## Présentation Artin & Schreier 1927

L'article d'Emil Artin (1898-1962) et Otto Schreier (1901-1929) a été présenté au séminaire de mathématiques de Hambourg en juin 1926 et publié dans les actes de ce séminaire en 1927 (*Abhandlungen Math. Sem. Univ. Hamburg*). Les auteurs y définissent les notions de corps réels et de corps réels clos et en développent la théorie. Un corps réel y est défini comme un corps dans lequel $-1$ n'est pas représentable par une somme de carrés. Un corps réel clos est un corps qui n'admet pas d'extension réelle. La condition de réalité avait été dégagée par Artin pour caractériser les corps absolument algébriques (algébriques sur l'ensemble des rationnels) dont la clôture algèbrique est une extension finie (Artin 1924). Les auteurs donnent eux-mêmes deux raisons pour le développement de cette théorie. Il s'agit d'une part de développer pour les corps réels une théorie algébrique comme celle que E. Steinitz a développé pour les corps dans son article de 1910. Cette théorie permet d'autre part à Artin de résoudre le 17e problème de Hilbert (voir Artin 1927).
L'article comprend trois parties. La première introduit les définitions et les principales caractéristiques des corps réels : unicité de l'ordre pour les corps réels clos (théorème 1), les corps réels clos sont les corps qui peuvent par une extension élémentaire devenir algébriquement clos (théorème 4), ils vérifient les théorèmes de l'algèbre réelle (théorème des valeurs intermédiaires, théorème de Rolle, théorème de la moyenne, etc.) (théorème 6).
La deuxième partie énonce et démontre des théorèmes d'existence et d'unicité pour les corps réels clos. Soit $\mathbf{K}$ un corps réel et $\mathbf{\Omega}$ un corps algébriquement clos contenant $\mathbf{K}$, il existe un corps réel clos $\mathbf{P}$ entre $\mathbf{K}$ et $\mathbf{\Omega}$, tel que $\mathbf{\Omega} = \mathbf{P(i)}$ (théorème 7). Tout corps réel $\mathbf{K}$ admet (au moins) une extension algébrique réellement close (théorème 7a). Etant donné un corps ordonné $\mathbf{K}$, il existe une et une seule (aux extensions équivalentes près) extension algébrique réellement close $\mathbf{P}$ de $\mathbf{K}$ dont l'ordre étend l'ordre de $\mathbf{K}$ (la démonstration utilise le théorème de Sturm) et $\mathbf{P}$ n'admet pas d'autres automorphismes que celui qui laisse fixe les éléments de $K$ (théorème 8).
Une autre caractérisation des corps réels clos est donnée au moyen de la notion de corps ordonné archimédien. Un sur-corps est ordonné archimédien relativement à un corps quand il ne contient pas d'élément plus grand que tous les éléments du corps (un tel élément est dit «infiniment grand» par rapport à $K$). Les sous-corps d'un corps algébriquement clos archimédiens maximaux relativement à un corps $K$ sont réels clos et isomorphes entre eux (théorème 9).
La troisième partie considère la théorie des corps réels dans le cas particulier des extensions absolument algébriques (*i.e.* algébriques sur les rationnels). Le seul corps réel clos absolument algébrique est alors le corps des nombres algébriques $\mathfrak{r\acute{e}els}$ (sous-ensemble des nombres réels, $\mathfrak{r\acute{e}els}$, écrit en fraktur, sert à distinguer les éléments de $\mathbb{R}$ des éléments d'un corps réel) (théorème 8a). Inversement, un corps algébriquement clos $\mathbf{\Omega}$, de caractéristique nulle, qui n'est pas absolument algébrique admet une infinité de sous-corps réels clos non-isomorphes $\mathbf{P_1}$ et $\mathbf{P_2}$ tels que : $\mathbf{P_1}(i) = \mathbf{P_2}(i) = \mathbf{\Omega}$ et si de plus le degré de transcendance de $\mathbf{\Omega}$ est $\leq \mathfrak{c}$ ($\mathfrak{c}=$ puissance du continu), alors on peut choisir $\mathbf{P_1}$ et $\mathbf{P_2}$ archimédiens (théorème 11). L'article se termine par deux contre-exemples qui établissent que contrairement à ce qui se passe pour les corps réels clos les polynômes ne sont pas nécessairement séparables dans les corps ordonnés non réels clos et ces derniers peuvent posséder des sous-corps archimédiens maximaux non isomorphes.

## Présentation Artin 1927

Cet article, lui aussi présenté au séminaire de mathématiques de Hambourg en juin 1926 et publié dans les mêmes actes de ce séminaire en 1927 à la suite du précédent, répond par l'affirme à la question posée par Hilbert plus d'un quart de siècle plus tôt au premier congrès international des mathématiciens tenu à Paris en 1900[1] : une fonction rationnelle définie (*i.e.*

1. «Expression of definite forms by squares» :

> A rational integral function or form in any number of variables with real coefficient such that it becomes negative for no real values of these variables, is said to be definite. The system of all definite forms is invariant with respect to the operations of addition and multiplication, but the quotient of two definite forms in case it should be an integral function of the variables is also a definite form. The square of any form is evidently always a definite form. But since, as I have shown [note : D. Hil-

qui n'est jamais négative) à coefficients rationnels $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ peut-elle être décomposée en somme de carrés de fonctions rationnelles à coefficients rationnels? L'introduction dresse un état de la question au moment où l'auteur écrit.
La première partie présente des critères généraux de positivité d'un élément. ARTIN montre que l'on peut se restreindre aux corps réels pour l'étude de la décomposition en somme de carrés des éléments d'un corps (sinon la décomposition est toujours possible). Il montre ensuite qu'un élément d'un corps réel qui n'est pas une somme de carrés devient négatif dans une extension de ce corps, ce qui le conduit à introduire la définition d'un *élément totalement positif* d'un corps $\mathbf{K}$ : c'est un élément qui n'est négatif dans aucun des ordres possibles de $\mathbf{K}$. Les éléments totalement positifs d'un corps $\mathbf{K}$ sont exactement les sommes de carrés de $\mathbf{K}$ (théorème 1). Cette définition et ce théorème sont relativisés à un sous-corps ($\mathbf{R} \subset \mathbf{K}$) : un élément $\alpha$ d'un corps $\mathbf{K}$ est dit totalement positif relativement au sous-corps ordonné $\mathbf{R}$, quand aucun ordre de $\mathbf{K}$ qui prolonge l'ordre de $\mathbf{R}$ ne rend $\alpha$ négatif. Le théorème 1 devient : Les éléments $\alpha$ de $\mathbf{K}$ totalement positifs relativement à $\mathbf{R}$, et eux seuls, peuvent se mettre sous la forme $\alpha = \sum e_\nu \xi_\nu^2$ où les éléments $e_\nu \geq 0$ sont des élements de $\mathbf{R}$ et les $\xi_\nu$ des éléments de $\mathbf{K}$ (Théorème 2).
Dans la deuxième partie l'auteur démontre que les fonctions définies sur un corps qui n'admet qu'un ordre unique (corps des rationnels, nombres algébriques réels, etc.) se décomposent en somme de carrés. Avec la définition d'un élément totalement positif, le problème devient de démontrer que les fonctions définies sont totalement positives, résultat que l'auteur dérive du «théorème d'homomorphisme d'Artin-Lang» (Théorème 3) pour un sous-corps des nombres réels. La démonstration recourt à la notion de «propriété spécialisable» qui permet un raisonnement par récurrence sur le nombre de variables.

La troisième partie l'auteur s'intéresse plus particulièrement à la décomposition des fonctions entières (*i.e.* polynômes) définies. Généralisant aux corps réels des résultats de LANDAU sur les rationnels, ARTIN démontre que toute fonction rationnelle entière $F(x)$ à coefficients dans un corps réel $\mathbf{K}$ quelconque qui se décompose en somme de carrés dans $\mathbf{K}(x)$ se décompose aussi en sommes de carrés de fonctions rationnelles entières (*i.e.* polynômes) sur $\mathbf{K}$. Ce théorème est étendu aux fonctions non totalement définies sous la forme : si une fonction rationnelle entière $F(x)$ dans $\mathbf{K}(x)$ se décompose sous la forme $F(x) = \sum e_\nu ((\varphi_\nu(x))^2$ où les $e_\nu \geq 0$ appartiennent à $\mathbf{R}$ et les $\varphi_\nu(x)$ sont rationnelles, alors on a aussi une décomposition de cette forme avec les $\varphi_\nu(x)$ rationnelles et entières. Le dernier théorème de cette section précise que pour les polynômes, pour lesquels on n'a pas une décompositions en carrés de polynômes, on peut néanmoins avoir une décomposition en carrés de fonctions polynomiales pour une des variables choisie librement.
La quatrième partie est consacrée à la décomposition en carrés des fonctions algébriques.

## Postérité des deux articles, éléments de comparaison

Ces deux articles sont incontestablement les textes fondateurs sinon de la géométrie algébrique réelle du moins de l'Algèbre réelle, expression introduites par les deux auteurs. Ce sont de loin les textes les plus cités, à peu près autant l'un que l'autre et généralement ensemble. Le premier est un exposé essentiellement complet des définitions et des théorèmes principaux qui sera repris à peu près sans changements dans les exposés suivants de la théorie. C'est notamment le cas de livres aussi influents que le *Moderne Algebra* de van der Waerden publié en 1930, qui reprend souvent mot à mot le texte d'Artin & Schreier (la traduction anglaise de ce livre est ainsi quasiment une traduction de l'article en allemand), mais aussi des *Lectures in abstract algebra* de N.

bert: "Ueber die Darstellung definiter Formen als Summen von Formenquadraten," Math. Annalen, 32 (1888), 342-350.] not every definite form can be compounded by addition from squares of forms, the question arises which I have answered affirmatively for ternary forms [note : D. Hilbert: "Über ternäre definite Formen," Acta Mathematica, 17 (1893), 169-198.] whether every definite form may not be expressed as a quotient of sums of squares of forms. At the same time it is desirable, for certain questions as to the possibility of certain geometrical constructions, to know whether the coefficients of the forms to be used in the expression may always be taken from the realm of rationality given by the coefficients of the form represented. [note : Cf. Hilbert Grundlagen der Geometrie, Leipzig, 1899, Chap. 7 and in particular].

Jacobson publiées en 1964 et *Algebra* de Serge Lang publié en 1965. La démonstration avec le théorème de Sturm de l'unicité d'un corps réel clos contenant le corps ordonné qui est donnée en détails est encore celle exposée dans les présentations actuelles. Rares sont les théories mathématiques qui peuvent prétendre à une telle permanence de leur exposé. Cela indique inversement que l'algèbre réelle n'a guère connu de nouveaux développements durant ces trente années. Les différences entre l'exposé d'origine et les suivants sont dès lors peut-être d'autant plus significatives. Signalons-en deux. L'article d'Artin & Schreier introduit les définitions d'infiniment grands et d'infiniment petits et donne une caractérisation des corps réels clos comme sous-corps archimédiens maximaux qui n'ont généralement pas été reprises dans les livres qui, comme ceux cités, s'inscrivent dans une perspective essentiellement algébrique. Ce sont néanmoins des notions que l'on retrouve, avec des terminologies différentes, dans les travaux consacrés aux valuations, qui généralisent d'une autre manière la notion de nombres réels, qui se poursuivent avec Baer (1927) et Krull (1932), puis ensuite Lang (1953) et grâce auxquels nombre de résultats sur les corps réels seront obtenus plus tard[2]. A l'inverse, il est illusoire de voir dans l'article d'Artin & Schreier la notion de cône (Serre 1949) qui fait dériver la définition d'un ordre sur les éléments d'une caractérisation axiomatique des *parties* $P$ d'éléments strictement positifs ($x < y$ ssi $x - y \in P$)[3]. Chaque ordre est ainsi pourvu d'une expression, $P$, et devient alors lui-même susceptible d'un traitement mathématique (ensembliste). Ce point de vue souvent utilisé (par exemple pour montrer qu'un corps réel est ordonnable), et qui permet de considérer tous les ordres sur un corps (comme dans le principe Local-Global de Pfister), n'est pas et ne saurait être présent dans l'article d'origine[4] dans lequel les différents ordres sont principalement accessibles via les extensions ordonnées du corps.

Bien qu'indissociable de l'article d'Artin & Schreier, celui d'Artin est consacré à la résolution d'un problème célèbre et il est de ce fait d'un genre différent ; leurs histoires ne sauraient non plus être tout à fait les mêmes[5]. Etroitement lié à l'Algèbre Moderne, l'article d'Artin contribue à établir la capacité de celle-ci à résoudre des problèmes formulés hors d'elle. L'argument de «spécialisation»[6] qu'il introduit apparaît néanmoins encore bien obscure et, à l'exception notoire du livre de Jacobson, sa démonstration ne fut guère reprise[7]. De nouvelles démonstrations en furent proposées éliminant le recours à cet argument. S. Lang (1953) redémontra le résultat au moyen des valuations et des places réelles et A. Robinson (1955) en exploitant sa notion de modèle complètude satisfaite appliquée aux corps réels clos. Le 17ème problème de Hilbert con-

2. Voir par exemple Becker, E, "Valuations and real places in the theory of formally real fields", in *Géométrie algébrique réelle et formes quadratiques*. Lecture Notes in Math., 959, pp. 1-40, 1982. Por les début de la théorie des valuations couvrant le premier tiers du 20ème siècle, voir Roquette, Peter, "History of valuation theory. Part I.", In: F.V. Kuhlmann, S. Kuhlmann, M. Marshall (ed.), *Valuation Theory and its applications, vol. 1* (Fields Institute Communications, 2002), pp. 291-355, 2002, http://www.rzuser.uni-heidelberg.de/~ci3/hist_val.pdf.

3. Bourbaki [à compléter], Jacobson, Nathan, *Lectures in abstract algebra. Vol. III Theory of fields and Galois Theory*, van Nostrand, Princeton - Toronto - New York : 1964., Lang, Serge, *Algebra*, Addison-Wesley: 1965, Lam, Tsit Yuen, *Orderings, valuations and quadratic forms*, CBMS Regional Conf. Ser. Math: 1983, Bochnak, J. & Coste, M. & Roy, M.-F, *Géométrie algébrique réelle*, Springer-Verlag: 1987, Andradas, C. & Bröcker, L. & Ruiz, J, *Constructible sets in Real Geometry*, Ergeb. Math. Grenzgeb, Springer-Verlag, Berlin : 1996, Delzell, Charles N. & Prestel, Alexander, *Positive Polynomials: From Hilbert's 17th problem to Real Algebra*, Springer Monographs in Mathematics: 2001. Grattan-Guinness, Ivor, "A sideways look at Hilbert's twenty-three problems of 1900", *Notices of the American Mathematical Society*, 2000.

4. Rappelons que la distinction entre appartenance et inclusion n'est pas marquée dans un texte comme Alexandroff, Paul & Hopf, Heinz, *Topologie I*, Springer: 1935, pourtant bien plus tardif et s'inscrivant dans une approche résolument ensembliste de la topologie.

5. Les nombreux travaux consacrés à l'histoire des problèmes de Hilbert, malgré une recrudescence à l'occasion de leur centenaire en 2000, sont peu diserts sur le 17ème problème. A peine une page dans Yandell, Ben H, *The Honors Class. Hilbert's Problems and Their Solvers*, A.K. Peters: 2002, guère plus dans Gray, Jeremy J, *The Hilbert Challenge*, Oxford University Press: 2000. Il n'est pas mentionné dans Odifreddi, Piergiorgio , *The Mathematical Century: The 30 Greatest Problems of the Last 100 Years*, Princeton University Press, Princeton : 2004. Parmi les études historiques consacrées à ce problème particulier on peut citer : Benis-Sinaceur, Hourya, "De D. Hilbert à E. Artin: les différents aspects du dix-septième problème et les filiations conceptuelles de la théorie des corps réels clos", *Archives Internat. Hist. Sciences*, 29, pp. 267-286, 1984.

6. Voir le texte de l'article et la note de Charles Delzell. La définition d'une « propriété spécialisable » est liée la définition mathématique d'une «formule» qui émerge dans les travaux de logique (voir notamment Skolem 1922). On retrouve ici le problème du rapport entre les mathématiques et la logique au cours du premier tiers du XXe siècle, rapport que les travaux de Tarski et de Robinson contribueront à modifier.

7. Delzell, Charles, "Kreisel's unwinding of Artin's proof", pp. 113-246, 1996.

tribua ainsi une deuxième fois à établir la compatibilité et donc a faire accepter la greffe d'un rameau naissant et d'essence encore douteuse, la théorie des modèles, au grand tronc des mathématiques.
Artin prouve l'existence d'une décomposition sans en donner aucune effectivement mais sans se désintéresser de cet aspect auquel il espère donner aussi bientôt une solution. La recherche d'une résolution constructive et l'étude quantitative de la décomposition sera poursuivie notamment dans les travaux de Kreisel (1957) et Delzell (1984) et de Cassels (1964) et Pfister (1965)[8]. Un exemple de polynôme positif non décomposable en somme de carrés de *polynômes* ne sera donnée qu'en 1967 par Motzkin (1967).

## Algèbre et Algèbre moderne

Ces deux articles sont aujourd'hui traduits et présentés dans un Source Book consacré à la géométrie algébrique réelle. Quand ils paraissent en 1927, leur inscription historique est tout autre. Ils sont écrits en allemand et ne citent que des travaux de mathématiciens allemands écrivant dans leur langue (la seule exception étant un article de Gauss écrit en latin). Ils s'inscrivent dans une tradition mathématique à la fois longue et marquée nationalement. Elle-même comprend différents courants historiques parmi lesquels on en distinguera deux. D'une part l'histoire de la théorie algébrique des nombres avec ses objets, ses techniques et ses problèmes (dont fait partie le 17ème problème de Hilbert), et que l'on pourrait faire remonter jusqu'aux *Arithmétiques* de Diophante... D'autre part l'histoire de l'Algèbre moderne, elle-même liée à la théorie algébrique des nombres mais qui s'étend bien au-delà en proposant un point de vue général uniforme et intrinsèque sur les objets mathématiques et leurs relations. Une des principales figures de ce programme en est Dedekind et ses définitions des idéaux et des corps, inspiré par Gauss[9]. Emmy Noether saura, après Hilbert, attirer de jeunes mathématiciens du monde entier, parmi lesquels B. van der Waerden, P.S. Alexandroff, H. Hopf, O. Zariski, K. Shoda, E. Artin, E. Witt, Mac Lane, etc., qui le développeront et le diffuseront systématiquement. L'article d'Artin & Schreier s'inscrit explicitement dans ce programme en proposant une reformulation de l'analyse réelle suivant les canons de l'Algèbre Moderne ; c'est l'«algèbre réelle»[10] [11]. Dans cette

8. Voir Pfister, Albrecht, *Quadratic forms with applications to algebraic geometry and topology*, London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press: 1995.

9. Goldstein, Catherine & Schappacher, Norbert & Schwermer, Joachim (éd), *The Shaping of Arithmetic after C.G. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York : 2007, p. 78-81.

10. Que le corps des nombres réels ne soit pas le seul corps réel ni même le seul corps réel clos est conforme à la fonction de l'axiomatisation en Algèbre Moderne. Celle-ci n'est pas de donner une définition univoque des objets mathématiques considérés. La fonction de l'axiomatique est au contraire de saisir des propriétés et des démonstrations communes (typiquement comme la décomposition en facteurs premiers) à des objets mathématiques appartenant à des parties distinctes des mathématiques (nombres, fonctions algébriques, etc.) et dont les expressions spécifiques ne permettent pas la formation de démonstrations et d'énoncés communs. L'axiomatisation n'est plus ici un moyen de définir, c'est-à-dire de fixer le sens des mots ou des concepts utilisés, avec tous les enjeux épistémologiques et fondationnels afférents, mais au contraire de tirer parti de l'indétermination des systèmes d'axiomes soit pour en étudier les propriétés à partir de leurs modèles, soit pour étudier celles de leurs modèles à partir des propriétés des systèmes d'axiomes. Hilbert (1899) est, sur ce point encore, un des textes essentiels pour l'introduction et le développement de cette conception de l'axiomatique. Parmi les très nombreux travaux consacrés ou abordant l'histoire de l'Algèbre Moderne on peut citer : Ore, Oystein, "On the foundations of abstract algebra, I", *Annals of Mathematics*, 36 (2), pp. 406-437, 1935 et Ore, Oystein, "On the foundations of abstract algebra, II", *Annals of Mathematics*, 37, pp. 265-292, 1936. Bell, Eric T, *The Development of Mathematics*, McGraw-Hill: 1940, Artin, Emil, "The Influence of J.H. Wedderburn on the Development of Modern Algebra", Bulletin of the American Mathematical Society, 56, pp. 65-72, 1950, Kiernan, "The development of Galois Theory from Lagrange to Artin", *Archive for History of Exact Sciences*, 8, pp. 40-154, 1971, Novy, Lubos, *Origins of Modern Algebra*, Academia, Prague : 1973, van der Waerden, B.L, "Die Galois Theorie von Henrich Weber bis Emil Artin", *Archive for History of Exact Sciences*, pp [à compléter], 1973, van der Waerden, B.L, "On the sources of my book Modern Algebra", *Historia Mathematica*, 2, pp. 31-40, 1975, Birkhoff, Garett, "The rise of modern algebra, 1. to 1936, 2. 1936 to 1950", in *Men and Institutions in American Mathematics*, Graduate Studies, 13, pp. 41-85, 1976, MacLane, Saunders, "History of Abstract Algebra : Origin, Rise, And Decline of a Mouvement", American Mathematical Heritage Symposium on the History of Algebra held at The University of Texas at El Paso, 15 nov. 1975, pp. 3-34, 1981, Edwards, H.M, "Dedekind's Invention of Ideals", *Bulletin London Matematical Society*, 15, pp. 8-17, 1983, réédité in Phillips, Esther R, *Studies in the History of Mathematics*, Mathematical Association of America: 1987.., van der Waerden, B.L, *A History of Algebra. From al-Khwarizmi to Emmy Noether*, Springer-Verlag: 1985, Sinaceur, Hourya, *Corps et modèles. Essai sur l'histoire de l'algèbre réelle*, Vrin, 'Mathesis', Paris : 1991, Corry, Leo, *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, Birkhäuser, Bâle : 1996.

perspective, la possibilité de démontrer le théorème de Sturm[12], qui est avec le théorème des valeurs intermédiaires un des théorèmes caractéristiques de l'analyse réelle à partir duquel la plupart des autres peuvent être obtenus (Théorème 6), est d'abord la "preuve" que cet objectif a bien été atteint. Il convient de reconnaître ici cette fonction de ce théorème indépendamment de son intervention dans la démonstration de l'unicité de la clôture réelle ou dans celle du premier lemme de spécialisation (lemme 1) de l'article d'Artin[13].

L'inscription de l'article d'Artin dans l'Algèbre moderne est différente. Il se doit de transformer un énoncé d'Algèbre «classique», en l'occurrence l'énoncé du 17ème problème de Hilbert, en un énoncé d'Algèbre «moderne». Mais il ne s'agit pas d'une reformulation comme dans l'article avec Schreier : l'énoncé algébrique «moderne» ne se substitue pas à l'énoncé algébrique «classique», ils coexistent et sont mis en rapport. Le passage d'un énoncé (définition, théorème, démonstration) ou d'un point de vue à l'autre n'est pas une évolution historique ou un changement épistémologique s'opérant entre différents mathématiciens ou plusieurs textes, c'est une transformation *mathématique* effectuée dans le texte même. L'inclusion des corps classiques particuliers (rationnels, réels, complexes, fractions rationnelles, etc.) dans leurs diverses extensions est un des éléments de cette transformation. Le passage de la notion de «positif» à «totalement positif» en est un autre. Enfin, la spécialisation est précisément ce qui assure la transformation inverse[14].

$$\textbf{Algèbre classique} \qquad \underset{\text{specialisation}}{\overset{\text{extensions, définie}\rightarrow\text{tot. positif}}{\rightleftarrows}} \qquad \textbf{Algèbre moderne}$$

L'article d'Artin n'est donc pas tant un article relevant de l'Algèbre moderne qu'un article qui met en place une correspondance mathématique entre l'Algèbre classique et l'Algèbre moderne. Les problèmes posés par l'argument de spécialisation montrent la difficulté cette coexistence et de la mise en place d'une telle transformation et invite à considérer de quelle manière ce problème est ensuite surmonté dans les travaux de Seidenberg, Tarski, Robinson et Lang.

11. Pour une comparaison de la définition de « totalement positif » introduite dans l'article d'Artin et celle considérée dans Hilbert (1899) et de Landau (1919) cités par Artin, voir la note de Michel Coste "La positivité totale avant et après Artin".

12. Sur l'histoire du théorème de Sturm, voir Sinaceur, Hourya, *Corps et modèles. Essai sur l'histoire de l'algèbre réelle.*, Vrin, 'Mathesis', Paris : 1991.

13. Ce lemme énonce que la propriété suivante de la fonction $f(t, x)$ est spécialisable : avoir, comme fonction de $t$, un nombre donné de racines réelles dans le corps $\mathbf{P}$.

14. Le schéma de la démonstration du 17ème problème de Hilbert peut être présenté ainsi : une fonction positive sur son corps mais qui ne serait pas une somme de carrés pourrait être prolongée sur un corps plus grand en une fonction ayant des valeurs négatives. Bien que ce corps soit une extension du premier, avoir des valeurs négatives dans ce corps impliquerait par spécialisation en avoir aussi dans le corps initial, ce est contraire à l'hypothèse