de leur représentation par des séries entières ou trigonométriques[101].

Au début du siècle, Taylor avait déjà appliqué sa méthode des incréments à l'étude du mouvement d'une corde vibrante[102]. Il avait montré, en se limitant à des oscillations infiniment petites, que la compagne de la cycloïde, c'est-à-dire une sinusoïde, était une solution et avait défendu que la corde devait rapidement prendre cette forme. D'Alembert (1749) revint ensuite sur ce problème. Il donna l'équation différentielle partielle qui le régit. Il montra qu'il existait une infinité de solutions et contesta qu'elles prennent rapidement la forme d'une sinusoïde. Le même problème fut immédiatement repris par Euler (1749) avec des conditions initiales plus générales que celles que D'Alembert admettait et que celui-ci était prêt à admettre. Il démontra que les séries trigonométriques étaient solutions, tout en faisant valoir qu'elles n'en étaient qu'une partie. Daniel Bernoulli a ensuite défendu dans deux mémoires paru dans le même volume de l'*Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin* que les solutions, pour des oscillations infiniment petites, s'obtenaient toutes comme somme, éventuellement infinie, des solutions de Taylor, c'est-à-dire, et en se servant des « dénominations de M. Euler » (Bernoulli 1755, 156), sous la forme de séries trigonométriques (Bernoulli 1755, 157) :

$$y=\alpha\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)+\beta\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)+\gamma\sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right)+\delta\sin\left(\frac{4\pi x}{a}\right)+etc.\quad .$$

Dans un mémoire inséré dans le même volume que ceux de Bernoulli, Euler a contesté que celui-ci ait ainsi donné *toutes* les solutions :

> « M. Bernoulli tire toutes ces excellentes réflexions uniquement des recherches, que feu M. Taylor a faites sur le mouvement des cordes, & soutient contre M. D'Alembert & moi, que la solution de Taylor est suffisante à expliquer tous les mouvements, dont une corde est susceptible ; de sorte que les courbes, qu'une corde prend pendant son mouvement, soit toujours, ou une trochoïde allongée simple, ou un mêlange de deux ou plusieurs courbes de la même espece. » Euler 1755, 196-7

---

100Le terme de « controverse » ne renvoie pas seulement ni principalement à un genre historiographique qui a pu être à la mode ; il est aussi employé par les protagonistes, ainsi D'Alembert écrivait à Lagrange : « J'ai parlé de vous dans ma Préface [*Opuscules mathématiques*, t. IV] comme je le dois à tous égards, à l'occasion de notre controverse sur les vibrations des cordes. » D'Alembert à Lagrange, 29 avril 1768, Oeuvres de Lagrange, vol. 13, 111.

101Ils s'opposèrent aussi sur leurs conceptions du rapport entre mathématiques et physique, et en particulier sur leurs conceptions de la théorie musicale et de l'acoustique (Darrigol 2007).

102 Voir Taylor 1713, 1715 ; Truesdell 1960, 129-132 ; Cannon & Dostrovsky 1981, 15-22.

Il précise un peu plus loin sa critique :

"Mais il y a plus : je n'avois donné cette équation,

$$y = \alpha \sin(\frac{\pi x}{a}) + \beta \sin(\frac{2\pi x}{a}) + \gamma \sin(\frac{3\pi x}{a}) + \delta \sin(\frac{4\pi x}{a}) + etc.$$

que comme une solution particulière de la formule, qui contient en général toutes les courbes, qui peuvent convenir à une corde mise en mouvement ; & il y a une infinité d'autres courbes, qui ne sauroient être comprises dans cette équation. Si M. Bernoulli tomboit d'accord là dessus, il n'auroit pas avancé, que toutes les courbes d'une corde frappée résultoient uniquement de la combinaison de deux ou plusieurs courbes Tayloriennes ; & il auroit reconnu, que le raisonnement fondé sur cette combinaison n'est pas suffisante à fournir une solution complette de la question dont il s'agit." Euler 1755, p. 198

Euler rappelle ici qu'il a aussi trouvé ces solutions mais qu'il ne les tient que pour des solutions particulières et conteste que ce soient là toutes les solutions. Il avance alors l'hypothèse suivante :

« Mais peut-être repliquera-t-on, que l'équation y=αsin πx/2a+ &c. à cause de l'infinité de coëfficiens indéterminés, est si générale, qu'elle renferme toutes les courbes possibles » Euler 1755, 200

C'est là typiquement un énoncé inaugural. Le même que celui énoncé par Fourier. Il oppose la totalité reçue des courbes qu'il est possible de tracer à la totalité des séries trigonométriques. Il affirme leur conformité et celle-ci apparaît impossible à établir puisqu'il n'y a pas d'expression de ces courbes susceptible d'être comparée à celle d'une série trigonométrique.

Dans un manuscrit de 1755, « Observations sur deux Mémoires de M. Euler et Daniel Bernoulli, insérés dans les mémoires de 1753 »[103], D'Alembert répondit conjointement aux solutions et objections de Bernoulli et d'Euler. La série de critiques qu'il adresse à Bernoulli commence par le même énoncé qu'il conteste aussi :

« Il me paroit impossible[104] de prouver que toutes les courbes de la corde vibrante puissent être renfermées dans l'équation

$$y = \alpha \sin(\frac{\pi x}{a}) + \gamma \sin(\frac{3\pi x}{a}) + \delta \sin(\frac{4\pi x}{a}) + etc$$

en supposant même que cette courbe de la corde vibrante soit méchanique et composée de parties égales et semblables situées alternativement au dessus et au dessous de l'axe et liées par la loy de continuité. » D'Alembert , 24 ; Jouve 2007, II, 97-8.

Plus tard, Fourier considèrera à son tour que la solution de Bernoulli suppose l'énoncé inaugural qu'il soutiendra :

103Ce manuscrit a été édité dans (Jouve 2007, II, 77-113). Soumis en 1755 à l'Académie de Berlin, le Mémoire, jugé trop polémique, sera refusé et servira de base au premier Mémoire des *Opuscules* (D'Alembert 1761 ; 2008). Pour l'histoire de ce Mémoire, voir Jouve (2008).

104La suite du texte rend clair que « impossible » veut dire ici que cela est faux.

> « La solution donnée par ce géomètre [Daniel Bernoulli] suppose qu'une fonction quelconque peut toujours être développée en séries de sinus ou de cosinus d'arcs multiples. » Fourier 1822, art. 230

Ces citations d'Euler, de D'Alembert et de Fourier suggèrent que Daniel Bernoulli aurait soutenu que toute courbe pourrait être représentée par une série trigonométrique. Je crois pour ma part que cet énoncé n'a pas été introduit par Bernoulli mais par Euler et D'Alembert (la priorité de l'un ou de l'autre étant sans importance), et seulement pour le contester, pour des raisons par ailleurs différentes[105]. Comme il serait assez fastidieux et de toute façon peu concluant de faire une analyse des Mémoires de Bernoulli pour établir qu'il *ne* soutient *pas* cet énoncé, et que ces Mémoires ne sont pas des textes inauguraux, je vais surtout défendre l'hypothèse que cet énoncé a été introduit par Euler, les mêmes arguments valant aussi, à des nuances sans importance pour notre propos, pour D'Alembert. Ces arguments ne pourront pas établir que Bernoulli n'a pas soutenu cet énoncé. Ils permettront néanmoins d'encadrer assez strictement la manière dont il l'aurait fait et d'établir qu'un tel énoncé ne saurait être confondu avec celui énoncé et soutenu par Fourier.

## 2 - Le principe des systèmes oscillants de Bernoulli

L'analyse des cordes vibrantes proposée par Bernoulli est fondée sur le principe suivant :

> "dans tout système les mouvements réciproques [périodiques] des corps sont toujours un mélange de vibrations simples, régulières et permanentes de différentes espèces." Bernoulli 1755, 195

C'est sur ce principe « d'une très grande étendue » (Bernoulli 1758, 160) qu'il fonde sa « théorie sur la pluralité des vibrations coexistentes dans un seul & même système » (Bernoulli 1758, 157)[106] et à partir duquel il dérive sa « méthode [qui] s'étend à déterminer les vibrations & mouvemens réciproques dans tous les systèmes de corps pour lesquels on peut déterminer les vibrations simples ; c'est-à-dire, telles que toutes les parties fassent des vibrations parfaitement synchrones, & chacune la sienne, suivant la nature des petites oscillations d'un pendule

105Cette position est aussi celle défendue par Burkhardt (1908, 20 ; Jouve 2007, II, 29) .

106« J'ai évité jusque ici les calculs, & j'ai fondé tout mon raisonnement sur le principe confirmé par l'expérience (§6) qu'il peut se faire un mêlange de vibrations dans un seul & même corps sonore, qui soient absolument indépendantes les unes des autres. » Bernouilli 1755, 160 ; « il semble que la Nature n'agit très souvent que par les principes des vibrations isochrones imperceptibles, & infiniment diversifiées, pour produire un grand nombre de Phénomènes. » Bernoulli 1755b, 173 ; « J'ai démontré de plus dans les Mémoires de Berlin, que les vibrations de différens ordres, quels qu'on les prenne, peuvent coéxister dans une seule & même corde, sans se troubler en aucune façon, ces différentes especes de vibration coéxistentes étant absolument indépendantes les unes des autres. De là cette pluralité de sons harmoniques qu'on entend à la fois d'une seule & même corde. Si toutes especes de vibration commencent au même instant, il arrivera que la premiere vibration du premier ordre, la seconde vibration du second ordre, la troisième vibration du troisième ordre &c finiront au même instant. C'est là un synchronisme apparent dans un certain sens, & qui n'est rien moins que général, puisqu'il y a une infinité d'autres vibrations qui ne finissent pas au même instant. » Bernoulli 1767, 283.

simple » (Bernoulli 1758, 158). Ce principe de la composition des vibrations est pour lui « le seul & vrai principe », il est « général, sans contredit, pour les cordes uniformément épaisses (...) jusqu'aux cordes inégalement épaisses » (Bernoulli 1767, 306). Sa validité va d'ailleurs au-delà du problème des cordes vibrantes. Suivant ce principe, tous les sons, harmonieux ou non, se composent d'harmoniques qui peuvent être isolées comme Newton a séparé les rayons primitifs qui composent la lumière (Bernoulli 1758, 158). Mais il s'agit d'une *principe physique,* un « principe sur la coexistence des vibrations » (Bernoulli 1758, 160), et non d'un *énoncé inaugural*. Il y a bien réalisme, il y a bien inauguration, mais il n'y aucun dualisme ni aucune incommensurabilité. La question de la conformité se pose dès lors aussi différemment.

Le Mémoire de Bernoulli publié en 1755, ainsi que les autres sur le même sujet, sont en grande partie consacrés à défendre ce *principe*. Bernoulli donne ainsi divers arguments tendant à montrer qu'un son est bien la superposition de sons fondamentaux qui s'entendent distinctement et se combinent sans se mélanger[107]. Il défend qu'il obtient ainsi toutes les solutions possibles et affirme que les solutions proposées par D'Alembert et Euler sont de cette forme[108], qu'elles sont donc déjà contenues dans les siennes[109], et qu'il peut ainsi leur donner un sens physique[110]. L'exemple d'une corde avec 1001 ventres lui permet de montrer aussi la diversité de ses courbes[111]. Il défend inversement de manière récurrente que les

107« Effectivement tous les Musiciens conviennent, qu'une longue corde princée donne en même tems, outre son ton fondamental, d'autres tons beaucoup plus aigus ; ils remarquent sur tout le mêlange de la douzième & de la dix-septième majeure : s'ils ne remarquent pas aussi distinctement l'octave & la double octave, c'est n'est qu'à cause de la trop grande ressemblance de ces deux tons avec le ton fondamental. Voilà une preuve évidente, qu'il se faire dans une seule & même corde un mêlange de plusieurs sortes de vibrations Tayloriennes à la fois. On entend pareillement dans le son des grosses cloches un mêlange de tons differens. Si l'on tient par le milieu une verge d'acier, & qu'on la frappe, on entend à la fois un mêlange confus de plusieurs tons, lesquels étant appréciés par un habile Musicien se trouvent extrémement desharmonieux, de sorte qu'il se forme un concours de vibrations, qui ne commencent & ne finissent jamais dans un même instant, sinon par un grand hazard : d'où l'on voit que l'harmonie des sons, qu'on entend dans une même corps sonore à la fois, n'est pas essentielle à cette matière, & ne doit pas servir de principe pour les systèmes de Musique. L'air n'est pas exemt de cette mutliplicité de sons coëxistans : il arrive souvent qu'on tire deux sons differens à la fois d'un tuyau ; mais, ce qui prouve le mieux, combien peu les différentes ondulations de l'air s'entre-empêchent, est qu'on entend distinctement toutes les parties d'un concert, & que toutes les ondulations causées par ces différentes parties se forment dans la même masse d'air sans se troubler mutuellement, tout comme les rayons de la lumière, qui entrent dans une chambre obscure à travers une petite ouverture, ne se troublent point. » Daniel Bernoulli 1755, 152-3

108« si j'ai bien compris leurs énoncés, toutes les nouvelles courbes qu'ils donnent, sont comprises dans notre construction, & sont un simple mêlange de plusieurs especes de vibrations, dont chacune a part se fait suivant les loix décrites par M. Taylor. Mais il me semble que ce n'est là qu'une espece de composition de mouvement, qui ne peut donner aucune amplification à la théorie de M. Taylor. » Bernoulli 1755, 155 ; « Voyons encore si les nouvelles courbes trouvées par M. Euler, sont comprises dans notre remarque. » Bernoulli 1755, 156.

109« Mais il me semble que ce n'est là qu'une espèce de composition de mouvement, qui ne peut donner aucune amplification à la théorie de M. Taylor. » 155

110« mon intention n'a été principalement que d'exposer ce que les nouvelles vibrations de Mrs D'Alembert & Euler ont de physique » D. Bernoulli, Réflexions et éclaircissements sur les nouvelles vibrations des cordes exposées dans les Mémoires de l'Académie de 1747 et 1748, Histoire Acad. roy. Sc., 9, 173-195, 1755, p 158

111« Pour mieux sentir l'incongruïté d'une telle amplification, nous combinerons la courbe fondamentale de M. Taylor, qui est représentée par la première figure, avec la figure anguiforme

corps sonores peuvent produire tous les sons correspondant à ses séries[112]. Et c'est fort de cette conviction que son principe rend compte de la composition des sons qu'il discute les solutions proposées par les deux Géomètres[113].
Que Bernoulli fonde sa résolution du problème des cordes vibrantes sur son principe de composition de vibrations fondamentales et que ce problème contribue à établir la validité de ce principe semble difficilement contestable. Mais ce que Bernoulli « soutient » avant tout, c'est ce principe. Ce « soutien » n'est pas un au sens nous l'entendons ici. Ses arguments sont essentiellement physiques, étayés par des expériences sonores, pour défendre un principe physique. Quand ils ne sont pas exclusivement physiques, comme quand il esquisse une démonstration de l'interpolation d'une courbe par des sinusoïdes pour répondre à ses détracteurs, ils sont alors exclusivement géométriques et il n'y a pas plus de dualité.

## 3 - Un énoncé exorbitant

Ce qui rend un remarquable un énoncé inaugural c'est le fait de soutenir l'existence d'une représentation uniforme et conforme d'une totalité. Il y a là une prétention exorbitante. Un énoncé inaugural, même pour celui qui le soutient, reste un énoncé incroyable. Celui qui l'énonce doit en répondre et d'une certaine manière y faire face. Chacun des textes inauguraux que nous avons considérés y répond explicitement. Fourier, par exemple, ne manque pas de développer une succession d'arguments spécifiques pour soutenir son énoncé inaugural. Son texte témoigne d'une démarche inaugurale explicite et dont la finalité ne fait pas de doute. De même, tout son « Discours préliminaire » présente une philosophie du langage mathématique qui répond à cette prétention exorbitante, étendue à toute l'Analyse mathématique. Il en est de même des articles de Church, de Turing, de la *Begriffschrift* ou encore de *La Géométrie*. On ne trouve dans les Mémoires de Bernoulli aucune reconnaissance de ce caractère exorbitant, aucun argument n'est donné pour y répondre. Ses arguments sont donnés pour défendre un *principe*

Taylorienne qui auroit 1001 ventres » 155

112« Ma conclusion est, que tous les corps sonores renferment en puissance une infinité de sons, & une infinité de manières correspondantes de faire leurs vibrations régulières ; enfin, que dans chaque différentes espece de vibrations les infléxions des parties du corps sonore se font d'une manière différente. » Daniel Bernoulli 1755, 151

113« aussi n'est-ce à mon avis que sous cette forme que les vibrations peuvent devenir régulières, simples, et isochrones, malgré l'inégalité des excursions. Avec cette idée, que j'ai toujours euë, je ne pouvois qu'être surpris de voir dans les Mémoires des années 1747 & 1748, une infinité d'autres courbures comme douées de la même propriété ; il ne me falloit pas moins que les grands noms de Mrs D'Alembert & Euler ; que je ne pouvois soupçonner d'aucune inattention, pour examiner s'il n'y auroit pas quelque équivoque dans l'aggrégation de toutes ces courbes avec celle de M. Taylor, & dans quel sens on pourroit les admettre. J'ai vû aussi-tôt, qu'on ne pouvait admettre cette multitude de courbes que dans un sens tout à fait impropre ; je n'en estime pas moins les calculs de Mrs D'Alembert & Euler, qui renferment certainement tout ce que l'Analyse peut avoir de plus profond & de plus sublime ; mais qui montrent en même tems, qu'une analyse abstraite, qu'on écoute sans aucun examen synthétique de la question proposée, est sujette à nous surprendre plutôt qu'à nous éclairer. Il me semble à moi, qu'il n'y avoit qu'à faire attention à la nature des vibrations simples des cordes, pour prévoir sans aucun calcul tout ce que ces deux grands Géométres ont trouvé par les calculs les plus épineux & les plus abstraits, dont l'esprit analytique se soit encore avisé. » Daniel Bernoulli 1755 p. 148

*physique* sur la nature des phénomènes vibratoires et non pour inaugurer la représentation des fonctions par des séries trigonométriques.

## 4 - L'énoncé d'Euler et l'introduction de l'expression d'une fonction arbitraire

Pourtant l'énoncé inaugural soutenu par Fourier a bien été énoncé avant Fourier. Il l'a été par Euler après que Bernoulli ait répondu aux Mémoires de D'Alembert et à celui d'Euler publié à leur suite. Je voudrais maintenant rendre compte du fait qu'Euler ait introduit cet énoncé.
Dans son Mémoire de 1749, D'Alembert a montré que les solutions de l'équation aux dérivées partielles décrivant le mouvement d'une corde vibrante sont toutes les courbes d'équation $y=\Psi(t+x)-\Gamma(t-x)$ où $\Psi$ et $\Gamma$ sont des *fonctions quelconques*. Comme les extrémités de la corde sont aussi fixes, les solutions doivent de plus être de la forme $y=\Psi(t+x)-\Psi(t-x)$, avec $\Psi$ $2l$-périodique ($l$ longueur de la corde). D'Alembert considère aussi le cas particulier où la figure initiale de la corde est une droite, ce qui impose en plus que la fonction $\Psi$ soit paire. Il peut ainsi montrer comme il le voulait qu'il est possible d'engendrer une *infinité* de fonctions satisfaisant ces conditions en reportant au-dessus et en-dessous de l'axe une portion de courbe définie par une fonction génératrice qui n'est pas nécessairement sinusoïdale. Euler (1749, 1755) reprend ces résultats et expose en détail la construction d'une solution en reportant alternativement sous l'axe et au-dessus *n'importe quelle* courbe s'annulant à ses deux extrémités.
L'objectif de D'Alembert était de montrer qu'il existait une infinité de solutions en plus de celles trouvées par Taylor. Ce qu'il réussit à faire. Euler a repris sa démarche mais en faisant valoir qu'il est non seulement possible d'obtenir une infinité de solutions mais aussi de partir de *n'importe quelle* courbe génératrice pour les obtenir. Il souligne lui-même à plusieurs reprises cet aspect :

> « Or, sans faire encore attention à ces propriétés, & m'arrêtant uniquement à l'équation (ddy/dt2)=cc(ddy/dx2), il est important de remarquer, que les deux courbes ES & FT sont absolument arbitraires, & qu'on les peut prendre à volonté; car, quelles que soient ces deux courbes, si nous y prenons les abscisses EQ=x+ct & FR=x+ct [il faut lire FR=x-ct], & que nous posions y=QS+RT, ou bien y=n(QS+RT), il est certain que cette valeur satisfait à notre équation ; ce qu'il serait aussi aisé de prouver indépendamment de l'analyse, que je viens de développer. Or, ce qui est le principal, ces deux courbes appliquées de la manière enseignée, satisfont également, soit qu'elles soient exprimibles par quelque équation, ou qu'elles soient tracées d'une manière quelconque, de sorte qu'elles ne puissent être assujetties à aucune équation. Le Lecteur est prié de réflêchir bien sur cette circonstance, qui contient le fondement de l'universalité de ma solution, contestée par M. D'Alembert. » Euler 1755, 213-4

Euler fait aussi valoir que la construction de la solution peut se faire à partir de n'importe quelle *figure initiale de la corde* :

> « Réciproquement donc, dès qu'on connoit la figure initiale, qu'on aura donnée à la corde avant que de la relâcher, rien ne sera plus aisé que de décrire notre courbe infinie B'D'ADB'D & qui nous fera connoitre le mouvement, que la corde pursuivra. On tracera la courbe AMDB, égale & semblable à la figure initiale de la corde, & on en réïtérera la construction, tant vers la gauche au delà du point A, que vers la droite au delà du point B, alternativement au dessus & au dessous de l'axe, en sorte que

> partout les bouts qu'on a joints ensemble soient les mêmes Cette construction a toujours lieu, de quelque nature que soit la figure initiale proposée de la courbe, & il ne s'agit que de la portion ADB; laquelle quand elle-même auroit d'autres continuations de part & d'autre en vertu de sa nature, elles n'entrent en aucune considération. Ainsi, si la figure ADB étoit un arc de cercle, sans se soucier de la continuation naturelle du cercle, on répétera la description de ce même arc de cercle ADB à l'infini alternativement au dessus & au dessous de l'axe ; & la même régle a toujours lieu, de quelque nature que puisse être la figure initiale de la corde. » Euler 1755, 216-7

On encore :

> « Mais, de la manière que je viens de conduire la solution, il n'est pas nécessaire, que la courbe directrice soit exprimée par quelque équation, & la seule considération du trait de la courbe suffit à nous faire connoitre le mouvement de la corde, sans l'assujettir au calcul. » Euler 1755, 217

L'extension opérée par Euler est aussi reconnue par Lagrange :

> « M. Euler est, je crois, le premier qui ait introduit dans l'Analyse ce nouveau genre de fonctions, dans sa solution du problème *de chordis vibrantibus* » Lagrange 1760, œuvres, 1, 158.

La solution du problème donnée par D'Alembert, $y=\Psi(t+x)-\Psi(t-x)$, comprend l'expression d'une fonction *arbitraire*. Cette expression introduit une correspondance entre la totalité des solutions de ce *problème particulier* et la *totalité des fonctions*. Le problème de la corde vibrante est donc de ce point de vue comparable au problème de Pappus puisque sa solution implique dans un cas toutes les fonctions, et de manière justifiée, dans l'autre toutes les équations polynomiales. La solution $y=\Psi(t+x)-\Psi(t-x)$ implique cette totalité sans que celle-ci n'ait besoin et n'ait d'autre expression qu'une variable de fonction $\Psi$, c'est-à-dire un simple symbole de fonction tenant lieu de n'importe quelle fonction. Il est ainsi possible d'exprimer n'importe quelle fonction sans avoir de système d'expressions (analytiques) établi pour leur totalité. Dès lors quand Bernoulli affirme que son principe lui permet de déterminer que toutes les solutions du problème sont des séries de sinus, cela implique immédiatement pour D'Alembert et Euler que n'importe quelle fonction devrait être une somme de sinus. Ils en tirent l'un et l'autre la conséquence et introduisent l'énoncé afférent, mais sans le soutenir. L'introduction de cet énoncé apparaît ainsi comme une *conséquence* du fait que la solution donnée par D'Alembert implique l'expression d'une fonction quelconque. C'est l'introduction d'une variable parcourant *toutes* les fonctions qui transforme l'affirmation de Bernoulli en une affirmation sur la possibilité de représenter toutes les fonctions par des séries trigonométriques. La *totalité des fonctions* s'introduit à cette occasion. Considérer *toutes* les fonctions n'est pas un phénomène naturel qui serait inhérent à n'importe quelle pratique mathématique ; c'est au contraire un phénomène remarquable dont il importe de repérer les conditions, les modalités et le moment de leur introduction.

Dans le Mémoire de Bernoulli de 1755 la *totalité des fonctions* n'intervient d'aucune manière. A un endroit où quelqu'un qui inaugurerait une telle représentation y aurait sans doute fait référence, Bernoulli écrit lui « Après ces remarques il sera facile de construire une infinité de courbes initiales [et non toutes!] à la corde AB avec cette condition, que chaque point de la corde arrive quelquefois en même tems à un point de repos instantané, & de donner la loi générale pour toutes ces courbes sans aucun calcul préalable. » (Bernoulli 1755, 153).

Euler introduit son énoncé au cours de la *discussion* des différentes solutions proposées. Il n'est utile ni à la mise en équation différentielle, ni à sa résolution. Il est une conséquence du rapprochement, c'est-à-dire de la considération conjointe de la solution proposée par Euler, à la suite de celle de D'Alembert, et de celle proposée par Bernoulli. Il n'est utile ni à l'une, ni à l'autre.

L'expression d'une courbe ou d'une fonction *arbitraire* intervient aussi avec la *figure initiale* de la corde. Avant de considérer le rôle que cette figure initiale *arbitraire* peut aussi jouer, il convient de préciser le rapport du problème des cordes vibrantes à son équation différentielle.

## 5 - Le problème des cordes vibrantes et son équation différentielle

La différence de statut et de la place accordée à l'équation aux dérivées partielles est l'indice de certaines différences entre les quatre mathématiciens. Elle permet en particulier préciser la différence entre ce que Lagrange appelle l'« examen synthétique » de Bernoulli (Lagrange 1759, œuvres, 1, 95) et l'« Analyse abstraite » proposée par D'Alembert, Euler et lui-même (Lagrange 1759, Oeuvres, I, 70). Il existe à cet égard aussi des différences entre ces trois mathématiciens, mais il s'agit de nuances au regard de ce qui, sur ce point, les oppose à Daniel Bernoulli[114]. Le problème considéré par Daniel Bernoulli a toujours été et restera celui de la description mathématique du mouvement d'une corde vibrante (en liaison avec des considérations acoustiques). Le souci d'en donner une solution mathématique conditionne l'interprétation et la formulation du problème et l'oblige par exemple à considérer des oscillations infinitésimales. Mais la représentation du problème au moyen d'une équation différentielle obtenue par D'Alembert modifie le traitement du problème et l'acception qui peut être donnée de sa résolution. L'introduction d'une équation différentielle contribue à séparer plus distinctement deux temps, celui de la mise en équation et celui de sa résolution[115]. Au cours de la mise en équation sont prises en compte les données et les hypothèses physiques. Au terme de celle-ci, le problème est réduit à une équation différentielle avec des conditions initiales. La résolution de cette équation différentielle devient un nouveau problème qui se substitue au précédent et qui doit être résolu conformément aux principes du calcul différentiel et intégral. Les données physiques utilisées sont supposées avoir toutes été converties en grandeurs et relations mathématiques ; l'énoncé du problème (résoudre telle équation différentielle avec telles conditions initiales) et sa résolution sont dès lors coupés du problème physique d'origine, et aucune considération physique n'intervient plus, sinon marginalement, dans sa résolution.

114 Sur D'Alembert et les équations aux dérivées partielles, voir Guilbaud & Jouve 2009.

115 La séparation de ces deux temps est moins marquée chez D'Alembert qu'elle ne l'est chez Euler et Lagrange, car il sépare aussi moins que les autres les arguments mathématiques des arguments polémiques ; les commentaires se mêlent à la résolution du problème. Ces différences n'invalident cependant pas les remarques qui suivent.

L'équation différentielle, avec ses conditions initiales, a le statut d'*un énoncé complet de problème mathématique,* c'est-à-dire d'un énoncé dont la résolution relève entièrement de l'Analyse mathématique. L'équation constitue dans ce cas un problème d'un autre genre que celui des cordes vibrantes. Elle marque dans le processus de résolution et le texte qui l'expose une séparation entre des développements physico-mathématiques et des développements purement mathématiques[116]. Cette complétude se traduit notamment par une autonomie de l'équation différentielle qui permet à une même équation, ou système d'équations, d'être associée à différents problèmes physiques. Lagrange nous en donne un exemple en réduisant le problème de la corde vibrante et celui de la propagation du son au même système d'équations du premier ordre[117]. Après avoir dégagé ces équations par une analyse physico-mathématique nécessairement propre à chacun des deux problèmes et exposée dans deux chapitres distincts, il peut ensuite en proposer dans *un même* chapitre une résolution commune qui ne repose plus que sur des développements strictement mathématiques (Lagrange 1759, Oeuvres, I, 72-90). Nous sommes alors à peu près assurés qu'aucun retour subreptice à la physique n'interviendra. L'argument est semblable à celui de Frege pour établir l'analyticité de propositions Arithmétiques à partir de leur représentation idéographique. Une telle séparation est aussi explicite quand Euler écrit par exemple : « La question mécanique proposée se réduit à ce problème analytique, de chercher des fonctions *r* & *s* de *x* & *t*, telles que ces formules differentielles $rdx+sdt$ , & $sdx+\frac{2M}{FA}rdt$ , deviennent intégrables » (Euler 1750, 76-7). Elle se retrouve plus clairement encore dans le mémoire suivant quand, après avoir ré-exposé l'analyse qui permet d'obtenir l'équation différentielle trouvée par D'Alembert, Euler écrit : « Voilà donc à quoi le problème sur le mouvement de la corde est réduit : il s'agit de trouver pour *y* une telle fonction des deux variables *x* & *t*, qui satisfasse à cette équation : $(\frac{ddy}{dt^2})=\frac{Fa}{2M}(\frac{ddy}{dx^2})$ , outre qu'elle renferme les propriétés marquées cy-dessus » (Euler 1755, 208). Les équations sont différentes, mais toutes marquent une coupure nette entre deux moments bien distincts de l'analyse. Il n'est pas difficile de donner de nombreux autres exemples de cette séparation et de l'affirmation conjointe de la conformité de l'équation à un problème physique[118]. La *Théorie analytique de la chaleur* de Fourier nous en a déjà donnés[119]. On reconnaît dans cette séparation un dualisme et une conformité

116Je n'entends ici comme ailleurs qu'indiquer une opposition, et nullement introduire un jugement normatif sur ce qui serait ou ne serait pas des mathématiques.

117« Il est visible que toutes ces équations [du problème de la corde vibrante, $\frac{d^2y_{m-1}}{dt^2}=\frac{2Ph}{MT^2}\frac{-2y_{m-1}+y_{m-2}}{r}$ ] sont entièrement semblables à celles que nous avons trouvées pour les mouvements des corps élastiques, et qu'il n'y a qu'à faire P=E, pour qu'elles deviennent tout à fait les mêmes ; d'où il s'ensuit que les deux problèmes qui y répondent sont de même nature, et qu'en en résolvant un on résout l'autre en même temps. » Lagrange 1759, Oeuvres, vol. 1, 60.

118De D'Alembert, on peut citer par exemple : "On pourra aussi, en généralisant la solution de M. Taylor avec M. Daniel Bernoulli, supposer que la corde prend à la fin la figure d'un assemblage de trochoïdes. Mais encore une fois toutes ces solutions du problême ne seroient qu'hypothétiques & précaires, & non pas (comme nous le demandons) mathématiques & générales" D'Alembert, Jean le Rond (1768). Nouvelles Réflexions sur les vibrations des Cordes sonores. *Opuscules, t.IV*, 150.

119L'autonomie de l'équation différentielle ressort par exemple clairement de cette citation : « On voit, par exemple, qu'une même expression, dont les géomètres avaient considéré les propriétés semblables à ceux d'un énoncé inaugural mais rapportés à une expression au lieu de l'être à un système d'expressions. On ne peut néanmoins manquer de rapprocher ce rapport tout à fait remarquable de l'équation différentielle au problème, ou au phénomène physique, à la fois séparés et conformes, du rapport inauguré par Descartes entre les équations polynomiales et les problèmes, ou les courbes.

Rien de semblable ne se retrouve dans les mémoires de Bernoulli. On peut bien sûr y repérer une équation différentielle, mais celle-ci ne constitue pas un problème mathématique complet et autonome susceptible de se substituer au problème de la corde vibrante. Elle ne marque pas une séparation entre deux moments distincts de la résolution. Elle n'est qu'une étape parmi bien d'autres d'une analyse physico-mathématique qui s'étend sur l'ensemble de la résolution du problème.

La séparation opérée par l'équation différentielle dans la résolution du problème de la corde vibrante est un indice du statut de la démarcation entre analyse physique et mathématique. La lecture de ces mémoires et de la correspondance entre ces mathématiciens ne laisse pas de faire apparaître une opposition bien établie entre Daniel Bernoulli et les trois autres mathématiciens. La controverse implique et révèle aussi bien sûr bien d'autres désaccords, y compris entre D'Alembert, Euler et Lagrange sur le principe de continuité ou même sur « la partie du calcul qui est assujettie à des lois rigoureuses et sur lesquelles il n'est pas possible d'avoir deux avis »[120], c'est-à-dire sur les principes mêmes du calcul différentiel et intégral. Cela contribue à donner à cette controverse son caractère exceptionnel. Mais l'opposition entre Daniel Bernoulli et les trois autres mathématiciens tient, en partie, à la nature de leurs démarches respectives, et en particulier au rôle différent des mathématiques dans celles-ci[121] et dont la démarcation par l'équation différentielle apparaît comme un des indices objectifs.

D'Alembert, Euler et Lagrange ne s'entendent pas entre eux sur la place exacte ou

---

abstraites et qui, sous ce rapport, appartient à l'Analyse générale, représente aussi le mouvement de la lumière dans l'atmosphère, qu'elle détermine les lois de la diffusion de la chaleur dans la matière solide, et qu'elle entre dans toutes les questions principales de la Théorie des probabilités. » Fourier 1822, Discours préliminaire, xxiii.

La conversion de caractéristiques physiques en grandeurs mathématiques ressort de cette citation : « Ces trois qualités élémentaires [la capacité, la conductibilité intérieure et extérieure] sont représentées dans nos formules par des nombres constants » Fourier 1822, 7.

La réduction du problème initial en une équation différentielle est aussi explicite : « Dès qu'ils sont déterminés [la capacité, la conductibilité intérieure et extérieure], toutes les questions relatives à la propagation de la chaleur ne dépendent que de l'analyse numérique. » Fourier 1822, 7. Et de manière encore plus explicite : « On peut employer l'équation [ $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$ ] pour déterminer toutes les circonstances du mouvement permanent de la chaleur dans une lame rectangulaire échauffée à son origine. » Fourier 1822, art. 192

120 Delambre, « Notice sur la vie et les ouvrages de M. Le Comte J.-L. Lagrange », Oeuvres de Lagrange, I, xiv.

121 Lagrange décrit la voie suivie par Bernoulli comme « une espèce d'induction » (Lagrange 1759, œuvres, I, 69).

le statut de cette démarcation ; D'Alembert en particulier accepte volontiers des limites fixes et plus étroites aux mathématiques que les deux autres géomètres. Mais ils partagent tous les trois l'idée d'une telle démarcation qui intervient dans leur résolution du problème de la corde vibrante.

Si la présence de cette séparation dans un texte ne suffit pas à établir son caractère inaugural, il semble difficile qu'un texte puisse inaugurer une représentation comme celle des fonctions par des séries entières sans manifestation de cette séparation. Et si Bernoulli avait inauguré les séries trigonométriques, l'absence d'une telle séparation marquerait sans doute une différence entre son énoncé et celui soutenu par Fourier. Comme cette dualité est en revanche bien présente dans les Mémoires d'Euler, son énoncé, avéré, peut lui bien être semblable à celui de Fourier. Mais il ne fait aussi aucun doute qu'il ne le soutient pas.

## 6 - Conditions initiales et courbe initiale

Nous pouvons à présent revenir sur la figure initiale de la corde vibrante. Cette figure initiale introduit aussi l'expression d'une *courbe quelconque* dans le problème des cordes vibrantes. Il importe donc de la considérer pour apprécier son rôle dans le fait qu'un énoncé inaugural ait été énoncé. Le statut des conditions initiales de l'équation différentielle dépend de celui de l'équation différentielle, et en particulier du rapport de celle-ci au problème considéré. Et nous avons vu qu'il n'était pas le même chez Bernoulli et les trois autres mathématiciens.

Bernoulli s'intéresse aux cordes vibrantes en tant qu'elles produisent des sons. Or, ces sons ne dépendent pas de la figure initiale de la corde qui n'est de fait pas considérée par Bernoulli. Celui-ci, comme Taylor, ne s'intéresse à l'aspect de la corde qu'après qu'elle ait atteint un certain régime vibratoire[122] :

> « Au reste je crois que quelque courbure initiale qu'on donne à la corde, elle ne manquera pas de faire ses vibrations presque aussitôt suivant la simple uniformité des mouvements isochrones, & conformément à la nature de la trochoïde prolongée exposée par M. Taylor » (Bernoulli 1755, 158).

Ainsi, le problème des cordes vibrantes tel qu'il est considéré par Bernoulli ne dépend pas de la figure initiale de la courbe. Le caractère arbitraire de cette courbe ne saurait donc l'amener à inaugurer une nouvelle représentation des courbes ou des fonctions. Ajoutons que Bernoulli ne considère que des courbes *vibrantes*. Ses développements ne se rapportent pas à *une* courbe ou à *une* fonction, mais à cet objet constitué par une « courbe vibrante ». Il n'a dès lors guère de raisons non d'inaugurer une représentation des courbes ou des fonctions.

Il n'en est pas de même pour Euler qui résout une équation différentielle. Une solution mathématique consiste pour lui à décrire le mouvement de la corde *depuis sa figure initiale* jusqu'à son évanouissement complet. Le problème peut ainsi être conforme à son équation différentielle et celle-ci, avec ses conditions

122Cette manière de considérer le problème, déjà chez Taylor, est aussi soulignée par Euler : « A l'egard de l'autre limitation, qui suppose toutes les vibrations régulieres, on tâche de la défendre en disant, que bien qu'elles s'ecartent de cette loi au commencement du mouvement, elles ne laissent pas de s'assujettir au bout d'un très court espace de tems à l'uniformité, de sorte qu'à chaque vibration la corde s'étend tout à la fois, & ensemble en ligne droite, affectant hors de cette situation la figure d'une trochoïde prolongée. » Euler 1750, 70.

initiales, devenir un problème autonome[123]. L'équation de la solution doit pour lui s'appliquer aussi bien à la figure initiale qu'au moment où le système satisfait aux conditions considérées par Bernoulli. Même si son analyse mathématique ne sort pas non plus du cadre infinitésimal[124], et suppose des oscillations infiniment petites, il y fait entrer la figure initiale. Cette différence ressort nettement du passage suivant dans lequel Euler *remonte* du moment où le système satisfait aux conditions de l'analyse de Taylor et de Bernoulli à sa figure initiale qui « dépend de notre bon plaisir » :

> « Il est effectivement prouvé d'une manière suffisante, que si une seule vibration est conforme à cette règle [avoir une forme sinusoïdale], toutes les suivantes doivent l'observer aussi. On voit en même tems par là, comment l'état des vibrations suivantes dépend des précédentes, & peut être déterminé par elles; comme réciproquement, par l'état des suivantes, on peut conclure la disposition de celles qui ont précédé. C'est pourquoi, si les vibrations suivantes sont régulières, il ne sera en aucune manière possible que les précédentes se soient écartées de la règle : d'où résulte aussi évidemment, que si la première vibration a été irrégulière, les suivantes ne peuvent jamais parvenir à une parfaite régularité. Or la première vibration dépend de notre bon plaisir, puisqu'on peut, avant que de lacher la corde, lui donner une figure quelconque ; ce qui fait que le mouvement vibratoire de la même corde peut varier à l'infini, suivant qu'on donne à la corde telle ou telle figure au commencement du mouvement. » Euler 1750, 70.

A la suite de ce passage Euler précise l'énoncé du problème en y incluant explicitement la figure initiale :

> « *Si une corde de longueur, & de masse donnée, est tenduë par une force, ou un poids donné ; qu'au lieu de la situation droite, on lui donne une figure quelconque, qui ne differe cependant de la droite qu'infiniment peu, & qu'ensuite on la lache tout à coup ; déterminer le mouvement vibratoire total, dont elle sera agitée.* » Euler 1750, 70

Que ce soit par ce mouvement à rebours qui remonte jusqu'à la courbe initiale ou pour la conformité du problème des cordes vibrantes avec son équation différentielle, la courbe initiale est intégrée par Euler aux solutions du problème. La courbe initiale est ainsi à nouveau, pour lui mais pas pour Bernoulli, une donnée du problème par laquelle s'introduisent les fonctions arbitraires. Un second lien est ainsi effectivement établi et reconnu entre les solutions de ce problème et une courbe ou une fonction arbitraire.

Par la manière dont il met une courbe ou une fonction arbitraire en rapport avec ses solutions, le problème des cordes vibrantes ne s'apparente plus au problème de Pappus mais cette fois à celui de la distribution de la chaleur dans une lame infinie considéré par Fourier pour introduire et soutenir son énoncé inaugural. De

123 L'idée d'associer des conditions initiales à un problème me semble être un effet des équations différentielles sur la manière dont les problèmes sont considérés se poser, de la même manière que les équations polynomiales ont pu modifier notre conception des solutions d'un problème de Géométrie.

124 « A la vérité la première limitation, par laquelle les vibrations de la corde sont regardées comme infiniment petites, quoique réellement elles conservent toujours une raison finie a la longueur de la corde, cela ne dérange presque en rien les conclusions qu'on en tire, parce qu'en effet ces vibrations sont pour l'ordinaire si petites, qu'elles peuvent être prises pour infiniment petites, sans qu'il en résulte d'erreur sensible. D'ailleurs on n'a pas encore poussé assez loin, ni la Mechanique, ni l'Analyse, pour être en état de déterminer les mouvements dans les vibrations finies. » Euler 1750, 69-70.

plus, dès lors qu'il résout une équation différentielle, Euler n'a plus affaire à des « courbes vibrantes » mais bien simplement à des *courbes*. C'est un exemple de la coupure introduite par l'équation différentielle : le caractère « vibratoire » est éliminé par l'équation différentielle pour ne laisser la place qu'à des courbes ou des fonctions. Cela rend aussi compte du fait qu'Euler ait pu être amené à introduire un énoncé inaugural relatif à des courbes ou des fonctions, ce que Bernoulli n'a, encore une fois, aucune raison de faire et ce qu'Euler n'aurait pas fait non plus si Bernoulli n'avait prétendu avoir donné toutes les solutions.

# 7 - Conclusion

L'analyse de la controverse des cordes vibrantes offre l'exemple d'un énoncé inaugural qui n'a été énoncé que pour être dénoncé. Les conditions qui caractérisent un énoncé inaugural ne sont pas satisfaites dans un même texte ou sont tout simplement contestées, seul un réalisme se retrouve chez les quatre mathématiciens. La dualité est avérée dans les Mémoires de D'Alembert, Euler et Lagrange, mais ne l'est pas dans ceux de Bernoulli. Il n'y a d'inauguration qu'avec Bernoulli, mais il s'agit alors d'inaugurer un principe physique, ce qui ne correspond pas à l'acception donnée ici à ce terme. Les trois autres ne sauraient inaugurer un énoncé qu'ils contestent. De même la validité du principe de Bernoulli et les exemple d'expériences qu'il donne pour l'attester ne correspondent pas à l'acception de la conformité adoptée ici.
D'Alembert, Euler et Bernoulli ont à peu près chacun eu un rôle propre dans l'introduction de cet énoncé. D'Alembert a établi l'équation différentielle du problème et en a exprimé la solution au moyen de l'expression d'une fonctions *quelconque*. Une expression est ainsi donnée aux solutions qui ne fait plus intervenir les expressions analytiques reçues (algébriques ou transcendantes). Mais D'Alembert n'accorde qu'un pouvoir expressif limité aux mathématiques ; tous les problèmes physiques n'ont pas selon lui nécessairement une expression mathématique adéquate[125] qu'il limite essentiellement aux développements en

125 Par exemple : « On objectera peut-être, qu'il est impossible d'expliquer dans ma théorie, pourquoi la corde frappée d'une maniere quelconque, rend toujours à peu près le même son ; puisque ses vibrations, selon moi, peuvent être très-irrégulieres en plusieurs cas [163] . J'en conviens ; mais je suis persuadé que la solution de cette question n'appartient point à l'Analyse : elle a fait tout ce qu'on étoit en droit d'attendre d'elle ; c'est à la Physique à se charger du reste. » (D'Alembert 1761, 40 ; Jouve 2007, II, 171) ; « l'expérience & la théorie ne sauroient être d'accord dans la détermination du mouvement des cordes vibrantes, ne fût-ce que par cette seule raison, que le mouvement d'une corde vibrante cesse bientôt, quoique par la théorie il doive durer continuellement. » (D'Alembert 1761, 67 ; Jouve 2007, II, 205). Un autre exemple du refus de mélange des genre : « Avant que de répondre à ce Géometre [Daniel Bernoulli], nous allons rendre sa proposition encore plus générale. Nous prouverons qu'en effet la somme moyenne entre toutes les sommes de la serie cos .x + cos .2x + cos .3x, &c. à l'infini = – ½ ; mais nous le prouverons rigoureusement, & non par le calcul probabilités, dont l'usage, nous l'osons dire, est dans le cas présent tout-à-fait chimérique. Il ne s'agit pas ici de conjecturer, mais de démontrer ; & il seroit dangereux, (quoiqu'à la vérité ce malheur soit peu à craindre) qu'un genre de démonstration si singulier s'introduisît en géométrie. Ce qui pourra seulement paroître surprenant, c'est que de pareils raisonnemens soient employés comme démonstratifs par un Mathématicien célèbre, & dans un écrit où il s'exprime avec très-peu de ménagement sur le dixiéme Mémoire de mes Opuscules, concernant la théorie des probabilités ; théorie qui n'a pourtant (ce me semble) rien de plus choquant que l'usage qu'il fait ici de l'analyse des jeux de hasard. Quoi qu'il en soit, après avoir prouvé, non par cette analyse, mais par un calcul rigoureux, que la somme moyenne

séries entières[126] (Jouve 2007, I, 144). Il reste, à cette époque, attaché à ce cadre[127]. Euler a quant à lui repris l'expression de la solution donnée par D'Alembert en y intégrant des « fonctions irrégulières » dont il trouve dans la courbe tracée, à défaut d'expression analytique une expression géométrique. Cette extension à des « fonctions irrégulières » est récurrente avec les équations différentielles (Euler 1767 ; Dhombres 1988). Elle est aussi un thème récurrent dans la correspondance d'Euler et un terrain d'entente entre Euler et Lagrange contre Bernoulli mais aussi contre D'Alembert[128]. S'il accepte cette extension de l'Analyse au-delà des expressions analytiques reconnues, Euler n'a pas pour autant de système d'expressions de substitution à proposer susceptible d'exprimer toutes les « fonctions irrégulières ». Il considère nécessaire et possible d'appliquer l'Analyse mathématique à des courbes qui n'ont pas d'expression analytique. L'Analyse mathématique a dès lors une portée qui excède ce qu'elle peut exprimer[129].

En donnant l'équation différentielle du problème d'une corde vibrante D'Alembert a aussi introduit le dualisme et la conformité qui existent entre le problème de la corde vibrante et son équation différentielle, le même que celui inauguré par Descartes entre le problème de géométrie et son équation polynomiale. Mais pour que l'équation différentielle soit un problème mathématique complet, il faut ici intégrer la forme de la courbe initiale dans l'énoncé du problème. Or avec cette courbe initiale s'introduit l'expression, cette fois géométrique, d'une fonction

---

dont il s'agit, est en effet = – ½ dans tous les cas, nous prouverons en suite qu'on n'en peut rien conclure pour la somme réelle de la serie, que cette fraction – ½ ne représente point. » (D'Alembert 1761, 157-8 ; Jouve 2007, II, 244-5)

126Par exemple, quand une fonction est impaire, D'Alembert infère qu'elle doit n'avoir que des puissances impaires de x (D'Alembert 1761, 14).

127Par exemple : « le mouvement de la corde ne peut être soumis à aucun calcul analytique, ni représenté par aucune construction, quand la courbure fait un saut en quelque point » (D'Alembert 1761, 22 ; Jouve 2007, II, 148).

128Ainsi, Lagrange fait valoir auprès d'Euler l'intérêt de la nouvelle approche qu'il a trouvé au problème de la corde vibrante : « Cette solution, étant d'un genre tout à fait nouveau, ne sera peut-être pas aussi indigne de votre attention, et elle servira encore plus à établir l'usage des fonctions irrégulières et discontinues dans une infinité d'autres problèmes. » Lagrange à Euler, 24 novembre 1759, Oeuvres de Lagrange, vol. 14, 171-2. Dans une autre lettre, Euler réfute une objection de D'Alembert contre les fonctions arbitraires : «c'est une proporiété essentielle des équations différentielles à trois et à plusieurs variables, que leurs intégrales renferment des fonctions arbitraires qui peuvent aussi bien être discontinues que continues. » Euler à Lagrange, 16 février 1765, Oeuvres de Lagrange, 14, 203. On peut encore citer Lagrange : « D'ailleurs, les phénomènes de la propagation du son ne peuvent s'expliquer qu'en admettant les fonctions discontinues, comme je l'ai prouvé dans ma seconde dissertation. » Lagrange à D'Alembert, 20 mars 1765, Oeuvres de Lagrange, vol. 13, 38. Voir encore Lagrange 1760, Oeuvres, 1, 158.

129C'est là typiquement un exemple de *problème d'expression* en l'occurrence consécutif à la considération de nouveaux problèmes exprimés au moyen d'équations aux dérivées partielles, voir (Herreman 2005, et à paraître). C'est un point aussi abordé par Jean Dhombres (1988). Le problème se trouve renforcé quand la considération de grandeurs imaginaires met aussi en défaut l'expression par une courbe : « Mais, si l'on demandait une semblable intégrale complète pour le cas où a serait une quantité négative -b, je ne vois pas comment on la pourrait représenter par des courbes arbitraires, puisqu'on n'y saurait assigner les appliquées qui répondent à des abscisses imaginaires. » Euler à Lagrange, 9 novembre 1762, Oeuvres de Lagrange, vol. 14, 203. L'expression de la fonction quelconque pourrait aussi apparaître dans l'équation différentielle, et non seulement dans l'énoncé du problème comme condition initiale. C'est ce qui arrive avec le cas d'une corde d'épaisseur non uniforme.

quelconque. De ce fait, mais aussi à cette condition, prétendre donner toutes les solutions du problème de la corde vibrante revient à prétendre donner une représentation de toutes les fonctions. Daniel Bernoulli est celui qui dans ce contexte va déclencher l'introduction de l'énoncé en affirmant, à partir d'un principe physique sur la décomposition des sons en modes propres, que les séries trigonométriques tenues par D'Alembert et Euler pour des solutions particulières sont en fait *toutes* les solutions du problème de la corde vibrante. La présence de l'expression d'une fonction quelconque dans la solution de l'équation différentielle et surtout l'expression de la courbe initiale qui pour D'Alembert comme pour Euler doit être intégrée à l'énoncé du problème les conduisent à récuser l'affirmation de Bernoulli et à formuler l'énoncé inaugural qui en résulterait si elle était vérifiée. L'introduction de cet énoncé est la conséquence, dans ce contexte, de la forme des solutions proposées par Bernoulli et de la conviction de celui-ci qu'il a ainsi donné toutes les solutions. Mais si Euler formule cet énoncé, il ne le soutient pas. Son mémoire publié en 1755 est ainsi largement consacré à le dénoncer. Bernoulli serait dès lors le seul à le soutenir, mais il ne l'a pas énoncé. Il se doit néanmoins de répondre aux objections. Ses réponses vont surtout consister en une défense de sa solution, et non en un soutien de l'énoncé inaugural, qu'il va considérer comme un théorème d'interpolation dont il esquissera la démonstration (Bernoulli 1758, 165). Ainsi, son « soutien » se fait soit de manière indirecte sous la forme d'objections aux objections d'Euler soit en l'assimilant à un théorème qu'il s'agirait de démontrer. Si Euler a bien écrit un mémoire de type anti-inaugural pour réfuter cet énoncé, il n'y a pas de texte inaugural écrit par Bernoulli pour le soutenir. Aucun de ces mathématiciens finalement ne soutient l'énoncé : celui qui l'énonce le réfute, celui qui pourrait le soutenir, ni ne le soutient ni ne l'énonce[130]. Ainsi, cette controverse permet d'envisager le cas d'un énoncé inauguré qui n'a été introduit que pour être dénoncé[131]. Elle aura été l'occasion de comparer un texte qui défend un principe physique et un autre, celui de Fourier, qui soutient un énoncé inaugural. Cela

130 Citons la conclusion de l'analyse sur les cordes vibrantes de Darrigol (2007) : « To summarize, Bernoulli, d'Alembert, Euler, and Lagrange held different positions regarding the permissible string curves, the curves that trigonometric series could represent over a finite interval, and the status of partial vibrations. Bernoulli admitted any string curve for which both the ordinate and the radius of curvature remained very small compared to the length of the string;78 he believed that trigonometric series could represent any such curve; he asserted the physical existence of the partial vibrations. D'Alembert required the string curve to be analytic and close to the axis; he believed that any "discontinuous" curve and even some "continuous" curves could not be represented by trigonometric series; he regarded partial vibrations as mathematical fictions. Euler admitted any continuous string curve with piecewise continuous slope and curvature, and with small ordinate and slope; he denied that trigonometric series could represent non-analytic curves, at least those which coincide with segments of the axis (pulses); he ascribed some physical reality to partial vibrations of non-necessarily sine form. Lagrange originally admitted the same string curves as Euler (except for polygonal curves), but came to believe that his passage from the discrete to the continuous required that all derivatives should be finite; he believed that trigonometric series could in some "asymptotic" sense represent any curve, but sometimes denied perfect identity between the series and the curve when the latter was non-analytic or pulse-like; like d'Alembert, he denied any physical reality of th partial vibrations. » Darrigol 2007, 385

131 Peut-être convient-il de signaler que j'ai commencé par vouloir établir que Bernoulli énoncait et défendait une thèse. L'impossibilité de mener cette vérification correctement m'a convaincu qu'il ne s'agissait pas d'une thèse, mais d'une part d'une hypothèse ou d'un principe physique et d'autre part un théorème d'interpolation.

confirme leur différence et donne un exemple de principe physique là où l'on pouvait s'attendre, compte tenu des citations données, à trouver un énoncé inaugural[132].

Tous les énoncés inauguraux rencontrés inauguraient une représentation générale : des nombres ou des fonctions calculables, des propositions logiques, des problèmes et des courbes géométriques, des fonctions. Toutes ces représentations vont ensuite rendre possible des énoncés mathématiques qui ne l'auraient pas été sinon. Or c'est exactement l'inverse qui se produit ici. Au lieu d'inaugurer une représentation générale nouvelle qui aura des conséquences, c'est l'énoncé qui est une conséquence de l'introduction d'expressions générales de toutes les fonctions (que ce soit $\Psi$ et $\Gamma$ ou l'expression géométrique d'une courbe quelconque par une corde). Si cet énoncé n'est pas inaugural c'est surtout parce qu'il n'a, de fait et de part les conditions de son introduction, aucune fonction inaugurale. Les expressions qui ont ici des conséquences, mais qui ne sont pas inaugurées, sont les variables de fonctions $\Psi$, $\Gamma$ et celle d'une corde. Il est intéressant de les trouver conjointement. Il conviendrait aussi d'expliciter leurs caractéristiques sémiotiques respectives, de les comparer à celles des séries trigonométriques et d'en apprécier les implications.

132 La confusion de l'énoncé imputé à Bernoulli avec celui de Fourier a déjà été clairement dénoncée par Burkhardt (1908, 20 ; Jouve 2007, II, 29) .

# VII - Un contre exemple : *Les Eléments* d'Euclide.

## 1 - Textes inauguraux et axiomatique

Les *Eléments* d'Euclide est le texte le plus ancien conservé qui présente sous une forme tout à fait caractéristique des centaines de propositions mathématiques avec leur démonstration. C'est à bien des égards un texte fondateur qui a servi de modèle à nombre de textes dont c'était l'ambition déclarée. Il a joué ce rôle en particulier par sa présentation axiomatique de la Géométrie. Il a pu ainsi être tenu pour un livre exposant la totalité des mathématiques de son temps. Son modèle axiomatique a été régulièrement repris quand il a fallu donner un fondement à la fois rigoureux et complet d'un sujet que ce soit en mathématiques ou ailleurs. Les *Eléments* d'Euclide et la plupart des textes qui ont repris son mode d'exposition axiomatique ont de nombreuses caractéristiques communes avec les textes inauguraux. La *Begriffschrift* de Frege ou les *Principia mathematica* de Whitehead & Russell sont des textes inauguraux qui reprennent explicitement le modèle euclidien. Je vais donc préciser ici le rapport entre les textes qui suivent un mode d'exposition axiomatique et les textes inauguraux. Je vais montrer que textes inauguraux et axiomatique s'excluent sauf dans le cas particulier de la logique.

L 'axiomatisation est un procédé d'exposition général qui permet la représentation de la totalité d'un domaine. La représentation d'une totalité est donc en jeu comme pour les textes inauguraux ce qui justifie de les comparer. Mais un exposé axiomatique vise la représentation d'une totalité de *propositions*. Or la Géométrie, par exemple, ne traite pas des propositions, mais des figures, de leurs rapports, etc. Ainsi l'axiomatique est un procédé d'exposition qui vise à donner une représentation complète de *propositions* qui portent elles-mêmes sur d'autres objets ou représentations. La totalité concernée par l'axiomatique n'est donc pas la même que celles auxquelles se rapportent les propositions. Il en sera de même pour tous les sujets qui ont été ou peuvent être axiomatisés. Les énoncés inauguraux se rapportent eux à une totalité d'objets ou de représentations mathématiques : aux fonctions ou aux nombres calculables, aux courbes géométriques, aux fonctions, etc. Un exposé axiomatique en dépit de son caractère fondateur et du fait qu'il donne une vue d'ensemble d'un sujet ne saurait donc, en tant que tel, constituer un texte inaugural. Inversement, ce n'est pas un mode d'exposition adapté à l'inauguration. Un énoncé inaugural trouverait difficilement sa place dans un ensemble relativement homogène de propositions dérivées les unes des autres. L'inauguration est un dispositif argumentatif hétéroclite irréductible à des démonstrations relativement homogènes. Elle ne peut être décomposée en propositions distinctes démontrées séparément. Elle comprend aussi toujours des exemples cruciaux qui n'auront pas leur place dans

un exposé axiomatique. Inauguration et axiomatique s'excluent. Il ne faut donc pas chercher les textes inauguraux parmi les exposés axiomatiques.
Il y a toutefois une exception : quand les propositions se rapportent à des *propositions*. Ce qui est le cas de la logique. Dans ce cas et dans ce cas seulement l'axiomatique devient aussi un procédé de représentation de ce sur quoi portent les propositions mathématiques. Autrement dit, dans le cas très particulier où les propositions font partie de ce à quoi elles se rapportent, l'axiomatique devient un mode d'exposition compatible avec l'inauguration. Cela établit le caractère singulier des systèmes d'axiomes logiques comme la *Begriffschrift* ou les *Principia mathematica* : ce sont les seuls pour lesquels l'exposé axiomatique des propositions va en même temps constituer une représentation de ce sur quoi portent les propositions considérées. Dans ce cas, la représentation de *toutes* les propositions que l'on peut tenir, au moins rétrospectivement, pour une visée commune à tous les systèmes d'axiomes devient une représentation de ce à quoi se rapportent ces propositions. L'énoncé inaugural ne fait pas partie des propositions démontrées, mais toutes les propositions démontrées deviennent des exemples participant à l'inauguration. L'homogénéité des propositions et des démonstrations devient dans ce cas compatible avec un dispositif argumentatif réduit à l'accumulation d'exemples. La possibilité d'étendre indéfiniment les propositions démontrées fonde la possibilité d'avoir ainsi une représentation de toutes les propositions. Ainsi, l'exposé axiomatique rend inversement possible une inauguration qui n'est fondée que sur l'accumulation des exemples. Dans ce cas, et dans ce cas seulement, un exposé axiomatique peut être un texte inaugural et l'inauguration peut être réalisée de manière axiomatique.

Reconnaître le rapport particulier de la logique à l'axiomatique permet de bien différencier les enjeux de l'inauguration de ceux de la fondation mise en œuvre par des systèmes axiomatiques. Cela permet inversement de rendre compte du caractère particulier de la *Begriffschrift* et des *Principia mathematica* parmi les autres textes inauguraux. Il est ainsi possible de mieux apprécier ce qui dans leur inauguration est propre à la logique et ce qui relève plus généralement de l'inauguration.

## 2 - Un texte inaugural pour les propositions de la géométrie ?

La clarification du rapport entre inauguration et axiomatisation contribue à clarifier celui entre textes inauguraux et textes fondateurs, quelle qu'en soit l'acception, quand ceux-ci sont exposés de manière axiomatique. D'après ce qui précède la forme axiomatique n'est nécessaire et compatible qu'avec l'inauguration d'une représentation de propositions. Ceci s'applique en particulier aux *Eléments* d'Euclide, difficilement dissociable de sa forme axiomatique, et qui n'est de se fait sans doute pas un texte inaugural. Il convient néanmoins de l'établir en revenant à la caractérisation qui a été donnée de ces textes et par une analyse plus circonstanciée. Cela étant, l'intérêt des analyses qui suivent ne sera pas tant d'établir que les *Eléments* ne sont pas un texte inaugural que d'illustrer à partir d'un seul texte cinq manières différentes de ne pas être un texte inaugural.

Compte tenu de ses conditions de transmission, l'absence d'un énoncé inaugural ne saurait être tenue pour significative (la présence d'un tel énoncé ne fait de toute façon pas partie des caractéristiques retenues pour un texte inaugural). Un tel énoncé permet toutefois d'identifier clairement la représentation inaugurée. Si les *Eléments* étaient un texte inaugural, quelle serait cette totalité et qu'elle en serait la représentation ? Plusieurs hypothèses peuvent être envisagées : les propositions de la géométrie, les figures planes, leurs transformations, les grandeurs, leurs rapports, les nombres, leurs rapports, les grandeurs incommensurables, ou encore les polyèdres réguliers et leurs rapports. Il est plus ou moins facile d'éliminer ces hypothèses ; seules quelques-unes vont être considérées.

Considérons l'hypothèse que les *Eléments* soient un texte inaugurant la représentation de toutes les propositions géométriques. Il faudrait pour cela un dualisme avec d'une part les nouvelles propositions et d'autre part celle qui seraient représentées. Un tel dualisme est avéré aussi bien dans la *Begriffschrift* que dans les *Principia mathematica.* Mais il n'y en a aucune trace dans les *Eléments*. Dans ces livres ce dualisme est ressaisi par des considérations philosophiques sur la nature de ces propositions qu'il s'agit de représenter et auxquelles une existence indépendante de leur représentation est attribuée. Il n'y a rien de semblable dans les *Eléments*. Nulle part on ne voit l'auteur considérer conjointement une de ses propositions et la proposition qu'elle représenterait. Il n'est *a fortiori* jamais confronté à leur conformité et à leur incommensurabilité. Rien dans la stratégie complexe de ce texte (pour laquelle nous renvoyons aux diverses notices de la traduction de Bernard Vitrac) ne suggère que l'auteur serait en train d'essayer de convaincre son lecteur qu'il a les moyens d'énoncer toutes les propositions, même en se restreignant à une partie de la Géométrie, et qu'il soutiendrait la conformité des propositions qu'il énonce a un ensemble constitué de propositions. Cela est d'autant plus manifeste que nous avons vu des textes où c'était le cas. Aucune des cinq conditions caractérisant un texte inaugural n'est en l'occurrence satisfaite.

Il est possible de considérer qu'un exposé axiomatique est toujours d'une certaine manière une nouvelle présentation de propositions préalablement exposées de manière non axiomatique. Cela permet d'avoir un dualisme avec d'une part les propositions déjà établies et d'autre par leur reprise axiomatique. En ce sens, les propositions qui ont déjà été énoncées tiendraient lieu d'un ensemble constitué de propositions. Tout cela est hypothétique, mais néanmoins raisonnable... Cela permet d'attribuer une forme de réalisme aux propositions déjà établies qui sont déjà reçues, pourvues d'une existence propre, antérieure et indépendante de celle de leur reprise axiomatique. Il y aurait bien aussi une dimension inaugurale puisque l'exposé axiomatique donnerait une nouvelle représentation de propositions pour la plupart déjà bien établies (en supposant, pour l'intérêt de cette discussion, que cette représentation est bien nouvelle). La conformité pourrait aussi être tenue pour satisfaite. Ainsi à peu près toutes les caractéristiques des textes inauguraux seraient satisfaites. Il en manque cependant une : l'incommensurabilité. Or, nous ne voyons aucune raison de considérer que les propositions des *Eléments* d'Euclide seraient d'une quelconque manière incommensurables avec les propositions précédentes. On peut objecter à cela que les propositions des *Eléments* seraient indissociables du système axiomatique dans lequel elles prennent place. Sans doute cela a-t-il pu en transformer la formulation. La structure des propositions (*protase*, *ecthèse*, *diorisme*, etc.), certaines caractéristiques de la protase, etc. pourraient aussi être invoqués pour défendre leur incommensurabilité. Et en effet, nous n'avons pas *a priori* à tenir pour moins significatives ces différences que celles entre l'énoncé d'un problème de géométrie et une équation polynomiale ou entre une proposition mathématique et sa reformulation au moyen d'un diagramme idéographique. Néanmoins, ces différences ne sont pas de même nature. Une manière de l'établir est de remarquer qu'il est sans doute possible de transformer n'importe quelle proposition d'un exposé non axiomatique en la proposition correspondante des *Eléments* par une succession de petites transformations de sorte que deux énoncés successifs ne présentent pas de différences significatives. Il serait par exemple possible de mêler ainsi progressivement l'*ecthèse*, le *diorisme* la *kataskeuè* etc. Cette transformation est impossible quand il y a incommensurabilité. Si l'on essaye de transformer de la sorte un problème quelconque de géométrie en une équation polynomiale, une courbe en une série trigonométrique, une proposition logique en un diagramme de Frege, un calcul en une machine de Turing, etc., il y aura dans toujours un moment où des expressions seront introduites dont la compréhension ne sera pas assurée par celles de l'étape précédente[133]. Cette vérification ne peut bien évidemment n'être que fictive, mais ce critère permet de préciser en quel sens l'incommensurabilité est mise en défaut. Il permet aussi bien de rendre compte du fait qu'une reformulation axiomatique ne suffit pas en général à introduire de l'incommensurabilité. Un exposé axiomatique apparaît à cet égard plus comme une remise en ordre des propositions que comme une représentation nouvelle de celles-ci. Cette mise en ordre, et son extension impressionnante dans les *Eléments*, est sans doute un des aspects les plus remarquables de ce texte, mais qui, faute d'incommensurabilité, ne suffit pourtant pas à en faire un texte inaugural. Ceci nous invite à considérer plus particulièrement l'incommensurabilité dans la *Begriffschrift* et les *Principia mathematica* puisque que c'est son absence qui empêche en général les exposés axiomatiques d'être des textes inauguraux[134]. Elle est satisfaite de manière différente dans chacun d'eux : dans l'un par des diagrammes et dans l'autre par des expressions fonctionnelles. Mais dans les deux, à la différence des *Eléments*, un système d'expressions original a été introduit satisfaisant aussi aux autres conditions. Cela permet de mieux discerner la part respective de la présentation axiomatique et des représentations nouvelles introduites dans ces textes : l'incommensurabilité vient bien de l'introduction d'un système d'expressions original alors que le mode d'exposition axiomatique n'intervient que dans l'inauguration rendue ainsi, comme on l'a vu, particulièrement simple. L'inauguration pourrait tout à fait se faire par

133Cela suppose bien sûr que l'on exclut l'introduction au cours de ces transformations des explications permettant de comprendre ces expressions.

134On peut ici considérer le cas du *Formulaire de mathématiques* de Peano. Ce *Formulaire* est sans doute un exemple de texte inaugural. La différence avec ceux de Frege et de Whitehead & Russell, mais aussi avec les *Vorlesungen über die Algebra der Logik* de Schröder (1890-1895), réside dans le fait qu'il n'introduit pas, et ne permet guère d'introduire, un système d'expressions qui puisse être lui-même uniformément décrit, comme le fait Frege pour son idéographie, et comme d'autres le feront pour des parties importantes des *Principia Mathematica* (calcul propositionnel, calcul des prédicats). Mais ces considérations ne concernent pas tant l'étude des textes inauguraux que celle de leur réception et surtout de leurs conséquences.

un autre dispositif argumentatif. Mais l'axiomatisation a ici en fait deux fonctions. Outre sa fonction inaugurative elle est aussi constitutive de la représentation des propositions inaugurée. Elle est à la fois inaugurante et inaugurée. Si elle peut être éliminée de l'inauguration son rôle dans la représentation des propositions ne peut en revanche l'être. Finalement, la superposition de ces deux fonctions renforce encore la simplicité de cette inauguration.

Une deuxième manière d'introduire un dualisme serait de considérer que les propositions des *Eléments* correspondent à des sortes de configurations géométriques. Le théorème de Pythagore, pour s'en tenir à cet exemple, correspondrait à la configuration donnée par un triangle rectangle avec des carrés construits sur chacun de ses côtés. Une configuration géométrique serait une sorte de figure remarquable comme on parle en Algèbre élémentaire d'identités remarquables. Le dualisme serait vérifié ainsi que l'incommensurabilité. L'inauguration ne le serait sans doute pas, et la conformité certainement pas.
Ainsi, les *Eléments* d'Euclide n'apparaissent d'aucune manière comme un texte inaugurant une représentation des propositions.

## 3 - Un texte inaugural pour les figures planes rectilignes ?

Le même constat peut être fait pour les autres totalités ou représentations. Sans les passer toutes en revue, on peut néanmoins considérer très brièvement le cas des figures rectilignes planes. Elles ont sans aucun doute un caractère pré-établi. Il y a bien réalisme. On pourrait ici vouloir distinguer entre la figure et leur expression géométrique et imaginer un énoncé soutenant leur conformité. Mais le fait est qu'il n'y a pas vraiment d'autres moyens d'exprimer ces figures que par leur expression géométrique. Ce n'est pas, par exemple, comme pour les propositions logiques ou les jugements qui ont une expression verbale constituée dont Frege peut faire usage concurremment à l'idéographie qu'il introduit pour les représenter. Il en est de même pour les problèmes de géométrie et l'expression algébrique qu'en donne Descartes, des fonctions et de leur expression trigonométrique par Fourier, etc. S'il y a bien un réalisme des figures, il n'y a pas de dualisme suivant l'usage que nous faisons ici de ces termes. Il y a bien en revanche un dualisme si l'on considère la représentation des figures par des lettres. Nous en avons d'ailleurs rencontré un semblable à l'occasion de l'analyse du deuxième énoncé inaugural de Descartes avec la mise en relation des lettres qui entrent dans l'équation et la courbe (les rapports sont bien sûr tout à fait différents, mais le dualisme est lui bien semblable). Mais la notation ABC ne nous dit pas si le triangle est rectangle. Il ne saurait être question de remplacer les figures par les lettres qui leur sont associées : il n'y a pas conformité[135]. Il y a bien cette fois un dualisme et une incommensurabilité, mais rien n'atteste d'un quelconque soutien à la moindre conformité. C'est là simplement un exemple, parmi tant d'autres, de coexistence de divers systèmes d'expressions dans un même texte mathématique. Les textes inauguraux se distinguent par un souci de conformité qui, compte tenu de la difficulté de le satisfaire, ne peut manquer d'être l'objet de développements spécifiques facilement repérables. Ce qu'on ne

135Pour une analyse des figures dans les *Eléments* d'Euclide, voir (Netz 1999, 68-88).

trouve pas dans les *Eléments*.

Les figures rectilignes planes ont deux représentations dans les *Eléments* : leur figure habituelle (celle d'un carré par exemple) et la même figure décomposée en triangles (deux triangles isocèles égaux collés par leurs bases). Cette triangulation est remarquable parce qu'elle offre une représentation uniforme de *toutes* les figures rectilignes planes. Or l'introduction d'une telle représentation est un des principaux intérêts des textes inauguraux puisqu'elle rend possible des énoncés et des démonstrations généraux, en l'occurrence sur la totalité des figures planes[136]. A défaut de proposition sur toutes les propositions, on trouve bien de tels énoncés dans les *Eléments*. C'est le cas notamment de la dernière proposition du Livre II (Proposition II-14) qui demande de construire un carré égal à une figure rectiligne quelconque donnée, c'est-à-dire à nouveau la quadrature des figures rectilignes. Le résoudre suppose la représentation d'une figure quelconque. Il n'est évidemment pas difficile d'introduire une telle représentation en convenant par exemple de représenter n'importe quelle figure par un trait... Mais ce n'est pas avec ce genre de représentation que l'on pourra démontrer que toute figure rectiligne peut être transformée en un carré. On peut en revanche le faire en considérant une figure particulière, un triangle par exemple, et en montrant comment le transformer en un carré en veillant à ce que la méthode présentée dépende le moins possible de la figure considérée. Néanmoins, le seul moyen de savoir si la méthode s'applique à une autre figure sera de l'appliquer. Cela ne permet donc pas d'énoncer que *toute* figure (plane rectiligne) peut être transformée en un carré. Il faut pour cela une démonstration qui nous garantisse qu'elle s'applique à une totalité, ici celle des figures plane rectilignes, ce qui dépend des représentations qu'elle utilise. Comme l'analyticité, la portée d'une démonstration est une propriété de son expression. Il faudrait en l'occurrence une représentation qui puisse être associée à toutes les figures, susceptible de distinguer les carrés des autres figures et permettant un certain contrôle sur les équivalences d'aire. La décomposition en triangles satisfait à toutes ces conditions[137]. Elle est introduite subrepticement dans la construction ("*kataskeuè*") de la proposition I-45 comme si la possibilité de mener une ligne droite entre deux points suffisait pour en rendre compte (Demande 1) :

45

> *Dans un angle rectiligne donné, construire un parallélogramme égal à une figure rectiligne donnée.*
>
> Soit, d'une part ABCD la figure rectiligne donnée, d'autre part E l'angle rectiligne donné. Alors, dans l'angle donné E, il faut construire un parallélogramme égal à la figure rectiligne ABCD.

136Pour une étude des procédés qui conduisent à considérer les propositions des *Eléments* comme générales, voir (Netz 1999, 240-270).

137Cette démonstration devra sans doute partir de l'expression d'une figure *quelconque* et arriver continument à celle d'une figure *particulière*, un carré. On peut noter l'analogie avec le mouvement d'une corde vibrante qui transforme la figure d'une courbe quelconque en un segment de droite. Ces transformations, toutes intéressantes à considérer d'un point de vue sémiotique (pour sortir d'une description limitée par l'opposition général *vs* particulier), se retrouvent surtout dans les nombreux théorèmes de mise sous forme normale dont la triangulation et la quadrature ne sont que des exemples.

> Que DB soit jointe et que, dans l'angle sous HKF égal à E, soit construit le parallélogramme FH, égal au triangle ABD (prop. 42).

Comme les *Eléments* comprennent des énoncés et des démonstrations de propositions intuitivement évidentes, la nécessité d'énoncer, et le cas échéant de démontrer, la triangulabilité semble avoir été méconnue.
Avons-nous là l'exemple d'un énoncé inaugural qui serait appliqué sans avoir été énoncé ? La décomposition d'une figure en triangles est en fait plutôt un exemple de théorème de représentation que d'énoncé inaugural parce que les triangles appartiennent au même système d'expressions que les figures à décomposer. Il y a bien *deux* représentations des figures. De plus plus, comme toutes les figures (rectilignes planes) sont triangulables et qu'il est possible de substituer cette représentation à la première (une figure triangulée a les mêmes propriétés que la même figure non triangulée), il y a bien aussi conformité. Mais les triangles font eux-mêmes partie des figures rectilignes... Il s'agit donc de deux représentations dans le *même* système d'expressions. Si l'on se reporte aux critères proposés, c'est cette fois l'incommensurabilité qui fait défaut. Il y a *deux* représentations mais pas de dualisme[138].

La triangulation permet une représentation uniforme de toutes les figures rectilignes planes. Elle rend de ce fait possible des propositions et des démonstrations relatives à la *totalité* de ces figures attestées dans les *Eléments* d'Euclide. Elle présente de ce point de vue l'intérêt des représentations inaugurées. Nous ne savons pas en l'occurrence comment elle a été introduite historiquement sinon, bien sûr, qu'elle est déjà mentionnée par Platon[139]. Mais elle n'a pas besoin d'être inaugurée puisque les triangles sont eux-mêmes des figures contrairement par exemple aux équations algébriques, aux séries entières ou trigonométriques qui ne sont pas des courbes, ou aux diagrammes de Frege qui ne sont pas, au moment où ils sont introduits..., des propositions logiques, etc. La triangulabilité n'est donc pas tant l'exemple d'un énoncé inaugural qui serait appliqué sans avoir

138Cela ne veut évidemment pas dire que les problèmes posés par la démonstration de cette proposition ne soient pas intéressants. Au contraire, celle-ci devra nécessairement recourir à une autre représentation d'une figure quelconque *qui ne pourra être celle donnée par la triangulation* ! C'est, plus généralement, l'intérêt de l'étude sémiotique des théorèmes de mise sous forme normale : ils introduisent une représentation uniforme qui va servir à énoncer des théorèmes généraux, mais ils doivent pour cela d'abord eux-mêmes recourir à une représentation alternative qui n'aura pas les avantages de la représentation « normale », sans quoi il ne serait pas utile, voire nécessaire..., d'introduire celle-ci, mais qui doit néanmoins réussir à convaincre que celle-ci peut toujours être obtenue. Il est dès lors à coup sûr intéressant d'identifier la représentation et les raisonnements utilisés qui sont généralement à usage unique puisque c'est ensuite la forme normale qui sera utilisée. Ce n'est en fait pas le cas ici parce que les figures rectilignes sont en fait déjà données par une propriété semblables : leur contour est une *juxtaposition* de segments. La triangulation consiste donc à passer de l'expression d'une figure composée de segments mis bout à bout (et de manière à former une figure fermée, ce qui est essentiel), par une expression composée de triangles accolés par leurs côtés.

139« Pour commencer, donc, le feu, la terre, l'eau et l'air sont des corps ; voilà qui est évident, sans doute, et pour quiconque; or, un corps de toute forme a aussi de la profondeur. Mais la profondeur, à son tour, de toute nécessité, est enveloppée par de la surface; et, quand elle est rectiligne, une surface plane, servant de base, se décompose en triangles. » Platon, *Timée*, 53c, trad. Joseph Moreau, Editions Gallimard, Bibliothèque de la Pléiade, 1950.

été énoncé que l'exemple d'un système d'expressions dont les expressions se trouvent pouvoir être engendrées par un procédé uniforme à partir d'une partie d'entre elles[140]. Elle n'en introduit pas moins un changement dans la manière dont la totalité des figures est constituée. De tels changements ne passent pas nécessairement par des textes inauguraux. L'intérêt de ces textes est néanmoins, de ce point de vue, d'avoir des caractéristiques qui rendent ces changements facilement repérables. Mais l'exemple de la triangulabilité montre à l'évidence, avec bien d'autres, que l'étude de ces changements ne saurait se limiter à ces textes même s'ils en sont un accès privilégié[141].

## 4 - Cinq manières de ne pas être un texte inaugural

Les *Eléments* d'Euclide sont un texte à bien des égards fondateur mais sans être d'aucune manière inaugural. L'examen rapide auquel nous venons de nous livrer l'a montré. Il a aussi permis d'illustrer quelques-unes des diverses manières de ne pas satisfaire aux cinq conditions retenues. Nous avons par exemple vu plusieurs manières de ne mettre en défaut le dualisme. C'est le cas de ses propositions si on ne les tient pour des représentations de propositions qui existeraient préalablement et indépendamment de celles énoncées (que ce soit pour des raisons historiques ou métaphysiques). C'est aussi le cas, mais différemment, des figures triangulées par rapport aux figures non triangulées. Dans le cas des propositions, il n'y a pas d'expression alternative. Dans celui des figures triangulées, ces figures ne constituent pas un système d'expressions séparé des triangles, des parallélogrammes, etc. Il est bien sûr possible d'imaginer des métaphysiques plus ou moins avérées pour fonder un dualisme des propositions. Mais celui-ci n'est pas à l'œuvre comme il l'est dans les textes inauguraux qui ont été étudiés (Frege par exemple). Le dualisme est en revanche satisfait, et il est alors intéressant de noter qu'il l'est, avec les figures et leur représentation lettrée. Il y a dualisme dans le cas des propositions et des configurations géométriques qui leur correspondent. On peut aussi considérer le dualisme entre les propositions énoncées dans les *Eléments*, dans un cadre axiomatique, et celles dont elles tiendraient lieu dans d'autres exposés antérieurs. Sauf dans ce dernier cas, il n'y a pas conformité. Elle n'est pas plus satisfaite entre propositions et d'éventuelles configurations géométriques associées. Elle est aussi mise en défaut dans la représentation lettrée des figures. Ce défaut de conformité mérite néanmoins d'être noté pour faire valoir la conformité des courbes géométriques et

140 C'est une propriété sémiotique tout à fait intéressante. Le fait que toute figure rectiligne puisse être tenue pour équivalente à un carré en est une autre, les figures distinguées, la forme normale, n'étant plus cette fois une décomposition en triangles mais un carré. Les cercles ne sont pas en reste avec le problème des isopérimètres selon lequel les cercles sont les figures d'aire maximale parmi *toutes* les figures de même périmètre. Le rapport des figures de base à chacune des expressions n'est pas le même dans tous les cas, il ne saurait sans doute en être autrement, quoiqu'il en soit, les démonstrations de ces propriétés remarquables ne sont pas indépendantes.

141 Cela ressortirait bien d'une histoire sémiotique de la triangulabilité, qui n'est qu'une partie d'une histoire sémiotique des « formes normales », dans laquelle seraient examinés à la fois les usages de la triangulabilité et les caractéristiques sémiotiques de l'expression de la généralité dans les démonstrations qui en ont été données, au travers notamment des démonstrations des problèmes des isopérimètres faisant intervenir la triangulabilité et des démonstrations de la triangulabilité des variétés données au 20ème siècle.

des équations polynomiales qui procède aussi d'une mise en relation de figures et de lettres. La conformité est en revanche implicitement satisfaite si l'on considère les *Eléments* comme une axiomatisation de propositions non plus idéales mais déjà énoncées. Elle l'est aussi entre les figures et les figures triangulées. Mais elle l'est en l'occurrence en raison d'un défaut d'incommensurabilité qui résulte de l'absence de dualisme. Cette incommensurabilité est aussi absente quand on considère les *Eléments* comme une représentation *axiomatique* de propositions déjà préalablement énoncées. Cette manière de considérer les *Eléments* est d'ailleurs celle qui rend sans doute le mieux compte du caractère fondateur si souvent reconnu à ce texte. Elle conduit aussi à la satisfaction du plus grand nombre de caractéristiques des textes inauguraux, seule l'incommensurabilité faisant défaut. C'est aussi la seule pour laquelle la condition d'inauguration peut sembler satisfaite. En revanche le réalisme est toujours assez clairement vérifié : il l'est si l'on considère que les propositions déjà énoncées dans des exposés non axiomatiques ou les configurations géométriques auxquelles feraient références les propositions, ou encore si l'on considère les figures auxquelles font référence aussi bien les lettres que les figures triangulées.
Le tableau ci-dessous récapitule les cinq manières différentes de ne pas satisfaire les caractéristiques d'un texte inaugural, avec en haut le cas où le plus grand nombre de conditions sont satisfaites et en bas celui où le plus grand nombre sont mises en défaut.

| | dualisme | réalisme | inauguration | incommensurabilité | conformité |
|---|---|---|---|---|---|
| axiomatique<br>non axiomatique | oui | oui | oui | **non** | oui |
| propositions<br>configurations | oui | oui | non | oui | non |
| lettres<br>figures | oui | oui | non | oui | **non** |
| figures<br>triangulées<br>figures | **non** | oui | non | **non** | oui |
| propositions<br>propositions | non | non | non | non | sans objet |

Le dernier cas est celui où l'on considère les propositions pour elles-mêmes (le cas échéant en y incluant, outre la protase, l'ecthèse, le diorisme, etc.), sans les tenir pour l'expression d'autre chose. Aucune des conditions n'est alors satisfaite. C'est aussi le cas où la condition sur le réalisme n'est pas satisfaite. Le cas suivant, en allant du bas vers le haut, est celui des figures triangulées et des figures. La représentation par des figures triangulées conduit à la coexistence systématique de *deux* représentations qui plus est parfaitement conformes. Ce cas est particulièrement intéressant parce que la triangulation offre une représentation uniforme de toutes les figures rectilignes planes qui entre effectivement dans la démonstration d'une proposition relative à toutes ces figures. Ainsi, la triangulation confère aux figures géométriques une caractéristique sémiotique remarquable que l'on retrouve dans toutes les représentations introduites par les textes inauguraux et qui est d'ailleurs la raison pour laquelle nous les considérons. Mais il n'y a en l'occurrence aucun dualisme ni *a fortiori* d'incommensurabilité. Cette propriété ne semble pas devoir être introduite par un texte inaugural. Elle est en quelque sorte une propriété des figures géométriques (mais il ne faudrait pas que cette formulation conduise à trop les naturaliser...). Si elle n'a de ce fait pas besoin d'être inaugurée, elle a tout de même besoin d'être établie par un théorème de représentation, du type mise sous forme normale, qui présente aussi un intérêt sémiotique général. Le cas suivant est celui des suites de lettres et des figures auxquelles elles sont associées. Il est cette fois intéressant de le rapprocher de la deuxième thèse de Descartes qui met les courbes géométriques en correspondance avec des lettres. Ce cas est bien sûr différent, mais le considérer permet sans doute de mieux apprécier le fait que la conformité soit satisfaite, dans une certaine mesure..., entre les courbes et les polynômes. Le quatrième cas est celui où l'on considère les propositions comme des représentations de configurations géométriques. Comme dans le précédent, c'est la conformité qui est mise en défaut. Le dernier cas est celui où l'on considère d'une part les propositions données sous forme axiomatique, c'est-à-dire avec un vocabulaire nécessairement restreint pour réduire le nombre des définitions, avec un ordre, au sein d'un même Livre, conforme à l'ordre de dérivation logique (ce qui ne suffit évidemment pas à déterminer complètement ni l'ordre ni surtout les propositions énoncées), et d'autre part les propositions telles qu'elles ont pu être exposées avant de l'être sous cette forme. C'est là en définitive la situation à laquelle conduit à peu près toute reformulation axiomatique. Toutes les caractéristiques d'un texte inaugural sont satisfaites, à l'exception de l'incommensurabilité. Des lors, sauf exception, les reformulations axiomatiques d'une théorie ne donne pas lieu à des textes inauguraux. Cela confère un caractère encore plus exceptionnel, si l'on peut dire, aux textes inauguraux (ce qui implique que la condition d'inauguration soit satisfaite) présentés sous forme axiomatique comme c'est le cas de la *Begriffschrift* et des *Principia mathematica*. Nous avions déjà remarqué qu'un texte inaugural dont la présentation axiomatique participerait à son caractère inaugural devait être un texte inaugurant des propositions. Ce qui précède permet de mieux apprécier les conséquences du fait que ces propositions doivent aussi être incommensurables aux propositions qu'elles représentent. Cela n'oblige pas à ne considérer que textes de logique, mais ces textes devront bien néanmoins inaugurer une représentation nouvelle de *propositions.* Cela montre inversement que pour trouver d'autres cas, il vaut mieux chercher les textes inauguraux parmi des exposés non axiomatiques. Ce qui est conforme aux exemples présentés. L'impossibilité d'établir le caractère inaugural des *Eléments* d'Euclide suivant aucune des cinq perspectives considérées permet peut-être de mieux apprécier les textes pour lesquels cela a été possible.

# VIII - Les énoncés et les textes inauguraux

Les cinq conditions (dualisme, réalisme, inauguration, conformité et incommensurabilité) ont maintenant été appliquées à de nombreuses reprises à des énoncés et à des textes. Nous les avons vues être parfois vérifiées et d'autres fois mises en défaut. Nous savons donc ce que veut dire les satisfaire. Nous avons aussi vues des cas où elles étaient toutes conjointement vérifiées et d'autres où seulement quelques-unes l'étaient, les autres ne l'étant pas. Des exemples et contre-exemples d'énoncés et de textes inauguraux ont ainsi été donnés. L'existence de ce type d'énoncés et de textes a ainsi été établie. Ces conditions ont surtout été introduites pour établir cet existence. Elles sont aussi utiles en pratique pour les repérer, les identifier, pour trancher parfois des cas d'abord douteux. Elles ne rendent néanmoins pas compte de l'intérêt de ces énoncés et de ces textes. D'une certaine manière, elles ne leur sont pas adaptées. Elles ne rendent pas compte de l'existence de ce type d'énoncés et de textes : elles aident à la découvrir, à la reconnaître, mais sans en rendre compte. Elles ne rendent en particulier pas compte de leur fonction. Or, je voudrais maintenant montrer que c'est leur fonction qui rend compte de la récurrence de ces énoncés et de ces textes avec leurs caractéristiques communes qu'il ne suffit pas d'identifier.
Dans cette partie, l'existence d'un type d'énoncés et de textes inauguraux va être considérée comme un fait établi. Je commencerai par tenter d'écarter un certain nombre de malentendus à l'encontre de ce fait en précisant la notion de type. Je commencerai par rappeler la définition du genre élaborée par François Rastier (Rastier 2001, chp VIII) afin d'établir *a contrario* que les textes inauguraux constituent pas un genre mais bien un type de textes. Cette distinction suffit à écarter certaines critiques dès lors qu'on ne prend plus l'identification de ce type inaugural pour celle d'un genre. Je rendrai ensuite compte de l'existence de ces énoncés et de ces textes inauguraux en montrant qu'ils participent du *conditionnement sémiotique* des mathématiques. Il s'agit en définitive simplement de reconnaître leur *fonction inaugurale*. A partir de là, il sera aussi possible de rendre compte de leur *nécessité*.

## 1 - Types et genres de textes

### *a) La notion de genre*

L'interprétation d'un mot dans un texte requiert souvent la prise en compte d'unités plus petites mais aussi plus grandes : la phrase, le paragraphe, le chapitre jusqu'à l'ensemble du texte. Plus généralement, l'interprétation de ces diverses unités dépend d'unités plus petites (la phrase dépend des mots qui la composent, le paragraphe des phrases qui le composent, etc), mais aussi plus grandes : la lecture d'un paragraphe dépend de ceux qui précèdent, mais aussi de ceux qui suivent, du chapitre qui le contient etc. Le texte est un palier important de cette hiérarchie, mais il n'y a pas de raison de considérer qu'il soit le dernier. Son interprétation, et celle des unités infra-textuelles, qui vont en-deça des mots, dépend aussi d'unités à la fois plus plus vastes et supérieures. Reconnaître ces unités supra-textuelles c'est donc reconnaître que l'interprétation d'un texte, à la manière d'un mot dans une phrase, d'une phrase dans un paragraphe, etc., dépend non seulement de ce qui le compose mais aussi de facteurs sociohistoriques extérieurs à celui-ci. Si cette hiérarchie intervient dans l'interprétation sans intervient-elle aussi dans la composition du texte, sans qu'on puisse confondre ces deux hiérarchies. La sémantique interprétative s'attache à prendre en compte, à décrire, étudier et à tirer les conséquences de cette hiérarchie d'unités, des sèmes jusqu'au discours, et de son articulation sur les plans de l'expression et du contenu. Son originalité est, entre autres, de ne pas réduire la linguistique à une analyse componentielle et séquentielle, à prendre en considération tout une hiérarchie d'unités, sans donner l'exclusivité à un rang particulier, comme la phrase ou le texte, et à tenir compte aussi bien des unités supérieures qu'inférieures dans l'analyse de chacune. Elle s'efforce aussi de concilier l'ambition systématique d'une linguistique structurale, prolongeant notamment les travaux de Hjelmslev, et l'irréductible historicité des productions linguistiques sans ce contenter de la renvoyer dans l'opposition entre théorie et applications.

Il suffit à mon propos de considérer les genres comme des unités supra-textuelles. Un genre sera donc simplement une unité supra-textuelle sans plus de distinction de rangs ; genres, sous-genres, sous-sous-genres d'une part et champs génériques, etc. d'autre part. Je parlerai du genre d'un texte alors qu'à l'évidence il relève ou en combine plusieurs. La constitution effective de la hiérarchie des genres repose sur l'établissement d'unités relativement autonomes et la détermination de leurs dépendances mutuelles. Son intérêt et son fondement résident donc dans la possibilité d'établir de telles unités, dans les principes qui servent à les établir, et dans la description de leurs relations mutuelles, leurs rapports de présupposition et de contraintes. Un des aspects essentiels du genre, comme de toute unité, est en effet son caractère nécessaire et contraignant pour les unités inférieures, ce qui en fait « l'instance majeure d'actualisation et de normalisation de la langue » (Rastier 2001, 272). Il s'agit en effet de reconnaître qu'un texte est produit par un auteur et interprété dans une hiérarchie de genres constitués dans laquelle il doit trouver sa place, généralement au terme d'étapes successives, plus ou moins longues et anticipées de mise en conformité, et sans donner au texte une existence transcendante antérieure à l'occupation de cette place. La plupart des textes s'inscrivent dans cette hiérarchie sans aller contre elle. La production, la publication et la réception d'un texte seront d'autant plus faciles que le texte sera conforme à cette hiérarchie. L'inscription dans un genre peut néanmoins s'accompagner d'une subversion de celui-ci. Sans doute la propension à subvertir le genre dépend-elle aussi du genre et fait partie de sa définition. Il ne s'agit souvent que de petites subversions qui ont elles-mêmes plus besoin du genre pour exister qu'elles ne le transforment. Ce déni d'un genre ne dément pas mais au contraire atteste le rôle des genres. Ainsi, les revues de mathématiques contribuent à définir toute une hiérarchie variable de genres d'articles. Une revue peut n'accepter qu'un genre unique, par exemple le compte-rendu, ou plusieurs, l'article de recherche dans un champ plus ou moins circonscrit, le compte-rendu, la notice nécrologique, l'article historique etc. Le sommaire et les rubriques rendent souvent apparentes sur le plan de l'expression ces distinctions génériques par l'inscription de chaque article dans un genre (avec la contrainte, pour le support papier, d'inscrire un article dans un seul genre). Pour être publié dans une revue donnée, un article doit relever de l'un de ses genres, pour être publié d'une quelconque manière il est préférable de s'inscrire dans un genre reconnu d'une revue existante. Un article sera d'autant plus facile à publier et à lire que les contraintes génériques auront été intégrées par l'auteur et son lecteur. Les différences génériques règlent aussi les transformations entre genres, par exemple la conversion d'articles de recherches en exposés de synthèse ou en manuels.

Le genre peut aussi être vu comme ce qui fonde un corpus homogène. Adopter un genre c'est décider de la communauté des textes qu'il est nécessaire ou pertinent de convoquer pour l'interprétation d'un texte. Le genre est une sorte d'espace de référence commun à différents textes. Il règle donc le corpus des textes plus ou moins explicitement cités par un texte. Il règle aussi la forme de la citation, c'est-à-dire le mode de référence aux autres textes. Ce rapport, c'est-à-dire l'intertextualité, participe aussi du genre, elle entre dans la détermination et l'interprétation des unités de tous rangs. Il faut surtout entendre par là que l'intertextualité a aussi une variabilité sociohistorique et que la composition et l'interprétation d'un texte lui sont subordonnées : il n'y a pas d'abord un texte dont on a déterminé le sens et dont on explore ensuite l'intertextualité. L'intertextualité participe de l'interprétation du texte.

La *sémiosis* est le rapport entre un signifiant et un signifié. L'intérêt de ce terme est surtout d'offrir la possibilité de reconnaître la variabilité de ce rapport et donc d'en envisager l'étude[142]. La notion de *sémiosis textuelle* désigne le rapport entre le plan de l'expression du texte et son plan du contenu (Rastier 2001, 248). Cette extension du signe au texte de la notion de sémiosis est un exemple de la généralisation à tous les rangs d'une notion souvent attachée à un seul d'entre eux. Nous avons par exemple vu que les Mémoires de Bernoulli présentaient un enchevêtrement de considérations physiques et mathématiques. Celles-ci sont au contraire bien séparées dans les Mémoires d'Euler. Les données physiques sont transformées au début en divers grandeurs mathématiques qui figurent ensuite comme paramètres dans l'équation aux dérivées partielles. Cette équation est ensuite considérée et résolue comme un problème purement mathématique. Les différences de rapport de Daniel Bernoulli , d'Euler, de D'Alembert ou de Lagrange à la physique et aux mathématiques se retrouvent dans les différences de rapport entre le problème des cordes vibrantes et l'équation différentielle et se retrouvent dans la sémiosis de leurs Mémoires respectifs. Nous avons vue cette séparation nettement marquée dans Fourier (1822). La *Théorie analytique de la chaleur* présente une hiérarchie linéaire d'unités supra-phrastiques bien distinctes : chapitre, section, article. Ce sont bien les seules unités distingués à ces niveaux puisque les théorèmes, les définitions et les démonstrations ne font l'objet d'aucune séparation systématique sur le plan de l'expression. Les chapitres ont un titre et un numéro, les sections de même, mais leur numérotation reprend à partir de 1 au début de chaque chapitre et les articles sont seulement numérotés et le sont de manière continue du début jusqu'à la fin du livre, de telle sorte que leur numéro suffit à les identifier. Les chapitres, c'est-à-dire la plus grande unité infra-

142Cette variabilité est étudiée dans des textes de topologie algébrique dans (Herreman 2000).

textuelle, répondent à deux séries d'oppositions. Ils accueillent d'une part les trois étapes du processus de mise en équation : définition des grandeurs physiques (chp. I), mise en équation (chp. II), résolution (chp. III-IX) dont la séparation est ainsi nettement marquée. A partir du troisième, la succession des chapitres suit celle des corps considérés. Ainsi, la plus grande unité infra-textuelle marque les étapes de la mathématisation avec ses trois moments bien marquées, appliquée à des corps particuliers. Elle domine dans les trois premiers chapitres l'opposition entre les corps qui, dans le chapitre II, est reléguée au niveau des sections, avant de remonter ensuite à la surface, c'est-à-dire au niveau des chapitres (III-IX). Les unités textuelles de rang inférieur au chapitre accueillent d'autres oppositions. Elles accueillent en particulier l'entrelacement des développements purement mathématiques et la vérification de leur conformité physique. Nous avons aussi vu qu'il fallait descendre jusqu'au niveau du signe et reconnaître la pluralité des contenus des fonctions (expression analytique, courbe, distribution de chaleur) pour rendre compte de la relation (M). Les modalités de la relation entre l'Analyse mathématique et les phénomènes auxquels elle se rapporte se déploient en définitive à tous les niveaux de la hiérarchie sémantique et n'est réductible à aucun. L'unicité de la solution de l'équation différentielle est un exemple de problème qui se pose ou non selon la sémiosis considérée. Fourier s'attache à en donner une démonstration. Pour Daniel Bernoulli, qui s'inscrit dans un rapport différent des propriétés physiques aux propriétés mathématiques l'unicité est en quelque sorte une condition intiale.

L'établissement d'un genre repose sur l'identification d'un ensemble de contraintes auxquelles est subordonnée l'interprétation des unités d'un rang inférieur et, en particulier, celle des unités infra-textuelles. Inversement, la hiérarchie des genres est un cadre pour traiter des contraintes sociohistoriques autrement souvent ignorées ou traitées soit de manière moins systématique que ne le permet la sémantique interprétative soit en en interdisant ou en ignorant la variabilité.

### b) La notion de type

François Rastier oppose aux genres les *types* de textes définis à partir de critères simples : textes écrits au passé simple, à la première personne du singulier, en français, etc. Les textes inauguraux définissent un type. Il importe surtout de reconnaître qu'ils ne définissent pas un genre.

Ainsi, les textes inauguraux n'entrent pas dans un espace de référence commun. Ils citent d'ailleurs remarquablement peu de textes et, *a fortiori,* ne se citent pas en tant que tels. Il est bien sûr possible de constituer un corpus à partir de ces textes mais il ne serait pas homogène au sens où il n'y aurait au-delà du fait de relever du discours mathématique guère de communauté de genre pertinente. La prise en compte de leurs genres conduirait à considérer d'autres textes qui ne seraient pas inauguraux, leur faisant ainsi perdre leur spécificité, comme cela est fait dans la plupart des études qui leur sont consacrées. Turing, Church et Post citent Hilbert et Gödel ; ils ne citent pas Descartes, Fourier, etc. (Fourier cite néanmoins Descartes (« Discours préliminaire », xxiii)). Nous avons même vu Fourier s'excuser de s'écarter du genre habituel des Mémoires en mathématiques.

Reconnaître que ces textes ne définissent pas un genre permet de circonscrire l'intérêt d'identifier leur caractère inaugural. La sémantique interprétative aide ainsi à délimiter ce qu'il ne faut pas en attendre : il n'y a *a priori* pas d'intertextualité entre ces textes, ils n'ont pas de sémiosis commune, ils n'ont guère de rapport sociohistorique commun et reconnu qui subordonnerait leur interprétation. J'ai néanmoins essayé de montrer qu'il importait de reconnaître le type inaugural d'un texte pour éviter certaines erreurs d'interprétation. Le genre n'est pas non plus le seul facteur sociohistorique qui règle les interprétations. Je voudrais maintenant rendre compte du *fait* que ce type de texte existe sans pour autant constituer un genre.

## 2 - Conditionnement sémiotique

Les exemples donnés ont suffisamment établi l'existence *de fait* des énoncés et des textes inauguraux. La distinction entre type et genre devrait avoir permis de dissiper certains malentendus susceptibles d'en empêcher la reconnaissance. Il reste encore à rendre compte des raisons de l'existence de ce type d'énoncés et de textes. Tout linguiste ou historien des mathématiques soucieux de l'historicité de la langue et des mathématiques sera réticent devant un quelconque type en raison de son caractère nécessairement anhistorique[143]. Il convient donc de rendre compte de l'existence de celui-ci. Nous verrons en particulier que loin d'aller à l'encontre de l'historicité des mathématiques il contribue au contraire à en rendre compte et participe de celle-ci. Je voudrais maintenant rendre compte de ces énoncés et de ces textes à partir de la notion de *conditionnement sémiotique* (Herreman 2000).

Les énoncés et les textes inauguraux relèvent du *conditionnement sémiotique* et, plus généralement, du *métalangage* mais suivant l'acception spécifique qui lui est donnée en linguistique intégrationniste qu'il importe de bien distinguer de celle d'origine logique (Harris 1998a, 69 ; Herreman à paraître). Le métalangage intégrationniste désigne l'ensemble des procédés utilisés par des locuteurs lors d'une communication pour que celle-ci réalise autant que possible leurs intentions dans les conditions où la communication se fait. Il comprend tous les procédés (questionnement, précision, répétition, reformulation etc.) qui interviennent au cours d'une communication pour que celle-ci atteigne autant que possible ses objectifs dans les conditions où elle se fait. Cette acception du métalangage est en linguistique intégrationniste indissociable de la dénonciation du « mythe du langage ». Le « mythe du langage » consiste à assimiler le langage à un code constitué, autonome et partagé et à considérer corrélativement la communication comme une opération de codage et de décodage entre deux personnes qui partagent un même code. A l'encontre de cette conception de la communication et du langage, la linguistique intégrationniste fait valoir que la communication est toujours intégrée à la situation où elle prend place. Elle dénonce le mythe d'un langage constitué, partagé et autonome dont elle s'attache à dégager les nombreuses manifestations, les conséquences et ses impossibilités. Le

143« La poétique doit certes produire et hiérarchiser des critères descriptifs, mais surtout rechercher leurs interactions. Les genres sont en effet définis par un faisceau de critères, et doivent d'ailleurs leur caractère d'objectivité à la multiplicité de ces critères. La cohésion du faisceau des critères, tant au plan du signifié qu'à celui du signifiant, structure la textualité et détermine la sémiosis textuelle. L'évolution diachronique du faisceau rend compte de l'évolution du genre, alors que les « types » de textes fondés sur un seul critère demeurent anhistoriques. » Rastier 2001, 253.

métalangage est nécessaire dans la mesure même où le langage ne peut être assimilé à un code. Inversement, les diverses acceptions du métalangage reflètent la conception que l'on a du langage. Le métalangage logique est notamment conforme à la conception du langage développée en logique, qui compte sans doute parmi les réalisations les plus abouties de ce mythe.

Le *conditionnement sémiotique* désigne plus spécifiquement l'ensemble des procédés utilisés dans un texte pour mettre en place les conditions sémiotiques exploitées qui ont besoin de l'être (« texte » incluant en l'occurrence toute production sémiotique). En relèvent par exemple les procédés qui permettent d'attribuer une notation et à l'associer de manière spécifique à d'autres entités qui formeront finalement un signe aux caractéristiques plus ou moins propres au texte considéré et qu'il incombera au lecteur de comprendre. Le conditionnement sémiotique comprend toutes les interventions de l'auteur, délibérées ou non, qui servent à établir les caractéristiques sémiotiques particulières de son langage, celles qui ont à l'être par opposition à celles qu'il tient ou peut tenir pour reçues. Il est d'autant plus prégnant que le texte a des caractéristiques sémiotiques inhabituelles. Un énoncé inaugural en est un exemple puisqu'il introduit un système d'expressions dont il précise le rapport à son contenu. Sa particularité est de se rapporter à un *système d'expressions* complet, et non seulement à un signe ou à des relations qu'il s'agit d'intégrer dans un système d'expressions constitué. Un énoncé inaugural est un exemple de conditionnement sémiotique exceptionnel par son extension. Il l'est aussi par le fait qu'il introduit une sémiosis *conforme*. Le conditionnement sémiotique est aussi exceptionnel par son étendue puisqu'il couvre, dans tous les exemples considérés, à peu près l'intégralité des textes. Les textes inauguraux sont ainsi des textes dans lesquels la part du conditionnement sémiotique est extrémale.

Le statut des énoncés et des textes inauguraux peut être encore précisé en indiquant en quoi le conditionnement sémiotique diffère du métalangage intégrationniste et de la sémiosis textuelle. La sémiosis textuelle étend comme on l'a vu à tout un texte le rapport entre signifiant et signifié. Elle fait donc intervenir d'une part la composition du plan de l'expression du texte, d'autre part celle de son contenu et enfin le type de corrélation qui existe entre les deux, toujours dans la perspective d'en reconnaître à la fois la variété et d'y repérer des formes de permanence. Cette sémiosis textuelle est comme on l'a aussi vu un des éléments auxquels la production et l'interprétation d'un texte sont subordonnées. Un texte a une sémiosis textuelle conforme à son genre et celle-ci a les caractéristiques générales des genres.

Par leur statut, les genres et la sémiosis textuelle échappent aux critiques du « mythe du langage ». La sémiosis textuelle s'impose avec la même relativité et la même force que les diverses contraintes de genre : "notion impure, historique et fluctuante" (Rastier 2001, 263). Elle fait aussi partie de ces caractéristiques sémiotiques d'un texte auxquelles se rapporte le conditionnement sémiotique. Mais, et la différence est ici, le conditionnement sémiotique concerne l'*instauration* de ces caractéristiques. Si les textes inauguraux s'inscrivent dans des genres, et en particulier dans une sémiosis, leur particularité remarquable est d'inaugurer de nouveaux rapports sémiotiques ou de nouveaux systèmes d'expressions. C'est aussi pour cette raison qu'ils relèvent du métalangage intégrationniste. Mais ils en diffèrent par le fait que la linguistique

intégrationniste procède d'un rejet radical du « mythe du langage ». Or la notion de conditionnement sémiotique participe elle d'un examen critique de ce mythe, sans lui refuser toute pertinence et en examinant les conditions de sa mise en place, et donc aussi ses limites, notamment historiques, occultées aussi bien par ses détracteurs que par ses sectateurs. Le conditionnement sémiotique comprend ainsi les procédés qui servent à instaurer les caractéristiques sémiotiques du « mythe du langage » que la linguistique intégrationniste ne considère que pour en dénoncer le caractère illusoire. La conception de l'Analyse mathématique à l'œuvre dans le « Discours préliminaire » de Fourier présente sans conteste toutes ces caractéristiques. Mais analyser un moment de l'inauguration de ce « mythe » dans la *Théorie analytique de la chaleur* et déterminer dans quelle mesure ses caractéristiques sont satisfaites permet de dénoncer le « mythe » mais aussi d'apprécier l'œuvre accomplie et finalement d'un peu mieux appréhender l'intérêt des séries trigonométriques, des équations algébriques, des formules de l'idéographie ou d'un autre système logique, ou encore des machines de Turing, des fonctions récursives ou λ-définissables.
En portant spécifiquement sur l'*instauration* des caractéristiques sémiotiques le conditionnement sémiotique diffère aussi des procédés métalinguistiques considérés en linguistique intégrationniste et de ceux considérés en sémantique interprétative. Il ne s'agit en effet pas seulement de la transformation ou de la subversion plus ou moins durable d'un genre ou d'une sémiosis. Si bien sûr un énoncé inaugural est sujet à interprétation, avec toutes les questions afférentes, il est avant tout un énoncé qui fixe l'interprétation d'un système d'expressions. Il n'intervient pas comme une entité supra-textuelle mais bien comme un énoncé métalinguistique. Si c'est bien un énoncé métalinguistique au sens intégrationniste c'est aussi un énoncé voué à instaurer les conditions du mythe du langage que rejette la linguistique intégrationniste. Le conditionnement sémiotique est donc plus qu'une manifestation du mythe du langage ; il en instaure les conditions. Et les énoncés inauguraux se distinguent parmi les procédés qui en relèvent comme l'un des plus éminents puisqu'elles concernent l'instauration d'un système complet.

Quelques-unes des difficultés épistémologiques et historiographiques que posent la définition d'un type d'énoncés et de textes peuvent maintenant être levées. La reconnaissance de ce type repose sur la reconnaissance du conditionnement sémiotique, c'est-à-dire sur la reconnaissance d'énoncés et de textes en grande partie consacrés à instaurer ou encore à inaugurer certaines caractéristiques sémiotiques. C'est donc en définitive la similitude de la fonction métasémiotique de ces énoncés et de ces textes qui rend compte de leur type commun. S'il y a un type d'énoncés et de textes, c'est seulement qu'il y a des fonctions métasémiotiques récurrentes, en l'occurrence celle qui consiste à inaugurer un système d'expressions. D'autre part, la récurrence de cette fonction n'est établie que là où elle est avérée. Par cette tautologie apparente je veux souligner que les énoncés et les textes inauguraux ne sont pas la seule manière d'instaurer un système sémiotique[144]. Il s'agit seulement d'un mode d'instauration récurrent qu'il convient néanmoins de reconnaître et dont il peut sembler justifié de rendre compte. Enfin, la récurrence de cette fonction ne signifie évidemment

144 Les figures rectilignes de la Géométrie grecque par exemple n'ont sans doute pas eu besoin d'un énoncé inaugurale pour être introduites.

pas qu'elle inaugure les mêmes caractéristiques sémiotiques. Si tel était le cas, elle n'aurait le plus souvent sans doute pas lieu d'être. Que la plupart des maisons aient sans doute une porte, à la plupart des époques et dans la plupart des pays, ne signifie pas que les maisons et leur environnement soient en tout temps et partout les mêmes. L'histoire de l'architecture n'a pas besoin d'ignorer ou de nier les portes.

Reconnaître les énoncés et textes inauguraux ne participe pas d'une analyse anhistorique des mathématiques. Ces énoncés et ces textes ont au contraire à un caractère éminemment historique puisqu'il s'agit d'inaugurer un système d'expressions et que cette inauguration s'inscrit dans un moment précis encadré par les conditions qui prévalent au début de l'inauguration et celles que celle-ci contribue à instaurer. L'historicité des énoncés inauguraux ressort aussi de la nécessité de les énoncer. C'est cette nécessité qui va maintenant être considérée.

## 3 - La nécessité d'un énoncé

L'énoncé d'un théorème est très utile mais il serait possible de ne garder que sa démonstration qui est, en partie au moins, une expression de même nature que lui[145]. L'énoncé d'un théorème est toujours moins précis que ne l'est sa démonstration. C'est l'inverse pour un énoncé inaugural : les arguments donnés pour le soutenir ne suffisent pas à rendre compte de ce qu'il affirme. Ils ne peuvent en tenir lieu. Ce qu'il affirme excède ces arguments. L'impossibilité de l'établir complètement rend son énoncé *nécessaire*. Rien d'autre n'énonce ce qu'il affirme. L'énoncé vient avant sa justification qui reste en suspens. En ce sens aussi l'énoncé inaugural est inaugural. Il faut l'énoncer dans la mesure où il n'y a pas d'autre expression de ce qu'il affirme que son énoncé. C'est un exemple d'énoncé performatif. Il ne l'est pas en raison d'une convention préalable ou d'un quelconque pouvoir reconnu à celui qui l'énonce. C'est au contraire cet énoncé qui, soutenu par le texte inaugural, instaure une convention. Il ne réalise pas non plus ce qu'il affirme. L'énoncé n'établit pas, ne démontre pas la conformité des deux systèmes d'expressions qu'il soutient.

Compte-tenu de l'impossibilité de vraiment justifier un énoncé inaugural, celui-ci doit toujours être en partie assumé par celui qui l'énonce. Il doit venir du mathématicien car il n'est pas possible de le rapporter entièrement aux justifications données. Il implique son auteur qui doit à cet endroit apporter en personne son soutien. Il doit lui-même prendre en partie l'énoncé en charge. Les conditions de sa production ne sont jamais satisfaites, elles ne peuvent donc en rendre compte. Un tel énoncé n'est pas évident. Il ne résulte d'aucun argument ; il n'a pas d'autre origine assignable que celui qui l'énonce. Cette implication de celui qui l'énonce pour la première fois, les autres pouvant ensuite invoquer ce précédent, confère aussi à ces énoncés un caractère éminemment historique[146].

145Par exemple Ludwig Wittgenstein, *Grammaire philosophique*, §24.

146 Ces remarques ne sont pas contredites par le fait que les troisième et quatrième énoncés* inauguraux de *La Géométrie* soient soutenus sans être énoncés. Ce sont en quelque sorte des « lemmes inauguraux » qu'il n'est pas nécessaire d'isoler, leur inauguration étant incluse dans celle du deuxième énoncé inaugural.

# IX -Conclusion

## 1 - Un type d'énoncé récurrent dans l'histoire

Les exemples d'énoncés inauguraux qui ont été donnés montrent que la thèse de Church-Turing correspond à un type d'énoncé récurrent en mathématiques et indépendant du problème particulier de la calculabilité. Le reconnaître peut être utile même pour l'analyse d'un énoncé inaugural particulier, et notamment pour la thèse de Church-Turing. Il semble maintenant plus difficile de soutenir avec Gödel « qu'avec ce concept [de récursivité générale] nous avons réussi pour la première fois à donner une définition absolue d'une notion épistémologique intéressante ». Les problèmes de géométrie sont aussi une « notion épistémologique intéressante » et les équations algébriques en sont tout autant une « définition absolue ». Et si l'on veut voir avec Gödel dans la définition des machines de Turing « une sorte de miracle », il faut alors reconnaître que c'est un « miracle » récurrent. Mais il faut encore reconnaître qu'il est tout aussi récurrent de ne plus croire en ces « miracles ». En effet, on ne peut manquer de trouver insoutenables la plupart de ce énoncés inauguraux. Ce constat s'impose. Il est essentiel de le faire pour bien appréhender la nature et l'intérêt de ces énoncés. Il en indique à nouveau la valeur éminemment historique. Il nous faut à la fois reconnaître qu'ils ont toutes été sérieusement soutenus et qu'ils ne sont plus, pour la plupart, sérieusement soutenables. Les énoncés inauguraux apparaissent inexorablement insoutenables. Pourtant les mathématiciens qui les ont soutenus n'avaient sans doute pas moins de «raisons assez fortes » (*quite compelling grounds*), pour reprendre les termes de Kleene, qu'ils n'en n'ont aujourd'hui quand ils en soutiennent. On ne peut ni espérer que les énoncés inauguraux actuels évolueront autrement, ni croire que ce constat historique suffise à les réfuter. On peut d'emblée en tirer deux conséquences complémentaires. a) La validité d'un énoncé inaugural et des arguments qui le soutiennent ont une valeur historique. Ces énoncés nous donnent ainsi un accès privilégié à l'historicité des mathématiques ; une historicité compatible à la fois avec leur pratique et avec leur histoire et que leur récurrence ne permet pas d'écarter. Nous avons ainsi un moyen d'appréhender un peu mieux l'historicité des mathématiques contemporaines souvent plus difficile à saisir. Les énoncés inauguraux sont comme des indices généraux d'une historicité qui ne peut être que particulière. C'est cette valeur, et à travers elle celle des mathématiques, qu'elles peuvent contribuer à mieux saisir. b) Inversement, chaque énoncé inaugural qui n'est plus soutenable s'offre comme un fait à comprendre. Il est un problème historiographique, un programme de recherche en histoire des mathématiques. C'est d'ailleurs un programme souvent déjà largement réalisé par les diverses études existantes consacrées aux mathématiciens ou aux développements

mathématiques liés à chacune de ces inaugurations.
Les énoncés inauguraux sont avérés et relativement nombreux au regard de leurs caractéristiques qui les rendent exceptionnels. Leur introduction marque des développements mathématiques d'une nouveauté particulière. Tous les développements mathématiques ne sont évidemment pas de ce type. Quand les mathématiciens définissent aujourd'hui des polynômes sur un anneau, des séries trigonométriques, des variétés différentiables, des structures algébriques, analytiques ou géométriques, etc. ils considèrent introduire des notions utiles, voire nécessaires, à de nombreux énoncés dans diverses parties des mathématiques, sans pour autant les tenir pour *conformes* à des notions intuitives préalablement constituées et distinguées. Les mathématiques ont évolué. Elles ont été présentées et développées suivant des statuts très variés (axiomatique euclidienne, algèbre, calcul infinitésimal, algèbre symbolique, arithmétisation, logicisme, structuralisme, théorie des ensembles, théorie des catégories, théorie de la complexité, etc.). Et pourtant, tout au long de cette histoire on retrouve des énoncés inauguraux. Et ils ont aussi à peu près systématiquement été abandonnés. Ils marquent le moment d'un rapport particulier mais récurrent, dépassé et reconduit des mathématiques avec des notions constituées. Ils témoignent de la séparation des mathématiques et de ces notions, d'une nature séparée des mathématiques, en même temps que d'une forme de participation : certaines définitions mathématiques semblent, à un moment, pouvoir prétendre être conformes à des notions préexistantes. Un énoncé inaugural est souvent doublé de considérations philosophiques. Les positions philosophiques exprimées peuvent influer sur le rapport du mathématicien à l'énoncé inaugural, avoir une incidence sur le vocabulaire et le cadre dans lequel il sera discuté, mais elles ne dispensent ni de concevoir la représentation introduite ni de son inauguration. Quelle que soit la philosophie des mathématiques à laquelle on peut adhérer, les fonctions λ-définissables, les machines de Turing ou les fonctions récursives générales offrent des représentations qui apparaissent ou qui sont apparues conformes à l'idée intuitive de calculabilité. De la même manière, le énoncés inauguraux de Descartes existent en tant que tels indépendamment de sa philosophie qui, aussi développée soit-elle, ne l'a pas dispensé de ces inaugurations.

## 2 - Totalités

Chaque énoncé inaugural est relatif à une *totalité* : la totalité des fonctions calculables, des problèmes de géométrie, des fonctions, des déductions et des propositions logiques, etc. De la vient l'impossibilité de l'établir et la nécessité de l'énoncer. L'énoncé inaugural introduit un système d'expressions qui va ensuite permettre d'énoncer (et de démontrer) des propositions impliquant ou s'inscrivant dans cette totalité. Or c'est là aussi une des singularités des énoncés mathématiques : pouvoir considérer des totalités et grâce à cela énoncer et démontrer des propositions générales. Le théorème sur le nombre de racines positives d'un polynôme en est un exemple. La machine de Turing universelle ou la démonstration de l'impossibilité de l'*Entscheidungsproblem* en sont d'autres. Mais il arrive aussi que les textes inauguraux n'en contiennent pas. C'est le cas de l'*Idéographie* ou encore des *Principia Mathematica*. C'est en effet surtout dans les textes qui s'inscrivent dans le prolongement des textes inauguraux que l'on trouve des théorèmes qui tirent parti des représentations inaugurées. Leur étude relève donc de la *réception* de ces énoncés et sort donc du cadre de ce travail. Un énoncé inaugural est ainsi un énoncé invérifiable qui permet ensuite des énoncés autrement impossibles.

## 3 - Vue d'ensemble

Les énoncé inauguraux sont un moyen de poser et d'aborder ce que l'on pourrait appeler le problème de *la vue d'ensemble,* c'est-à-dire l'étude des conditions de possibilité de certains énoncés généraux, en mathématiques ou ailleurs. Les énoncés inauguraux sont un moyen de constituer une *vue d'ensemble* sur les problèmes de géométrie, sur les courbes, les fonctions, les propositions logiques, etc. Les énoncés mathématiques ont l'intérêt d'offrir des conditions privilégiées pour aborder cette question. Mais ce problème ne leur est pas propre. Pour ne donner qu'un autre exemple, il se retrouve dans les nomenclatures botaniques ou zoologiques qui constituent aussi des vues d'ensemble sur les plantes et les animaux. Il se pose par exemple aussi pour l'écriture (et la lecture) des travaux d'histoire des mathématiques. Cette question conduit à porter une attention particulière aux conditions de possibilité des *vues d'ensemble,* celles sur lesquelles ces travaux sont fondés et celles qu'ils contribuent à constituer. Cela comprend en particulier les conditions d'une présentation uniforme des textes étudiés, de leurs problèmes, de leurs techniques de résolution, etc. Le langage utilisé par l'historien est un élément majeur de cette présentation uniforme. L'identification du ou des points de vues d'ensemble est un élément qu'il est intéressant de repérer pour identifier le genre argumentatif d'une étude. Une certaine aspiration historiographique (décrire et comparer des textes) recoupe une certaine aspiration mathématiques (développer des solutions générales). Les unes et les autres trouvent parfois leurs conditions de possibilité dans des énoncés inauguraux. Les énoncés inauguraux ont aussi une incidence sur l'histoire des mathématiques. Les travaux historiques en sont aussi des manifestations et une forme de déploiement qui peut être inversement un moyen de les découvrir et de les saisir. Il a été possible de commencer à le faire entrevoir avec l'incidence de la représentation algébrique aussi bien sur notre représentation des courbes que sur celle des problèmes de géométrie. Mais si les énoncés inauguraux sont d'utiles repères ils n'épuisent encore moins en histoire des mathématiques qu'en mathématiques les conditions de possibilité des énoncés généraux qui y sont proposés. Leur intérêt est à nouveau de permettre d'aborder sur des cas simples cette question plus vaste et de mettre en évidence quelques-uns de ses enjeux.

## 4 - Une étape bien définie dans une histoire

Un énoncé inaugural a lui-même une genèse. Chaque énoncé inaugural s'inscrit dans une histoire qui ne se réduit pas au texte inaugural qui l'introduit. Il n'entrait pas dans notre propos d'étudier cette génèse ou cette histoire. Mais leur prise en compte ne saurait entamer la sorte de complétude inhérente aux textes inauguraux. Ces textes sont des composantes remarquables de l'histoire des mathématiques et à cet égard s'inscrivent diversement dans celle-ci. Mais en tant que textes qui inaugurent une nouvelle représentation, ce sont des textes avec une fonction bien définie et qu'ils accomplissent, dans la mesure où ils le peuvent, ce que l'étude de leur genèse ne saurait leur retirer. Cela ne veut pas dire que l'histoire, même sémiotique, du système d'expressions qu'ils inaugurent soit achevée mais ils en marquent néanmoins un moment spécifique. Le système d'expressions n'a pas fini d'être constitué, mais son inauguration constitue une étape circonscrite.

## 5 - Intérêt historiographique de l'inauguration

Reconnaître les énoncés inauguraux et les étudier est aussi un moyen de prévenir certains biais que les totalités constituées peuvent induire particulièrement dans les études consacrées aux textes qui les inaugurent. Notre familiarité avec les courbes et les équations algébriques ne nous rend plus sensible à la nécessité de les inaugurer. Celui qui aujourd'hui, et depuis longtemps..., étudie *La Géométrie dispose* de ces totalités. Sans une démarche spécifique il ne perçoit plus la nécessité de les constituer, ce qui est pourtant un des enjeux de *La Géométrie* et au-delà de tout texte inaugural. N'ayant plus guère besoin d'arguments, nous ne prêtons plus guère d'attention à ceux donnés par Descartes auxquels nous risquons de trouver d'autres justifications répondant mieux à nos attentes. Il est en effet particulièrement difficile de suspendre et d'apprécier les effets d'un système d'expressions une fois qu'il a été reçu et de se remettre dans « l'état sémiotique » antérieur. Reconnaître les énoncés inauguraux c'est aussi reconnaître l'importance d'énoncés qui ne sont ni des théorèmes ni des définitions.

### i) L'écueil d'une idéalisation des systèmes d'expressions

La caractérisation des textes inauguraux ne doit pas non plus reconduire l'anachronisme sémiotique consistant à conférer une préexistence aux systèmes d'expressions introduits et à ne voir dans ces textes que des stratégies ou des procédés rhétoriques pour introduire des représentations qui en fait existeraient déjà d'une manière ou d'une autre. Ce serait à nouveau ignorer que les textes qui reprennent ces systèmes d'expressions participent aussi à leur constitution. En les reprenant, ils sont amenés à introduire une description de ces systèmes différente de celle qui est donnée, quand elle l'est, dans les textes inauguraux. Ainsi, les textes que nous avons considérés ne réalisent souvent qu'une part incomplète de la constitution de ces systèmes d'expressions qui ne le sera que dans certains textes qui les reprendront.

### ii) L'intérêt d'avoir distingué un type d'énoncé

L'introduction d'un système d'expressions est un événement *a priori* difficile à bien isoler. Il apparaît en particulier difficile de le distinguer du simple recours aux expressions qui le composent, ou plutôt à des variantes de celles-ci, et de différencier leurs enjeux respectifs. Les énoncés et les inauguraux permettent par leurs caractéristiques de repérer le moment de l'introduction de certains de ces systèmes.

### iii) La nécessité d'autres analyses

Les caractérisations qui ont été proposées des énoncés et des textes inauguraux ont l'intérêt d'être simples, effectives et contraignantes. Mais elles relèvent d'un niveau d'analyse auquel il n'y a aucune raison de penser qu'il soit ni nécessaire ni suffisant de se placer. Les énoncés et les textes inauguraux sont comme des sortes d'îles volcaniques sur la surface de l'histoire des mathématiques. Ils témoignent d'une activité sémiotique qui ne se réduit pas à eux. Ils existent et ils offrent de nombreux avantages pour l'étude de phénomènes autrement difficiles à observer, et d'abord à imaginer. Ces études ne peuvent pas non plus se limiter à la partie émergée aussi spectaculaires que soient les phénomènes qui s'y produisent. Au cours de cette étude nous avons à plusieurs reprises été obligés de considérer d'autres couches pour rendre correctement compte du statut de leur énoncé. Les phénomènes sémiotiques qui se produisent à ces niveaux plus souterrains peuvent aussi avoir des effets sur l'histoire des mathématiques même s'ils ne sont pas aussi saillants que l'énoncé ou qu'un texte inaugural.

## 6 - Incommensurabilité, conformité et transparence

Un énoncé inaugural est en définitive un énoncé qui allie incommensurabilité et conformité. Il soutient la conformité de deux totalités dont l'une est déjà établie au point de sembler ne jamais avoir dû l'être et de pouvoir être tenue pour « intuitive », « naturelle », etc. La deuxième totalité est elle au contraire constituée du système d'expressions qu'il s'agit d'introduire et qui est souvent considéré comme « formel », « abstrait », etc. Ces deux totalités sont présentées comme étant de nature très différentes. Elles sont tenues pour *séparées*. Elles semblent ne pas *participer* du même monde. L'étude de la preuve de l'analyticité de l'Arithmétique de Frege nous a permis de mettre en évidence la *transparence* de ses formules qui d'une part existent incontestablement (il les introduit, les utilise, etc.), mais auxquelles tout caractère empirique est nié. Cette transparence, c'est-à-dire l'usage d'expressions dont l'existence n'est pas reconnue, intervient dans tous les textes que nous avons analysés. Elle intervient dans *La Géométrie* aussi bien avec l'expression des instruments qu'avec celle des équations algébriques. Elle intervient dans la *Théorie analytique de la chaleur* avec l'expression des fonctions que ce soit dans la relation (M) ou dans le schéma de la lame infinie. On pourrait aussi la mettre en évidence avec l'expression des machines de Turing et celle des symboles qui entrent dans leur définition, l'expression des fonctions λ-définissables ou récursives. On voit que la transparence n'est pas propre aux expressions couramment qualifiées de « symboliques ». Elle n'est pas propre non plus aux textes inauguraux. Elle apparaît néanmoins systématiquement dans ces textes parce qu'ils doivent mettre en correspondance les deux totalités considérées ce qui est toujours fait en tirant parti de la possibilité de *rapprocher*, de mettre *côte à côte* les expressions de l'une et de l'autre totalité. Frege indique le jugement exprimé par ses formules en *rapprochant* l'expression de la formule de celle du jugement exprimé dans la langue naturelle écrite, et dans ses formules les traits sont aussi juxtaposés aux expressions placées à leur extrémité. Descartes met *en contact* les courbes et les instruments qui les tracent et *juxtapose* les parties de l'instrument avec celle des équations algébriques. Fourier *juxtapose* de la même manière l'expression de la fonction à la base de la figure de la lame infinie, etc. La correspondance entre les deux totalités implique une mise en relation de leurs expressions qui tire parti de leur participation à un même espace, de leur intégration dans celui-ci. Une inauguration met toujours en évidence la transparence des expressions considérées. La dualité fait croire à une séparation qui est systématiquement mise en défaut au cours de l'inauguration. Pour chaque énoncé inaugural il est ainsi possible de prévoir puis de repérer le moment qui révèlera la transparence des expressions considérées. Mais l'intérêt spécifique des énoncés inauguraux est surtout de contribuer à la transparence de ces expressions. C'est ici qu'intervient la conformité. En effet, l'introduction d'un système d'expressions *conforme* à la totalité établie contribue à occulter les nouvelles expressions qui semblent n'introduire *aucune différence,* donc en particulier aucune sorte d'existence supplémentaire, par rapport à celles dont l'existence est reconnue (intuitive, naturelle, etc.). L'équivalence est en effet ici partout : équivalence de la représentation à ce qu'elle représente, équivalence des représentations entre elles quand il y en a plusieurs. Il n'y a semble-t-il de différence nulle part. Pourtant, si les textes inauguraux marquent des moments importants de l'histoire des mathématiques, c'est bien parce que chaque système d'expressions présente des avantages, au premier rang desquels celui d'en donner une représentation uniforme, sur celui avec lequel il est tenu pour conforme. La conformité de l'énoncé inaugural contribue à rendre transparente l'*introduction* des expressions au moment où, du fait même de leur introduction, elles sont particulièrement exposées. Cela peut aussi rendre en partie compte du fait que ces énoncés n'aient pas été reconnus comme tels. Il était pour cela aussi intéressant de proposer des caractérisations qui permettent de les repérer plus facilement. Cela permet d'opacifier ce moment et d'appréhender un système d'expressions en dépit de sa transparence renforcée par sa conformité.

## 7 - Questions non abordées

De nombreuses questions concernant les énoncés et les textes inauguraux ont été délibérément laissées de côté. Je voudrais terminer en en mentionnant quelques-unes.

### *a) Le système des énoncés inauguraux*

En dépit du caractère lacunaire des exemples donnés, il n'aura échappé à personne que les énoncés inauguraux peuvent avoir des rapports entre eux : l'énoncé de Fourier avec celui de Descartes relatif aux courbes et aux équations par exemple. Mais aussi l'énoncé de Church-Turing avec celui de Frege, et plus exactement avec celui que Whitehead & Russell soutiennent dans les *Principia Mathematica* qui intervient dans la définition de la calculabilité, à la fois de Church, de Turing (notamment dans la définition qu'il introduit exprès pour en établir l'équivalence avec celle qu'il propose), et de Post, dans le problème de la décision auquel tous appliquent leur énoncé inaugural. La considération d'autres énoncés inauguraux permettraient de mettre en évidence d'autres rapports.

Inversement, une analyse plus poussée des énoncés inauguraux considérés conduirait à rechercher les énoncés inauguraux qu'ils semblent requérir. Ces rapports sont importants parce qu'ils *imposent un ordre*, une succession entre ces énoncés. L'énoncé inaugural de Church-Turing ne peut être énoncé qu'après celui de Whitehead & Russell. Il est aussi possible de rendre compte ainsi de leur simultanéité.

### b) Représenter la représentation

Un énoncé inaugural introduit un nouveau système d'expressions. Ce système ne peut être simplement désigné. Il doit être *effectivement* introduit. Cela conduit à poser le problème de *la description d'un système d'expressions*. Ce problème n'en est pas seulement un pour celui qui fait l'analyse d'un texte, notamment d'un texte inaugural, mais aussi pour l'auteur du texte inaugural. La description (expression) d'un système d'expressions et la question de l'expression sont liées par le fait que la description d'un système d'expressions utilisera des expressions. En particulier, la description du système comprenant généralement un nombre infini d'expressions se fera à partir d'une expression (description) qui n'en comprend qu'un nombre fini.

Mon intention était ici surtout d'établir l'existence des énoncés et des textes inauguraux. Pour cette raison je me suis restreint à ces textes. Dans d'autres études je m'attacherai à la question de la réception des représentations qu'ils ont introduites et à leurs conséquences. Leur réception comprend d'une part l'étude des controverses auxquelles les énoncés inauguraux ne manquent pas de donner lieu et d'autre part les transformations induites par la description des systèmes d'expressions quand ils sont repris. Leurs conséquences seront examinées à partir des énoncés et démonstrations qu'ils rendent possibles et des notions introduites à partir de ces nouveaux systèmes d'expressions.

# Bibliographie


Adams, Roderick Gerald. *History of the Theory of Recursive Functions and computability,* Hatfield Polytechnic, 1983.

Barwise, Jon (ed). *Handbook of Mathematical Logic*, Amsterdam : North-Holland, 1977.

Benacerraf, Paul, "Frege: The Last Logicist" repris *in* Demopoulos 1995, pp. 17-35, 1981.

Bernoulli, Daniel, "Réflexions et éclaircissements sur les nouvelles vibrations des cordes exposées dans les mémoires de l'académie de 1747-1748", *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin*, 9, pp. 147-172, 1755.

Bernoulli, Daniel, "Sur le mélange de plusieurs espèces de vibrations simples isochrones, qui peuvent coexister dans un même système de corps", *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin*, 9, pp. 173-195, 1755.

Bernoulli, Daniel, "Lettre de Monsieur Daniel Bernoulli à M. Clairaut au sujet des nouvelles découvertes faites sur les vibrations des cordes tendues", *Journal des savants*, pp. 157-166, 1758.

Bernoulli, Daniel, "Mémoire sur les vibrations des cordes d'une épaisseur inégale", *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin*, 87, pp. 281-306, 1767.

Black, Robert, "Proving Church's thesis", *Philosophia-Mathematica*, 8 (3), pp. 244-258, 2000.

Blanché, Robert. *La logique et son histoire d'Aristote à Russell*. Paris : A. Colin, 1970.

Bonasoni, Paolo. *Algebra Geometrica*, 1575.

Boole, George. *An Investigation of the Laws of Thought on which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities,* Macmillan, 1854.

Boolos, George, "Reading the Begriffsschrift", *Mind*, 94, pp. 331-344, 1985.

Bos, Hendrik Jan Maarten, "On the representation of curves in Descartes' géométrie", *Archive for History of Exact Sciences*, 24 (4), pp. 295-338, 1981.

Bos, Hendrik Jan Maarten, "Descartes, Pappus' Problem and the Cartesian Parabola: a conjecture" *in* Harman & Shapiro 1992, pp. 71-96, 1992.

Bos, Hendrik Jan Maarten, "La structure de la Géométrie de Descartes", *Revue d'Histoire des Sciences*, 51, pp. 291-318, 1998.

Bos, Hendrik Jan Maarten. *Redefining geometrical exactness*. New York : Springer-Verlag Sources and studies in the history of mathematics and physical sciences, 2001.

Boyer, Carl Benjamin. *History of analytic geometry*. New York, 1956.

Brigaglia, Aldo & Nastasi, Pietro, "Le reconstruzioni apolloniane in Viète e in Ghetaldi", *Bolletino di storia delle scienze matematiche*, 6, pp. 83-134, 1986.

Burkhardt, Heinrich, "Entwicklung nach oscillirenden Functionen und Integration der Differentialgleichungen", *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 10, pp. 1-1804, 1901-1908.

Cannon, John T. & Dostrovsky, Sigalia. *The Evolution of Dynamics : Vibration Theory from 1687 to 1742*. New York : Springer-Verlag, Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, 1981.

Chuquet, Nicolas. *La géométrie*, 1484.

Church, Alonzo, "A note on the Entscheidungsproblem", *Journal of Symbolic Logic*, 1, pp. 40-41, 1936.

Church, Alonzo, "An unsolvable problem of elementary number theory", *American Journal of Mathematics*, 58, pp. 345-363, 1936.

Church, Alonzo. *Introduction to Mathematical Logic*. Princeton : Princeton University Press, 1956.

Cifoletti, Giovanna, "The Creation of the History of Algebra in the Sixteenth Century", *in* Goldstein & Gray & Ritter 1996, pp. 123-142, 1996.

Coffa, J. Alberto. *The semantic Tradition from Kant to Carnap: To the Vienna Station*. Cambridge, New-York : Cambridge University Press, 1991.

Crossley, J.N, "Reminiscences of logicians", *in* Crossley, J.N. *Algebra and Logic*: Lecture Notes in Mathematics, 450. , pp. 1-62, 1975.

Curry, Haskell B, "The inconsistency of certain formal logics", *Journal of Symbolic Logic*, 7, pp. 115-117, 1942.

D'Alembert, Jean le Rond. "Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration", *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin*, 3, pp. 214-219, (1747) 1749.

D'Alembert, Jean le Rond. "Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration : Suite", *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin*, pp. 220-249, (1747) 1749.

D'Alembert, Jean le Rond. "Recherches sur les vibrations des cordes sonores" *in Opuscules*, t. I, pp. 1-73, 1761.

D'Alembert, Jean le Rond. *Opuscules mathématiques ou mémoires sur différents sujets de Géométrie, de méchanique, d'optique, d'astronomie etc.*, 1761.

D'Alembert, Jean le Rond. *Opuscules Mathématiques*, tome IV, 1768.

D'Alembert, Jean Le Rond & Crépel, Pierre (éd) & Guilbaud, Alexandre (éd) & Jouve, Guillaume (éd). *OEuvres complètes de D'Alembert : "Opuscules mathématiques" tome I (1761). volume III/1.* Paris : CNRS Editions, 2008.

Darrigol, Olivier. "The acoustic origins of harmonic analysis", *Archive for History of Exact Sciences*, 61 (4), pp. 343-424, 2007.

Davis, Martin (Editeur). *The Indecibable. Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems and Computable Functions.* Hewlitt, N.Y, Raven Press, 1965.

Davis, Martin. "Why Gödel didn't have Church's thesis", *Information and Control*, 54, pp. 3-24, 1982.

Demopoulos, William (ed). *Frege philosophy of mathematics*. Cambridge, Mass. and London : Harvard University Press, 1995.

Descartes, René. *La Géométrie*, 1637.

Descartes, René & Adam, Charles (éd.) & Tannery, Paul (éd.). *Œuvres*. Paris : Cerf, 1897-1913.

Dhombres, Jean. "Un texte d'Euler sur les fonctions continues et discontinues, véritable programme de l'analyse du XVIIIe siècle", *Cahiers du Séminaire d'histoire des mathématiques*, 9, pp. 23-68, 1988.

Dhombres, Jean & Robert, Jean-Bernard. *Fourier. Créateur de la physique mathématique.* Paris : Belin, 1998.

Epstein, Richard L. & Carnielli, Walter Alexandre. *Computability: computable *functions, logic, and the foundations of mathematics*, 1989.

Euclide & Vitrac, Bernard (trad. et commentaires) & Caveing, Maurice (introduction générale). *Les Eléments. Volume 1. Introduction générale Livres I à IV*. Paris : P.U.F, 1990.

Euler, Leonard. "Remarques sur les mémoires précédents de M. Bernoulli", *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin*, 9, pp. 196-222, 1755.

Euler, Leonhard. "De vibratio chordarum exercitato", *Nova Acta Eruditorum*, pp. 512-527, 1749.

Feest, U. (éd) & Hon, G. & Rheinberger, H.-J. & Schickore, J. & Steinle, F. *Generating Experimental Knowledge*. Berlin : MPIWG, 2008.

Fermat, Pierre de. « Ad locos planos ete solidos isagoge », 1636.

Flament, Dominique & Nabonnand, Philippe. *Justifier en mathématiques*, Paris : Editions de la MSH, 2010.

Fourier, Joseph, "Mémoire sur la propagation de la chaleur", 1807.

Fourier, Joseph. *Théorie analytique de la chaleur*. Paris : F. Didot, père et fils, 1822.

Fourier, Joseph & Darboux, Gaston (édité par). *Oeuvres complètes*, tome 1. Paris : Gauthier-Villars, 1888.

Frege, Gottlob. *Begriffschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* . Halle : Louis Nebert, 1879.

Frege, Gottlob & Besson, Corine (trad, préface, notes, index) & Barnes, Jonathan (posface). *L'idéographie*. Paris : Vrin, Bibliothèque des textes philosophiques, 1999.

Frege, Gottlob & Rouilhan, Philippe de (trad) & Tiercelin, Claudine (trad). *Ecrits posthumes*. Nîmes : Jacqueline Chambon, 1994.

Gabbay, Dov M. & Woods, John (éds). *Handbook of the History of Logic, vol. 3. The Rise of Moderni Logic: From Leibniz to Frege.* Elsevir, 2004.

Gandy, Robin, "The confluence of ideas in 1936" repris in Henken 1994, pp. 51-111, 1988.

Giusti, Enrico, "Algebra and geometry in Bombelli and Viète", *Bolletino di storia delle scienze matematiche*, 12 (2), pp. 303-328, 1992.

Gödel, Kurt, "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme", *Monatshefte für Math. u. Physik*, 38, pp. 173-198, 1931.

Gödel, Kurt, "Undecidable diophantine propositions" in Gödel & Feferman & alii 1994.

Gödel, Kurt & Feferman, Solomon (éd) & Dawson, John W. Jr. & Kleene, Stephen C. & Moore, Gregory H. & Solovay, Robert M. & Heijenoort, Jean van, *Collected works, vol. I, 1929-1936*, Oxford University press, 1986.

Gödel, Kurt & Feferman, Solomon (ed.) & Dawson, John W. Jr. & Goldbarb, Warren & Parsons, Charles & Solovay, Robert M.. *Collected Works, vol. III. Unpublished Essays and Lectures*. Oxford : Oxford University Press, 1995.

Goldstein, Catherine, "L'expérience des nombres de Bernard Frenicle de Bessy", *Prépublications Université de Paris-Sud Mathématiques*, 2000.

Goldstein, Catherine & Gray, Jeremy & Ritter, Jim. *L'Europe mathématique*. Paris : Editions de la Maison des sciences de l'homme, 1996.

Goldstein, Catherine, "How to generate mathematical experimentation and does it provide mathematical knowledge ?" in (éd) Feest & alii 2008, pp. 61-85, 2008.

Goldstein, Catherine, "Un arithméticien contre l'arithmétisation : les principes de Charles Hermite" in Flament & Nabonnand 2010.

Granger, Gilles-Gaston, "La notion de contenu formel", *Information et signification*, pp. 137-163, 1980.

Grattan-Guinness, Ivor. *Convolutions in French Mathematics, 1800-1840. From the Calculus and Machanics to Mathematical Analysis and Mathematical Physics, 3 vols*. Basel, Boston, Berlin : Birkhäuser Verlag, 1990.

Grattan-Guinness, Ivor & Ravetz, J. *Joseph Fourier: 1768-1830*. Cambridge, Mass: MIT Press, 1972.

Grattan-Guinnes, Ivo, "Joseph Fourier, Théorie analytique de la chaleur (1822)", in Grattan-Guinness 2005a, pp. 354-365, 2005.

Grattan-Guinness, Ivo. *Landmark Writings in Mathematics,* Elsevier, 2005a.

Guilbaud, Alexandre & Jouve, Guillaume, "La résolution des équations aux dérivées partielles dans les Opuscules mathématiques de D'Alembert (1761-1783)", *Revue d'histoire des mathématiques*, 15 (1), pp. 59-122, 2009.

Harman, P.M. & Shapiro A.E. *The Investigation of Difficult Things: Essays on Newton and the History of Exact Sciences*: Cambridge University Press, 1992.

Harris, Roy. *The Language Myth*. London : Duckworth, 1981.

Hay, Cynthia (ed). *Mathematics from Manuscript to Print 1300-1600*: Oxford University Press, 1988.

Harris, Roy. *Introduction to integrational linguistics*. Oxford : Pergamon, 1998.

Heijenoort, Jean van (Editor). *From Frege to Gödel. A source book in Mathematical Logic, 1879-1931.* Harvard : Harvard University Press, 1967.

Herken, Rolf (ed). *The Universal Turing Machine, A Half-Century Survey.* Springer-Verlag, 1994.

Herivel, John & Costabel, Pierre (collab.). *Joseph Fourier : face aux objections contre sa théorie de la chaleur, Lettres inédites 1808-1816.* Paris : Bibliothèque nationale, Comité des Travaux Historiques et Scientifiques, 1980.

Herreman, Alain. "Découvrir et transmettre. Une analyse de la dimension collective des mathématiques dans Récoltes et semailles d'Alexandre Grothendieck", Prepint IHES, 1999.

Herreman, Alain. *La topologie et ses signes. Eléments pour une histoire sémiotique des mathématiques*. Paris : L'Harmattan, 2000.

Herreman, Alain. "Vers une analyse sémiotique de la théorie des ensembles : hiérarchies et réflexivité", *Philosophia Scientia*, 9 (2), pp. 165-187, 2005.

Herreman, Alain. Analyser l'analyse, décrire la description. Introduction au Résumé d'une théorie du langage de L. Hjelmslev. À paraître.

Herreman, Alain. "Linguistique intégrationniste et histoire sémiotique des mathématiques", à paraître.

Hilbert, David & Ackermann, Wilhelm. *Grundzüge der theoretischen Logik*. Berlin : Springer, 1928.

Israel, Giorgio. "Des Regulae à la Géométrie", *Revue d'Histoire des Sciences*, 51, pp. 183-236, 1998.

Jouve, Guillaume. *Imprévus et pièges des cordes vibrantes chez D'Alembert (1755-1783). Doutes et certitudes sur les équations aux dérivées partielles, les séries et les fonctions*, Thèse Université Lyon 1, 2007.

Jouve, Guillaume. "Présentation du Mémoire 1" in D'Alembert 2008, pp. xxxv-xlviii, 2008.

Jullien, Vincent. *Descartes. La Géométrie de 1637*. Paris : P.U.F, "Philosophies", 1996.

Kleene, Stephen Cole. "A theory of positive integers in formal logic", *American*

*Journal of Mathematics*, 57, pp. 153-173, 219-244, 1935.

Kleene, Stephen Cole. "On notation for ordinal numbers", *Journal of Symbolic Logic*, 3, pp. 150-155, 1938.

Kleene, Stephen Cole. "Recursive predicates and quantifiers", *Transactions of the American Mathematical Society*, 53, pp. 41-73, 1943.

Kleene, Stephen C. *Introduction to Metamathematics*. Amsterdam : North-Holland Publishing Co, 1952.

Kleene, Stephen Cole, "Origins of Recursive Function Theory", *Annals of the History of Computing*, 3 (1), pp. 52-67, 1981.

Kleene, Stephen Cole, "The Theory of Recursive Functions, Approaching its Centennial", *Bulletin of the American Mathematical Society*, 5 (1), pp. 43-61, 1981.

Kleene, Stephen Cole & Rosser, John Barkley, "The Inconsistency of Certain Formal Logics", *Annals of Mathematics*, 36, pp. 630-636, 1935.

Kneale, William & Kneale, Martha. *The Development of Logic,* Clarendon Press, 1962.

Kreisel, George, "Informal Rigour and Completeness Proofs" in Lakatos 1967, pp. 138-186, 1967.

Lagrange, Joseph-Louis, "Recherches sur la nature et la propagation du son", *Miscellanea Taurinensia*, 1, pp, 1759.

Lagrange, Joseph-Louis & Serret, J.A. (éd.). *Oeuvres de Lagrange*, vol. 1. Paris : Gauthier-Villars, 1867.

Lagrange, Joseph-Louis & Serret, J.A. (éd.). *Oeuvres de Lagrange*, vol. 13. Paris : Gauthier-Villars, 1882.

Lakatos, Imre (éd). *Problems in the Philosophy of Mathematics*: North-Holland Publishing Company, 1967.

Langer, Rudolph E. "Fourier's series. The Genesis and Evolution of a Theory", *American Mathematical Monthly*, 54 (7), pp. 1-87, 1947.

Maronne, Sébastien. "Les controverses sur le problème de Pappus dans la Correspondance de Descartes : 1637-1649", http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00203097/fr/ , pp. 62-91, 2008.

Mendelson, Elliott. "On Some Recent Criticism of Church's Thesis", *Notre Dame Journal of formal logic*, 4 (3), pp. 201-205, 1963.

Mendelson, Elliott, "Second thoughts about Church's thesis and mathematical proofs", *Journal of Philosophy*, 87 (5), pp. 225-233, 1990.

Netz, Reviel, "Deuteronomic Texts: Late Antiquity and the History of Mathematics", *Revue d'histoire des mathématiques*, 4 (2), pp. 261-288, 1998.

Netz, Reviel. *The shaping of deduction in Greek mathematics.* Cambridge : Cambridge University Press, 1999.

Newton, Isaac & Whiteside, D.T. (ed). *The mathematical papers of Isaac Newton*. 8 vols.. Cambridge : Cambridge University Press, 1967-1981.

Nuñez, Pedro (Nonius, Petrus). *Libro de algebra en arithmetica y geometria,* Antwerpen, en la casa de los herederos d'A Birkman, 1567.

Pappus & Commandino, F. (trad. et commentaires). *Pappi Alexandrini mathematicae collectiones a Federico Commandino Urbinate in latinum conversae at commentariis illustratae*. Pesaro et Venise, 1588-1589.

Pappus & Hultsch, Fredíricus (trad.). *Pappi Alexandrini collectionis quae supersunt : elibris manu scriptis edidit latina interpretatione et commentariis / instruxit Fridericus Hultsch. Volumen II, Insunt librorum VI et VII reliquiae*. Berlin : Weidman, 1877.

Pappus & ver Eecke, Paul (trad.). *Collection mathématique*. Bruges : Desclès de Brouwer, 1933.

Peirce, Charles S, "On an Improvement in Boole's Calculus of Logic", *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*, 7, pp. 250-261, 1865.

Post, Emil, "Finite combinatory processes-formulation I", *Journal of Symbolic Logic*, 1, pp. 103-105, 1936.

Post, Emil Leon, "Recursively Enumerable Sets of Positive Integers and Their Decision Problems", *Bulletin of the American Mathematical Society*, 50 (5), pp. 284-316, 1944.

Proclus & ver Eecke, Paul (trad, notes). *Les commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclide*. Bruges : Desclée de Brouwer, 1948.

Rastier, François. Sens et textualité. Paris : Hachette, 1989.

Rastier, François. *Arts et sciences du texte*. Paris : PUF, 2001.

Rastier, François, "Eléments de théorie des genres", http://www.revue-texto.net/Inedits/Rastier/Rastier_Elements.html, 2001.

Recanati, François. *La transparence de l'énonciation. Pour introduire à la pragmatique*. Paris : Seuil, "L'ordre philosophique", 1979.

Riemann, Bernhard. "Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch trigonometrische Reihen", 1854.

Rivenc, F. & Rouilhan. Ph. de. *Logique et fondements des mathématiques, Anthologie (1850-1914)*. Paris : Payot, 1992.

Rosser, John Barkley. "Highlights of the history of the lambda-calculus", *Annals of the History of Computing*, 6 (4), pp. 337-349, 1984.

Saito, Ken. "Book II of Euclid's Elements in the Light of the Theory of Conic Sections", *Historia Scientiarum*, 28, pp. 31-60, 1985.

Scholz, E. *Geschichte der Algebra. Eine Einführung*. Manheim, Wien, Zürich : Wissenschaftsverlag, 1990.

Schönfinkel, Moses. "Über die Bausteine der mathematischen Logik", *Mathematische Annalen*, 92, pp. 305-316, 1924.

Serfati, Michel. "Les compas cartésiens", *Archives de philosophie*, 56, pp. 197-230, 1993.

Shapiro, Stewart. "Understanding Church's thesis", *Journal of Philosophical Logic*, 10 (3), pp, 1981.

Shoenfield, J.R, "The mathematical work of S.C. Kleene", *Bulletin of Symbolic Logic*, 1, pp. 8-43, 1995.

Sieg, Wilfried, "Step by Recursive Step: Church's analysis of Effective Calculability", *Bulletin of Symbolic Logic*, 3 (2), pp. 154-180, 1997.

Soare, Robert I, "Computability and recursion", *Bulletin of Symbolic Logic*, 2, pp. 284-321, 1996.

Sullivan, Peter M, "Frege's Logic", in Gabbay & Woods 2004, pp. 659-750, 2004.

Tannery, Paul, "La Géométrie de Descartes", *Grande Encyclopédie*, pp. 219-220, 1886.

Tannery, Paul & Heiberg, J.L. (éd) & Zeuthen, H.G. (éd). *Mémoires scientifiques I. Sciences exactes dans l'antiquité, 1876-1884*. Toulouse : E. Privat, 1912.

Tannery, Paul (Heiberg, J.L. & Zeuthen, H.G. éd). *Mémoires scientifiques II. Sciences exactes dans l'antiquité, 1883-1898*. Toulouse : E. Privat, 1912.

Tannery, Paul & Loria, Gino (éd). *Mémoires scientifiques VI. Sciences modernes, 1883-1904*. Toulouse : E. Privat, 1926.

Tannery, Paul, "Pour l'histoire des lignes et des surfaces courbes dans l'Antiquité", *Bulletin des sciences mathématiques*, 1883-1884.

Taton, René. *L'œuvre scientifique de Gaspard Monge*. Paris : P.U.F, 1951.

Taylor, Brook, "De motu nervi tensi", *Philosophical Transactions*, 28, pp. 26-32, 1713.

Taylor, Brook. *Methodus incrementorum directa et inversa*. Londini : G. Innys, 1715.

Titchmarsh, E.C, "Godfrey Harold Hardy", *Journal of the London Mathematical Society*, 25, pp. 81-101, 1950.

Tournès, Dominique, "Pour une histoire du calcul graphique", *Revue d'histoire des mathématiques*, 6 (1), pp. 127-161, 2000.

Tournès, Dominique, "Constructions d'équations algébriques", *Repères-IREM*, 59, pp. 69-82, 2005.

Tournès, Dominique. *La construction tractionnelle des équations différentielles*. Paris : Blanchard, 2009.

Truesdell, Clifford A. « The rational mechanics of flexible and elastic bodies 1638-1789 » in *Leonhardi Euleri Opera omnia*, 2e série, t11 et t.12. Zurich, 1960.

Turing, Alan Mathison, "On computable numbers, with an application to the entscheidungsproblem", *Proceeding of the London Mathematical Society*, 42 (2), pp. 230-265, 1936.

Turing, Alan & Girard, Jean-Yves. *La machine de Turing*. Paris : Seuil, "points", 1995.

van Egmond, W, "How algebra came to France", in Hay 1988, pp. 127-144, 1988.

Viète, François. *In artem analyticen Isagoge*. Tours : Jamettum Mettayer, 1591.

Viète, François. *Supplementum geometriae : ex opere restitutae mathematicae analyseos seu algebra nova*. Tours, 1593.

Viète, François. *Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII*. Tours, 1593.

Viète, François. *Zeteticorum libri quinque*, 1593.

Vuillemin, Jules. *Mathématiques et métaphysique chez Descartes.* Paris : PUF, Epiméthée, 1960.

Wittgenstein, Ludwig. *Grammaire philosophique*. Paris : Gallimard, 1980.

Youschkevitch, A.P. "The concept of function up to the middle of the 19th century", *Archives for History of Exact Sciences*, 16, pp. 37-85, 1976.