

# VERS UNE ANALYSE SEMIOTIQUE DE LA THEORIE DES ENSEMBLES :

## HIERARCHIES ET REFLEXIVITE<sup>1</sup>

Alain Herreman

Université de Rennes 1 - IRMAR

REHSEIS

### La réflexivité mathématique : position du problème.

Les mathématiques se distinguent par une remarquable capacité réflexive<sup>2</sup>. Elles sont en effet en mesure de formuler des énoncés qui fixent ce qui leur est possible ou non de faire. L'incommensurabilité de la diagonale d'un carré au côté de celui-ci met en évidence les limites d'une certaine conception du rapport entre grandeurs (*logos*) et constitue à cet égard l'un des exemples les plus anciens de cette réflexivité<sup>3</sup>. Quelle que soit l'origine mathématique ou philosophique de cette découverte, l'incommensurabilité est un énoncé mathématique : un théorème et une démonstration établissant l'impossibilité d'établir le rapport sous la forme attendue entre la diagonale et le côté. Les exemples de ce type sont nombreux.

Ainsi, les algébristes ont donné au 16<sup>ième</sup> siècle des procédés permettant de résoudre toutes les équations polynomiales de degré inférieur à 4. La question s'est ensuite posée d'étendre ces procédés aux autres degrés. Des solutions toutes partielles ont été avancées jusqu'à ce que Lagrange analyse les raisons de leurs limites<sup>4</sup>. Avec la notion de résolvante et par l'étude de la forme que devait prendre l'expression des solutions il a pu décrire les méthodes utilisées depuis Cardan et Ferrari jusqu'à Euler et Bezout et montrer qu'elles ne pouvaient être étendues aux degrés supérieurs à 5. Or, la résolvante et la forme des racines sont des expressions mathématiques et l'impossibilité d'étendre ces méthodes aux degrés supérieurs à 5 est ainsi un résultat qui relève lui-même de la théorie des équations algébriques. Abel montrera peu après qu'il était impossible d'exprimer ces solutions par des formules générales avec des radicaux

---

<sup>1</sup> Article présenté lors du colloque PILM 2002, Nancy. Je remercie Marie-José Durand-Richard, Reviel Netz et Sophie Roux pour leurs remarques.

<sup>2</sup> Ce constat a déjà été fait maintes fois, souvent en rapport avec le développement de la logique depuis la fin du 19e siècle. Voir par exemple Brunschvicg, Léon, *Les étapes de la philosophie des mathématiques*, 1912, Nouveau tirage, A. Blanchard, 1981, Cavaillès, Jean, *Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles, étude historique et critique*, Hermann, Actualités scientifiques et industrielles, 606 et 607, 1938, Corry, Leo, "Linearity and Reflexivity in the Growth of Mathematical Knowledge", *Science in Context*, 3, p.409-440, 1989.

<sup>3</sup> Sur la découverte et les enjeux de cette incommensurabilité voir Caveing, Maurice, *L'irrationalité dans les mathématiques grecques jusqu'à Euclide*, Presses Universitaires du Septentrion, 1998, Fowler, David, *The Mathematics of Plato's Academy : A New Reconstruction*, Oxford, Clarendon Press, 1987, Knorr, Wilbur Richard, *The Evolution of The Euclidean Elements: A Study of the Theory of Incommensurable Magnitudes and its Significance for Early Greek Geometry*, Dordrecht, 1975.

<sup>4</sup> "Je me propose dans ce Mémoire d'examiner les différentes méthodes que l'on a trouvées jusqu'à présent pour la résolution algébrique des équations, de les réduire à des principes généraux, et de faire voir à priori pourquoi ces méthodes réussissent pour le troisième et le quatrième degré, et sont en défaut pour les degrés ultérieurs." Lagrange, J.L., "Réflexions sur la résolution algébrique des équations", *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et des Belles Lettres de Berlin*, 1770, p. 206, œuvres, vol III.

comme il en existe pour les degrés inférieurs à 4<sup>5</sup>. Peu après, Galois étudie la possibilité de résoudre ces équations au moyen d'expressions algébriques plus générales que les radicaux<sup>6</sup>. Il établit pour cela un rapport entre la possibilité de ces résolutions et certaines propriétés de groupes de substitutions. La « résolubilité » devient avec ces groupes de substitutions une propriété qui relève des mathématiques au même titre que les équations considérées.

L'histoire de la résolution des équations algébriques n'est qu'un exemple parmi les plus remarquables de la réflexivité des mathématiques. Cette histoire ne s'arrête d'ailleurs pas avec Galois et bien d'autres aspects de celle-ci, tant avant qu'après lui, pourraient aussi servir à illustrer cette réflexivité. Bien d'autres exemples pourraient encore être donnés, parmi lesquels les théorèmes d'incomplétude de Gödel et de consistance relative ne sont que les plus célèbres. Faisant elles-mêmes leur propre analyse, les mathématiques semblent échapper à celles d'autres disciplines, comme l'histoire ou la philosophie, réduites à constater l'immanence de leur développement<sup>7</sup>.

Lagrange, Abel et Galois ont chacun réussi à faire de la forme des méthodes utilisées par leurs prédécesseurs une expression appartenant aux mathématiques. Or, en musique par exemple, pourtant à bien des égards si proche des mathématiques, la théorie ne se confond jamais de la sorte avec ce dont elle est la théorie : la théorie de l'harmonie n'est pas de la musique, la forme sonate n'est pas une sonate. De même, la critique ou la théorie du cinéma ne sont pas du cinéma, la critique littéraire, la linguistique, la grammaire, etc. ne sont pas, en tant que telles, de la littérature. En mathématiques, l'analyse, la théorie ou la critique peuvent être elles-mêmes mathématiques. Mais il est une chose dont les mathématiques ne rendent pas elles-mêmes compte : c'est de leur capacité à énoncer des théorèmes sur leurs limites. Elles ne nous disent pas comment il se fait qu'elles soient en mesure de faire une autoanalyse que peu d'autres disciplines semblent en mesure de faire.

Ces théories, ces théorèmes et ces démonstrations ont pourtant leurs conditions de possibilité. Il est même clair que ces conditions sont autant à l'œuvre dans des énoncés moins fameux et qui n'énonceraient aucune impossibilité. En effet, chacun peut constater que les théorèmes cités ne recourent pas à des conditions différentes de celles à l'œuvre dans d'autres résultats en apparence tout à fait ordinaires. S'il appartient au génie de quelques individus de les avoir énoncés et démontrés, les conditions qui leur ont permis de le faire, et auxquelles on ne saurait les réduire, sont parfois déjà et toujours ensuite à l'œuvre dans les énoncés les plus élémentaires. Et en effet, si les mathématiques se singularisent par leur réflexivité, elles se singularisent en définitive tout autant par la plupart de leurs énoncés<sup>8</sup> : il est tout aussi étonnant

---

<sup>5</sup> Abel, N. H., "Démonstration de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales qui passent le quatrième degré", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1, 1826, *Œuvres*, vol 1.

<sup>6</sup> Galois, Evariste, "Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux", *Œuvres* 1897, p.15-23.

<sup>7</sup> Voir par exemple les livres cités de Brunschvicg et de Cavailles.

<sup>8</sup> Par "énoncé" nous n'entendons pas seulement les théorèmes ou les propositions.

de pouvoir déterminer les nombres qui sont la différence de deux carrés que de pouvoir énoncer et démontrer un théorème d'incomplétude. C'est que, pour une grande part, ce sont les mêmes conditions qui permettent d'énoncer les uns et les autres.

L'analyse des conditions de possibilité de la réflexivité nous semble indissociable de celle de l'expression de la généralité ou encore de celle de l'abstraction. Les mathématiques présentent une grande diversité d'énoncés généraux et particuliers et surtout d'étonnantes circulations entre eux. On y rencontre en effet des cas particuliers qui ont la même généralité que le cas général. Il y est aussi souvent possible de passer du particulier au général ou encore d'exprimer le cas général à partir de quelques cas particuliers. Mais il y est aussi possible et non moins étonnant de déterminer le particulier à partir du général et il arrive souvent qu'il soit plus simple de résoudre un problème particulier à partir d'un problème plus général<sup>9</sup>. La démonstration de théorèmes réflexifs requiert des expressions générales bien particulières, susceptibles à la fois d'exprimer une pratique et d'en relever, ce qui ne va pas non plus sans quelques torsions...

Ces questions relatives aux mathématiques et qui en même temps leur échappent relèvent toutes, selon nous, de la sémiotique. Nous entendons ici par sémiotique l'analyse, tant théorique que pratique, des conditions et des implications de l'expression. Il lui appartient en particulier de décrire les différents modes d'expression de la réflexivité, de la généralité ou encore de l'abstraction, d'en dégager les conditions et d'en montrer les conséquences. Les textes mathématiques s'avèrent particulièrement intéressants à considérer de ce point de vue<sup>10</sup>. L'intérêt d'une théorie sémiotique consiste donc pour une part à développer un cadre qui permette une description rigoureuse du rapport du général au particulier. Comme il n'est pas possible dans les limites de cet article d'introduire les concepts sémiotiques nécessaires<sup>11</sup>, nous continuerons d'utiliser des termes tels que "généralité", "général" ou "particulier". Nous nous sommes néanmoins efforcés de les utiliser de manière aussi conforme que possible aux termes et aux relations techniques sous-jacents tout en conservant à chacune de leurs occurrences une de leurs acceptions habituelles. La diversité des usages et les renversements entre « général » et « particulier » auxquels leur usage donne lieu pourra éventuellement faire sentir la nécessité de recourir à des termes et des relations mieux définis.

Dans cet article, nous voudrions considérer dans cette perspective un problème précis relevant de la réflexivité des mathématiques. Il se pose à partir du constat suivant. A partir de la fin du 19<sup>e</sup> siècle, de nombreuses hiérarchies sont apparues en mathématiques : la hiérarchie

---

<sup>9</sup> Réduire les mathématiques à un "formalisme" ou un "symbolisme" conduit à ignorer ces circulations pourtant constitutives d'une grande partie des mathématiques et qui en font aussi souvent la beauté.

<sup>10</sup> Voir Herreman, Alain, *La topologie et ses signes. Eléments pour une histoire sémiotique des mathématiques*, L'Harmattan, Paris, 2000.

<sup>11</sup> Il s'agit de : expression, épreuve d'échange, variété, variété représentante, invariante, expression d'invariante, etc.

des types de fonctions de Paul Du Bois Reymond<sup>12</sup>, la hiérarchie des espèces de nombres dans la première définition des nombres réels de Georg Cantor<sup>13</sup>, sa hiérarchie des ordinaux et celle des cardinaux<sup>14</sup>, celle des boréliens<sup>15</sup>, celle des ensembles projectifs et analytiques<sup>16</sup>, la hiérarchie des types de Bertrand Russell<sup>17</sup>, celle des ensembles constructibles de Kurt Gödel<sup>18</sup>, etc. La réflexivité de la hiérarchie des ensembles analytiques, pour ne prendre que cet exemple, est clairement affirmée par Sierpinski selon qui "au moment où Souslin et Lusin introduisaient les ensembles analytiques (en 1917), tous les ensembles de points qu'on savait nommer (même les monstres artificiellement créés) étaient ou bien analytiques ou bien complémentaires des ensembles analytiques"<sup>19</sup>. Il s'agit bien d'un énoncé relatif aux limites des mathématiques. Lebesgue déjà, puis Souslin et Lusin entendent ainsi caractériser mathématiquement tous les ensembles considérés en mathématiques de la même manière que Lagrange pouvait caractériser les méthodes de résolution des équations proposées par ses prédécesseurs. Chacune des hiérarchies citées pourrait aussi bien servir à illustrer la réflexivité des mathématiques. Par ailleurs, elles ont toutes aussi un rapport avec le développement de la théorie des ensembles. Le problème que nous posons est alors le suivant : est-il possible de préciser le lien entre ces hiérarchies, la réflexivité et le développement d'une mathématique ensembliste? C'est ce problème que nous voulons aborder dans cet article.

## Les nombres de la forme $2n+1$

Chacun peut reconnaître en  $2n+1$  un nombre impair. Pourtant,  $2n+1$  n'est évidemment pas un nombre, et *a fortiori* pas un nombre impair. Admettre que 3 est un nombre ne va déjà pas de soi. Ce fait a une histoire et requiert un enseignement pour être admis. Il arrive que l'on qualifie ce 3 de nombre *abstrait* par opposition à "3 hommes" et "3 écus" qui seraient des nombres *concrets*<sup>20</sup>. On pourrait se demander ici ce qui fait d'un nombre abstrait un nombre et quelle serait la notion de nombre qui pourrait se décliner ainsi en *abstrait* et *concret*. Laissons

---

<sup>12</sup> Du Bois-Reymond, Paul, "Sur la grandeur relative des infinis de fonctions", *Annali di matematica*, 4, p.338-353, 1871.

<sup>13</sup> Cantor, Georg, "Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen", *Math. Annalen*, 5, p.123-132, 1872.

<sup>14</sup> Cantor, Georg, *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen*, Teubner, Leipzig, 1883.

<sup>15</sup> Borel, Emile, *Leçon sur la théorie des fonctions (principes de la théorie des ensembles en vue des applications à la théorie des fonctions)*, Gauthier-Villars, Paris, 1898 et Lebesgue, Henri, *Leçons sur l'intégration et la recherche de fonctions primitives*, Paris, 1904.

<sup>16</sup> Lebesgue, Henri, "Sur les fonctions représentables analytiquement", *Journal de mathématiques*, p.139-219, 1905 et Souslin, Mikhaïl & Lusin, Nikolai Nikolaïevich, "Sur une définition des ensembles mesurables B sans nombres transfinis", *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, séance du 8 janvier 1917, 164, p.88, 1917.

<sup>17</sup> Russell, Bertrand, "Mathematical logic as based on the theory of type", *American Journal of Mathematics*, p.222-262, 1908 réédité in Heinzmann, Gerhard, *Entre intuition et analyse, Poincaré et le concept de prédictivité*, Blanchard, Paris, 1985.

<sup>18</sup> Gödel, Kurt, *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axiom of Set Theory*, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, 1938.

<sup>19</sup> Sierpinski, W., *Les ensembles projectifs et analytiques*, Mémorial des sciences mathématiques, Gauthier-Villars, Paris, 1950, p. 5.

<sup>20</sup> Article "Abstrait", *Encyclopédie méthodique*, Tome I, 1784.

ici ces questions et admettons que 3 soit un nombre. Cela ne suffit pas encore à faire de  $2n+1$  un nombre. On pourra nous dire alors que  $n$  ou  $2n+1$  sont des *variables*. Mais les mêmes questions se posent à nouveau : qu'est ce qui fait d'une variable un nombre et de  $2n+1$  un nombre impair? Car si  $2n+1$  est un nombre impair, faut-il l'ajouter à la liste des nombres impairs : 1, 3, 5, 7, etc. et en faire une sorte de nombre impair non standard? Probablement pas. Mais alors  $2n+1$  serait un nombre impair sans en être un... Et il n'est évidemment pas seul dans ce cas, puisqu'il faut aussi considérer  $2p+1$ ,  $2(2n+1)+1$ , etc. Il devrait y avoir des définitions pour trancher ce genre de questions. Pourtant, bien qu'il y en ait de nombreuses pour les nombres, nous n'en connaissons pas qui permette de reconnaître en  $n$  et  $2n+1$  des nombres<sup>21</sup>.

Notre but ne sera pas d'analyser ici ce qui permet de considérer 3,  $n$  ou  $2n+1$  comme des nombres<sup>22</sup>. Nous avons seulement voulu en suspendre l'évidence afin de mieux distinguer quelques-unes des propriétés remarquables de ces expressions. Nous pourrions à partir d'elles dégager une condition de la réflexivité.

Demandons-nous si nous pouvons écrire 141 comme une différence de deux carrés. Une réponse peut être : "141 est la différence de 5041 et de 4900, qui sont deux nombres carrés". C'est une réponse que Ramanujan aurait pu faire à Hardy... Une autre réponse consiste à remarquer que  $141=2 \times 70+1$  et à en déduire que  $141=71^2-70^2$ . Le calcul requis pour cette solution consiste seulement à retrancher 1 à 141, à diviser par 2 le nombre pair obtenu et à ajouter 1 au résultat. Ce qui est moins impressionnant. Mais en réalité, cette réponse requiert un peu plus que cela : nous avons considéré le problème posé comme un cas particulier d'un problème général dont nous connaissons une solution générale que nous appliquons ensuite à notre problème particulier. Nous avons suivi un petit circuit entre particulier et général qui ressemble à peu près à ceci (ce que Ramanujan savait *aussi* faire...) :

$$\begin{array}{ccc}
 2n+1 & = & (n+1)^2 - n^2 \\
 \uparrow & & \downarrow \\
 1 & & 3 \\
 \uparrow & & \downarrow \\
 141 & = & 71^2 - 70^2
 \end{array}$$

Il convient de s'étonner qu'un tel petit circuit puisse dispenser du calcul requis par la première réponse. Il y a là une économie remarquable. Or, en quoi consiste ici cet aller-retour entre particulier et général et quelle en est la condition? Il consiste en l'échange de  $n$  à 70, puis de 70 à  $n$  et *il suppose donc qu'un tel échange soit possible*. Remarquons qu'il semble qu'il y ait un

<sup>21</sup> La même question se pose pour les nombres réels, les fonctions, etc.

<sup>22</sup> Cette analyse sera présentée ailleurs.

rapport entre la possibilité de cet échange et le fait de considérer que  $70$  et  $n$  soient l'un et l'autre des nombres.

L'énoncé "tout nombre impair est la différence de deux carrés" est tout aussi général et réflexif que " $2n+1=(n+1)^2-n^2$ ". Il est réflexif puisqu'il dit de quelle manière les nombres impairs peuvent être exprimés. Bien que très élémentaire, il est un exemple d'énoncé que peu de disciplines sont en mesure de produire. Néanmoins, les expressions "nombre impair" et "carré" ne semblent pas permettre d'en donner une démonstration, quel qu'elle soit, et elles ne nous donneront pas non plus la décomposition de  $141$ . D'autres expressions sont nécessaires. Revenons donc à  $2n+1$  avec laquelle tout cela est possible et considérons la relation  $2n+1=(n+1)^2-n^2$ . Une preuve de cette relation peut consister à développer et réduire le terme à droite de l'égalité :  $(n+1)^2-n^2=(n^2+2n+1)-n^2=n^2-n^2+2n+1=2n+1$ . Pour cela, il a fallu à nouveau considérer  $n$  comme un nombre, ce que nous aurions aujourd'hui plus de mal à faire avec l'expression "nombre". Dire qu'une expression est un nombre veut dire ici que l'on peut faire avec elle tout ce que l'on peut faire avec l'expression d'un nombre. "Tout" comprenant lui ajouter  $1$  ou n'importe quel autre nombre, l'élever au carré, etc., mais cela ne comprend pas le fait de compter ;  $n$  ne compte rien<sup>23</sup>. Ainsi,  $n$  est une expression qui permet à la fois d'exprimer tous les nombres et qui peut aussi être mêlée ou combinée à eux comme n'importe lequel d'entre eux. Cela permet de former des expressions comme  $n+1$ ,  $n^2$ ,  $2n+1$ , qui seront elles-mêmes considérées comme des nombres. Or, cela ne pourrait avoir lieu s'il n'était pas possible d'échanger  $n$  avec les expressions des nombres qu'elle représente :  $0, 1, 2, 3$ , etc.

Cette condition intervient plus clairement dans une autre propriété de l'expression  $2n+1$  qui intervient dans le petit circuit précédent. Comme "nombre impair", " $2n+1$ " est une expression générale. Mais le rapport de  $2n+1$  aux différents nombres impairs est remarquable : il suffit de remplacer  $n$  par n'importe quel nombre entier pour obtenir des nombres impairs, et même pour les obtenir *tous*. Un *engendrement* est ainsi possible avec cette expression, ce que ne permet pas l'expression "nombre impair". Or, cet engendrement présuppose un échange, en l'occurrence celui de  $n$  avec les expressions  $0, 1, 2, 3$ , etc. Ainsi, d'une part le passage de l'expression générale à l'expression particulière se fait par échange, autrement dit, le rapport entre l'expression générale et les expressions particulières est établi suivant un mode remarquable : l'échange. D'autre part, il est ainsi possible d'engendrer les expressions particulières à partir de l'expression générale, et de les engendrer toutes. Et enfin, comme nous l'avons remarqué en commençant, l'expression générale est elle-même un cas de ce qu'elle exprime, en l'occurrence  $2n+1$  est un nombre impair.  $2n+1$  est en ce sens à la fois une expression générale et un cas particulier. Cette propriété intervient quand nous écrivons  $2n+1=(n+1)^2-n^2$  ;  $2n+1$  jouant à la fois le rôle d'expression générale, comme "nombre impair",

---

<sup>23</sup> Ce qui ne veut pas dire que les nombres ne compteraient plus. En l'occurrence, le "2" qui intervient dans le développement " $n^2+2n+1-n^2$ " peut être considéré comme un "2" qui compte les " $n$ " que l'on obtient en développant " $(n+1)^2$ ".

et celui d'un nombre impair, ce qu'en l'occurrence l'expression "nombre impair" ne permet pas. En opérant sur une expression *unique*  $(2n+1)$ , et comment faire autrement..., il est ainsi possible d'obtenir un résultat général valable pour une infinité d'expressions, en l'occurrence pour tous les nombres impairs particuliers ( $1=1^2-0^2$ ,  $3=2^2-1^2$ ,  $5=3^2-2^2$ , etc.). Il y a là encore une économie remarquable qui repose à nouveau sur les mêmes conditions d'échange. Inversement, l'échange contraire étant aussi possible entre un nombre impair particulier et l'expression générale, l'expression générale  $2n+1$  permet aussi de trouver comme nous l'avons fait la décomposition en différence de deux carrés d'un nombre impair *particulier*. Nous appellerons une expression qui a ces propriétés une *expression d'invariante génératrice*<sup>24</sup>.

Voilà déjà différents exemples de circulations entre particulier et général. Toujours à partir des nombres impairs, nous voudrions en donner encore un autre : celui où le cas général se déduit de quelques cas particuliers. En effet,  $1$  est un nombre impair particulier et l'expression " $2n+1$ ", ou si l'on préfère " $1+2n$ ", revient à dire qu'il est possible d'obtenir tous les nombres impairs à partir de lui en ajoutant  $2$  autant de fois que l'on veut. C'est là un autre type d'engendrement : l'engendrement de tous les cas particuliers à partir de quelques-uns, en l'occurrence d'un seul d'entre eux. Cet engendrement repose sur la possibilité de transformer un cas particulier ( $1$ ) en tous les autres ( $1, 3, 5, 7$ , etc.), la transformation consistant ici en l'addition d'un nombre pair. C'est là un autre moyen d'étendre à tous les cas des résultats obtenus à partir d'une seule ou de quelques expressions. L'extension ne se fait plus cette fois du général au particulier, mais à l'inverse du particulier au général<sup>25</sup>. La possibilité de transformer ainsi un cas particulier en un autre renvoie aussi à des conditions très particulières.

Cet exemple très élémentaire nous a permis d'introduire la notion d'expression d'invariante génératrice et de dégager quelques-uns des jeux entre général et particulier que ces expressions permettent en rapport avec des conditions d'échange particulières. Nous voudrions maintenant considérer un exemple un peu moins élémentaire extrait des *Disquisitiones arithmeticae* de Gauss. Nous y retrouverons ces expressions avec toutes leurs particularités et nous pourrons ainsi mieux apprécier leurs vertus. Nous serons ensuite en mesure de traiter des ensembles.

---

<sup>24</sup> Nous n'examinerons pas ici la possibilité de déduire ces différentes propriétés les unes des autres, il nous suffit ici de les mettre en évidence.

<sup>25</sup> Les espaces vectoriels en sont des exemples simples. Dire que des solutions définissent un espace vectoriel c'est dire qu'il est possible d'engendrer *linéairement* toutes les solutions à partir de quelques d'entre elles.

## Les expressions d'invariante génératrices dans les *Disquisitiones arithmeticae* de Gauss

Une histoire, très simplifiée, de l'introduction des formes quadratiques pourrait comme celle de la résolution des équations algébriques illustrer la réflexivité des mathématiques. Diophante proposait et résolvait dans ses *Arithmétiques* de nombreux problèmes consistant à trouver un nombre vérifiant une condition ou des nombres vérifiant un système de conditions<sup>26</sup>. Leur résolution consistait à exposer un procédé donnant ce nombre ou ce couple de nombres : un problème, une solution. Ce livre, traduit et commenté, a été un des facteurs du développement de l'Algèbre par les mathématiciens arabes puis par les mathématiciens de la Renaissance<sup>27</sup>. En 1621, C.-G. Bachet de Méziriac fait paraître une traduction latine de ce livre. Quelques lecteurs, parmi lesquels Pierre de Fermat, en revendiqueront une lecture proprement arithmétique<sup>28</sup>. Dans les "observations" qu'il fait sur son exemplaire, publiées en 1670, et dans ses "défis aux mathématiciens", Pierre de Fermat ne se contente plus de chercher une seule solution à chaque problème mais demande des méthodes générales qui fournissent "autant de nombres que l'on voudra"<sup>29</sup>. Il peut ainsi affirmer qu'"étant donné un nombre non carré quelconque, il y a une infinité de carrés déterminés tels qu'en ajoutant l'unité au produit de l'un d'eux par le nombre donné, on ait un carré"<sup>30</sup>. Ce problème comprend lui-même une infinité de problèmes ; autant qu'il y a d'entiers non carrés. Ainsi, l'énoncé d'un seul problème peut recouvrir plusieurs problèmes du type de ceux considérés par Diophante. Or toutes les expressions ne permettent pas de réduire ainsi plusieurs problèmes à un seul et d'exprimer autant de solutions que l'on veut. Mais donner "autant de nombres que l'on voudra" ne satisfait plus Lagrange : à Euler qui a donné une formule permettant d'exprimer une infinité de solutions d'un problème, il reprochera de ne pas les avoir données *toutes*<sup>31</sup>. La nature du problème a dès lors changé : à l'obtention de solutions il faut ajouter une preuve d'exhaustivité. Lagrange peut aussi donner des critères indiquant si un problème a des solutions "*a priori*", c'est-à-dire sans en donner nécessairement les solutions. C'est en l'occurrence la valeur d'un

---

<sup>26</sup> "Trouver deux nombres cubiques dont la somme soit un nombre carré" (IV 1). "Trouver deux nombres, carré et cubique, tels que si on multiplie le nombre cubique par deux nombres connus et qu'on ajoute ce qui résulte de chacun d'eux au carré du carré, il résulte de chacun d'eux un carré" (V 2). Diophante, *les arithmétiques*, Texte établi et traduit par R. Rashed, Les Belles Lettres, 1984.

<sup>27</sup> Sur le rôle des *Arithmétiques* de Diophante dans le développement de l'algèbre par les Arabes, voir Rashed, Roshdi, *Entre arithmétique et algèbre, recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, Les Belles Lettres, Paris, 1985. Sur la réception des *Arithmétiques* par les algébristes de la Renaissance, voir Morse, J., *The reception of Diophantus' "Arithmetic" in the Renaissance*, University Microfilms International, Ann Arbor, Michigan, USA, 1981.

<sup>28</sup> Sur le statut de la théorie des nombres au XVIIe siècle, voir Goldstein, Catherine, "Le métier des nombres aux XVIIe et XIXe siècles", in Serres, Michel, *Eléments d'Histoire des sciences*, Bordas, 1989, p.274-295, 1989, réédition Larousse, "in extenso", 1997, p. 411-444.

<sup>29</sup> Fermat, "Observations sur Diophante", V 9, *Œuvres de Pierre de Fermat*, I, Blanchard, 1999, p. 138.

<sup>30</sup> Fermat, "Second défi au mathématicien", février 1657, *Œuvres de Pierre de Fermat*, I, Blanchard, 1999, p. 258.

<sup>31</sup> Lagrange, J.L., "Sur la solution des problèmes indéterminés du second degré", *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin*, 23, 1769, *Œuvres*, vol III, p. 378.



nombre, justement qualifié de "déterminant", qui permet de savoir si un problème sur les nombres a ou non des solutions! Il convient de s'étonner de la possibilité de donner de tels critères de résolubilité et de telles preuves d'exhaustivité ; il n'est pas dit que le mode d'expression des nombres utilisé par Diophante le permette, et permette seulement d'envisager de tels problèmes. Avec la notion de forme du second degré " $ax^2+bxy+cy^2$ " Lagrange généralise une partie des problèmes de représentation posés par Diophante et par ses continuateurs. Par exemple, le problème de Fermat que nous avons cité, revient à demander une infinité de solutions de l'équation  $x^2-ay^2=1$  et apparaît dès lors lui-même comme un cas particulier d'un problème plus général. C'est ainsi que Lagrange peut présenter<sup>32</sup> comme une conséquence de son étude des diviseurs de  $ax^2+bxy+cy^2$  une liste de près de cinquante *théorèmes* sur la représentation des nombres premiers de la forme  $4n\pm 1$ . Autant dire qu'il peut produire "autant de théorèmes que l'on voudra". Gauss reprend l'étude de ces formes dans les *Disquisitiones Arithmeticae* et initie une nouvelle étape de ce développement réflexif<sup>33</sup>. Il y résout en effet de manière systématique un ensemble de problèmes liés à la possibilité de la représentation des nombres par ces formes : étant donné un nombre  $M$ , pour quelles valeurs de  $a, b, c$  existe-t-il des valeurs de  $x$  et de  $y$  telles que  $ax^2+2bxy+cy^2=M$ ? Quand de telles valeurs existent, peut-on les donner toutes? Quels sont les nombres qui peuvent être représentés par une forme du second degré donnée? Quelles sont les formes qui représentent les mêmes nombres? etc. Telles sont dès lors les formes que prennent quelques-uns des problèmes d'arithmétiques ; l'expression d'aucun nombre particulier n'y apparaît plus.

C'est l'un de ces problèmes que nous voudrions maintenant considérer afin d'y observer le rôle des expressions d'invariante génératrice. Avant cela, nous devons faire quelques remarques sur l'expression  $ax^2+2bxy+cy^2$ .

C'est un exemple de ces expressions qui interviennent dans la réflexivité et qui sont souvent qualifiées de "forme", en l'occurrence de "forme du second degré". Les deux expressions "forme du second degré" et " $ax^2+2bxy+cy^2$ " sont des expressions générales, mais  $ax^2+2bxy+cy^2$  est une expression d'invariante génératrice : toutes les formes du second degré s'obtiennent en remplaçant  $a, b$  et  $c$  par n'importe quel nombre. En considérant par exemple les valeurs particulières 3, 3 et -5 on obtient la forme du second degré  $3x^2+6xy-5y^2$ . Toutes les formes du second degré s'obtiennent ainsi exactement comme les nombres impairs s'obtiennent à partir de  $2n+1$ . Comme  $2n+1$  est l'expression d'un nombre impair et encore l'expression d'un nombre impair, particulier cette fois, si on remplace  $n$  par un nombre,  $ax^2+2bxy+cy^2$  est l'expression d'une forme du second degré et encore aussi l'expression d'une forme du second degré, particulière, si on remplace  $a, b, c$  par des nombres. Mais il est cette fois encore possible de remplacer  $x$  et  $y$  par des nombres, le résultat étant maintenant un nombre : en remplaçant  $x$

---

<sup>32</sup> Lagrange, J.L., "Recherches d'arithmétique", *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et des Belles Lettres de Berlin*, 1773-1775, *Œuvres*, vol III, p. 783 sq.

<sup>33</sup> Pour les études consacrées à l'histoire de la théorie des nombres à partir de 1800, voir Goldstein, Catherine, "Bibliography on the History of Number Theory after 1800", Prépublications, Université de Paris-Sud, 33, 2001.

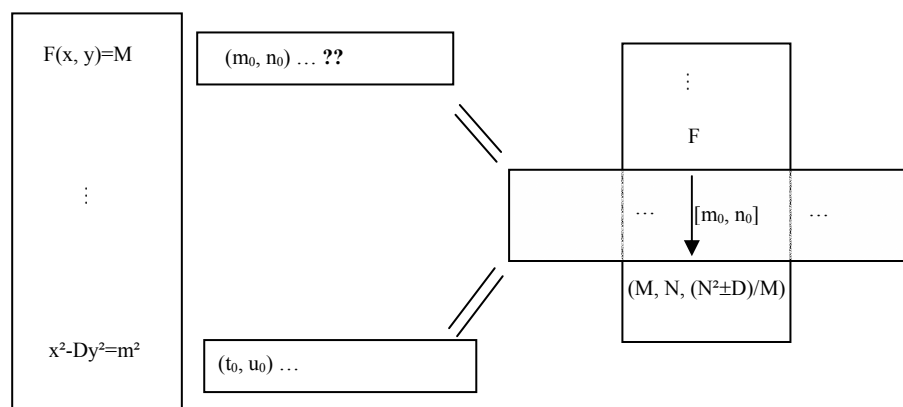
par 2 et  $y$  par 1 dans  $3x^2+6xy-5y^2$  on obtient 19. 19 est donc représentable par la forme  $3x^2+6xy-5y^2$ . En termes plus diophantiens : c'est un nombre qui est le triple d'un premier carré et la différence du quintuple d'un second carré augmenté du sextuple produit de leurs côtés. Remarquons que les expressions  $ax^2+2bxy+cy^2$  et  $3x^2+6xy-5y^2$  sont aussi l'une et l'autre des nombres ; sans quoi il ne serait pas possible de poser comme il l'est le problème de la représentation d'un nombre par une forme du second degré.

L'expression  $ax^2+2bxy+cy^2$  est ainsi à la fois une expression générale pour les formes du second degré, une forme du second degré et un nombre. Nous allons voir de quelle manière cela permet par des circulations déjà assez complexes entre général et particulier de résoudre le problème général considéré. Le problème consiste à trouver toutes les représentations d'un nombre  $M$  par une forme quadratique  $F(x, y)$ . Il a bien un caractère réflexif puisqu'il s'agit de déterminer les représentations possibles d'un nombre. Il a même un caractère doublement réflexif puisqu'il ne s'agit pas seulement de trouver les conditions pour qu'un nombre puisse être représenté, par exemple, par une différence de deux carrés,  $x^2-y^2$ , mais celles pour qu'il puisse l'être plus généralement par une forme  $ax^2+2bxy+cy^2$ , dont  $x^2-y^2$  n'est elle-même qu'un cas particulier.

Voyons dans ses grandes lignes la solution proposée. Etant donnée une forme quadratique  $F(x, y) = ax^2+2bxy+cy^2$  et un nombre  $M$ , Gauss veut déterminer (exprimer) quels sont les couples de nombres  $x$  et  $y$  qui représentent  $M$ . Pour cela il introduit une forme  $Mx^2+2Nxy+(N^2-D)/M y^2$  définie à partir des données du problème, soit  $F$  et  $M$  ( $D$  est par exemple le déterminant :  $D=b^2-ac$ ).  $F$  et  $Mx^2+2Nxy+(N^2-D)/M y^2$  sont ainsi deux formes. Il existe une notion de transformation entre formes du second degré et la première partie de la solution consiste à montrer que chacune de ces transformations se transforme en un couple de solutions cherché, et inversement. Autrement dit, il est possible de déduire l'expression des solutions cherchées de celle des transformations entre  $F$  et  $Mx^2+2Nxy+(N^2-D)/M y^2$ .

Pour que la solution soit complète, il reste à obtenir toutes ces transformations. Gauss détermine pour cela toutes les représentations de  $m^2$  par la forme  $x^2-Dy^2$ , où  $m$  et  $D$  sont donnés par  $F$  ( $m$  le plus grand commun diviseur de  $a, 2b, c$  et  $D$  est encore le déterminant de  $F$ ). Il montre ensuite que toutes les transformations cherchées s'en déduisent et inversement. Il a ainsi exprimé toutes les représentations de  $M$  par  $F$  à l'aide des représentations de  $m^2$  par  $x^2-Dy^2$ .

On peut représenter ces étapes par la figure suivante :



Reprenons cette démonstration du point de vue de la réflexivité qui nous occupe. Le problème est général dans la mesure où il peut s'appliquer à toutes les formes du second degré. Comme  $ax^2+2bxy+cy^2$  est à la fois une forme du second degré et une expression générale désignant toutes ces formes, Gauss peut définir, à partir de cette expression et de  $M$ , une seconde forme  $Mx^2+2Nxy+(N^2-D)/M y^2$  et étudier les transformations de l'une en l'autre. Des expressions comme "une première forme" et "une second forme" le permettraient plus difficilement.

Ces transformations ont un rôle essentiel dans l'ensemble des *Disquisitiones*. Ce rôle est analogue à celui de l'addition qui permet d'engendrer par exemple tous les nombres impairs à partir de l'un d'entre eux et ce faisant de déduire le général de quelques cas particuliers<sup>34</sup>. Mais dans cette démonstration, les deux formes sont données et l'on considère au contraire toutes les transformations entre ces deux formes. En quoi consiste ici une transformation? C'est tout simplement un changement de variables :  $x=\alpha x'+\beta y'$  et  $y=\gamma x'+\delta y'$ . Transformer une forme du second degré consiste à remplacer  $x$  dans  $ax^2+2bxy+cy^2$  par  $\alpha x'+\beta y'$  et  $y$  par  $\gamma x'+\delta y'$ , où  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\delta$  sont des nombres, et l'on obtient ainsi une nouvelle forme (avec des  $x'$  et  $y'$ , ce qui n'a aucune importance). Une transformation est donc d'abord un échange entre expressions. Mais il importe aussi que cet échange conduise à une forme du même type que celle de départ, en l'occurrence une forme du second degré. La possibilité de définir de telles transformations avec ces propriétés est certainement un élément important dans l'appréciation du choix de Lagrange de distinguer ce type de formes parmi tant d'autres possibles. Pour cela, comme pour le développement de  $(n+1)^2-n^2$ , il faut que nous puissions considérer  $x'$  et  $y'$  comme des nombres. Ce qui requiert des conditions d'échange particulières.

Les solutions cherchées s'obtiennent ensuite en transformant les expressions de ces transformations en couples de nombres. Voici par exemple comment Gauss exprime les transformations entre les deux formes à partir des représentations cherchées : si les solutions sont exprimées par deux variables  $m$ ,  $n$ , toutes les transformations sont données par  $x=mx'+((mN-mb-na)/M)y'$  et  $y=nx'+((nN+ma+nb)/M)y'$ , où  $a$ ,  $b$ ,  $N$  et  $M$  sont définis comme précédemment<sup>35</sup>. Ce sont deux expressions d'invariantes génératrices.

La deuxième partie de la preuve, la détermination des transformations à partir des solutions de  $x^2-Dy^2=m^2$ , montre de quelle manière sont exprimées les solutions d'un problème ayant cette généralité : les transformations entre  $F$  et  $Mx^2+2Nxy+(N^2-D)/My^2$  sont *engendrées* à partir de l'une d'entre elles et des représentations de  $m^2$  par  $x^2-Dy^2$ , encore une fois exactement comme les nombres impairs sont engendrés à partir de l'un d'entre eux au moyen des nombres pairs. On peut enfin remarquer que cette partie de la démonstration consiste à ramener la détermination des solutions de  $ax^2+2bxy+cy^2=M$  à celle des solutions de  $x^2-Dy^2=m^2$ . Or l'équation  $x^2-Dy^2=m^2$

---

<sup>34</sup> Le problème est sensiblement plus compliqué que pour les nombres impairs. Contrairement à l'addition, des transformations différentes peuvent donner les mêmes formes et des formes différentes peuvent représenter les mêmes nombres, d'où les notions de "transformations semblables" et de "formes équivalentes".

<sup>35</sup> Pour obtenir les solutions cherchées à partir des transformations, il suffit d'inverser ces relations.

est un cas particulier de  $ax^2+2bxy+cy^2=M$  ( $a=1$ ,  $b=0$ ,  $c=-D$  et  $M=m^2$ ). Ainsi la solution du problème général a été ramenée à celle d'un de ses cas particuliers. Lagrange<sup>36</sup>, avait par exemple déjà utilisé le fait que les diviseurs de  $ax^2+2bxy+cy^2$  étaient les mêmes que ceux de  $x^2-Dy^2$ . Ce résultat, en lui-même remarquable, s'obtient par une simple factorisation de  $ax^2+2bxy+cy^2$ . La réduction effectuée ici par Gauss est bien plus élaborée puisqu'elle fait intervenir les transformations entre deux formes (voir figure). Cette réduction, et au-delà l'ensemble de la démonstration, est un exemple de la mise en place de diverses torsions entre expressions particulières et générales de nombres, mais aussi de formes, de transformations et de problèmes. Mais aussi élaborées et étonnantes soient-elles, ces torsions reposent en définitive sur les mêmes conditions que celles qui permettent d'engendrer tous les nombres impair à partir de l'un d'entre eux ou de les exprimer par l'expression  $2n+1$  : il s'agit toujours d'expressions d'invariantes génératrices, de variables et, en définitive, de la singulière possibilité d'échanger une expression générale ( $n$ ) avec les expressions particulières qu'elle exprime ( $1, 2$ , etc.).

## Une caractérisation du recours aux ensembles

Cet exemple est représentatif de l'usage des expressions d'invariantes génératrices dans les *Disquisitiones arithmeticae*. Gauss recourt à ces expressions autant qu'il le peut. Mais il arrive aussi qu'il ne le puisse pas. C'est le cas, par exemple, quand il considère les nombres carrés de la forme  $A+my$ ,  $A$  et  $m$  étant supposés fixés. Comment exprimer ces nombres avec une expression d'invariante génératrice ? Il est facile de le faire pour les nombres carrés, et  $A+my$  est déjà une expression d'invariante génératrice, mais quelle expression permettra d'exprimer les deux conditions réunies ? Que fait-il dans ce cas ? Voici le passage concerné :

“Ainsi une méthode qui s'offre d'elle-même, consisterait à calculer la valeur  $A+my\dots V$ , pour toutes les valeurs de  $y$  comprises entre ces limites, et dont nous désignerons l'ensemble (*complexum*) par  $\omega$ , en ne retenant que celles qui rendraient  $V$  un carré.”  
Gauss, C.F., *Disquisitiones arithmeticae*, Leipzig, 1801, n°319, traduction A.-C.-M. Poullet-Delisle, Courcier, Paris, 1807.

On le voit, dans ce cas, Gauss considère l'ensemble (*complexum*) de ces nombres. L'exemple n'est pas isolé. On peut même vérifier que les expressions "ensemble" et "classe" (*complexus* ou *classe*) sont toujours utilisées *quand il ne peut donner une expression d'invariante génératrice*.

Une partie de la postérité des *Disquisitiones arithmeticae* réside dans l'introduction d'une composition sur les classes des formes quadratiques équivalentes<sup>37</sup>. Or, que les formes

<sup>36</sup> Lagrange, J.L., "Recherches d'arithmétique", *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et des Belles Lettres de Berlin*, 1773-1775, *Œuvres*, vol. III, p. 704.

<sup>37</sup> Deux formes sont équivalentes s'il existe une transformation de l'une en l'autre et inversement.

équivalentes soient présentées comme des *classes* est un exemple de cette règle : Gauss ne dispose pas d'expression d'invariante génératrice pour exprimer les formes équivalentes à une forme donnée et il recourt dans ce cas à la notion d'ensemble. Des dizaines d'autres exemples peuvent être donnés pour illustrer cette corrélation, avec des ensembles de nombres, des ensembles de formes et même des ensembles d'ensembles de formes ; nous n'avons relevé aucune exception. Les ensembles apparaissent ainsi comme une alternative aux expressions d'invariantes génératrices quand celles-ci font défaut.

Reconnaître cette corrélation oblige à relativiser le lien entre le développement d'une mathématique ensembliste et la considération d'ensembles infinis. Dans le premier exemple que nous avons donné, il n'y a qu'un nombre fini de nombres tels que  $A+my$  soit un carré puisque  $y$  varie entre certaines bornes. Et pourtant Gauss recourt à un ensemble pour désigner ces nombres. En revanche, bien que les formes du second degré soient en nombre infini, il n'a nullement besoin de recourir à un ensemble pour les désigner puisqu'il dispose de l'expression  $ax^2+2bxy+cy^2$  et de ses merveilleuses propriétés. La possibilité ou non de donner une expression d'invariante génératrice, et donc la nécessité de recourir à des ensembles, apparaît ainsi indépendante du caractère fini ou infini de l'ensemble<sup>38</sup>.

## Ensembles et hiérarchies

Revenons maintenant au problème qui nous occupe et voyons comment cette caractérisation permet de rendre compte du lien entre le recours aux ensembles et le développement de hiérarchies. Reprenons pour cela notre premier exemple. Il est possible de désigner tous les nombres entiers au moyen de l'expression  $n$  qui est elle-même un nombre. Tant que les ensembles considérés sont exprimés au moyen d'expressions d'invariantes génératrices, une sorte de transfert s'opère : si l'on exprime les nombres qui sont la différence de deux carrés par  $x^2-y^2$ , on dispose d'une expression générale,  $x^2-y^2$ , qui est elle-même à la fois un nombre et la différence de deux carrés. On peut réitérer le procédé : si l'on exprime les formes du second degré, dont  $x^2-y^2$  est un cas particulier, par  $ax^2+2bxy+cy^2$ , on dispose d'une expression générale qui est elle-même une forme et un nombre. En raison de ces transferts, aucune hiérarchie ne se déploie. Si on utilise maintenant des ensembles au lieu d'expressions d'invariantes génératrices nous sommes conduits à considérer l'ensemble des nombres qui sont la différence de deux carrés ; ce n'est ni un nombre ni *a fortiori* une différence de deux carrés. On peut ensuite considérer un ensemble d'ensembles et un ensemble d'ensembles d'ensembles, qui ne sont eux non plus ni des nombres ni des formes. Aucun transfert ne s'opère et une hiérarchie apparaît. Or, ce qui dans les expressions d'invariantes génératrices permet ce transfert et une réflexivité sans hiérarchie ce sont les conditions particulières

---

<sup>38</sup> Nous traiterons ailleurs la question du développement d'une arithmétique transfinie en rapport avec la caractérisation proposée du recours aux ensembles.

d'échange que nous avons vues. Comme on ne peut remplacer un ensemble par l'un de ses éléments comme on peut le faire avec  $n$  et un nombre, cet échange n'a plus lieu avec les ensembles<sup>39</sup>. L'ensemble des nombres impairs n'est pas, contrairement à  $2n+1$ , un nombre impair. Le recours aux ensembles fait ainsi perdre ces diverses torsions entre particulier et général, et notamment la réflexivité particulière, que ces échanges permettent.

La position et la résolution d'un problème comme la représentation d'un nombre par une forme du second degré ne sauraient non plus être les mêmes. La résolution présentée par Gauss est avant tout un procédé qui doit s'appliquer, il doit permettre d'obtenir les solutions cherchées à partir d'une forme quadratique donnée. "Obtenir" voulant dire ici donner chacune d'elles par son expression comme  $(n+1)^2-n^2$  permet d'obtenir une décomposition de  $141$ . La torsion entre général et particulier est ainsi constitutive de la formulation générale du problème et de la résolution qui en est proposée.

Les possibilités de continuations sont aussi différentes. Après avoir considéré avec  $ax^2+2bxy+cy^2$  une "forme de formes", on peut s'attendre à ce que les mathématiciens considèrent une "forme des formes de formes" et énoncent de nouveaux théorèmes réflexifs afin de généraliser les solutions proposées par Gauss ou au contraire afin de rendre compte de l'impossibilité de leur extension. Mais s'il est facile de former l'expression "forme des formes de formes", la formation d'une expression d'invariante génératrice correspondante n'est, elle, pas automatique. Considérer une expression comme  $aux^2+2bvxy+cty^2$  en introduisant de nouvelles variables  $u, v, t$  ne suffit pas puisque cette expression n'est en définitive qu'une "forme de formes". Les jeux de réécriture que permettent les variables préviennent ici autant une répétition facile de la réflexivité que le déploiement d'une hiérarchie illimitée<sup>40</sup>. Si, au contraire, au lieu d'expressions d'invariantes génératrices on utilise des ensembles, il est alors possible de considérer des ensembles d'ensembles d'ensembles et d'obtenir une hiérarchie illimitée. C'est ce que Cantor fût amené à faire dans son article de 1872 et, à sa suite, bien d'autres mathématiciens.

## Conclusion

Nous avons voulu montrer le rapport entre la réflexivité et une condition sémiotique, en l'occurrence la possibilité de l'échange entre certaines expressions particulières et générales. Nous n'entendons pas affirmer que la possibilité de ces échanges serait une condition nécessaire ou même suffisante à la réflexivité ; la sémiotique, pas plus qu'une autre théorie, ne saurait à notre avis avoir de telles prétentions normatives. En revanche, étant donnée une

---

<sup>39</sup> Il n'a pas lieu entre les nombres et les ensembles pour la relation d'addition, mais bien sûr des relations entre ensembles vont progressivement être introduites qui permettront de tels échanges entre ensembles.

<sup>40</sup> Reviel Netz a proposé dans "The Goal of Archimedes' Sand-Reckoner", manuscrit, une analyse structurale et cognitive pour rendre compte de la possibilité ou non d'étendre indéfiniment la hiérarchie des nombres.

production signifiante quelconque, il est facile de déterminer quelles sont ses expressions qui satisfont cette condition et d'en examiner le rôle dans d'éventuels énoncés réflexifs. Ainsi, dans l'exemple de l'expression des nombres que nous avons considéré, cette condition fait ressortir l'importance pour la réflexivité de l'assimilation des nombres particuliers à des expressions écrites (1, 2, 3, etc.), assimilation qui rend possible l'échange entre des expressions particulières de nombres et d'autres expressions considérées comme générales. Néanmoins, la condition d'échange que nous avons dégagée ne présuppose nullement des expressions *écrites* mais seulement des expressions qui relèvent d'un seul et même support. Ainsi, elle peut être aussi bien satisfaite par des figures qui peuvent être aussi échangées les unes aux autres, des cailloux, des baguettes, etc. Ce que cette condition exclut, c'est un mode d'expression avec deux supports, c'est-à-dire une mise en texte dédoublée<sup>41</sup>, comme c'est le cas d'un texte se rapportant à des figures ou à des nombres tracés sur une surface annexe, ou même des textes présentant une partition, comme c'est le cas d'un texte se rapportant à des figures ou des nombres tracés sur la même feuille. Mais disposer de ces conditions "matérielles" d'échange n'est pas encore suffisant : on n'intègre pas comme on veut une expression telle que "3" dans une expression signifiante. Les échanges se font au sein de relations syntagmatiques qui doivent être en mesure de les supporter, ce qui nécessite quelques adaptations. Il faudra pour cela de nouvelles conventions, touchant autant les relations syntagmatiques admises que, sur notre exemple, la définition des nombres, qui pourront être refusées et entraîner des difficultés de compréhension. Ces changements ne sont pas immédiats, ils ont une histoire. C'est aussi ce qui arrive avec les ensembles, car il est bien évident que les changements introduits par leur recours ne doivent rien à un quelconque changement de support d'écriture.

Résumons à présent comment les conditions de possibilité d'échange entre certaines expressions peuvent rendre compte du lien entre la réflexivité en mathématique, le recours aux ensembles et l'apparition de nouvelles hiérarchies. L'examen des conditions sémiotiques de la réflexivité nous a conduit à distinguer des expressions remarquables : les expressions d'invariantes génératrices. Ces expressions ont des propriétés qui permettent des circulations ou des torsions entre particulier et général qui pour étonnantes qu'elles soient n'en sont pas moins depuis longtemps répandues en mathématiques. Or, ces propriétés présupposent des conditions d'échange particulières. Autrement dit, sans celles-ci, il n'est plus possible d'exprimer comme ils le sont certains énoncés, certains des arguments donnés pour les justifier ou certaines de leurs applications. Au contraire, dans ces conditions, il est possible de développer un discours sur ..., par exemple un discours sur les nombres, avec des expressions qui, par une sorte de transfert, peuvent être elles-mêmes considérées comme des nombres, comme c'est le cas de la forme particulière,  $x^2-y^2$ , ou même encore de la forme générale,  $ax^2+2bxy+cy^2$ , qui sont l'une et l'autre des nombres. Les *Disquisitiones arithmeticae* montrent tout le parti que l'on peut tirer de ces expressions. Mais l'étude de ce livre montre aussi que Gauss recourt fréquemment à des

---

<sup>41</sup> Voir Herreman, Alain, "La mise en texte mathématique : une analyse de l'"Algorithme de Frankenthal'", *Methodos*, 1, p. 61-100, 2001.

ensembles et qu'il le fait exclusivement quand il ne dispose pas d'expression d'invariante génératrice. Cette corrélation invite à comparer l'usage qui peut être fait des ensembles à celui des expressions d'invariantes génératrices, étant entendu que ces deux modes d'expression ne sont pas interchangeables, puisque l'introduction de l'un est lié à l'impossibilité de recourir à l'autre. On peut ainsi mieux se rendre compte de leurs possibilités respectives. En se limitant au point précis qui nous occupe ici, on constate que l'expression d'une propriété, comme par exemple d'être un nombre impair, va pouvoir dans le cas d'une expression d'invariante génératrice, en raison des conditions d'échange, satisfaire la propriété qu'elle exprime, ce qui ne sera pas le cas de l'ensemble qui pourrait aussi servir à exprimer la même propriété. Mais les raisons qui permettent un tel transfert en rendent aussi la réitération difficile alors que celle-ci sera toujours possible avec les ensembles. En effet, les expressions d'invariantes génératrices héritent de certaines propriétés dans la mesure même où leur usage est restreint aux relations syntagmatiques auxquelles on a pu accepter de réduire puis d'identifier, dans notre exemple, les nombres. L'usage des ensembles n'étant pas ainsi restreint par les relations ici entre nombres, aucun transfert ne se fait, mais l'itération devient en revanche possible et avec elle, le développement de hiérarchies illimitées.