

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES
SYNTHÈSE ET PERSPECTIVES DE RECHERCHE

Alain Herreman

août 2010

Travaux présentés

Ci-dessous la liste des travaux présentés en vue de l'habilitation à diriger des recherches. La liste complète de mes travaux, de mes interventions et la présentation de mes enseignements se trouve dans le *curriculum vitae*¹.

Développements logiciels

Thamous. Base de données, <http://thamous.univ-rennes1.fr> (requiert un mot de passe).

Edition et traduction du *Résumé of a Theory of Language* de Louis Hjelmslev

1. Edition numérique et traduction, *Résumé pour une théorie du langage* de Louis Hjelmslev, <http://resume.univ-rennes1.fr>, 2010.

2. "Analyser l'analyse, décrire la description. Introduction au *Résumé d'une théorie du langage* de Louis Hjelmslev", <http://resume-introduction.alainherreman.fr>, 2010.

Histoire sémiotique des mathématiques

1. *Enoncés et textes inauguraux. Sur un type d'énoncé et de texte mathématiques*, <http://inauguration.alainherreman.fr>, 2010.

2. "Remarques sur l'expression de la généralité en mathématiques", <http://skolem.alainherreman.fr>, 2009.

3. "Linguistique intégrationniste et histoire sémiotique des mathématiques", <http://linguistique-integrationniste.alainherreman.fr>, 2009.

4. "Vers une analyse sémiotique de la théorie des ensembles : hiérarchies et réflexivité", *Philosophia Scientia*, 9 (2), pp. 165-187, 2005, <http://ensembles-gauss.alainherreman.fr>.

5. "La mise en texte mathématique : une analyse de l' "Algorithme de Frankenthal", *Methodos*, 1, p. 61-100, 2001, <http://frankenthal.alainherreman.fr>.

6. "Découvrir et transmettre. Une analyse de la dimension collective des mathématiques dans *Récoltes et semailles* d'Alexandre Grothendieck", Prépublication de l'IHES, 1999, <http://decouvrir-transmettre.alainherreman.fr>.

7. "Diffusion et critique en histoire des mathématiques", 2005, <http://diffusion-critique.alainherreman.fr>

8. "Artin & Schreier 1927", <http://artin-schreier.alainherreman.fr>, 2005 à paraître dans *Source Book of Real Algebraic Geometry*.

9. "Aux sources de la géométrie algébrique réelle avec Thamous", 2005, <http://gar-thamous.alainherreman.fr>

¹ Voir <http://hdr-cv.alainherreman.fr>.

Introduction

Mes recherches s'inscrivent dans trois directions bien distinctes :

1. Histoire sémiotique des mathématiques
2. Edition et traduction du *Résumé of a Theory of Language* de Louis Hjelmslev
3. Développements logiciels

Elles ont néanmoins un seul et même objectif : montrer la pertinence de la sémiotique comme instrument d'observation et de connaissance.

Je vais les présenter ici tour à tour en m'attachant surtout à mettre en évidence leur cohérence. Ainsi, je présenterai quelques aspects de *Thamous* en montrant ses rapports divers à la sémiotique. Je montrerai que *Thamous* est une implémentation d'un ensemble de notions sémiotiques. Une analyse sémiotique permettra inversement de préciser les conditions de possibilité de l'implémentation de certaines de ses fonctionnalités. Il apparaîtra ainsi que les analyses sémiotiques développées en histoire des mathématiques s'appliquent aux logiciels. Je montrerai ensuite le rôle joué par *Thamous* dans l'édition en ligne et la traduction que j'ai faite du *Résumé of a Theory of Language* de Louis Hjelmslev. Je mettrai ensuite en évidence les divers rapports entre ce texte de linguistique et l'histoire des mathématiques. Je terminerai en présentant mes travaux en histoire des mathématiques.

Les perspectives de recherches seront indiquées au fur et à mesure aux endroits où leur intérêt apparaîtra le mieux.

Développements logiciels et sémiotique de l'expression

Introduction

Cette partie est consacrée à la présentation de mes développements logiciels. Je me concentrerai sur le principal d'entre eux : Thamous. Après une présentation très succincte de ses fonctions (pour une présentation complète je renvoie au manuel en ligne²), je m'attacherai surtout à mettre en évidence les différents rapports entre le développement de Thamous et les analyses sémiotiques que je développe en histoire des mathématiques. Je montrerai que Thamous est une implémentation de diverses notions sémiotiques : fonctions sémiotiques, variante, invariante, expression d'invariante, représentante. Il donne une nouvelle illustration de l'intérêt de *donner une expression* notamment avec l'expression de nombreux rapports par des liens. Ce sera aussi l'occasion de donner plusieurs exemples de *problèmes d'expressions* dont je présenterai et analyserai la résolution. Parmi ces problèmes on retrouvera en particulier le problème de *l'expression de la généralité*, centrale en histoire des mathématiques, mais aussi comme on le verra en informatique puisque Thamous permet de donner deux exemples d'expressions très différentes de la généralité en informatique : l'un avec l'implémentation de la notion d'invariante, l'autre avec l'implémentation de la notion de genre. J'analyserai enfin les conditions de possibilité sémiotiques de ces développements informatiques, ce qui sera l'occasion d'examiner un nouvel exemple d'homologie³. Cette présentation donnera ainsi un panorama assez complet des notions sémiotiques que j'ai introduites en histoire des mathématiques mais appliquées cette fois à des logiciels.

Présentation de Thamous

Thamous est espace de travail, d'échange et de diffusion de références bibliographiques, biographiques et institutionnelles hébergé sur les serveurs de l'Université de Rennes 1. Il comprend une base de données (MySQL) et une interface écrite en PHP accessibles par internet qui combinent différents niveaux de partage et de publicité des données. Ces données peuvent être publiques, privées, ou réservées à un groupe de personnes ayant défini un projet commun. Il est ainsi possible d'attribuer aux différents éléments relatifs à une référence le niveau de publicité souhaité et de les partager en conséquence. Les données sont aussi bien des références bibliographiques (manuscrits, articles, livres, recueils, rapports, etc.), biographiques (personnes), institutionnelles (Académies, Universités, Laboratoires, etc.) ou des revues. Des liens peuvent être créés entre ces données afin de préciser leurs

2 Voir : <http://manuel.thamous.org>. L'accès à ce site suppose un login et un mot de passe qui sera communiqué aux rapporteurs et aux membres du jury.

3 voir « Découvrir et transmettre » et « linguistique intégrationniste et histoire sémiotique des mathématiques ».

rapports. Une trentaine de types de liens sont prédéfinis, l'utilisateur pouvant définir librement des types de liens privés ou propres à un projet. Ainsi pour indiquer par exemple qu'Henri Poincaré a été élève de l'Ecole Polytechnique, il suffit de créer un lien de type « élève de » entre la référence d'Henri Poincaré et celle de l'Ecole Polytechnique.

Ecole polytechnique ←^{Elève de} Poincaré

On peut de cette manière indiquer qu'un article *cite* un livre, qu'il est une *étude sur* un livre, qu'il contient des *indications bibliographiques* sur une personnes, etc.

Livre ←^{étude sur} article

Ces liens, qui peuvent être aussi publics, propres à un projet ou privés, sont autant un moyen de conserver des données qu'un mode d'accès à celles-ci puisqu'il est possible à partir d'une référence d'afficher celles auxquelles elle est liée et ainsi de naviguer entre les références en suivant leurs liens.

Quelques projets développés au sein de Thamous :

- Publications annoncées sur Theuth, par Alain Herreman, Dominique Tournès, voir <http://theuth.univ-rennes1.fr> ;
- Thèses en épistémologie et histoire des sciences, par Alain Herreman, Hélène Gispert, voir <http://theuth.univ-rennes1.fr> ;
- Histoire du calcul graphique et graphomécanique, par Dominique Tournès, voir <http://www.rehseis.cnrs.fr/calculsavant/> ;
- Le Répertoire bibliographique des sciences mathématiques, par Philippe Nabonnand ;
- Histoire et épistémologie des sciences mathématiques écrites en arabe, par Marouane Ben Miled ;
- Histoire et historiographie des mathématiques de l'Inde, par Senthil Babu et Agathe Keller, voir <http://thamous.univ-rennes1.fr/sites/inde/> ;
- Géométrie algébrique réelle, de Descartes à nos jours, par Marie-Françoise Roy, Michel Coste, Alain Herreman, etc., voir <http://thamous.univ-rennes1.fr/sites/gar/> ;

Thamous compte actuellement 91 utilisateurs répartis dans 32 projets. La base de données contient 37 915 références bibliographiques, 1 412 références de revues, 1 370 références de personnes, 293 références d'institutions et 37890 liens.

Donner une expression aux fonctions sémiotiques

L'ensemble de mon travail est consacré à l'étude des enjeux et des implications de l'expression. Je m'intéresse aux caractéristiques des expressions utilisées notamment dans les textes mathématiques pour en établir le rôle et les conséquences. Cela pose bien sûr la question de la description de ces caractéristiques ; le statut qui leur est donné dépend directement de la nature de l'analyse ou de la description à partir desquelles elles sont dégagées. Cet aspect sera surtout abordé dans la partie suivante consacrée à la présentation de l'édition du *Résumé* de Hjelmlev. Je veux ici montrer l'intérêt de *donner une expression*, intérêt qui dépend bien sûr de l'usage de ces expressions, usage qui dépend lui-même des caractéristiques des expressions utilisées. L'implémentation des types de publicités en donne un exemple. En effet, l'exploitation conjointe d'une base de données et de langages de programmation permet de donner une expression à la publicité des références (bibliographiques, biographiques, institutionnelles et de revues), aux remarques et aux liens qui s'y rapportent, tous associés à des droits de lecture et d'écriture. Cette publicité et ces droits de lecture et d'écriture sont « en vrai » le résultat d'une combinaison de facteurs de natures très diverses. Ce sont ces facteurs qui déterminent leur caractéristiques véritables. Par exemple, il ne faut pas écrire sur les livres, mais c'est tout de même possible... C'est possible, mais le faire aura aussi certaines conséquences, par exemple parce que ce qui est écrit sur le livre n'est pas dissociable du texte auquel il se rapporte, etc. Je ne dois pas lire un rapport confidentiel. Mais cela est possible : un filigrane ou un tampon « confidentiel » n'en empêche pas la lecture. Sa lecture non autorisée présente néanmoins des risques dont l'effectivité dépend des caractéristiques de ce qui en empêche la lecture, etc. L'implémentation informatique permet de donner une expression relativement uniforme des types de publicités, des droits de lecture et d'écriture. Autrement dit, des droits d'écriture et de lecture qui sont « en vrai » le résultat d'un enchevêtrement de caractéristiques sémiotiques diverses vont être ainsi ressaisies dans un système d'expressions ayant les mêmes caractéristiques et offrant les mêmes possibilités de traitement. Un changement complet des contraintes sémiotiques est ainsi opéré. Les propriétés habituellement associées à la publicité et aux droits de lecture et d'écriture, résultant des effets combinés des caractéristiques de nombreux systèmes d'expressions, vont pouvoir être partiellement reproduites et ressaisies⁴. Cette reproduction n'est pas tant un intérêt qu'une condition. C'est la condition pour que l'expression donnée puisse être tenue pour, voire

4 Les systèmes d'expressions en informatique sont en fait riches et complexes. J'aurai l'occasion de faire ici quelques remarques à leur propos et c'est une direction de recherches que je compte approfondir.

confondue avec..., cette publicité et ces droits. Son intérêt vient au contraire des possibilités nouvelles offertes par ce changement d'expression. Il vient de ce que la représentation *n'est pas* conforme à ce qu'elle représente. Et elle ne l'est pas parce qu'elle ne peut pas l'être puisque les caractéristiques sémiotiques ne sont pas les mêmes. A cet égard son premier intérêt est précisément de *donner une expression* à ce qui n'en avait pas : la publicité (« publique », « privée », etc.), les droits sont le plus souvent manifestés⁵. Ils sont ici exprimés⁶. La publicité et les droits deviennent de ce fait des variables assignables et manipulables. C'est là un des intérêts majeurs de l'expression, de n'importe quelle expression, qui comprend d'une part le fait de donner une nouvelle expression et d'autre part ses implications, en raison de ses caractéristiques, sur notre représentation de ce dont elle est l'expression. Cette nouvelle expression va introduire des marges de manœuvre vis à vis des propriétés qu'elle sert à exprimer. L'implémentation informatique permet ainsi d'exprimer des types de publicités, des droits de lecture et d'écriture, mais aussi de développer de nouvelles fonctions, d'en étendre l'usage et l'acceptation. Les « contenus formels », pour reprendre une distinction introduite par Granger, ne sont pas propres aux mathématiques⁷.

De la même manière, mais avec des enjeux tout à fait différents, il est intéressant de donner une *expression aux relations*, notamment aux *fonctions sémiotiques*. C'est là l'origine de Thamous. J'ai commencé à développer Thamous au début des années 1990, au commencement de ma thèse, afin de pouvoir enregistrer les rapports entre les textes que je lisais. Thamous ne s'appelait pas encore Thamous et utilisait Hypercard⁸ (développé par Bill Atkinson pour Apple). Une limite d'HyperTalk, le langage d'Hypercard, qui n'en était pas une à l'époque, était d'ignorer internet. Mais ce langage m'a permis de développer une base de données comprenant divers types de données *avec des liens typés*⁹. Quand j'ai abandonné Apple, cette base de données a été migrée, très brièvement sous Access (Microsoft), avant que je ne passe sous Linux. Mon recrutement à l'Université de Rennes 1 en 2002, qui devait s'accompagner au début d'allers-retours entre Paris et Rennes, m'a conduit à développer une base de données et une interface exploitables à partir d'internet (MySQL + PHP).

Thamous est né du transfert sur internet des fonctionnalités développées avec Hypercard, c'est-à-dire principalement des liens qui donnent une expression à des relations qui ne sont généralement que manifestées. L'intérêt de donner une expression uniforme est, il me semble, ici, assez évident. Le fait que Poincaré ait rencontré Hilbert a ainsi une expression. Le fait qu'un article ou un livre cite, fasse des

5 La mention « confidentiel » est un exemple de droit de lecture exprimé. L'expression est requise parce que le droit manifesté n'est pas le droit attendu. L'expression « confidentiel » tente d'y pallier.

6 En fait, typiquement, ils ont *plusieurs* expressions qu'il importerait de bien décrire. Ce qui m'importe ici c'est surtout qu'ils en ait une. Le plus souvent, les expressions auxquelles je fais référence sont celles du programme informatique.

7 La possibilité de représenter certaines caractéristiques sémiotiques d'un texte par des diagrammes avec des flèches, dont je fais largement usage, est aussi un exemple de l'intérêt de donner une expression, surtout quand il s'agit d'un système d'expressions permettant de représenter des unités complexes.

8 Voir par exemple : <http://fr.wikipedia.org/wiki/HyperCard>.

9 J'ai aussi développé en Scheme un système de liens typés, appelé Proclus, pour l'éditeur de textes scientifiques développé par Joris van der Hoeven. Développé sous forme de plugin un système de liens similaire a ensuite été intégré aux outils de TeXmacs à partir de la version 1.0.6.3. Voir <http://www.texmacs.org/>.

remarques, soit une traduction, une étude, prolonge un autre article ou un autre livre a une expression. Le fait que D'Alembert soit membre de l'Académie des sciences et de l'Académie française a ainsi une expression. Que tel livre soit une étude consacrée à l'Académie des sciences a ainsi une expression. Bien entendu ce qui est exprimé par des liens avait déjà une expression. La rencontre de Poincaré et de Hilbert est déjà exprimée dans des livres. La citation d'un livre ou les remarques sur celui-ci peuvent aussi être exprimées même si elle ne sont souvent que manifestées. Qu'un livre soit une traduction est exprimé sur sa couverture et manifesté par l'ensemble du livre. Toutes ces expressions écrites permettent de conserver ces faits. Il n'est d'abord pas inintéressant de tirer parti d'une nouvelle forme de conservation et de diffusion de ces faits qui intéressent, notamment, l'histoire des mathématiques. Mais il est surtout intéressant de les exprimer dans un même système d'expressions et de leur donner ainsi une expression uniforme. Leurs différences, certaines..., vont pouvoir être ensuite ressaisies dans ce système d'expressions par des noms attachés à ces liens (« rencontre », « cite », « remarques sur », « traduction », etc.). Mais comme ces liens sont d'une part maintenant ainsi exprimés et le sont d'autre part de la même manière ils vont aussi pouvoir être aussi traités de la même manière. Tout un ensemble de fonctions peuvent alors être développées pour traiter de ces rapports. Donner une expression crée des possibilités qui n'existent pas pour ce qui n'est que manifesté. Par exemple, un type de publicité va pouvoir être attribué aux liens qui expriment ces rapports, ils vont pouvoir faire l'objet de remarques spécifiques, ayant elles-mêmes des types de publicités variés, des liens entre ces liens peuvent être créés, etc. Donner une expression à ces relations permet de naviguer entre les références qu'ils relient, de produire la liste des personnes rencontrées, en correspondance avec une personne, des textes cités ou inversement de ceux qui citent, font des remarques ou étudient un texte donné, des membres d'une académie ou inversement des académies dont une personne est membre, etc.

Invariante et expression d'invariante : un problème d'expression

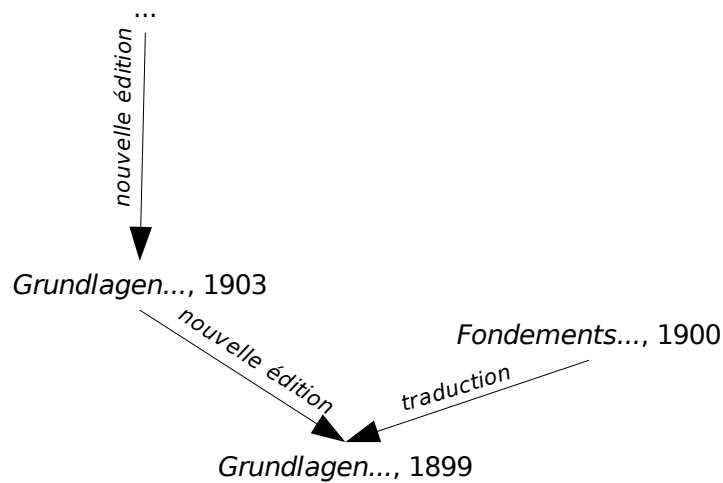
Les liens de Thamous sont une illustration de l'intérêt de donner une expression, en l'occurrence aux relations, et le parti qu'il peut en être tiré en fonction des caractéristiques de celle-ci. La présentation de l'édition numérique du *Résumé* de Hjelmslev sera l'occasion de revenir sur le fait que ces liens permettent de donner une expression aux fonctions sémiotiques. Je voudrais maintenant en donner un autre exemple avec la notion d'invariante.

Invariante et expression d'invariante

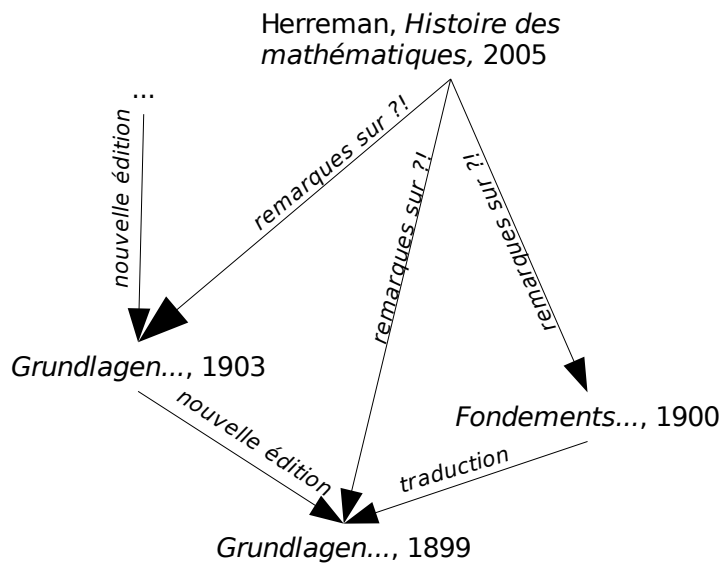
J'ai utilisé la distinction entre invariante et expression d'invariante dans mes travaux d'histoire des mathématiques. Cette distinction revient en définitive à celle entre manifester et exprimer, par exemple entre manifester que l'on parle français et exprimer que l'on parle français. On manifeste que l'on parle français en parlant français, mais aussi en parlant en anglais avec un accent ou en faisant des fautes grammaticales caractéristiques du français. Le français est ainsi une invariante qui a des manifestations. On peut aussi vouloir exprimer cette invariante. Le français est une invariante qui a diverses expressions. Le nom « français » en est une. Une grammaire, un dictionnaire, etc. en sont d'autres. Le *Résumé* de Hjelmslev en donnerait encore une autre. Toutes ces expressions n'ont pas du tout les mêmes caractéristiques ni les mêmes rapports aux manifestations du français. La *sémiotique de l'expression* consiste à partir de la distinction entre *manifester* et *exprimer* à décrire les différences entre les expressions utilisées, ce qui comprend leur rapport à ce dont elles sont l'expression. Le passage de la manifestation à l'expression est à mon avis un des ressorts de certains développements en histoire des mathématiques. Cette distinction conduit aussi à la notion de *problème d'expression*. Il y a un problème d'expression quand il y a des manifestations pour lesquelles on n'a pas d'expression ou, plus exactement, pour lesquelles on n'a pas d'expression dans le système d'expressions voulu. Je vais maintenant donner un exemple de problème d'expression qui s'est posé dans le développement de Thamous et comment l'implémentation de la notion d'expression d'invariante a permis de le résoudre.

Un problème d'expression

Une référence bibliographique de Thamous est elle-même l'expression d'une invariante : d'un article, d'un livre, etc. L'entrée dans Thamous pour les *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert ne renvoie évidemment pas à un exemplaire de ce livre. C'est d'une certaine manière une expression de tous les exemplaires, comme le titre en est une. Il est en fait difficile (impossible...) de définir de quoi cette expression est l'expression, mais cela n'empêchera pas de compter les publications d'un auteur sans craindre de se mettre à en compter les exemplaires. Néanmoins, il est aussi utile de distinguer la traduction en français, par exemple, du texte allemand. Ne serait-ce que parce qu'Hilbert a ajouté à l'occasion de cette traduction l'axiome d'intégrité. Une référence pour cette traduction va donc être créée dans Thamous avec un lien à la première référence pour indiquer qu'elle en est une traduction. Pour les mêmes raisons il convient aussi de donner une expression dans Thamous aux éditions allemandes successives avec un lien à la première du type « nouvelle édition ».



Maintenant, des textes peuvent se rapporter aux *Grundlagen der Geometrie* sans se rapporter à une édition particulière. Des remarques, par exemple, peuvent être valables pour toutes les éditions et pour toutes les traductions ; elles se rapportent à une *invariante* des *Grundlagen der Geometrie*. Le problème est donc d'exprimer dans Thamous cette invariante.

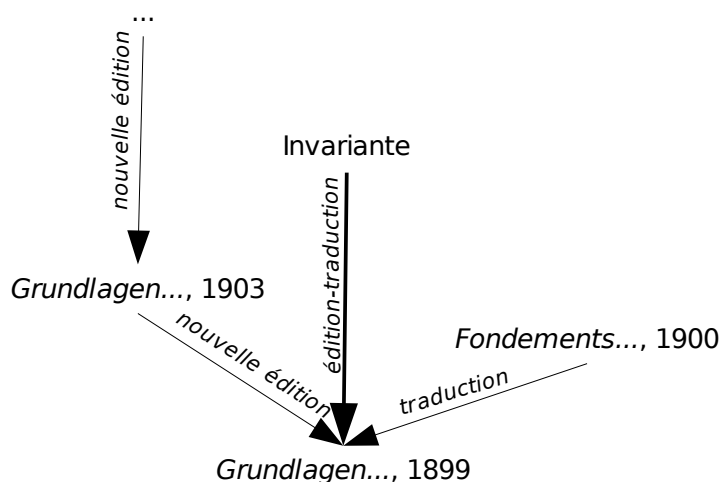


Une solution toujours disponible consiste à prendre une variante comme expression d'invariante, c'est-à-dire à prendre une des expressions précédentes comme expression d'elle-même et de toutes les autres. Elle en serait ainsi une représentante. Ainsi, la première édition en allemand pourrait jouer le rôle de représentante. Mais comme elle est aussi l'expression de l'invariante de la première édition cela introduit nécessairement une confusion : on ne saurait pas à quelle invariante se rapporte le lien. On ne saurait plus si la remarque porte sur la première édition ou sur les *Grundlagen der Geometrie* en général. Ne créer aucun lien ferait perdre une information. Or, un lien a besoin de s'appuyer sur une expression dans

Thamous ; c'est devenu une *nécessité sémiotique*. Il y a une invariante à laquelle il faut donner une expression. C'est un *problème d'expression*.

Résolution du problème d'expression

Ce problème peut en l'occurrence être résolu. Il suffit pour cela d'ajouter aux types de textes de Thamous (« article », « livre », « recueil », etc.), le type « invariante ». Dans le cas de notre exemple, on va créer une référence du type « invariante ». Cette référence va être créée à partir de *n'importe quelle* variante, par exemple à partir de la première édition. Un lien va être aussi créé entre l'invariante et la variante (la référence à la première édition allemande). La nature de l'invariante va être indiquée par le type du lien, ce sera ici « édition-traduction ». Le type du lien indique en définitive une interprétation de la référence considérée (i.e. elle est vue comme une édition ou une traduction, alors que c'est aussi bien d'autres choses), il s'agit donc d'un *interprétant*.

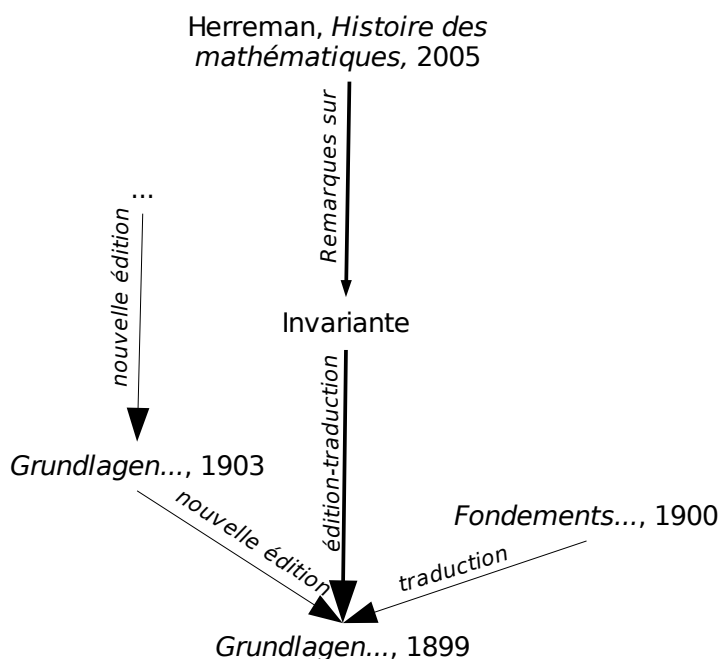


Le choix d'une représentante ne pose maintenant plus le problème qu'il posait : à partir de l'interprétant (« édition-traduction ») et de cette représentante (première édition allemande) il est possible de suivre les liens partant ou arrivant sur cette représentante et de retrouver *toutes les variantes*. Et cela est indépendant du choix de la représentante : le choix d'une autre représentante donnerait le même ensemble de variantes (ce que j'appelle une variété). On voit ici l'intérêt d'avoir *donné une expression* à ces rapports ; leurs expressions dans les livres d'histoire ne permet pas cela. Cette expression permet de nouvelles expressions non prévues : c'est l'effet *boule de neige* de l'expression.

L'expression de l'invariante enregistrée dans la base de données ne contient ni titre, ni année, ni auteur. Ce n'est qu'une expression : elle comprend le minimum pour exister et se distinguer des autres expressions de la base de données (avec aussi l'indication qu'il s'agit d'une invariante, et non d'un article, d'un livre etc.). Mais cette expression suffit à en faire un support de liens. L'utilisateur verra lui la liste

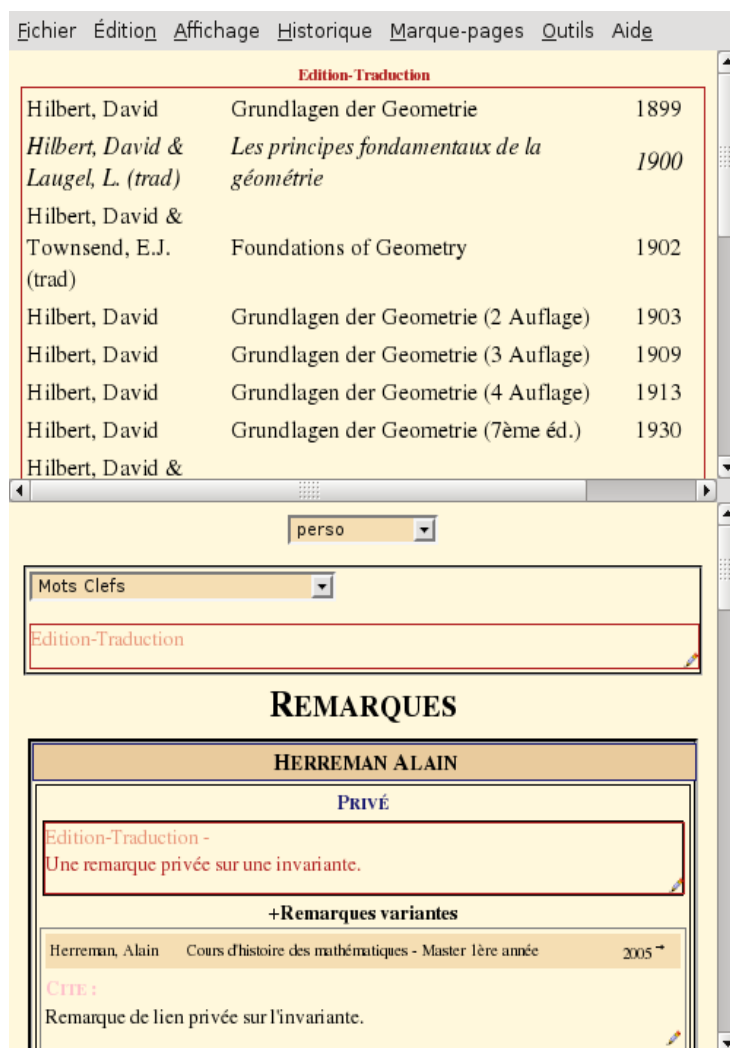
de ses variantes qu'il est possible d'établir à partir du lien entre l'invariante et une représentante et de cette représentante aux variantes (directement ou indirectement). Si une nouvelle variante est ajoutée, celle-ci apparaîtra dans la liste qui n'est pas conservée mais constituée à l'occasion de son affichage.

On peut considérer que des remarques générales sur les *Grundlagen* se rapportent à cette invariante, et créer un lien entre (l'expression dans Thamous de) le texte et (l'expression dans Thamous de¹⁰) cette invariante. Il devient ainsi possible de donner une expression à la généralité des remarques. Ainsi, la question de l'expression de la généralité n'est pas propre aux mathématiques, même si elle y est essentielle. La sémiotique de l'expression permet de l'aborder en mathématiques mais aussi d'en reconnaître les enjeux au delà.

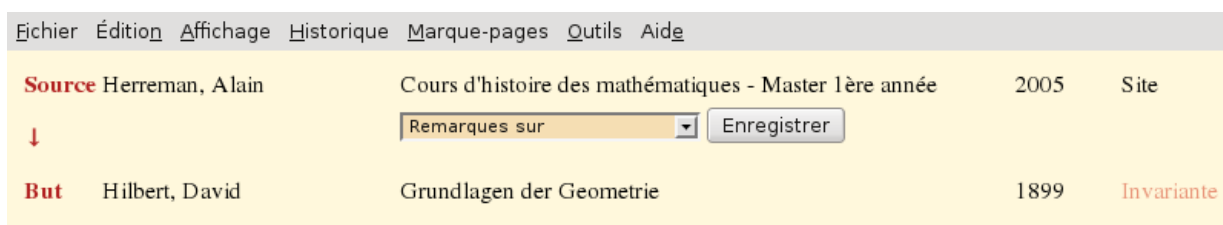


10 J'omettrai dans la suite « l'expression dans Thamous de ». Je contribue ainsi à rendre *transparentes* les expressions de Thamous.

Voici quelques images de Thamous¹¹.



Fenêtre d'une invariante. L'interprétant apparaît au milieu en haut et en rouge. L'invariante est exprimée par toutes ses variantes.



Fenêtre de création d'un lien sur une invariante. L'invariante est, à cette occasion, exprimée par la représentante à partir de laquelle elle est créée.

¹¹ Pour voir les images en couleur se reporter à la version en ligne de ce document : <http://hdr.alainherreman.fr>.

Fichier Édition Affichage Historique Marque-pages Outils Aide

Herreman, Alain	Cours d'histoire des mathématiques - Master 1ère année	2005	Site
<i>Remarques sur</i>			
+ Hilbert, David	Grundlagen der Geometrie	1899	
Ajouter/supprimer un type ▾			
perso ▾			

REMARQUES

HERREMAN ALAIN
PRIVÉ
<p>REMARQUES SUR :</p> <p>Remarque de lien privée sur l'invariante.</p>
PUBLIC
<p>REMARQUES SUR :</p>

Fenêtre du lien créé sur l'invariante. L'invariante est exprimée par la représentante à partir de laquelle elle a été créée. Cliquer sur le signe « + » permet d'afficher toutes les variantes. Avec une remarque privée sur l'invariante.

Eichier Édition Affichage Historique Marque-pages Outils Aide

Herreman, Alain	Cours d'histoire des mathématiques - Master 1ère année	2005	Site
<i>Remarques sur</i>			
- Hilbert, David	Grundlagen der Geometrie	1899	
Hilbert, David	Grundlagen der Geometrie	1899	→
Hilbert, David	Grundlagen der Geometrie (4 Auflage)	1913	→
Hilbert, David	Grundlagen der Geometrie (2 Auflage)	1903	→
Hilbert, David	Grundlagen der Geometrie (7ème éd.)	1930	→
Hilbert, David	Grundlagen der Geometrie	1909	

perso ▾

REMARQUES

HERREMAN ALAIN
PRIVÉ
<p style="color: red; margin: 0;">REMARQUES SUR :</p> <p style="margin: 0;">Remarque de lien privée sur l'invariante.</p>
PUBLIC
<p style="color: red; margin: 0;">REMARQUES SUR :</p>

Fenêtre du lien créé sur l'invariante. L'invariante est exprimée par la représentante avec toutes les variantes. Cliquer sur le signe « - » masque les variantes. Avec une remarque privée sur l'invariante.

Titre	Grundlagen der Geometrie			
Nom	Hilbert, David			
Éditeur	Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmal in Göttingen			
Url				
Type	Lieu	Pages	Année	Langue
Livre	Leipzig		1899	allemand

Editions : 1913 1903 1930 1909 1999
Traductions : anglais (1902) français (1900)

Identifier Biblio saisie Exporter Favoris Cré

? ← ← ? Navigation

REMARQUES

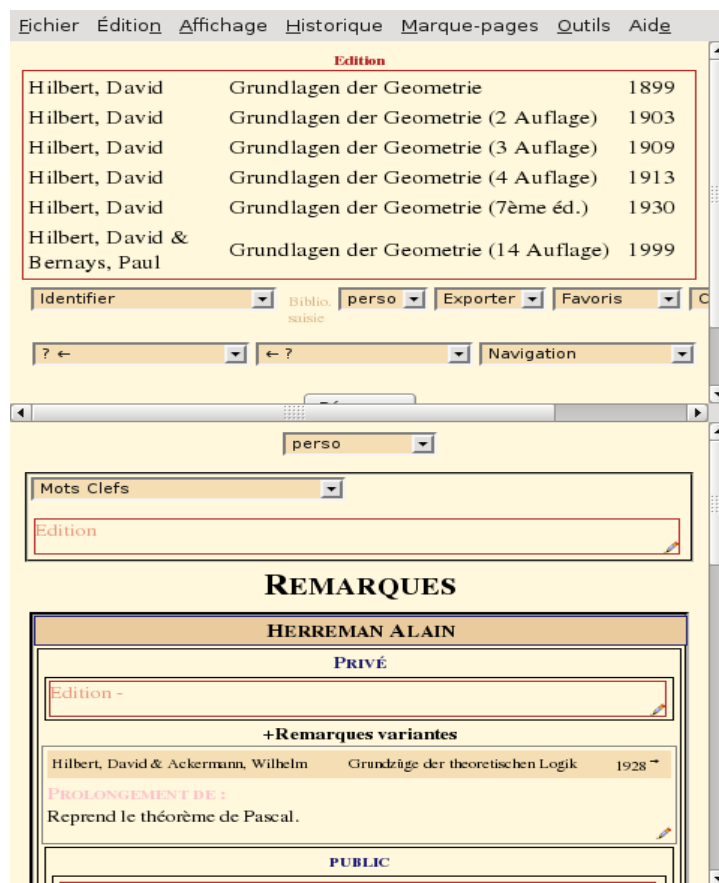
HERREMAN ALAIN
PRIVÉ
Edition-Traduction Une remarque privée sur l'invariante.
Remarques <input type="text"/>
Art. axiom. et formalisme. Cours Histoire Logique Master - Biblio Cours Maths 1930 Master
Herreman, Alain Cours d'histoire des mathématiques - Master 1ère année 2005 →
REMARQUES SUR : Remarque de lien privée sur l'invariante.
Hilbert, David & Ackermann, Wilhelm Grunzüge der theoretischen Logik 1928 →
PROLONGEMENT DE : Reprend le théorème de Pascal.

Fenêtre d'une variante. Encadrée et écrite en rouge une remarque privée sur l'invariante, avec l'interprétant de cette invariante. En dessous, une remarque privée sur la variante. En dessous, encadré en rouge la source du lien se rapportant à la variante et la remarque associée.

Sans aucune modification des scripts, les fonctionnalités qui étaient implémentées pour les références sont étendues aux invariantes. Il est ainsi possible d'écrire des remarques, de mettre des mots-clefs, de créer des liens sur une invariante, tous ses éléments pouvant avoir tous les types de publicités définis. Les remarques, les mots-clefs, les liens relatifs à une invariante sont automatiquement reportés sur les variantes (il faut là apporter des modifications aux scripts) : une remarque sur l'invariante « édition-traduction » des *Grundlagen der Geometrie* apparaîtra comme remarque sur toutes les variantes. L'image suivante montre de quelle manière apparaissent sur une variante les remarques faites sur l'invariante. On y voit une remarque privée faite sur l'invariante (son texte, écrit en rouge, est « Une remarque privée sur l'invariante », et l'interprétant de l'invariante est indiqué au-dessus). On voit aussi une remarque, elle aussi privée, sur un

lien sur l'invariante (son texte est « Remarque privée sur l'invariante », c'est cette fois la description de la source qui est entourée en rouge pour indiquer que cette remarque est en l'occurrence héritée de l'invariante).

Je mets ci-dessous une image de l'invariante créée à partir de la même référence mais avec l'interprétant « édition » au lieu de « édition-traduction ». Les différentes traductions ne sont plus prises en compte, ce ne sont plus des variantes, seules les différentes éditions le sont.



Fenêtre de l'invariante pour l'interprétant "édition" au lieu de « édition-traduction » (les traductions ne font plus partie des variantes).

Il est ainsi possible de donner une expression à toutes les invariante qui se rapportent à des textes et ensuite de tirer parti de cette expression.

Il devient aussi possible de naviguer entre les références en précisant un interprétant. Les variantes pour cet interprétant seront ainsi remplacées par leur invariante¹².

¹² La référence qui représente une personne, par exemple Hilbert, dans la table des personnes sert d'expression d'invariante pour son œuvre. Une étude sur l'œuvre de Hilbert donnera donc lieu à un lien du type « étude sur » entre (l'expression de) cette étude et (l'expression de) Hilbert.

L'expression des genres

Je vais maintenant présenter l'implémentation de la notion de genre dans Thamous¹³.

Un problème d'expression

Thamous est un forum : tous les utilisateurs peuvent y faire des remarques que les autres utilisateurs peuvent lire et modifier selon le type de publicité de celles-ci et les projets auxquels ils participent. Les possibilités d'échanges sont néanmoins très restreintes (pas de possibilité de répondre) et surtout les sujets sont limités aux références de Thamous, c'est-à-dire à des références bibliographiques, des références de personnes, d'institutions ou de revues. J'avais besoin pour mes recherches, mes enseignements et pour Theuth d'étendre les possibilités d'échanges, de ne plus les restreindre à des références (bibliographiques, etc.) mais de pouvoir considérer des textes, tout en conservant bien sûr la possibilité de créer des liens entre tous ces genres de « textes » et de leur attribuer tous les types voulus de publicités, de droits de lecture et d'écriture¹⁴.

Cela revenait essentiellement à implémenter les cinq caractéristiques suivantes :

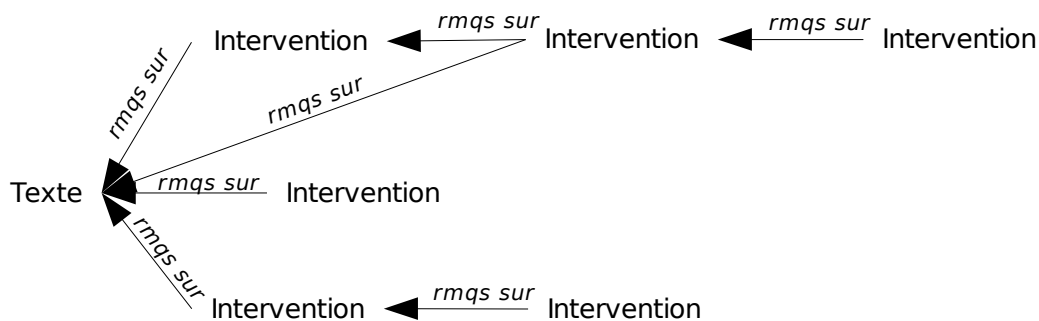
1. enregistrer des textes complets ;
2. définir les genres ;
3. permettre toutes formes de discussions relatives à un texte ;
4. créer des liens entre les textes ;
5. permettre tous les types de publicités, de droits de lecture et d'écriture.

Le passage des références bibliographiques, biographiques, etc. de Thamous aux textes complets n'était pas difficile. Il suffisait de créer une table `textes` supplémentaire dans la base de données de Thamous contenant les textes. En prévoyant un champ « url » il est possible d'étendre le dispositif à n'importe quel texte sur internet sans avoir à le sauvegarder dans la base de données. Les liens entre ces textes pouvaient aussi être enregistrés dans la table `liens` dans laquelle sont enregistrés tous les liens de Thamous.

La notion de lien rend aussi très simple la création de toutes les formes de « forums » que l'on peut vouloir. Un forum n'est en effet qu'un ensemble de textes d'un certain genre (par exemple « intervention ») avec des liens entre eux (du type « remarques sur » ou « réponse »). Ce n'est plus ensuite qu'une question d'affichage.

¹³Certains des enjeux des forums-Thamous ont été présentés dans « Diffusion et critique en histoire des mathématiques » (2005) à l'occasion d'une table ronde organisée pour les dix ans de la Revue d'*Histoire des mathématiques*. Leur implémentation était déjà achevée en 2004. Je reprends ici le terme de « genre » qui est celui utilisé dans ces forums. Il est d'ailleurs conforme à l'acception donnée à un genre dans la discussion consacrée à cette question dans « Enoncés et textes inauguraux ».

¹⁴ Proclus, développé dans le cadre de TeXmacs, réalisait déjà une partie de ces objectifs.



Représentation d'une discussion par des liens

La seule nouveauté et difficulté par rapport aux fonctionnalités existantes de Thamous était *l'implémentation de la notion générale de genre*. Une implémentation rudimentaire des genres existe déjà dans Thamous. Il y a quatre genres de références : textes, personnes, institutions, revues. Il y a aussi les types « Livre », « Article », « Recueil », etc. Le problème de l'extension de ces genres ne tient pas à leur pauvreté ou aux objections qu'il peut y avoir à considérer qu'une personne et une institution relèveraient de la notion de genre. Le problème est de passer de l'implémentation d'une liste de genres fixés *a priori* à l'implémentation d'une notion générale de genre. C'est encore *un problème d'expression*. Ce problème d'expression est aussi récurrent en histoire des mathématiques. C'est une des raisons pour lesquelles la question de la généralité des mathématiques est justiciable d'une analyse sémiotique. Une ambition, une raison d'être et une définition de la *sémiotique de l'expression* pourrait être : *décrire les expressions introduites pour résoudre les problèmes d'expression*. Mais s'il importe de reconnaître ces problèmes d'expressions, avec leur caractère récurrent, et de décrire les expressions introduites pour les résoudre (et donc aussi de reconnaître que ces expressions ont pu être introduites pour les résoudre), les reconnaître n'aide à peu près en rien à les résoudre ! Mais à ma très grande surprise, résoudre celui-ci a été extrêmement simple.

Résolution du problème d'expression

Je rappelle l'énoncé du problème : implémenter la notion de genre afin de disposer de forums avec tous les genres de textes souhaités.

La solution consiste simplement à distinguer trois variables : une variable pour les genres de textes, une variable pour les genres d'utilisateurs et une variable pour les genres d'actions. Toute la simplicité est là : ce ne sont rien d'autres que des variables! En définitive, le minimum pour constituer trois paradigmes...

Tout ce qui définit un genre de texte ce sont les genres d'actions permis ou non en fonction des genres d'utilisateurs. De même, tout ce qui définit un genre d'utilisateur ce sont les actions que les utilisateurs du genre considéré auront ou non le droit de faire sur un genre de texte donné.

Les genres de textes ne sont donc d'abord que des *noms* de genres de textes : « étude », « thème »,

« note », « citation », « intervention », « question », etc.

Les genres d'utilisateurs ne sont eux-mêmes d'abord que des *noms* de genres d'utilisateurs :

« administrateur », « collaborateur », « enseignant », « étudiant », « auteur », « public », etc.

Les actions ne sont que des chaînes de lettres associées à des descriptions d'action :

r : lire,
a : commenter,
c : créer,
x : modifier,
d : supprimer,
t : modifier le titre,
s : voir liens source,
b : voir liens but,
l : créer un lien,
L : modifier/supprimer un lien,
h : voir l'historique,
W : créer un genre,
X : modifier description (y compris son genre),
I : voir les inscrits,
D : modifier une inscription (y compris suppression)
etc.

Les relations entre les genres de textes et les genres d'utilisateurs sont décrites en indiquant pour chaque genre d'utilisateur les actions qu'il a le droit de faire sur chaque genre de texte.

	étude	thème	note	citation	intervention	etc.
administrateur	r d h l L X D	r d h l L X D	r d h l L X D	r d h l L X D	r d h l L X D	etc
collaborateur	a c x h X D	a c x h X D	x r a	x r a	r c h	etc
auteur	x	x	x	x	x	etc
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.

Pour que tout cela ne soit pas complètement vide, il n'y a plus qu'à implémenter les actions décrites et à contrôler avant d'afficher l'élément qui permet de faire l'action (de lire, de créer, de modifier, etc.) que le genre de l'utilisateur l'autorise à faire cette action sur le genre de texte considéré¹⁵.

¹⁵ Les textes comme les personnes peuvent avoir plusieurs genres. Une action est permise si l'un des genres de l'utilisateur et l'un des genres du texte le permettent.

Exemples de forums-Thamous

Tous mes enseignements ont leur forum-Thamous.

Ce forum a pour genres d'utilisateurs : « administrateur » (moi...), « enseignant » (moi...), « collègue », « étudiant », « auteur », « public ». Auquel j'ai ajouté le genre « jury » pour les membres du jury de cette habilitation...

Les genres de textes sont : « Table des matières », « chapitre », « terminé », « notes de cours », « citation », « à faire », « source », « source-historiographique », « commentaire-historiographique », « intervention », « question », « réponse », « annotation », « annonce », « sujet », « devoir », etc.

Les actions sont celles définies ci-dessus. Une partie des genres est décrite dans le tableau ci-dessous :

	chapitre	Notes de cours	à faire	citation	intervention	etc.
enseignant	r a c x h X I L p P s b	r a c x h X I L p P s b	r a c x h X I L p P s b	r a c x h X I L p P s b	r a c x h X I L p P s b	etc
collègue	r a	r a	r a	r a	c	etc
étudiant				r	c b	etc
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.

Il apparaît sur ce tableau que les étudiants n'ont pas accès à mes notes de cours ni à ce que je dois encore faire... Ils ne voient pas non plus les interventions des autres étudiants. C'est un choix pour favoriser leurs interventions. En revanche, l'enseignant peut évidemment voir leurs intervention et y répondre, et l'étudiant verra ses réponses. Les étudiants peuvent aussi faire des interventions avec le type de publicité « privé », soit pour prendre des notes soit pour préparer leur intervention avant de la soumettre à l'enseignant. Un collègue peut à peu près tout lire, sauf les interventions des étudiants, et à peu près tout commenter. Mais l'enseignant et les autres collègues seront les seuls à pouvoir lire ces commentaires. Il serait aussi facile de rendre ces interventions visibles à tous les étudiants. Le genre « auteur » permet de définir les droits pour l'auteur d'un texte. Cela permet à chaque étudiant de pouvoir lire ses interventions... Il pourra aussi écrire et lire ses devoirs, mais pas ceux des autres. Il travaillera en leur donnant la publicité « privé », puis la changera pour que l'enseignant puisse les lire, etc. Suivant le tableau, les étudiants ne peuvent pas lire les chapitres du cours... C'est qu'il est aussi possible de définir le même tableau non plus pour les genres de textes, mais pour des textes individuels. Cela permet que les étudiants aient accès aux chapitres au fur et à mesure qu'ils sont abordés en cours.

Tous les genres d'utilisateurs ont accès au même site, mais *ils n'en voient pas du tout les mêmes choses* (et ils ne peuvent pas non plus y faire les mêmes choses). Pour les étudiants, le site se remplit progressivement (les chapitres étudiés s'accumulent, les textes étudiés aussi, les devoirs, les corrigés, etc.), l'enseignant a lui une vision d'ensemble et le site pour lui ne change presque pas (si ce n'est les annonces qu'il fait, quand ce ne sont pas les mêmes que l'année précédentes...). Le moment venu, il n'a

qu'à rendre visible aux étudiants ce qui ne l'était pas.

Bien sûr, de très nombreux liens existent entre tous ces textes : les textes étudiés sont liés aux chapitres, à des commentaires, tous ces textes sont susceptibles d'interventions des étudiants, qui sont d'autres liens, auxquelles les réponses de l'enseignant seront liées, etc.

Thamous (pour l'instant seulement la partie sans les forums...) est lui-même un forum-Thamous. Il comprend comme genre de texte : php, templates, plugins, javascripts, css, manuel, intervention, réponse, etc.

Ainsi, *les programmes sont eux-mêmes considérés comme des textes*, ce sont seulement, comme les autres textes, des textes d'un certain genre.

Le forum-Thamous Thamous comprend deux genres d'utilisateurs : administrateur et utilisateur. Il serait possible d'intégrer au forum les possibilités de développements offertes pour la partie de Thamous se rapportant aux références bibliographiques, biographiques, etc.

Il y a bien sûr un forum-Thamous « sémiotique » comprenant tout mon travail en sémiotique éclaté en de nombreux genres : « énoncé inaugural », « note », « article », « à faire », « définition », « exemple », « problème », etc. La plupart des travaux présentés pour cette habilitation ont d'abord été des textes avec les genres « note » et « à faire » puis « article » et « terminé ».

Un autre forum, réalisé en collaboration avec Hélène Gispert, est un espace de discussions consacré à l'enseignement de l'histoire des sciences.

L'édition du *Résumé d'une théorie du langage* de L. Hjelmslev a été réalisée au sein d'un forum-Thamous.

Il comprend comme genres de textes : « définition », « règle », « note », « principe », « opération », « exemple », « symbole », « définition PTL », « étude », « thème », « citation », « intervention », « erreur », « question », « réponse », etc.

Il comprend comme genres d'utilisateurs : « administrateur », « collaborateur »¹⁶. Là aussi, le genre « jury » a été ajouté pour cette habilitation. Je reviendrai plus longuement sur son rôle dans la présentation de cette édition.

16 La fonction de collaborateur a été prévue, mais n'a pas pu être exploitée.

Fichier Édition Affichage Historique Marque-pages Outils Aide

Etudes Thèmes Constituants Propositions Questions Admin Inscrits Droits Alain Herreman [definition_3]

*Gg *GL-*gIV Opérations Définitions Applications Exemples Notes Principes Règles Symboles

Buts : - Lié - - - Lié - Présuppose - Question - Remarques sur : Sources

JavaScript: Menu

Gg : glossématique

- *Gg0 : introduction
 - *GgA :
 - composante universelle
 - *GgA0 :
 - introduction
 - *GgA0A :
 - partition de *GgA
 - *GgA0B :
 - analyse
 - *GgA0C :
 - les deux composantes de *GgA
 - *Gga :
 - articulation de la classe des objets
 - *Ggb :
 - articulation de la classe des fonctifs
 - *Ggb :
 - composante générale

Présumposées

::

*GgA0A : partition de *GgA

← n° 3 : analyse →

Défs Opp.

| | |
|--------------------|---|
| Fragmentation (IV) | La fragmentation consiste en la description d'un objet à travers les relations non homogènes de dépendances qu'il entretient avec d'autres objets et que ceux-ci entretiennent entre eux. (trad. Z) |
|--------------------|---|

Une ANALYSE consiste en une description d'un objet par la dépendance uniforme [uniform] d'autres objets à celui-ci et [de ceux-ci] entre eux. - La phrase est (sont) analysé(s) en peut être représentée par le symbole :: (trad. AH)

PTL

analyse (1) Description d'un objet à travers les dépendances homogènes d'autres objets sur lui et sur eux réciproquement.

::

| Definiendum | n° | Definiens |
|--------------|----|---|
| partition | 19 | Une PARTITION est une analyse d'un procès ou d'un dérivé d'un procès. (trad. AH) |
| articulation | 20 | Une ARTICULATION est une analyse d'un système ou d'un dérivé d'un système. (trad. AH) |

Dérivées

Règles

Notes

Citations

PTL, p. 36

Interventions

Intervenir

Alain Herreman Commentaires sur la définition d'analyse mardi 9 janvier 2007 privé ✕

La définition d'une articulation libre donne à l'homogénéité un sens très particulier, puisque dans ce cas l'analyse est menée sans qu'aucune fonction particulière ne soit choisie comme base de l'analyse. Il est à noter que suivant cette définition les objets ne sont pas des produits de l'analyse : l'analyse ne consiste qu'à établir (enregistrer) des rapports

Le forum-Thamous pour l'édition du Résumé de Hjelmslev

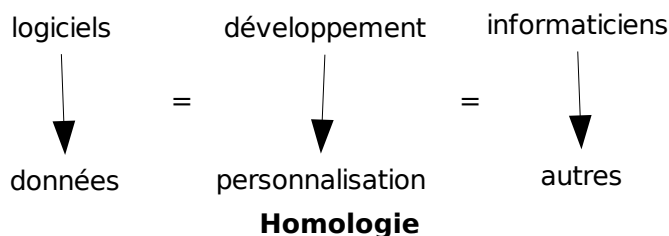
Une homologie

L'analyse que j'ai consacrée à *Récoltes et semailles*, « Découvrir et transmettre », a établi une homologie entre le statut de l'écriture et de la lecture pour Grothendieck, sa conception du savoir et sa représentation de la communauté mathématique. Je vais considérer ici, très succinctement et de manière suggestive, une homologie semblable mais cette fois entre le statut de l'écriture et de la lecture des *logiciels*, la conception du savoir dans lesquels ils interviennent et le rapport d'un champ donné avec celui des *informaticiens*. L'examen de cette homologie va surtout me servir à dégager d'autres caractéristiques de Thamous. Cela fait, je pourrai ensuite terminer l'analyse de la résolution du problème d'expression posé par l'implémentation des genres qui ne se réduit pas à la notion de variable (informatique).

Les logiciels et leurs données, développement et personnalisation

Notre représentation de l'informatique est, en partie, fondée sur un clivage : celui entre logiciels¹⁷ et données. Il y a là à la fois une séparation et une relation étroite : les logiciels ont ainsi une existence indépendante des données mais s'appliquent à celles-ci. C'est une relation éminemment asymétrique. Cette séparation et cette relation me semblent pour une part constitutive du statut de l'informatique, et du rapport des informaticiens aux autres champs : l'autonomie des informaticiens est dans une certaine mesure homologue à celle des logiciels. Leurs relations aux autres est aussi homologue à la relation des logiciels aux données : l'informaticien produit les logiciels, les non informaticiens produisent les données¹⁸. L'incidence grandissante de l'informatique se traduit en partie par l'incidence de celle-ci sur notre représentation des données. Cette dynamique perpétue l'homologie.

Cette séparation et cette relation se retrouvent, dans la mesure où elles la constituent, dans l'opposition entre développement et personnalisation. L'informaticien développe le logiciel, l'utilisateur le personnalise. L'informaticien utilise un langage de programmation, l'utilisateur choisit les valeurs de paramètres. Il y a aussi un ordre : le développement puis la personnalisation. La personnalisation est ainsi *entièrement* dominée par le développement. Elle ne se fait pas seulement dans les limites permises par le développement, elle se fait dans les limites *prévues* et *fixées* par celui-ci. Les circulations ne sont pas du tout les mêmes. Les logiciels circulent. La personnalisation est personnelle. Le logiciel se vend, pas le paramétrage. Toute la problématique du logiciel libre est propre aux logiciels et s'inscrit dans cette séparation entre développer et personnaliser. La personnalisation est bornée par la circulation du logiciel. On peut aussi considérer la distinction dans l'architecture de von Neumann entre d'une part l'unité arithmétique et logique et d'autre part les entrées-sorties. Qualifier cette unité d'« arithmétique et logique » n'est évidemment pas anodin au regard du statut qui leur était en l'occurrence donné. Les informaticiens sont du côté de l'unité arithmétique et logique, les utilisateurs du côté des entrées-sorties. Cela a surtout pour conséquence d'exclure les utilisateurs de l'unité arithmétique et logique. Une frontière est tracée, une relation établie avec des variabilités de part et d'autres très différentes.



¹⁷ Il faudrait, ici tout particulièrement, distinguer les logiciels décrits, écrits, implémentés, compilés et exécutés pour bien localiser où se situe cette caractéristique et en préciser le statut.

¹⁸ Je ne peux ici qu'esquisser cette discussion qui est évidemment bien plus complexe. Ainsi, les programmes étant eux-mêmes des textes sont aussi bien des données, et nombre de programmes s'appliquent à d'autres programmes. Il suffit de penser au cas fondamental des compilateurs. Mais cela ne fait que préciser sans la contredire cette séparation. On pourrait d'ailleurs distinguer le sous-groupe des informaticiens qui n'écrivent des programmes qu'à usage interne, cela caractérise à peu près les *hackers*.

Ces caractéristiques vont contribuer à façonner la place de l'informatique au sein des autres disciplines. Elles façonneront les savoirs qui interagissent avec elle, et les divers champs du savoir et de la société. Inversement, la possibilité de modifier tous ces rapports dépend de la possibilité de modifier ces caractéristiques, c'est-à-dire de la manière dont elles s'imposent, autrement dit d'une appréciation de leur *nécessité*.

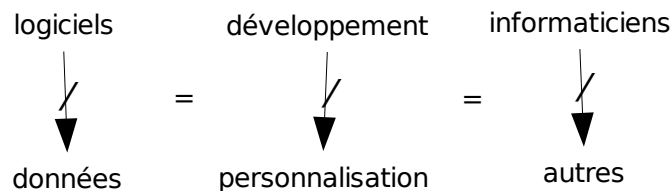
Droits d'écriture et de lecture étendus aux logiciels : un programme est un texte comme un autre

Notre rapport à l'écriture et à la lecture des programmes informatiques fait partie de notre rapport général à l'écriture et à la lecture, il participe de notre rapport au savoir. Il peut être analysé et mis en relation avec notre représentation des champs dans lesquels on s'inscrit, et de la place de ceux-ci relativement aux autres. J'y reviendrai lors de la présentation de « Découvrir et Transmettre ». Thamous est développé suivant le principe qu'un *programme est un texte comme un autre*. Leur différence est une différence de genre. La question des « droits de lecture » et des « droits d'écriture » y est posée dans les mêmes termes pour les textes et les logiciels. Ainsi les scripts qui définissent la présentation et les fonctionnalités de Thamous peuvent, comme les données de la base, être à la fois partagés et modifiés. Une interface de programmation (encore rudimentaire...) permet à chaque utilisateur de faire ces modifications. Tous les utilisateurs utilisent le même programme, mais les modifications ne seront effectives que pour l'utilisateur qui les a faites. Tous les développements que je fais sont eux-mêmes faits « sur place », sans affecter l'usage des autres utilisateurs. Une fois testés, ils sont intégrés aux scripts communs. Thamous est développé sur le modèle du bateau de Neurath. Le développement n'est plus séparé de la personnalisation¹⁹. Son développement se poursuit entièrement sous la forme d'une personnalisation qui est ensuite partagée ; il n'y a pas de hangar, il n'y a pas d'ordinateur particulier dans lequel une copie de Thamous serait développée et qui remplacerait ensuite la version « en ligne ». Le logiciel et les données y ont le même statut. Ils procèdent d'un partage sans duplication ni circulation. Chacun utilise le même logiciel *et* la même base de données²⁰. Thamous ne reproduit pas la séparation entre logiciel et données. L'homologie est la même, mais la séparation est abolie²¹.

19 Les utilisateurs ne peuvent néanmoins pas modifier la structure de la base de données. Ils ne doivent pas non plus pouvoir modifier les scripts qui contrôlent la publicité des données. Pour les mêmes raisons ils ne peuvent pas non plus interroger directement la base de données, etc.

20 Ce sont en quelque sorte des *patches* à l'envers. Un *patch* est un programme qui va être inséré dans un programme, par exemple pour en corriger un bogue. Cela permet à un individu de faire une correction d'une partie du programme qui va profiter à tous sans qu'il soit besoin de remplacer tout le programme. Chacun n'aura qu'à appliquer le *patch* pour bénéficier des corrections effectuées. Dans Thamous, au contraire, le code qui va être exécuté sera le code modifié par l'utilisateur sans que le programme commun ne soit affecté.

21 Dans les limites déjà signalées. Thamous n'échappe pas complètement à ce clivage dans la mesure où il exploite des programmes pour lesquels il est constitutif. Il se retrouve en particulier dans la séparation entre d'une part une base de données et d'autre part les programmes qui l'exploitent. L'endroit ou le niveau où passe le clivage est néanmoins important. Déplacer les frontières n'est pas anodin. La difficulté de les abolir non plus.



Si Thamous n'est pas un logiciel libre ce n'est pas par refus qu'il le soit. C'est que la circulation à laquelle se rapporte cette liberté est fondé sur un clivage remis en cause dans Thamous.

Analyse des conditions sémiotiques du déplacement du clivage entre développement et personnalisation

Je voudrais maintenant examiner les conditions de possibilité de cette remise en cause du clivage entre logiciels et données, entre développement et personnalisation et finalement entre l'informatique et tout ce à quoi elle se rapporte (quand ce n'est pas déjà de l'informatique). Je vais montrer qu'il ne s'agit en fait que d'un *détournement* de la séparation entre développement et personnalisation : l'exploitation d'une faille sémiotique dans une reproduction de cette séparation. Je vais le montrer et l'expliquer en en racontant la genèse.

La découverte des templates : « expression » et « contenu »

Vers 2005 je me suis intéressé, notamment pour Theuth et Thamous, aux CMS²² de plus en plus répandus (la première version de Spip, par exemple, date de 2001, mais il s'agissait en l'occurrence de Xoops dont le développement remonte à fin 2001²³). Ces logiciels sont écrits dans les mêmes langages que Thamous (PHP, javascript). Mais ils avaient une fonctionnalité remarquable : les utilisateurs pouvaient *personnaliser l'apparence* du site. Par exemple deux utilisateurs, une fois identifiés, pouvaient ne voir que les rubriques qu'ils avaient choisies. Je ne comprenais absolument pas comment cela était possible à partir des possibilités que je connaissais des langages utilisés... En prenant en compte toutes les possibilités de conservation de données personnelles (cookies, fichiers, base de données), je ne voyais pas du tout comment il était possible de les réinjecter ensuite dans les scripts qui servaient à produire le site lui-même. En examinant le code (Xoops est un logiciel libre...) j'ai découvert que Xoops utilisait un générateur de *templates* (Smarty), dont je découvrais en même temps l'existence. Les *templates* servent à introduire une séparation entre le traitement des données et leur présentation. Ils introduisent en quelque sorte une séparation entre le « contenu » et l'« expression »... Ainsi, sans qu'aucune caractéristique sémiotique nouvelle n'ait été introduite (le langage n'a pas changé), il a néanmoins été possible d'en modifier de l'intérieur, à un certain niveau, les caractéristiques et d'y introduire, par ces *templates*, une séparation qui n'y était pas et qui modifie les caractéristiques

22 Voir par exemple http://fr.wikipedia.org/wiki/Système_de_gestion_de_contenu. En anglais *Content Management System*, CMS.

23 Pour la chronologie de Xoops voir <http://www.mdxprod.com/uploads/timeline2001-2004.png>.

sémiotiques des programmes²⁴. Il serait évidemment très intéressant d'analyser ici comment un tel générateur, qui n'est qu'un programme écrit aussi en PHP, peut introduire dans ce même langage ce qui s'apparente à une séparation entre « contenu » et « expression » qui n'y était pas.

Une séparation « expression »- « contenu » mobile...

Mais en l'occurrence la séparation introduire entre « contenu » et « expression », c'est-à-dire entre le traitement et la présentation des données, n'est pas fixée. Il n'y a pas, en particulier, d'incommensurabilité entre eux²⁵. Il y a une séparation mais il n'y a en fait aucune différence entre le « contenu » et l'« expression »! Il est dès lors possible de faire remonter à peu près tout le « contenu », c'est-à-dire la programmation, au niveau de l'« expression », la gestion de la présentation des données, et de laisser au niveau du « contenu » la seule partie qui doit rester hors de portée des utilisateurs. C'est ce qui est fait dans Thamous.

Une faille sémiotique...

Il vaut la peine d'observer le statut de la séparation entre développement et personnalisation mis en œuvre. Les *templates* ont été développés par des informaticiens. Ce sont eux qui ont conçu et implémenté cette séparation entre « contenu » et « expression ». Le logiciel qui implémente les *templates* a les propriétés habituelles de circulation des programmes²⁶. C'est d'ailleurs ce qui m'a permis de l'utiliser et d'abord d'en avoir connaissance au travers d'un autre programme qui l'utilisait²⁷. Mais cette séparation a elle-même été conçue sur le modèle du clivage entre développement et personnalisation : elle est censée *ne concerner que l'apparence*²⁸. Mais cette fois-ci, et en raison des modalités de son implémentation, la séparation entre développement et personnalisation est introduite mais *sans que la limite entre les deux ne soit en fait fixée*. Elle n'est pas une nécessité sémiotique. Il suffit juste ne pas la tenir pour établie, de la remettre en cause pour pouvoir la modifier et infiltrer le *développement* dans la

24 Un autre exemple intéressant et assez semblable est donné par le « web 2.0 » (fondé sur « Ajax »). Ce « web 2.0 » est le résultat de l'exploitation d'une fonction de javascript qui n'est pas non plus nouvelle. Mais un ensemble de scripts ont été développés (le plus connu, à ma connaissance..., étant prototype.js) à partir d'elle qui ont permis une exploitation dynamique nouvelle des sites (i.e. la possibilité de modifier une partie d'une page sans la recharger intégralement). D'une certaine manière, les *templates* introduisent une division horizontale supplémentaire et Ajax introduit une division verticale...

25 L'acception d'« incommensurabilité » est ici celle que je lui donne dans « Enoncés et textes inauguraux ».

26 Smarty est sous licence LGPL (Less GPL). C'est une licence GPL sans le droit de modifier le code (voir <http://www.gnu.org/copyleft/lesser.html>). Les licences illustrent à nouveau la différence entre manifester et exprimer. Les scripts de Smarty sont *de fait* modifiables, c'est seulement par une expression (la licence) qu'ils sont dits ne pas l'être. L'expression ne serait pas nécessaire si cette interdiction avait pu être manifestée.

27 J'en récapitule les étapes. Tout commence pour moi par la rencontre d'un programme (Xoops) qui fait des choses dont je ne comprends pas comment elles sont réalisables. Cela met en jeu une « intuition » sur ce qu'il est ou non possible de faire avec un langage de programmation. C'est un point important... Cette « intuition » est tout de même dans une certaine mesure fondée puisque ce logiciel (Xoops) exploite pour cela un autre logiciel (Smarty). Trois facteurs interviennent ensuite :

1. la mise en œuvre du principe qu'un logiciel se lit
2. la possibilité de lire le logiciel (Xoops, logiciel libre).
3. la possibilité d'exploiter un logiciel dans un autre logiciel (reprise de Smarty dans Xoops et dans Thamous).

28 Sur le site de Smarty on lit : « Although Smarty is known as a "Template Engine", it would be more accurately described as a "Template/Presentation Framework." That is, it provides the programmer and template designer with a wealth of tools to automate tasks commonly dealt with at the presentation layer of an application. » (<http://www.smarty.net/rightforme.php>). De même, il est écrit dans Wikipedia à propos de Smarty : « Il facilite la séparation entre la logique applicative et la présentation » (<http://fr.wikipedia.org/wiki/Smarty>).

partie *personnalisation*²⁹. La remise en cause avec Thamous du clivage entre développement et personnalisation (et des autres clivages homologues) ne procède que d'un *détournement* de ce clivage habituellement imposé. Il s'agit en quelque sorte de l'exploitation d'une *faille sémiotique*.

Fin de l'analyse de la résolution du problème d'expression posé par l'implémentation des genres

Après avoir montré de quelle manière le clivage entre développement et personnalisation était remis en cause dans Thamous, il est maintenant possible de compléter l'analyse de la résolution du problème d'expression posé par l'extension de l'implémentation de la notion de genre et de préciser en quoi l'analyse sémiotique de cette résolution ne se réduit pas à la notion de variable. Ce dont la notion de variable ne rend pas compte, et qui est essentiel dans cette extension, c'est de la capacité d'y exprimer *toutes* les différences génériques *susceptibles d'une implémentation*³⁰. Les listes des genre de texte, de personne et des actions considérées (« lire », « commenter », « créer », « modifier », « voir liens source », etc.) ne sont en effet pas arrêtées et peuvent être complétées à volonté. La signification donnée aux genre et aux actions n'est pas non plus fixée et peut être précisée, restreinte, nuancée, etc. Leur variété infinie est en effet adossée à la variété des fonctions et des scripts qu'il est possible d'écrire. Tous les *développements logiciels* possibles sont dès lors envisageables pour les définir. Leurs limites ne sont plus celles d'une *paramétrisation*, mais celles des *langages* utilisés. Ce n'est pas une différence de degré mais de nature. Ainsi, la remise en cause de la démarcation entre développement et personnalisation est essentielle dans l'implémentation de la notion de genre : elle donne aux trois variables (de genre textuel, de genre de personne et d'action) la possibilité de varier dans un langage plutôt que dans un paramétrage.

La remise en cause de cette démarcation intervient aussi avec les liens entre les textes. La présentation de l'édition numérique du *Résumé* de Hjelmslev en donnera un exemple.

La représentation des possibilités d'expression offertes par les logiciels me semble encore trop souvent rapportée aux possibilités de leur personnalisation ou aux contraintes imposées par leur circulation. L'exemple de l'implémentation des *templates* au sein de PHP montre qu'il est en un sens possible de changer les caractéristiques sémiotiques d'un langage de l'intérieur de celui-ci. Et les exemples similaires sont innombrables. Cela rend forcément très difficile toute délimitation des possibilités d'un tel langage.

29 Il serait possible ici de faire une comparaison avec la démonstration des théorèmes d'incomplétude de Gödel. Leur démonstration consiste en effet à construire à l'intérieur d'un système logique une reproduction (codage arithmétique) des propositions et des démonstrations de ce système. L'intérêt est bien sûr que la reproduction (arithmétique) est conçue pour permettre d'établir l'incomplétude. De la même manière, les *templates* créent au sein de PHP une copie de ce langage dans laquelle existe la séparation entre le « contenu » et l' « expression ». Dans les deux cas, il conviendrait de mettre en évidence ce qui rend ce dédoublement sémiotiquement possible. J'ai commencé cette analyse pour les théorèmes de Gödel et je compte poursuivre et compléter l'analyse des conditions de possibilité sémiotiques de Thamous ainsi que celle d'autres programmes.

30 Il n'y a ni énoncé ni texte inaugural puisque je ne soutiens pas que les langages informatiques considérés puissent donner une représentation conforme de tous les genres et, au delà, de toutes les caractéristiques sémiotiques et de leurs effets. Mais considérer ces langages, qui ne sont eux-mêmes que des programmes..., au lieu de se restreindre à fournir des données (paramètres) à des programmes écrits dans ce langage fait néanmoins une différence considérable.

Avec la personnalisation l'utilisateur n'a pas les moyens de faire d'autres distinctions que celles conçues par les auteurs des programmes. S'en satisfaire c'est comme accepter d'écrire, de penser uniquement en répondant à des QCM.

L'incidence de la publication et de la circulation des logiciels sur leur conception est à bien des égards comparable, en dépit de caractéristiques sémiotiques différentes, à l'incidence qu'elles ont sur les autres écrits (articles scientifiques, livres, etc.). Concevoir des logiciels voués à la circulation est une contrainte d'écriture *supplémentaire*. Le logiciel doit en particulier anticiper ses usages : ce faisant il les fixe, les restreint, mais il doit néanmoins les inclure, ce qui complique considérablement la programmation. La personnalisation offerte est très pauvre (même si elle peut sembler riche et complexe parce qu'il faut la présenter intégralement pour qu'elle soit connue de l'utilisateur, ce qui n'est pas le cas d'un langage...). Elle présente en même temps une offre excessive : l'utilisateur n'a besoin que de quelques-unes des possibilités proposées (et de beaucoup d'autres qui ne le sont pas...). Et elle rend ainsi le programme complexe. Incomparablement plus complexe que ne le requiert l'usage qu'un utilisateur en fera. La réalisation de programmes aussi complexes nécessite en effet des experts. Mais cette complexité n'est pas *une nécessité sémiotique* inhérente à l'expression informatique : elle n'est qu'une condition pour la circulation des logiciels. Elle est alors en effet nécessaire, d'une nécessité d'un type particulier, mais cette circulation ne l'est, elle, pas toujours. Il importe, je crois, de faire cette différence. Développer une version de Thamous susceptible d'une telle circulation demanderait un travail supplémentaire considérable. Mais quel intérêt aurait Thamous à circuler ?! Il faudrait pour cela le dissocier de ses données, ce qui ferait perdre l'intérêt de les partager. Et de toute façon, l'implémentation des genres, et l'extension de la notion de lien associée, est incompatible avec une circulation qui réduirait à très peu les possibilités offertes aux utilisateurs.

Conclusion et perspectives

J'ai voulu faire ici à la fois une présentation et une analyse de Thamous. J'ai essayé ainsi de montrer de quelle manière la sémiotique en avait inspiré le développement, qu'elle pouvait aussi servir à en présenter certaines fonctionnalités et enfin qu'elle pouvait rendre compte des conditions de possibilité de ces développements et de quelques-uns de leurs enjeux.

Ainsi, les liens, les invariants ou même, mais moins directement, les genres de textes et d'utilisateurs sont des implémentations de notions sémiotiques que j'utilise en histoire des mathématiques (dans « Découvrir et transmettre » pour les dernières). La décision de m'investir dans le développement de logiciels est une conséquence directe de l'importance que j'accorde en histoire des mathématiques aux enjeux de l'expression. Donner ainsi une autre expression à des notions sémiotiques, montrer qu'elle sont

implémentables est, sinon une preuve, tout du moins une épreuve de consistance. En établissant la diversité des systèmes d'expressions, la sémiotique peut contribuer à dépasser préventions et fétichismes et invite à tirer parti de cette diversité. Elle a ainsi sans aucun doute contribué à me convaincre que donner une expression informatique était aussi une manière d'appliquer et d'éprouver les idées utilisées en histoire des mathématiques, et que les systèmes d'expressions utilisés en informatique ne valent pas moins la peine d'être analysés que ceux utilisés en mathématiques. L'homologie, notion délicate..., entre caractéristiques sémiotiques, nature des savoirs, produits ou acquis, et structures sociales fondent en partie ma conviction qu'il importe à chaque individu, et en particulier à ceux qui se veulent épistémologues, de s'emparer des moyens d'expression informatique et d'en connaître, sinon d'explicitier, autant que possible les caractéristiques sémiotiques et leurs implications. J'ai enfin voulu montrer à partir de l'exemple de *Thamous* qu'une analyse sémiotique des moyens de production informatique était possible. L'intérêt est double : d'une part montrer la capacité de la sémiotique à faire une telle analyse et d'autre part tirer parti de ses résultats pour mieux connaître les implications de l'informatique sur nos représentations et nos savoirs. J'ai ainsi tenté, risqué..., de mettre en évidence une homologie semblable à celle que j'avais proposé dans « Découvrir et transmettre ». J'ai pour cela indiqué une correspondance entre des rapports relevant d'analyses différentes (logiciels/données ; développements/personnalisations ; informaticiens/autres) et montré que *Thamous* modifie ces rapports mais que l'homologie y est néanmoins conservée. *Thamous* est ainsi autant un moyen d'étudier l'informatique que la mise en œuvre d'un autre rapport à celle-ci, dont j'ai aussi essayé de montrer les conditions et les limites.

Ici, comme ailleurs, les caractéristiques sémiotiques inattendues posent des difficultés de compréhension. En histoire des mathématiques aussi bien que dans l'analyse du *Résumé* de Hjelmslev, j'y reviendrai, ces difficultés offrent un accès aux différences sémiotiques qu'elles nous font ainsi connaître. Dans le cas de *Thamous*, ces différences sémiotiques s'accompagnent aussi de nombreuses difficultés de compréhension, mais il s'agit alors de difficultés dans la réception de *Thamous*. L'analyse qui vient d'être présentée aurait pu être remplacée par un examen des incompréhensions suscitées par *Thamous* tant elles révèlent, souvent, l'écart entre les caractéristiques proposées et les caractéristiques attendues.

Bien évidemment, *Thamous* intervient aussi inversement dans mes études d'histoire des mathématiques ou de sémiotique puisque tous les textes étudiés, toutes les sources secondaires, tous les textes que je rencontre d'une manière ou d'une autre depuis le début de ma thèse y sont enregistrés avec des mots-clefs, associés à des projets divers, accompagnés de remarques ayant des types variés de publicité, et avec en général au moins un lien, rattachant la référence à un texte, une personne ou une institution dont il traite ou encore au texte qui me l'a fait connaître. *Thamous* contribue aussi à la diffusion des travaux réalisés en histoire des sciences au travers notamment du site qui présente les publications annoncées sur

Theuth et celui qui recense les thèses en histoire des sciences soutenues ou en cours. Les divers sites développés à partir de Thamous sont autant d'exemples d'exploitation de ses données. Un début d'exploitation plus systématique a été proposé dans le cadre du groupe de travail consacré à l'histoire de la géométrie algébrique réelle « (<http://gar-thamous.alainherreman.fr>).

Tous les aspects qui viennent d'être présentés sont autant de directions de recherche que j'entends poursuivre, en particulier : l'exploitation des données de Thamous, son développement logiciel et l'analyse sémiotique des logiciels et au delà celle des implications sémiotiques, épistémologiques et sociologiques de l'informatique.

Le Résumé of a Theory of Language de Louis Hjelmslev : décrire une langue

Le Résumé of a Theory of Language, publié en 1975, est une présentation de la théorie du langage de Hjelmslev, la *glossématique*, sous la forme d'une procédure dont la description comprend environ 480 définitions, 7 principes, 61 notes et 203 règles. L'application de cette procédure produit une hiérarchie constituant la description d'une langue. Ce texte, publié à titre posthume par Francis Whitfield à partir d'un manuscrit réputé pour sa difficulté, a été très peu étudié parmi les linguistes, y compris les spécialistes de Hjelmslev³¹. La traduction et l'édition numérique que j'en ai faites ont été l'occasion d'en comprendre le fonctionnement original.

Je vais ici rendre compte de mon intérêt pour ce texte et préciser ses divers rapports avec l'histoire sémiotique des mathématiques.

Une traduction linguistique et sémiotique

Traduire oblige à porter une attention soutenue au vocabulaire employé. La traduction de chaque définition suppose une relative, très relative..., compréhension de celle-ci. Enfin, cela suppose aussi la lecture de l'intégralité du texte : de chaque définition, chaque règle, chaque note... Cela est commun à toutes les traductions. Ce n'est pourtant pas la perspective du bénéfice du travail qu'une traduction oblige à faire, ni celui de proposer une traduction française intégrale qui a motivé cette édition ; l'édition anglaise de Whitfield aurait suffi à la diffusion de ce texte et le lecteur francophone intéressé par celui-ci a sans aucun doute les compétences linguistiques pour le lire en anglais. Ma motivation venait du bénéfice attendu de l'exploitation des liens typés et de la notion de genre implémentés dans Thamous.

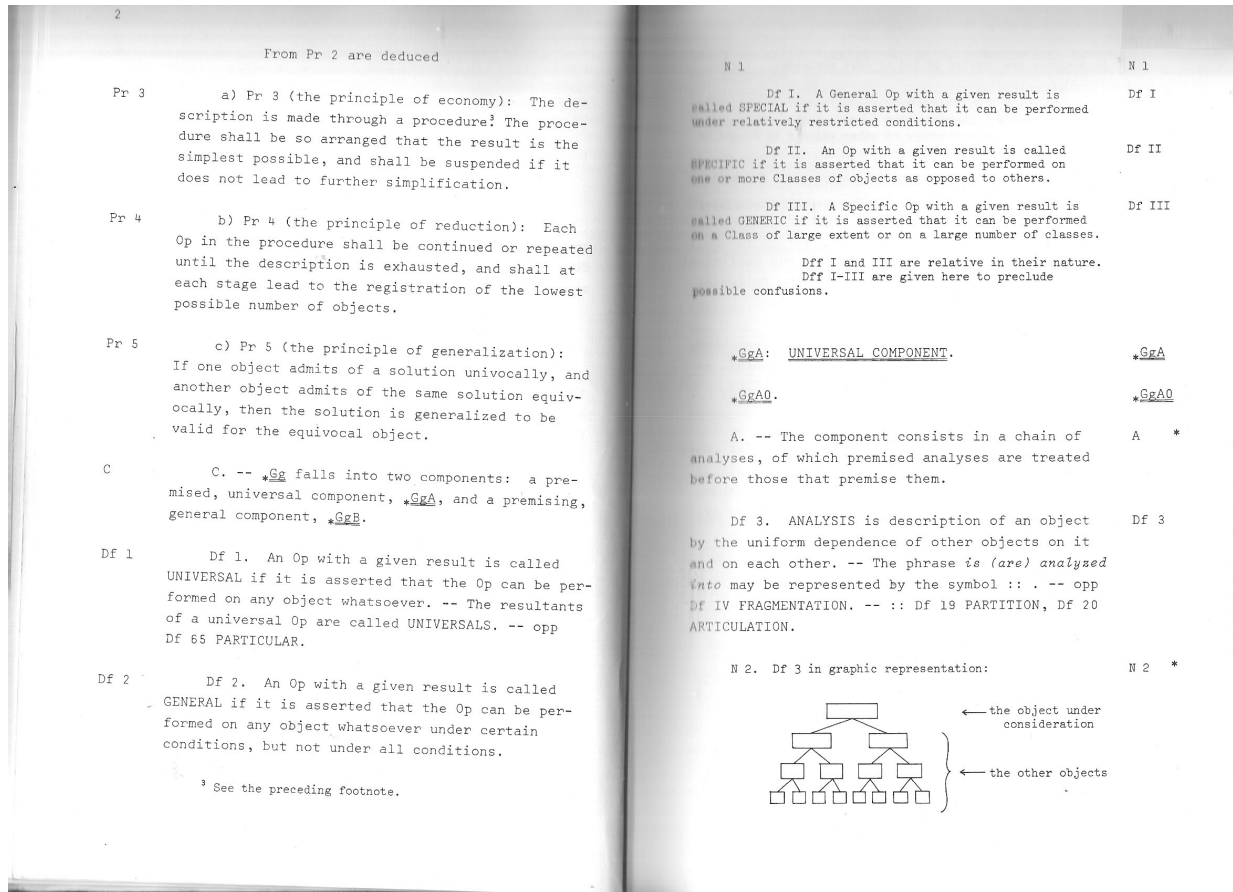
Le Résumé est essentiellement un succession de définitions, de principes, de notes et de règles, c'est-à-dire de quatre genres de textes. Il était facile de restituer ces distinctions dans un forum-Thamous³². Les définitions, les principes, les notes et les règles ont pu être ainsi progressivement traduites et enregistrées avec leur genre. Les opérations, à peu près réduites à des titres dans l'édition papier, correspondaient à un cinquième genre de texte. L'implémentation des genres permet de les distinguer. Les liens typés allaient ensuite permettre de donner une expression propre aux relations nombreuses et variées entre ces textes.

Chaque opération fait partie d'une autre opération (exceptée celle qui représente l'intégralité de la

31 François Rastier écrivait en 1985 : « un des textes majeurs de la sémiotique contemporaine, et attirer l'attention sur un œuvre restée presque inconnue, bien qu'elle définisse les principaux concepts de la théorie hjelmsléviennne. » François Rastier, Introduction aux Nouveaux essais, 1985, p. 21. La situation n'a guère changé depuis.

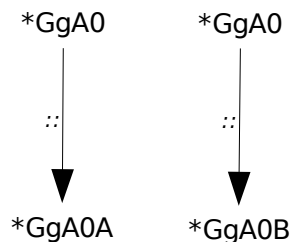
32 La description qui suit ne se rapporte pas à la version numérique publique du *Résumé* mais au forum-Thamous à partir duquel le site public est généré. Ce forum, qui est aussi un espace de travail, contient plus d'informations que le site public. Un scripte génère les pages du site public à partir du forum-Thamous. Pour la présentation de l'édition en ligne publique, voir <http://resume.univ-rennes1.fr/presentation.html>.

procédure). Cette relation est indiquée dans l'édition papier par une différence de niveau de titre.

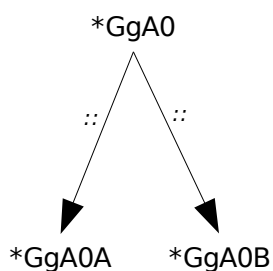


Le Résumé dans l'édition de Whitfield

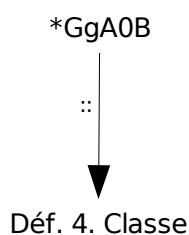
Ainsi, a-t-on un titre « *GgA composante universelle » suivi d'un sous-titre de niveau inférieur « *GgA0 » à nouveau suivi d'un sous-titre de niveau inférieur « A ». Le sous-titre « A » est suivi d'un court paragraphe qui présente cette composante, suivi d'une définition, d'une note, d'une autre définition, puis à nouveau d'un sous-titre « B », de même niveau que le précédent, comprenant à son tour des définitions et des notes. Pour exprimer ces relations manifestées un lien sera créé entre chacune des opérations « A » et « B » et l'opération « *GgA0 » dans laquelle elles entrent. Comme les deux opérations « A » et « B » réalisent une décomposition de « *GgA0 », le type du lien sera « analyse », c'est-à-dire « :: » conformément à la notation du *Résumé* :



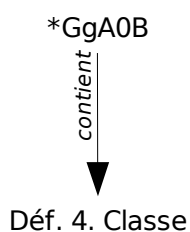
Autrement dit, « *GgA0 s'analyse en *GgA0A et *GgA0B » peut être représenté comme suit :



Chaque définition, note, règle et principe fait partie d'une opération. Cette relation est manifestée dans l'édition papier par le fait que la définition, par exemple, est donnée dans une partie dont le titre est celui de l'opération. Cette relation va aussi pouvoir être exprimée par un lien³³.



J'ai choisi de lui assigner à nouveau le type « :: », c'est-à-dire « analyse », au lieu par exemple de « contient » :



Je ne veux pas discuter ici ce choix mais seulement faire remarquer qu'exprimer ainsi les liens oblige à avoir cette discussion et à clarifier le rapport entre les termes considérés. C'est là un point essentiel. Un intérêt de toute traduction est d'*obliger* le traducteur à choisir l'expression la mieux adaptée pour traduire chaque terme. Traduire oblige par exemple à décider si deux termes sont ou non équivalents. En décider peut demander un réexamen approfondi d'une grande partie du texte. Le traducteur gagnera ainsi une connaissance de celui-ci qui tient aux *différences entre les deux langues*, c'est-à-dire, plus généralement,

³³ Chaque entrée de la base de données comprend évidemment plusieurs champs, l'un d'eux permet d'y écrire le texte de la définition...

aux différences entre les systèmes d'expressions. A cela s'ajoute ici qu'exprimer les relations avec des liens oblige à spécifier le rapport entre les deux termes : la nature du rapport entre une définition et l'opération dans laquelle elle entre doit être clarifiée. Il est en l'occurrence possible de le désigner comme on veut puisque tous les types de liens que l'on veut peuvent être créés³⁴. Mais il n'est plus possible de se contenter de sa manifestation, il faut lui donner une expression. Le bénéfice dépend du système d'expressions. L'intérêt est ici d'être obligé d'*exprimer plus* que le système d'expressions utilisé par Hjelmslev ne l'obligeait à le faire. L'important n'est d'ailleurs pas tant ici d'exprimer plus, bien que cela puisse être aussi un enjeu, mais d'exprimer des choses dont il importe qu'elles le soient. C'est un exemple de *nécessité sémiotique* dans la mesure où c'est le système d'expressions dans lequel je m'inscris qui m'oblige ici à faire un choix. L'intérêt des liens est d'obliger à exprimer quelque chose qui mérite de l'être, à savoir le rapport entre deux termes. De plus, le choix s'impose mais pas les termes du choix : la remise en cause de la séparation entre développement et personnalisation permet de définir tous les types de liens souhaités. La publication en ligne au format html oblige aussi par exemple à choisir la couleur de la fonte, du fond, etc. de chaque composante. Ce sont tout autant des exemples de nécessités sémiotiques, mais leur intérêt est ici moindre, et les termes du choix sont imposés. Mes analyses sémiotiques des textes mathématiques sont guidées par le souci de saisir ces nécessités sémiotiques, de les décrire, d'en rendre compte comme nécessités et d'en montrer les effets éventuels. *L'implémentation informatique des liens typés permet de faire de la question sémiotique/épistémologique du rapport entre deux termes une nécessité sémiotique.*

Rechercher le type de lien adéquat, en constituer la liste, s'assurer de sa cohérence sur l'ensemble des genres considérés et de leurs occurrences, vérifier effectivement que tout le *Résumé* peut être représenté de la sorte n'est pas moins intéressant ni moins utile que de chercher une traduction juste des termes et de s'assurer de la cohérence des choix effectués sur l'ensemble du texte. La *traduction sémiotique* est un instrument de travail et de connaissance comme la traduction linguistique. En l'occurrence, leurs effets se combinent.

En traduisant et en saisissant les définitions dans l'ordre du texte imprimé, il est possible et très facile d'indiquer pour chacune au fur et à mesure les définitions qu'elle présuppose, c'est-à-dire les définitions des termes qui interviennent dans son *definiens*. Par exemple :

Déf. 4. Une classe (symbole : □) est un objet qui est soumis à l'analyse.

Déf. 3. Analyse ←^{présuppose} Déf. 4. Classe

Cela permettra ensuite d'accéder simultanément à toutes les définitions nécessaires à la compréhension

³⁴ Nouvel exemple du déplacement de la séparation entre développer et personnaliser. La personnalisation permet d'introduire tous les *noms* de type possibles. Mais si l'on veut aussi faire un traitement spécifique de chaque type, déterminé par le type et non par le paramétrage offert, comme c'est le cas ici, il est nécessaire de recourir à tout le langage disponible.

d'une définition. Ce qui est appréciable et serait irréalisable avec une édition papier. Mais il est peut-être encore plus appréciable de récupérer du même coup la liste de toutes les définitions qui *utilisent* une définition donnée. Pour constituer la première liste il a suffi de parcourir les *mots de la définition*. Tout est sous les yeux du lecteur. Pour constituer la liste des définitions qui utilisent une définition considérée il aurait fallu parcourir l'intégralité des *définitions* restantes du *Résumé*! Dans un cas à peu près chaque *mot* conduit à créer un lien (rendement maximal). Dans l'autre, la plupart des *définitions* lues, ce qui est plus long à lire qu'un mot et chacune devant être lue autant de fois qu'il y a de définitions avant elle, auraient dû être lues pour rien (rendement mauvais pour une recherche plus coûteuse). L'enregistrement d'une information facile à obtenir permet de récupérer une information autrement difficile à obtenir³⁵. C'est là un bénéfice systématique et appréciable des liens³⁶. C'est aussi un exemple de la différence entre manifester et exprimer, de l'intérêt de donner une expression, intérêt qui dépend lui-même des caractéristiques de l'expression donnée³⁷.

L'édition numérique du *Résumé* fournit de nombreux autres exemples du bénéfice que l'on tire de l'expression des rapports par des liens. Ainsi, chaque définition du *Résumé* est accompagnée de son analyse (au sens du *Résumé*) donnée sous forme d'une liste de définitions³⁸. La définition d'une classe se présente par exemple ainsi :

Une classe (symbole : □) est un objet qui est soumis à l'analyse. -- :: Déf. 34 chaîne, Déf 36 paradigme ; Déf 140 réalisée, Déf 141, virtuelle.

Les définitions indiquées après le symbole de l'analyse (::) sont les définitions qui entrent dans l'analyse de la définition d'une classe. Le point-virgule (;) sépare deux analyses différentes. Les quatre liens suivant vont donc être créés :

Déf. 4. Classe ← :: Déf. 34. Chaîne
 Déf. 4. Classe ← :: Déf. 36. Paradigme
 Déf. 4. Classe ← :: Déf. 140. Réalisée
 Déf. 4. Classe ← :: Déf. 141. Virtuelle

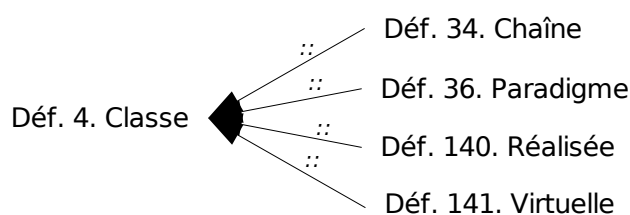
35 Il faut noter ici que cette *inversion* requiert que *toutes* les définitions aient été traitées. Cela suppose une expression de la *totalité* des définitions. L'expression de la totalité, ici simplement donnée par la totalité des expressions, intervient donc dans cette inversion. Les enjeux de l'expression d'une totalité sont abordés dans « Enoncés et textes inauguraux » et le seront surtout dans la suite qui sera donnée à ce travail.

36 Cette asymétrie a des conséquences considérables pour internet. S'il est facile de déterminer les pages vers lesquelles pointe une page (la commande unix wget fait cela), il est bien plus difficile de récupérer les liens inverses, c'est-à-dire de connaître les pages dont un lien pointe vers une page donnée. Cela oblige à créer des bases de données colossales, dupliquant en partie le contenu d'internet, dans lesquelles sont stockées, en utilisant une fonction comme wget, les liens *partant* des pages afin de récupérer *dans la base* les liens *pointant* vers une page donnée.

37 On peut le dire autrement. Dans l'édition publique en ligne ces liens ont disparu. Mais ils ont été exploités pour produire toutes les informations données dans ce site pour chaque définition, règle, etc. Un lecteur sémioticien qui s'interrogerait sur les conditions de possibilité de production de ces informations devrait pouvoir remonter de la manifestation à l'existence d'une expression de ces liens. Il s'agirait d'une déduction, une enquête, allant de la manifestation à l'expression.

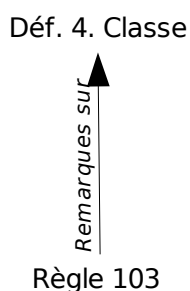
38 Il s'agit plus exactement d'une liste de listes de définitions puisque une même définition est susceptible de plusieurs analyses.

Soit, de manière abrégée :



Et comme précédemment, une fois ces liens créés pour toutes les définitions, on récupèrera les liens inverses, c'est-à-dire que l'on pourra aussi connaître les définitions dans l'analyse desquelles une définition entre. Ce qu'il est très utile de connaître et que l'édition papier ne donne pas et qu'il serait très fastidieux d'obtenir et d'exprimer systématiquement dans une telle édition.

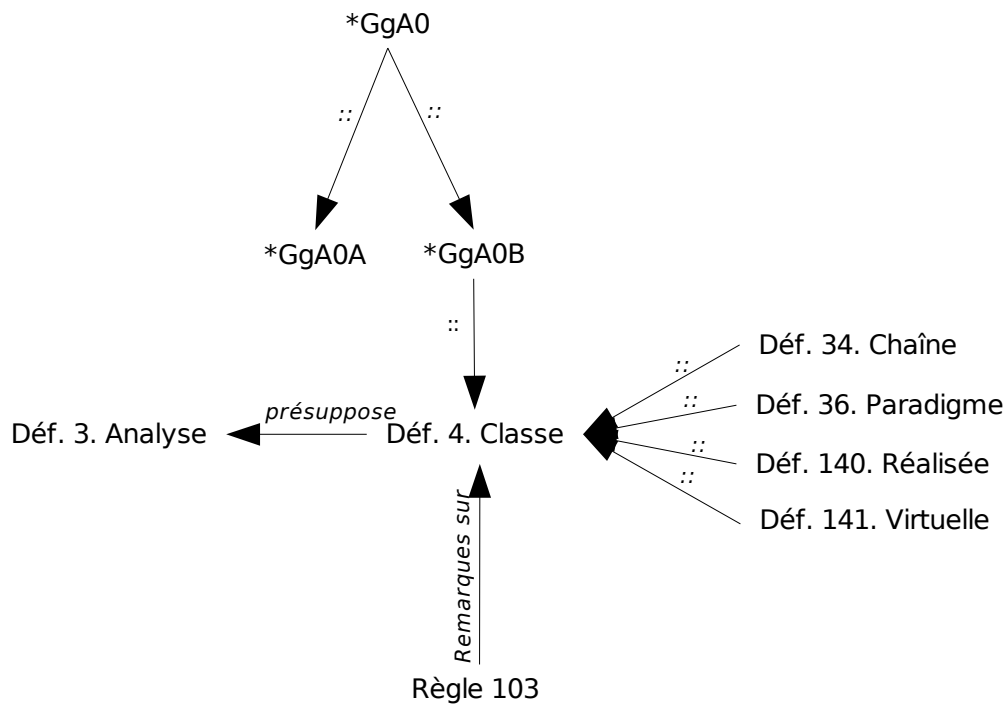
Il est possible de la même manière de créer des liens entre une règle et une définition. Par exemple :



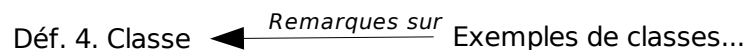
Ce lien sera créé au moment de la traduction de la Règle 103 à partir du constat, facile à faire..., que la Règle 103 comprend une occurrence de « classe ». Cela permet de donner au lecteur toutes les définitions des termes qui interviennent dans une règle. Et à nouveau, ce procédé permet d'obtenir inversement pour chaque définition la liste des règles qui s'y rapportent ; ce qu'il serait encore très fastidieux d'obtenir à partir de l'édition papier (et ce que de fait elle ne donne évidemment pas) et qui est pourtant très utile pour apprécier l'usage d'une définition³⁹.

Le diagramme suivant est une synthèse des précédents :

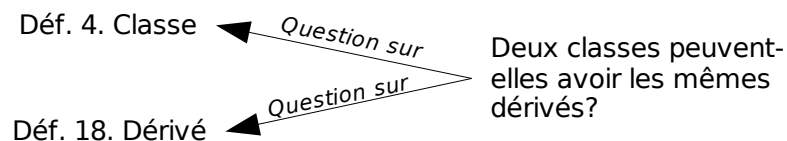
³⁹ Ces liens n'ont en l'occurrence pas tous été tous créés car cela n'aurait pas eu d'intérêt. Le lecteur qui voudrait néanmoins avoir toutes les Règles comprenant un terme donné peut faire une recherche de ce mot dans la page dans laquelle toutes les Règles sont regroupées.



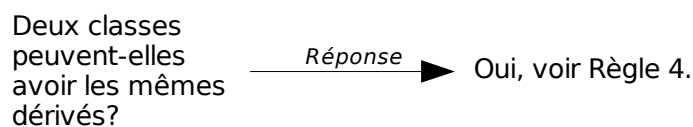
L'enregistrement de liens permet ainsi de donner une expression aux diverses relations entre toutes les composantes du texte. La création d'un genre « commentaire » permet d'écrire des commentaires sur chacune de ces composantes. Il sera ainsi possible de donner des exemples illustrant une définition :



Il est possible de créer de la même manière un genre « question » et de créer des liens entre la question et les composantes du texte auxquelles elle se rapporte :



Le genre « réponse » et le type « réponse » peuvent ensuite être créés⁴⁰ :



⁴⁰ Ces questions et les réponses ne font pas partie de l'édition publique, de même que de nombreux commentaires.

Le genre « citation » sert à enregistrer des citations extraites d'autres œuvres de Hjelmslev se rapportant à une définition :

Déf. 3. Analyse ← *Remarque sur* PTL, p. 36

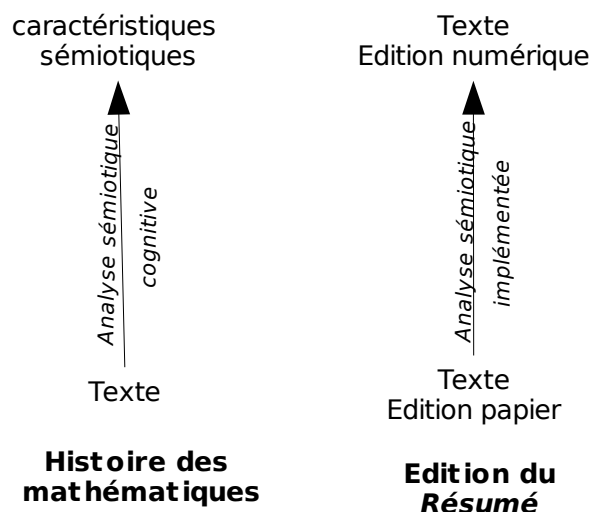
Des liens de type « remarque sur » pourront avoir pour but une définition et avoir en source des textes de genres différents, des commentaires ou des citations, qu'il sera dès lors aussi possible d'éditer différemment.

A chaque texte est aussi associée une *publicité*. Comme pour les types de liens, la publicité n'est en définitive qu'une expression à partir de laquelle tous les traitements différents que l'on veut peuvent être définis. Cela permet notamment une édition collaborative où chacun peut écrire des commentaires qu'il garde d'abord privés, qu'il peut ensuite rendre visible aux autres éditeurs, et ensuite rendre public. L'édition en ligne du *Résumé* en accès libre ne comprend par exemple que les commentaires dont la publicité est « publique ».

Le *Résumé* et la description d'une langue

Ce qui précède a permis de montrer le rôle de Thamous dans la traduction linguistique et sémiotique du *Résumé* et d'en montrer l'intérêt. En l'occurrence Thamous intervient comme une implémentation d'un modèle sémiotique (une expression, un contenu, et une fonction sémiotique) pour des unités plus grandes que le signe : définitions, règles, textes, etc. Ce qui illustre la différence entre manifester et exprimer et quelques effets de l'expression. Cela a aussi donné un exemple de *nécessité sémiotique* puisque l'exploitation de Thamous oblige à s'exprimer dans ce modèle sémiotique. Thamous oblige en particulier à distinguer les fonctions sémiotiques entre toutes les composantes du *Résumé* et celles de l'appareil critique. Ainsi, le rapport entre les composantes n'est pas seulement manifesté, il est exprimé et il doit l'être.

Il ne s'agit donc pas ici, comme c'est le cas en histoire des mathématiques, d'analyser un texte en vue d'en dégager ses caractéristiques sémiotiques, mais de lui *imposer* des caractéristiques sémiotiques grâce à leur implémentation. La nécessité sémiotique n'est plus ici un phénomène observé mais un phénomène exploité grâce à son implémentation informatique. L'édition du *Résumé* est aussi une analyse sémiotique de ce texte. Le résultat de l'analyse est simplement exprimé par l'édition numérique elle-même au lieu de l'être de manière discursive. De la même manière, Thamous (version base de données de références) est simplement une histoire des mathématiques collective exprimée dans un autre système d'expression.



Tout cela ne nous dit pas grand chose de l'intérêt du *Résumé*... Sa traduction linguistique et sémiotique aident néanmoins à sa compréhension. Mais elles n'auraient pas été entreprises si son intérêt spécifique, notamment par rapport aux autres publications de Hjelmslev, n'était en partie manifeste avant. Je voudrais donc maintenant dégager d'une part le double l'intérêt de ce texte pour l'histoire des mathématiques et d'autre part mettre en évidence le rôle joué par l'histoire des mathématiques dans son analyse.

La description des langues par le *Résumé*

Hjelmslev reproche à la grammaire générale d'être avant tout une généralisation de la grammaire latine ou grecque. Il est difficile en effet de sortir des catégories d'une langue privilégiée ou dominante et de faire une description générale des langues qui ne les reprennent pas d'une manière ou d'une autre. Un autre écueil de la description d'une langue vient de la connaissance qu'elle suppose de la langue décrite. La question n'est évidemment pas de décrire une langue que l'on ne connaîtrait pas mais la connaissance qu'il faut de cette langue pour comprendre *la description* qui en est faite. La description d'une langue doit à la fois être une description de cette langue, donc être adéquate à celle-ci, mais cette adéquation doit en même temps être indépendante de la langue décrite. J'ai montré que le dispositif textuel du *Résumé* répondait à ces exigences⁴¹.

Cela suppose que l'on distingue :

- (1) Le *Résumé* qui expose la procédure générale
- (2) la procédure appliquée à une langue
- (3) le résultat de l'application de la procédure à une langue

⁴¹ Je renvoie à « Introduction au *Résumé* » pour les nuances, sans importances ici, qu'il faut apporter à cette description en raison du caractère inachevé du texte de Hjelmslev.

ou encore :

- (1) la procédure générale
- (2) la procédure particulière (application à une langue donnée)
- (3) le résultat de la procédure particulière

Le *Résumé* expose une procédure générale (1) de telle manière que la procédure appliquée à une langue (2) produise une description adéquate de cette langue (3) qui ne soit pas biaisée par les catégories d'une autre langue (latin, grec, anglais, etc.) et dont la compréhension n'implique d'aucune manière une connaissance de la langue décrite. A cela s'ajoute que ces propriétés des descriptions obtenues ne sont pas supposées, déclarées, espérées, garanties par la bonne foi de celui qui les fait, etc. : elles sont *démontrées*. Elles sont démontrées par la manière dont elles sont obtenues, c'est-à-dire *in fine* par l'ensemble des caractéristiques de la présentation de la procédure générale, autrement dit à la fois par le dispositif textuel et par la langue spécifique du *Résumé*.

Ainsi, que la description obtenue n'implique aucune connaissance de la langue décrite est une conséquence du fait que la procédure est exposée sans faire aucune référence à la moindre langue. Et cela est tout à fait remarquable. Je ne connais pas d'autre cas où les principes de la description d'une langue, ou seulement d'un aspect de celle-ci (et cela couvre en principe toute description), ne soit pas accompagnés d'exemples. Or, ces exemples ont en l'occurrence une nécessité qui n'est pas que pédagogique : ils masquent sous couvert de leur utilité pédagogique leur nécessité théorique (sémiotique). Cela donne ce texte très particulier censé décrire une langue et qui ne fait référence à aucune langue mais seulement à « un objet », ce qui le distingue de tous les autres exposés de Hjelmslev.

L'approche différentielle ou « totaliste » (caractérisation des unités linguistiques par leurs oppositions mutuelles), récurrente dans toute l'œuvre de Hjelmslev, contribue aussi à garantir l'indépendance par rapport à la langue considérée mais aussi par rapport à une autre langue (que ce soit la langue dans laquelle se fait la description, par exemple le danois, ou une langue qui aurait pu la modeler, le latin, le grec ou aujourd'hui l'anglais).

Mais il faut encore assurer que la description différentielle, par exemple, l'est vraiment, c'est-à-dire qu'elle ne fait pas elle-même intervenir dans sa mise en œuvre des aspects non différentiels. C'est ce que j'ai montré (et compris...) à partir de la définition d'une « case ». En effet, Hjelmslev a donné dans ses autres publications des descriptions fonctionnelles de divers aspects des langues, par exemple leur système casuel, faisant intervenir des tableaux. Chaque tableau donne une expression à la totalité des possibilités qui vont dès lors pouvoir être ressaisies par leurs oppositions mutuelles au sein du tableau. C'est donc à partir de la représentation de l'aspect considéré de la langue, par exemple ses cas, dans un de ces tableaux qu'il va être possible d'obtenir une description par oppositions mutuelles. La représentation tabulaire est donc une étape essentielle pour la production d'une caractérisation

différentielle. Or, un tableau est lui-même un dispositif de représentation, composé de cases, qui n'est pas défini par un jeu d'oppositions mutuelles.

Un autre tour de force du *Résumé* est de donner une définition de ces cases. Ceci est en soi déjà remarquable. C'est l'application de cette définition au cours de la description d'une langue qui va produire les cases. Elles ne vont plus être introduites de l'extérieur dans la description et vont être ainsi elles-mêmes définies par leurs oppositions mutuelles. A cela s'ajoute qu'une description d'un aspect particulier, le système casuel..., peut se contenter d'utiliser « le tableau qu'il faut », c'est-à-dire celui qui a la configuration et le nombre minimal de cases suffisant à la description de cet aspect dans toutes les langues connues. Cela n'est plus possible quand il s'agit de *tous* les aspects possibles de toutes les langues possibles dès lors que l'on ne doit plus pouvoir savoir quels sont les aspects possibles. Il faut donc aussi que la définition différentielle des cases réussisse à couvrir tous les types de cases possibles, c'est-à-dire tous les types de tableaux possibles (par leur disposition, leur nombre de cases et la manière de les remplir). C'est aussi ce que Hjelmslev réussit à faire au moyen du dispositif textuel et du langage du *Résumé* et qui contribue à garantir que la description obtenue aura bien les caractéristiques indiquées. Il faut aussi que les oppositions, ou encore les fonctions, considérées n'impliquent pas de caractéristiques qui ruinteraieent les raisons qui conduisent à faire une analyse fonctionnelle. La portée donnée à deux d'entre elles (le *et* et le *ou*, qu'il ne faut pas confondre avec les deux relations logiques de même nom) et, à nouveau, à la fois le principe de la procédure et le langage utilisé pour la décrire conduisent à réduire considérablement ce risque, sinon à l'éliminer complètement.

Le dernier élément que je voudrais mentionner ici contribuant à démontrer que les descriptions auront les propriétés attendues est la représentation symbolique de la procédure (2)⁴². Ainsi, et pour ne donner qu'un exemple, la fin de l'analyse qui va conduire à l'identification de niveau de style (stylistique) « créatif » peut s'écrire symboliquement :

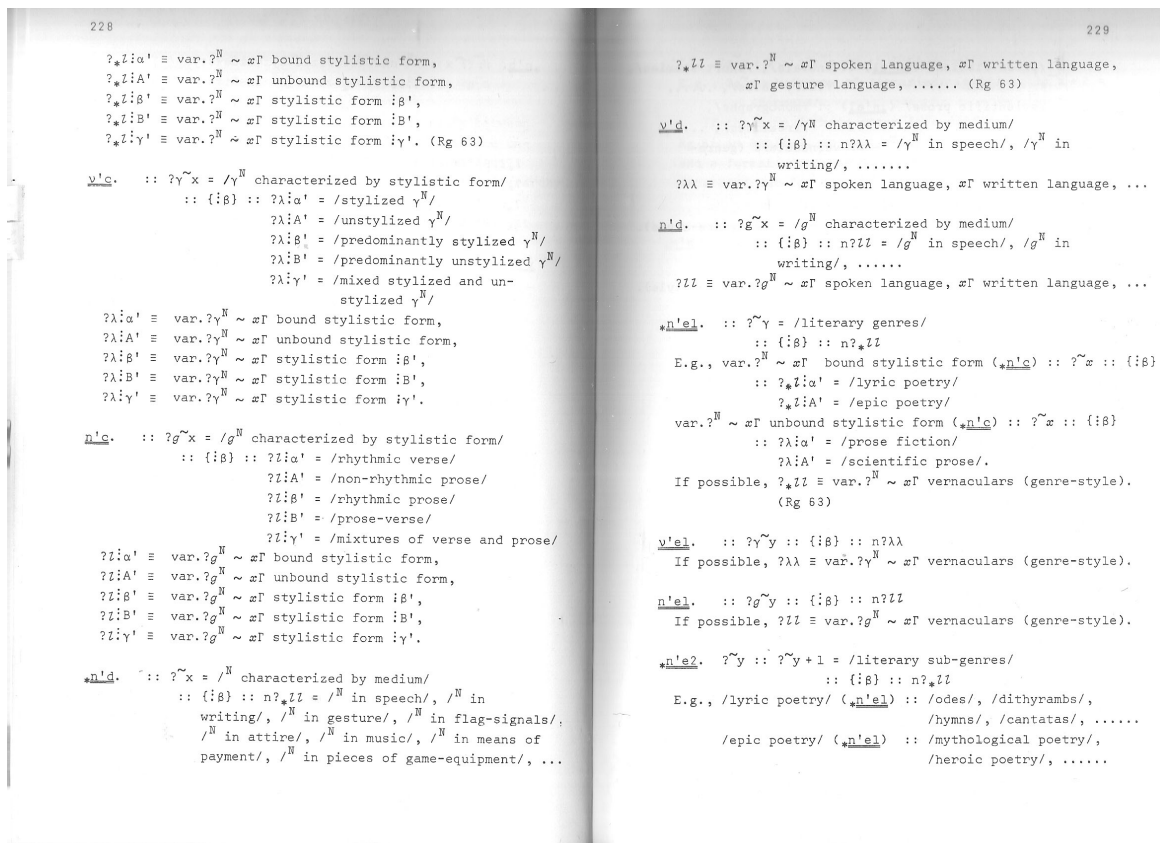
$$?g\tilde{x} :: \{ : \beta \} :: ?1 : \beta' \equiv \text{var. } ?g^N\sim x\Gamma$$

Je ne vais pas expliquer ici ce symbolisme. Je veux seulement faire deux remarques à son propos. La première est que l'écriture symbolique contribue à démontrer que l'analyse est indépendante de la langue naturelle dans laquelle elle est faite, de celle à laquelle elle s'applique et aussi, dans une certaine mesure, des langues qui pourraient servir de modèle (les arguments ne sont pas les mêmes pour les trois cas). La seconde est que Hjelmslev a bel et bien créé un nouveau symbolisme. C'est un autre point capital. La

42 François Rastier a déjà attiré l'attention sur ces symboles : « Par ailleurs, la théorie recourt à la symbolisation, et utilise plus de deux cent cinquante symboles simples ou complexes, tous originaux. Accolés aux définitions, ils représentent la structure sémantique des concepts définis. Ici encore, une telle créativité symbolique n'a pas de précédent en linguistique, et Montague lui-même utilise beaucoup moins de symboles. » François Rastier, Introduction aux *Nouveaux Essais*, PUF, Paris, 1985, p. 14.

création d'un symbolisme nouveau est une chose rare, même en mathématiques. Cela est encore plus rare en sciences humaines où la tendance est plutôt de se contenter de reprendre des symbolismes élaborés en mathématiques.

Il n'est pas difficile ici d'établir qu'il s'agit bien d'un symbolisme, et même d'un système d'expressions, nouveau et original : le comprendre suppose en effet une compréhension à peu près complète du *Résumé*. Habituellement, celui qui reprend un symbolisme élaboré à d'autres fins s'évertue à lui trouver une interprétation plus ou moins adéquate et espère quelques bénéfices (symboliques...) de cet emprunt⁴³. En raison même de ce défaut d'adéquation, le recours au symbolisme ne prouve à peu près rien sur l'analyse proposée. Elle n'apporte à peu près rien non plus à celle-ci. Ici au contraire, symbolisme et analyse sont totalement adéquats. Cela veut dire que la description va pouvoir être entièrement représentée symboliquement et inversement que la représentation symbolique est entièrement interprétable du point de vue de l'analyse. La représentation symbolique va tout exprimer de l'analyse et tout ce qu'elle exprime est signifiant pour l'analyse⁴⁴. Cette adéquation établit à la fois l'originalité de ce symbolisme mais surtout tout un ensemble de propriétés de l'ensemble des analyses



Les symboles du Résumé

43 L'inadéquation gênera surtout ceux qui connaissent un usage adéquat de ce symbolisme.

44 Le *Résumé* n'est pas pour autant un texte inaugural. Cela pourrait être laissé en exercice... Les conditions de réalisme, de dualité, d'inauguration et d'incommensurabilité sont satisfaites, mais pas la conformité. Le *Résumé* n'est pas un texte inaugural parce que Hjelmlev ne soutient nulle part que toute description d'une langue peut être exprimée dans son symbolisme. Il considère seulement pouvoir faire ainsi l'analyse de toute langue. Il ne soutient pas plus que toute chaîne de symboles « bien formée » d'une analyse correspond à une langue. Il satisfait néanmoins une grande partie de ces conditions et c'est aussi une manière de rendre compte de son caractère exceptionnel. Il est intéressant de comparer le *Résumé* à la *Théorie analytique de la chaleur* de Fourier. L'inauguration réalisée par Fourier se distinguait des autres par le fait de donner une expression à la transformation, en l'occurrence avec sa formule intégrale des coefficients du développement en série trigonométrique d'une fonction. La procédure (1) décrite dans le *Résumé* est à comparer à cette formule. Enfin, l'affirmation « la représentation symbolique va tout exprimer de l'analyse » doit être comprise *cum grano salis*, qui fait le beurre du sémioticien breton.

qu'il sert à exprimer.

Cette adéquation du symbolisme à l'analyse présentée n'apparaît qu'au terme de l'étude du *Résumé*. Elle ne pouvait en être la motivation. Elle n'était pas non plus nécessaire car l'originalité de ce symbolisme se manifeste déjà par la manière dont il est progressivement introduit, chaque symbole étant associé à une définition qui témoigne déjà elle-même d'un haut niveau d'élaboration. Cette façon inhabituelle et progressive d'introduire des symboles est en soi un indice. De plus, les occurrences d'expressions composées de ces symboles dans quelques notes et règles, et surtout les trente pages de calculs à la fin du *Résumé* attestent qu'il ne s'agit pas d'une notation mais bien d'un système d'expressions pourvu d'une syntagmatique et dont Hjelmlev fait un véritable usage⁴⁵.

L'impossibilité de comprendre ces expressions et ces pages de calcul est un autre indice... Ces indices cumulés suffisent à indiquer que le *Résumé* présente un intérêt comparable à celui de textes mathématiques. Une reprise et de nouvelles applications de ce symbolisme achèveraient sans doute d'intégrer complètement ce texte à l'histoire des mathématiques.

Le *Résumé* et l'histoire des mathématiques

La création d'un symbolisme original était une première raison amplement suffisante pour m'intéresser, en tant qu'historien des mathématiques, au *Résumé*. La deuxième raison tient au lien entre histoire des mathématiques et description d'une langue. J'ai déjà dit que le dispositif textuel et le langage du *Résumé* répondaient à deux conditions que doit satisfaire la description d'une langue :

1. Produire une description adéquate de la langue dont la compréhension ne présuppose pas la connaissance de la langue décrite
2. Ne pas donner une description biaisée par les catégories d'une autre langue

Ces deux conditions s'imposent de la même manière en histoire des mathématiques. Il suffit de donner à « langue » une extension qui recouvre toutes les formes d'expression pour avoir l'énoncé de deux des principales conditions que l'histoire des mathématiques doit à mon avis satisfaire. Si elle ne satisfait pas la première, elle est vaine. Si elle ne satisfait pas la seconde, le savoir qu'elle produit est sans valeur assignable, donc finalement sans valeur. Mes travaux, et notamment les analyses sémiotiques que je développe, sont presque entièrement déterminés par le souci de satisfaire le mieux possible ces deux

⁴⁵ Ces pages n'ont pas encore été reprises dans l'édition en ligne. Leur édition sous cette forme n'apporterait à peu près rien. Elle demanderait par ailleurs une vérification de l'ensemble de ces calculs et il ne m'a pas semblé pertinent d'attendre qu'elle soit faite pour donner accès à cette édition.

conditions. Autrement dit, leur mise en cause sur l'un de ces points serait selon moi rédhibitoire. Il ne s'agit évidemment pas de prétendre les satisfaire absolument mais de les satisfaire tout de même un peu mieux que ça n'est généralement le cas. La procédure exposée par Hjelmslev dans le *Résumé* m'apparaît aujourd'hui, je ne le savais pas en commençant l'étude, comme une réalisation exemplaire de ces exigences. Elle l'est d'autant plus qu'elle est donnée avec la preuve qu'elle les réalise.

Il faut encore ajouter que toute analyse de texte n'est en définitive qu'une partie de l'analyse de la langue de ce texte. Dans la mesure où les mathématiques nous sont connues par des textes, leur analyse participe de l'analyse de la langue de ces textes. C'est là une autre raison pour un historien des mathématiques de s'intéresser au *Résumé*. Cela ne veut pas dire que l'histoire des mathématiques soit nécessairement une partie de la glossématique et qu'il n'y aurait plus qu'à lui assigner sa place dans la procédure du *Résumé*. Partager les exigences de Hjelmslev n'oblige pas à les satisfaire de la même manière (oppositions mutuelles, fonctionnalisme, etc.). Il suffit ici d'invoquer la thèse de Duhem. Le fait qu'il les satisfasse comme il les satisfait pèse tout de même d'un certain poids. Quoiqu'il en soit, reconnaître l'analyse d'un texte mathématique comme une partie de l'analyse de la langue de ce texte contribue fortement à préciser cette analyse, c'est-à-dire le statut de l'histoire des mathématiques, et contraint à des questions sur le statut et la mise en œuvre des analyses. C'est bien sûr cette perspective qui me fait considérer l'histoire des mathématiques comme une partie de la sémiotique afin notamment de satisfaire les deux conditions qui, quand elles ne sont pas satisfaites, rendent, selon moi, vaine et sans valeur l'histoire des mathématiques. Cela ne veut pas dire non plus que l'histoire des mathématiques doive nécessairement et exclusivement être considérée comme une partie de la sémiotique. Mais je crois néanmoins que dans la mesure où elle comprend une part importante d'analyse de textes, ce qui n'est ni toujours ni nécessairement le cas, il importe tout de même de clarifier autant que possible le statut de ces analyses. Car, et c'est pour moi un autre point qui détermine mon travail, il y a un rapport étroit entre la nature du savoir produit et la nature des analyses qui servent à le produire. Le savoir produit en histoire des mathématiques, c'est-à-dire le statut de l'histoire des mathématiques, et je laisse bien sûr ici de côté son statut institutionnel, vaut ce que valent ses analyses. L'enjeu est tout de même de taille dès lors que l'histoire des mathématiques et avec elle l'histoire des sciences prétendent nous renseigner sur la nature des savoirs qu'elles prennent comme objet, souvent plus et mieux élaborés que ne sont ceux qu'elles produisent elles-mêmes. La hiérarchie des disciplines n'est peut-être pas entièrement indépendante de la qualité des savoirs qui y sont produits. C'est aussi là une des motivations essentielles de recourir à des analyses sémiotiques : il faut bien se donner les moyens de décrire le lien qui peut exister entre les caractéristiques sémiotiques et le savoir produit, ou encore entre la description mise en œuvre, entendue comme *procédure* d'analyse, et le type de description qui en résulte, c'est-à-dire le *résultat* de la procédure. Ce lien détermine la nature des connaissances produites, que ce soit en mathématiques, en histoire des mathématiques ou ailleurs, notamment en linguistique.

Je voudrais maintenant montrer que ce lien a été le ressort de mon étude du *Résumé* : c'est en partant de ses caractéristiques sémiotiques que j'ai pu en établir le fonctionnement, et en particulier déterminer les caractéristiques de la description à laquelle il arrivait. Le *Résumé* présente de manière évidente des caractéristiques sémiotiques remarquables. Cela a été d'emblée une raison pour moi de m'y intéresser. C'est aussi un texte réputé incompréhensible. Les deux étant sans doute liés, la difficulté de compréhension étant un indice de ces caractéristiques originales, il m'est apparu qu'il devait être possible de progresser dans la compréhension de ce texte à partir de ses caractéristiques sémiotiques⁴⁶.

Comprendre le *Résumé* à partir de ses caractéristiques sémiotiques

Mes recherches en histoire des mathématiques m'ont d'emblée amené à m'intéresser à la linguistique et donc à lire l'œuvre de Hjelmslev, et ainsi à avoir connaissance de la partie du *Résumé* traduite en français. Ce texte présentait par ailleurs une originalité sémiotique évidente. Ce que je connaissais de l'œuvre de Hjelmslev et ce qu'il m'était possible de percevoir du *Résumé* suggéraient que cette originalité n'était pas vaine. L'économie du dispositif en était aussi un indice : Hjelmslev avait visiblement préféré livrer le résultat le plus condensé, c'est-à-dire le plus élaboré, d'un travail plutôt qu'une réalisation partielle mêlée d'une description et d'un commentaire sur le travail qu'il y aurait à faire... Cette originalité comprenait de plus la mise en place d'un système d'expressions dont je pouvais apprécier le caractère à la fois remarquable et original. Enfin, toujours à partir de ce que je savais du reste de son œuvre et de ce que je pouvais percevoir de celle-ci, son originalité devait être liée à son objectif, la description des langues, que je tiens pour une question centrale de l'histoire des mathématiques. Le degré d'élaboration et de simplicité du texte, et à nouveau sa singularité par rapport au reste de l'œuvre de Hjelmslev, devait être un indice de l'originalité et du degré d'élaboration et de simplicité de la description des langues proposée.

Un texte mathématique est souvent intéressant par ce que l'on n'en comprend pas. Bien sûr, toutes les difficultés de compréhension ne sont pas de même nature. Mais il y en a, et ce sont celles qui m'intéressent, qui viennent du fait que les caractéristiques sémiotiques ne sont pas celles que nous attendons. Autrement dit, un certain nombre de difficultés sont l'indice d'un écart avec les caractéristiques sémiotiques que nous supposons en le lisant. Là où les difficultés sont les plus grandes, là sont les écarts les plus grands. C'est donc sans doute aussi là que l'on peut arriver à mieux saisir ces différences pour ensuite essayer de les décrire. Il ne s'agit donc pas de se détourner des difficultés mais de s'en servir. Il s'agit de reconnaître leur part d'*objectivité* et de bâtir dessus. Et ensuite essayer de décrire, quand c'est le cas, par soustraction de la différence, les caractéristiques sémiotiques qui en sont

⁴⁶ Retourner les difficultés de compréhension en un moyen pour comprendre un texte est un des procédés de base de mon enseignement de l'histoire des mathématiques et des sciences. Le lecteur peut se reporter aux introductions de mes cours d'histoire des sciences et d'histoire des mathématiques, aux analyses d'extraits du *Traité du Ciel* d'Aristote, ou encore aux études historiographiques présentées dans ces cours.

la cause. Plus la difficulté est grande, meilleure elle est. Mais il faut surtout les recenser toutes. Chaque difficulté est ainsi collectée, rangée avec ses semblables. Au lieu de les fuir, on les recherche. Heureux d'en reconnaître une, car cela réduit le nombre de types. Heureux d'en trouver une nouvelle qui va soit confirmer un type, soit permettre d'en créer un nouveau. Il faut de toute façon les recenser toutes. On les organise, les hiérarchise. Des rapports apparaissent entre elles. Des réductions sont possibles. Des distinctions s'introduisent. Des difficultés inaperçues, masquées par d'autres, sont découvertes et sont à leur tour classées. Et cela progresse. On s'empare des difficultés, on n'en dit rien, on les range. Une des grandes satisfactions de ce travail vient du sentiment de progresser et qu'il peut être *achevé*. Mais il ne faut pas se tromper : cela n'a rien à voir avec le fait qu'un texte ne contient qu'un nombre fini et donné de signes. Cela vient au contraire de ce que l'on perçoit progressivement que les difficultés peuvent être circonscrites. Cette analyse progresse en mêlant un examen relativement grossier de l'ensemble du texte, avec un examen précis de certains de ses segments (de préférence les plus croustillants du point de vue de leurs difficultés). Or, il apparaît vite, assez vite..., que l'extension d'un segment à l'ensemble n'ajoute aucune difficulté nouvelle. Le texte pourrait se poursuivre, l'œuvre être prolongée, elle ne présenterait plus de difficultés nouvelles. Un texte incompréhensible se réduit vite à quelques difficultés qui se retrouvent partout. C'est bien sûr un fait essentiel.

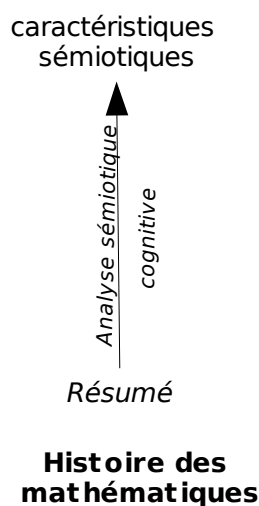
Le texte incompréhensible est toujours incompréhensible, aucune difficulté n'a été résolue. Mais elles sont toutes devenues d'une certaine manière familières : on les reconnaît quand on les rencontre, on sait la place qu'elles occupent dans la classification, à quelles autres elles sont associées. Une paradigmatique des difficultés a finalement ainsi été construite. Autrement dit, elles acquièrent un sens.

La définition d'une case (un corrélat qui contracte une exclusion) a été l'un des segments du *Résumé* sur lequel je me suis concentré. Mon texte d'introduction à la lecture du *Résumé* est un parcours de l'ensemble des types de difficultés (d'une grande partie...). Restituer la genèse de cette analyse, telle que je viens de la décrire, n'apparaissait pas adapté à une introduction. Mais il y a une autre raison pour ne pas l'avoir fait. Une particularité, une difficulté propre au *Résumé* : l'empilement des difficultés. La définition d'une case superpose plusieurs types de difficultés. Cela veut dire qu'elle ne peut servir d'expression « naturelle » d'aucun type de difficulté : en caricaturant un peu, mais pas beaucoup..., on arriverait à une classification qui ne contiendrait qu'un type de difficulté représenté par la définition d'une case et dans lequel pourraient être rangées toutes les autres définitions. Fort heureusement, ça n'est pas le cas. Le fait, au début contrariant, que les définitions ne soient pas toutes du même type est ici une aide. Mais cela ne suffit pas à « séparer les difficultés », c'est-à-dire à avoir des définitions qui puissent servir d'expression à chaque caractéristique sémiotique. Il faut donc à nouveau bâtir sur cette difficulté particulière. J'ai donc dû faire ce que je n'avais jamais eu besoin de faire en histoire des mathématiques : recourir à un autre texte de l'auteur. *La catégorie des cas* m'a permis d'avoir un usage des cases dont le

Résumé me donnait la définition. Bien sûr, je ne suis en fait pas parti de la définition des cases dont j'ai trouvé un usage. Je me suis concentré sur cette définition après avoir compris que *La catégorie des cas* (ainsi que d'autres textes) en donnait un exemple d'usage. Il faut signaler ici une autre difficulté qu'il serait *a posteriori* facile d'occulter ou d'ignorer : il n'est nullement évident à partir de la définition d'une case du *Résumé* (un corrélat qui contracte une exclusion...), de reconnaître qu'il s'agit là de la définition des cases des tableaux qui servent à la description des cas d'une langue. Il n'est inversement guère plus évident de retrouver l'analyse des cas d'une langue exposée dans *La catégorie des cas* dans le *Résumé* : comprendre comment se fait l'analyse des cas dans le *Résumé* suppose d'avoir à peu près tout compris du fonctionnement de ce texte et une application de l'ensemble de la procédure présentée. Il faut par exemple remarquer ici qu'il n'y a pas de définition des cas dans le *Résumé*. Une telle définition est pourtant donnée dans *La catégorie des cas*. On pourrait donc s'attendre à ce qu'elle soit reprise dans *Le Résumé* (ce qui prouve une nouvelle fois, soit dit en passant, que le *Résumé* n'est pas un recueil de définitions ; Hjelmslev aurait fort mal fait la collecte...). Inversement, il y a dans le *Résumé* une définition de *catégorie* qui n'est ni définie ni même utilisée dans *La catégorie des cas* puisque ce texte se place dans une catégorie sans en sortir (ce qui est une limite essentielle de l'analyse qui y est présentée). Et il faut bien sûr ajouter qu'on ne s'attend pas à ce que l'on définisse les cases d'un tableau ! Des éléments de correspondance, sans doute d'autant plus ténus pour moi que je ne suis ni grammairien, ni linguiste, conduisent néanmoins à faire l'hypothèse que la description des cas dans *La catégorie des cas* doit se retrouver dans le *Résumé*. De la l'hypothèse que les cases des tableaux de *La catégorie des cas* sont belle et bien définies dans le *Résumé*. Toutes ces difficultés se renversent ensuite, ou plutôt elles deviennent l'indice d'un écart maximal qui va permettre de « séparer les difficultés » superposées dans les définitions, c'est-à-dire d'en distinguer les caractéristiques sémiotiques. Il devient dès lors en effet possible de comparer les cases d'un tableau à leur définition dans le *Résumé* : le contenu de la définition est connu, son expression est donnée, il n'y a plus que la fonction sémiotique qui ne l'est pas. Mais elle a été isolée et peut être décrite. Ce coin enfoncé dans les caractéristiques sémiotiques de cette définition, il n'est ensuite plus très difficile de distinguer les autres. C'est ce qui est présenté dans mon texte d'introduction au *Résumé*.

J'ai en définitive analysé le *Résumé* comme les textes mathématiques que j'étudie dans une perspective historique. Dans leur cas, s'agit de dégager les caractéristiques sémiotiques d'un texte mathématique pour en montrer les implications historiques et épistémologiques. La sémiotique permet alors de faire une analyse qui n'est pas sans rapport avec l'intérêt mathématique du texte sans en être tributaire. Elle permet par exemple de faire de *La Géométrie* de Descartes une analyse plus indépendante des conséquences du développement de l'Algèbre sur notre conception des mathématiques que ça n'est souvent le cas. Il faut en la matière plus que des précautions oratoires... Il est difficile de

considérer sérieusement que des notations algébriques n'ont pour seules conséquences que les avantages qui nous les font adopter pour décrire ce texte mais qu'elles n'en ont aucune sur les questions posées au texte, sur les réponses apportées, etc. C'est aussi passer vite sur notre difficulté à peu près totale à aborder ce texte sans elles. Le cas n'est pas très différent de celui des exemples auxquels le linguiste ne peut s'empêcher de recourir sans prendre toute la mesure de leur implication sur les fondements de sa théorie. Le *Résumé* atteste des changements radicaux auxquels peut conduire une prise en compte sérieuse de cette difficulté. Si j'ai analysé le *Résumé* de manière semblable aux textes mathématiques, cette analyse ne servait pas à suspendre certains biais de l'interprétation que l'on peut en avoir. En l'occurrence il n'y a pas d'interprétation de ce texte⁴⁷! On ne le comprend pas. La sémiotique a servi ici à en comprendre le fonctionnement original et à ouvrir la voie à une exploitation à la fois du dispositif d'analyse imaginé et du « détail » des définitions proposées.



Conclusion et perspectives

J'ai voulu montrer ici que l'édition et l'analyse que j'ai faites du *Résumé* procèdent de la même démarche que celle mise en œuvre en histoire des mathématiques. L'édition numérique est le résultat de l'analyse de l'édition papier au moyen de distinctions sémiotiques implémentées. La nécessité sémiotique est exploitée au lieu d'être dévoilée⁴⁸. Les distinctions sémiotiques implémentées et appliquées sont celles qui étaient utilisées dans ma thèse (expression, contenu, fonction sémiotique) étendues à des unités plus larges que les signes. Leur intérêt est à la fois d'introduire la variabilité de la fonction sémiotique et de lui donner une expression. La sémiotique intervient aussi dans l'interprétation que j'ai proposée du *Résumé*. Elle intervient là exactement comme en histoire des mathématiques. Dans les deux

⁴⁷ J'écarte celle qui consiste à le considérer comme un dictionnaire. Elle ne saurait être un véritable obstacle tant il est évident qu'elle ne rend pas compte de ses définitions qui ne sont pas même classées suivant l'ordre alphabétique.

⁴⁸ Il serait néanmoins aussi intéressant d'explicitier les nécessités sémiotiques à l'œuvre dans le *Résumé*.

cas, il s'agit de tirer parti du lien entre les caractéristiques sémiotiques d'un texte et ce qu'il fait. En histoire des mathématiques il s'agit surtout de mettre en évidence ce lien. Dans le cas du *Résumé*, il s'agit de tirer parti de ce lien pour se hisser au sens du texte à partir de ses caractéristiques sémiotiques (cet aspect n'est évidemment pas non plus absent en histoire). L'interprétation proposée est ainsi une application de la sémiotique à l'exposé de la glossématique. L'efficacité de cette application tient aux caractéristiques sémiotiques originales du texte de Hjelmslev. Elles sont d'abord ce qui empêche de le comprendre mais en les reconnaissant comme telles il devient possible de s'appuyer sur elles pour le comprendre.

L'entraînement aux difficultés sémiotiques acquis avec l'histoire des mathématiques a pu être exploité pour surmonter les difficultés de ce texte.

Les perspectives ouvertes à la fois par l'édition numérique et l'étude que j'en ai proposées sont assez claires.

Il reste de nombreuses conséquences à tirer des caractéristiques de la description d'une langue à laquelle Hjelmslev est arrivé avec le *Résumé*.

Si la traduction et l'édition numérique sont maintenant complètes, l'édition critique reste à compléter. La rédaction des commentaires enregistrés dans le forum-Thamous, celle des questions (plus d'une centaine), et de leurs réponses doivent être achevées et publiées. Une telle édition devrait surtout permettre d'achever le *Résumé*, c'est-à-dire, parallèlement à son édition historique, de rendre effective la procédure proposée.

Un exposé indépendant des bases du calcul inventé par Hjelmslev pour décrire une langue est à présent possible. Les bases de ce calcul pourraient être présentées séparément de la procédure qui décrit leur enchaînement en vue de la description d'une langue.

Les occasions d'appliquer un tel calcul ne manqueraient pas.

D'autres « *Résumé* » peuvent être imaginés qui présenteraient sur les mêmes bases des procédures alternatives de description des langues ou simplement des opérations alternatives pour d'autres descriptions de certaines parties des langues.

Histoire sémiotique des mathématiques

Les présentations qui précèdent de Thamous, de l'édition et de l'étude du *Résumé* de Hjelmslev ont donné des exemples divers d'applications de la plupart des notions de sémiotique que j'utilise en histoire des mathématiques. Je voudrais maintenant présenter les principaux résultats qu'elles ont permis d'obtenir en histoire des mathématiques.

Le tableau suivant regroupe ces notions en distinguant celles qui relèvent de la sémiotique de l'expression, du conditionnement sémiotique et enfin plus généralement de l'épistémologie.

| Epistémologie | Conditionnement sémiotique | Sémiotique de l'expression |
|---|---|---|
| créativité sémiotique
transparence
problème d'expression
nécessités sémiotiques
homologie | conditionnement sémiotique
énoncé inaugural
texte inaugural | fonction sémiotique
manifester
exprimer
expression
variété d'expression
engendrement
variable
invariante
expression d'invariante
expression d'invariante génératrice
variété représentante
système d'expressions
épreuve d'échange
expression d'épreuve d'échange
variété d'épreuve d'échange |

Une présentation systématique de l'ensemble de ces notions serait sans doute souhaitable. Les dégager et les appliquer m'a néanmoins toujours semblé préférable. Et puis, il ne saurait non plus vraiment s'agir de constituer la liste définitive des types d'expressions utilisés en mathématiques. Un tel projet serait contraire à l'idée de créativité sémiotique qui en est la motivation : on ne peut à la fois considérer qu'une part du développement des mathématiques tient à l'introduction de nouveaux modes d'expressions pour résoudre des problèmes d'expression et vouloir constituer la liste définitive des types d'expressions. Même dans une perspective uniquement historique, c'est-à-dire en se tenant à un corpus constitué, je ne crois pas que l'on puisse épuiser la description sémiotique d'un texte. Comme je l'ai indiqué dans la

présentation du *Résumé*, il ne peut s'agir que de faire une certaine description entretenant un rapport déterminé à son objet, ce rapport caractérisant la description proposée et le savoir produit. On peut dans ces limites essayer de dégager des types d'expressions pertinents pour la description de certains textes.

La créativité sémiotique, la transparence, les problèmes d'expression, les nécessités sémiotiques et les homologues désignent un ensemble de notions dont l'étude motive le développement d'une sémiotique de l'expression. La dénonciation rigoureuse et constructive de la transparence par exemple en est une des raisons d'être. La sémiotique de l'expression sert à observer, saisir, décrire, etc. les différences d'expressions pour pouvoir les distinguer et étudier leur incidence. L'idée de base est que ces expressions ne sont pas rien. Elles sont présentes. La sémiotique de l'expression étudie les expressions. Le conditionnement sémiotique étudie leur introduction. La reconnaissance des expressions *implique* de reconnaître qu'elles doivent être introduites. Il faut bien qu'elles le soient d'une manière ou d'une autre. L'étude du conditionnement sémiotique est plus simple : on peut se contenter de le montrer du doigt, c'est-à-dire d'extraire les passages d'un texte qui en relèvent. Comme elle est plus simple, elle peut servir d'introduction à la sémiotique de l'expression. Elle est aussi un moyen efficace de repérer les caractéristiques sémiotiques originales d'un texte qu'il s'agira ensuite de décrire. Le conditionnement sémiotique est ainsi la partie émergée des caractéristiques sémiotiques d'un texte. Mais suivant l'ordre des raisons, la sémiotique de l'expression est première : il n'y a conditionnement que parce qu'il y a des expressions à introduire qui n'ont pas les caractéristiques reçues et attendues.

Je vais maintenant présenter quelques-uns de mes travaux qui relèvent directement de l'histoire des mathématiques. Je m'attacherai à faire ressortir ce qui me semble être leur apport et à préciser leur statut dans l'économie générale de mes recherches.

Enoncés et textes inauguraux

L'objectif de « Enoncés et textes inauguraux. Sur un type d'énoncé et de texte mathématiques » est avant tout d'établir l'existence d'un type d'énoncé et de texte récurrents en histoire des mathématiques qui n'avaient pas été reconnus comme tels. Ce travail relève principalement de l'étude du conditionnement sémiotique. Les textes inauguraux sont des cas extrêmes de conditionnement sémiotique puisqu'ils en relèvent presque intégralement. Ils le sont aussi dans la mesure où ils n'introduisent pas seulement des expressions, mais des systèmes d'expressions *complets*. Au delà, établir que les textes considérés sont des textes inauguraux conduit à en faire une analyse nouvelle dont que je vais présenter rapidement les principaux résultats.

Chacun connaît la thèse de Church-Turing selon laquelle « Toute fonction effectivement calculable (prédicat effectivement décidable) est générale récursive ». Un grand nombre de travaux lui ont été et lui sont encore consacrés. Cet énoncé, qui n'est réductible ni à une définition ni à un axiome, n'est nullement isolé mais appartient au contraire à une catégorie d'énoncés bien identifiables, propres aux mathématiques et récurrents tout au long de leur histoire. J'ai proposé cinq conditions pour identifier ces énoncés que j'appelle « inauguraux » :

1. l'énoncé met en jeu deux totalités (dualisme) ;
2. l'une des totalités est tenue pour pré-établie (réalisme),
3. l'autre totalité n'est pas tenue pour pré-établie sous la forme considérée ou dans le rapport considéré à la totalité pré-établie (inauguration) ;
4. l'énoncé affirme que la deuxième totalité, celle qui n'est pas pré-établie, est une représentation conforme de la première (conformité) ;
5. la démonstration de la conformité des deux totalités est impossible (incommensurabilité) ;

Ces cinq conditions peuvent être reprises pour définir un texte inaugural :

1. il met en jeu deux totalités (dualisme) ;
2. l'une des totalités est tenue pour pré-établie (réalisme) ;
3. l'autre totalité n'est pas tenue pour pré-établie sous la forme considérée ou dans le rapport considéré à la totalité pré-établie (inauguration) ;
4. une fonction du texte est de soutenir que la deuxième totalité, celle qui n'est pas pré-établie, est une représentation conforme de la première (conformité) ;
5. la démonstration de la conformité des deux totalités est impossible (incommensurabilité) ;

Outre les articles qui introduisent et soutiennent la thèse de Church-Turing, j'ai montré que la *Begriffsschrift* de Frege (ou encore les *Principia mathematica* de Whitehead & Russell), *La Géométrie de Descartes* et la *Théorie analytique de la chaleur* de Fourier étaient tous des textes inauguraux dans lesquels sont énoncés et soutenus des énoncés inauguraux. Cela établit qu'il s'agit d'un type d'énoncé et de texte récurrents.

La particularité de ces textes est qu'ils soutiennent la conformité entre la représentation qu'ils introduisent et ce qu'elle représente. Turing, par exemple, soutient dans son article la conformité de ses machines logiques avec les nombres calculables. Frege soutient dans la *Begriffsschrift* la conformité de son idéographie avec les jugements de la pensée pure. Descartes soutient lui quatre énoncés inauguraux dans *La Géométrie*. Les deux principaux sont celui qui affirme la conformité des équations polynomiales avec les problèmes de géométrie et celui qui affirme la conformité des équations polynomiales avec les courbes géométriques. Fourier soutient pour sa part dans la *Théorie analytique de la chaleur* la conformité des séries trigonométriques avec les fonctions.

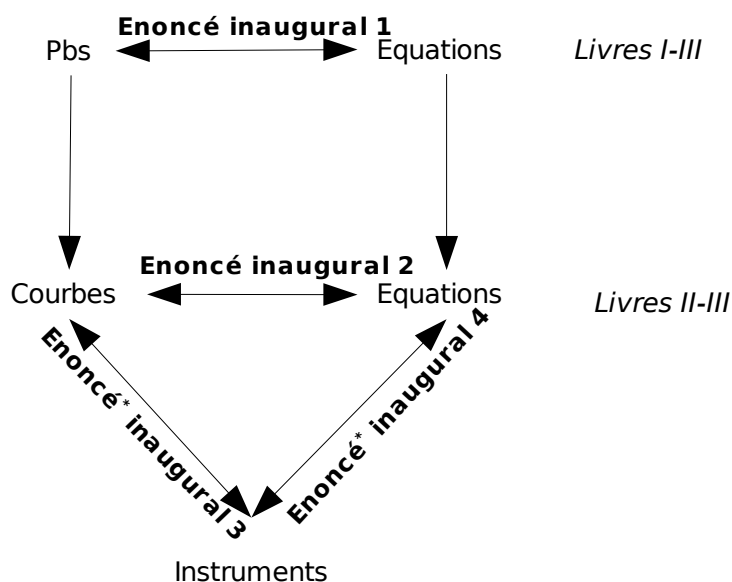
Les textes inauguraux ont à voir avec le conditionnement sémiotique dans la mesure où ils mettent en place, ils inaugurent, des représentations : machines de Turing, λ -calcul, idéographie, équations polynomiales, séries trigonométriques, etc. Mais leur particularité est de soutenir la *conformité* de la représentation qu'ils introduisent avec ce qu'elle représente : nombres ou fonctions calculables, contenu des jugements de la pensée pure, problèmes et courbes géométriques, fonctions, etc. La représentation introduite doit dès lors être entièrement signifiante : elle n'excède en rien ce qu'elle représente (pas de nombres imaginaires, etc.), autrement dit elle n'apporte rien..., elle le représente totalement (il ne manque personne) et intégralement (elle représente tout de chacun). Comme cette conformité est impossible à établir cela donne lieu à des textes caractéristiques en grande partie consacrés à soutenir une affirmation qui ne peut être démontrée mais qui est néanmoins falsifiable (un contre-exemple suffit). Il est ainsi établi que plusieurs représentations, depuis intégrées aux représentations usuelles en mathématiques (celle de Frege l'ayant été au travers de celle introduite dans les *Principia mathematica*), ont été introduites, inaugurées, de cette manière et avec ce statut. Compte-tenu du réalisme inhérent à ces énoncés et à ces textes, il faut aussi reconnaître que le développement des mathématiques comprend un recours récurrent à des formes diverses de réalisme. Les arguments donnés pour soutenir ces énoncés ne peuvent être confondus avec des démonstrations (ils ne le sont par aucun de ces mathématiciens), et doivent donc être aussi reconnus comme tels. Il faut enfin noter la *nécessité* de ces énoncés : comme aucun argument ne peut les justifier complètement, la conformité soutenue n'a pas d'autre expression que l'énoncé inaugural lui-même.

Le fait que ces énoncés n'aient pas été reconnus comme tels est à mon avis une illustration de la *transparence* des représentations mathématiques, c'est-à-dire du fait d'ignorer le rôle et les implications des représentations que nous utilisons. Les énoncés et les textes inauguraux sont de ce point de vue

aussi exemplaires : ils sont à peu près entièrement consacrés à introduire une représentation mais la conformité qu'ils soutiennent est une déclaration de transparence : il n'y a rien à voir, tout est conforme, il n'y a aucune différence entre la représentation et ce qu'elle représente! C'est prétendre pouvoir parler pour ne rien dire.

La *Begriffsschrift* de Frege est particulièrement concernée par cette transparence qu'elle permet, inversement, de mettre en évidence. Elle est en effet le fondement de sa démonstration de l'analyticité de l'Arithmétique : Frege établit que les propositions arithmétiques sont pures de jugements empiriques dans la mesure où leur démonstration dans son idéographie est pure de jugements empiriques, autrement dit dans la mesure où l'on en ignore les expressions (on les tient pour rien empiriquement). Il n'y a dans la *Begriffsschrift* de preuve de l'analyticité de l'Arithmétique que si l'on tient pour transparentes les expressions de l'idéographie. S'il y a preuve, c'est celle de la transparence de ces expressions.

L'étude de ce point de vue de *La Géométrie* a d'abord pour intérêt d'établir qu'il s'agit, comme les autres, d'un texte inaugural. Il se distingue néanmoins par le nombre d'énoncés inauguraux soutenus. Reconnaître qu'il s'agit d'un texte inaugural permet de rendre compte de la nécessité de ces énoncés, de leurs dépendances mutuelles et de l'ensemble de la stratégie argumentative déployée pour les soutenir qui n'apparaît plus comme un ensemble juxtaposés d'arguments disparates mais au contraire comme un ensemble d'inaugurations parfaitement imbriquées.



Il est ainsi possible de préciser la fonction inaugurale du problème de Pappus, de la classification de Pappus, des instruments, etc. La notion de texte inaugural conduit aussi à distinguer ce qui est inauguré et ce qui sert à l'inauguration. Ce qui est inauguré est ce qui est censé être retenu. Ce qui sert à son

inauguration n'a qu'un intérêt de circonstance. Or, deux types de courbes interviennent dans *La Géométrie*, les courbes-figures, celles qui nous sont toujours familières, et les courbes-opérations, qui ne le sont plus. Les courbes-opérations sont attestées dans la géométrie grecque et elles sont au fondement de la classification de Pappus. Or ces courbes-opérations jouent un rôle important dans *La Géométrie* de Descartes mais elles ne font que participer au service : elles ne sont pas inaugurées, mais seulement inaugurantes. Elles sont nécessaires à l'inauguration, mais celle-ci effectuée il ne reste plus que les courbes-figures et les équations polynomiales objets de l'inauguration. La fonction exclusivement inaugurale des courbes-opérations les prédispose à disparaître.

L'intérêt spécifique de l'analyse inaugurale de la *Théorie analytique de la chaleur* de Fourier est un peu plus technique et concerne la différence entre énoncé inaugural et théorème de représentation⁴⁹. L'inauguration des séries trigonométriques fait intervenir la formule intégrale des coefficients de Fourier qui donne chaque coefficient du développement en fonction de la fonction considérée.

$$(M) \quad \frac{\pi}{2} \varphi(x) = \sin x \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin x \, dx + \sin 2x \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin 2x \, dx + \sin 3x \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin 3x \, dx + \dots$$

Si cette formule pouvait être démontrée par Fourier, l'énoncé inaugural n'en serait plus un mais serait un théorème de représentation. Une analyse sémiotique simple permet de résoudre ce paradoxe en mettant en évidence que l'incommensurabilité n'a pas disparu avec la formule (M) mais qu'elle se retrouve enfouie dans les intégrales qui, en l'occurrence, renvoient à une représentation géométrique des fonctions dont l'intégrale représente la mesure de l'aire.

La controverse des cordes vibrantes qui opposa Daniel Bernoulli, D'Alembert, Euler et Lagrange a été analysée pour résoudre le problème suivant : la représentation des fonctions par des séries trigonométriques inaugurée par Fourier avait-elle déjà été inaugurée par Daniel Bernoulli? J'ai montré que l'énoncé inaugural correspondant avait en fait été introduit par Euler. Or Euler *ne soutient pas* cet énoncé. Cet énoncé est une conséquence de *deux* choses : d'une part de l'affirmation de Bernoulli selon laquelle les sommes de sinus donneraient toutes les solutions au problème des cordes vibrantes, d'autre part de la solution que D'Alembert puis Euler ont donnée de ce problème. *Pour* Euler, comme *pour* D'Alembert, l'affirmation de Bernoulli reviendrait à soutenir l'énoncé inaugural qu'il, Euler, énonce pour réfuter cette affirmation. Bernoulli, quant à lui, défend son affirmation, qui renvoie à son principe physique sur la décomposition des phénomènes sonores en oscillations sinusoïdales élémentaires, qui n'est pas un énoncé inaugural. L'énoncé inaugural n'a donc été énoncé à cette occasion que pour être dénoncé.

⁴⁹ Un théorème de représentation ressemble beaucoup à un énoncé inaugural, à ceci près qu'il est démontrable! La différence réside dans la condition d'incommensurabilité qui n'est pas satisfaite pour les théorèmes de représentation.

L'étude de cette controverse était importante pour éprouver la consistance des notions d'énoncés et de textes inauguraux. Le problème n'était pas tant qu'une représentation ait pu être inaugurée deux fois, bien que cela eut tout de même été un problème puisque Fourier fait référence à cette controverse : qu'il ait pu être « témoin » de cette inauguration aurait changé le statut de la sienne. Le problème était surtout d'éprouver le caractère contraignant des conditions données pour caractériser les énoncés et les textes inauguraux. Elles ont été de fait un guide précieux dans l'examen de cette controverse et des textes qui y participent, puisqu'il ne s'agissait plus ici d'analyser un texte, comme dans les cas précédents, mais plusieurs textes d'auteurs différents. Cependant, l'intérêt principal de cette analyse n'est, à mes yeux, pas là mais dans la nature des arguments utilisés pour mettre en évidence la manière dont cet énoncé a été introduit au cours de cette controverse. On ne peut pas montrer qu'un texte *ne vérifie pas* les conditions retenues pour définir les textes inauguraux comme on montre qu'il les vérifie. Le statut de la preuve ne peut pas être le même. Une vérification négative n'aurait pas beaucoup d'intérêt. Des arguments différents doivent être utilisés.

Il faut ici revenir à la raison d'être de ce travail. Les énoncés et les textes inauguraux sont un moyen d'introduire une représentation qui va permettre un nouveau mode d'expression de la généralité. La preuve que les textes considérés ne sont pas inauguraux va dès lors passer par une étude de l'expression de la généralité dans chacun d'eux. Il est en effet possible de distinguer les types d'expressions de la généralité des fonctions qui y sont à l'œuvre (développement en série entière, développement en série trigonométrique, variable de fonction, représentation graphique d'une fonction et d'une corde, etc.) et de repérer leurs rapports mutuels, les moments et les conditions de leur introduction. On constate alors que toutes ces expressions de la généralité ne suivent pas mais précèdent l'introduction de l'énoncé inaugural. Les séries trigonométriques considérées par Bernoulli ne présentent pas non plus les caractéristiques sémiotiques qu'elles ont quand elles servent d'expression générale aux fonctions. Ces caractéristiques sont en revanche bien présentes dans les Mémoires de D'Alembert et d'Euler, pour certaines introduites à cette occasion (variable de fonction dans la résolution de l'équation différentielle associée au problème et représentation graphique d'une fonction par celle d'une corde comme condition initiale de ce problème), mais ils ne les attribuent pour leur part aux séries trigonométriques que « par l'absurde » : pour montrer que Bernoulli n'a pas donné comme il l'affirme toutes les solutions du problème. Ainsi, l'énoncé inaugural non seulement n'introduit pas de nouveau mode d'expression de la généralité, mais c'est au contraire la présence préalable de deux d'entre eux qui rend compte de l'introduction de celui-ci.

Ces textes comprennent à la fois un énoncé inaugural et des expressions nouvelles de la généralité des fonctions. Et pourtant, ces expressions ne sont pas introduites par l'énoncé inaugural. C'est l'inverse : ce sont elles qui permettent son introduction (sans soutien). Sans doute cela explique-t-il que cette étude ait été la seule à présenter des difficultés : tous les éléments attendus étaient présents, mais dans un rapport

différent à celui attendu. Or, j'ai fini par comprendre que *les expressions de la généralité introduites ne l'étaient pas par l'énoncé inaugural*. Comme il y avait un énoncé inaugural et des expressions de la généralité nouvelles, j'étais parti sur l'hypothèse qu'il devait y avoir un texte inaugural. Avoir les conditions caractérisant les textes inauguraux m'a sans doute permis de remettre en cause cette intention première. Comme cela est arrivé avec la *Théorie analytique de la chaleur*, la preuve d'un résultat négatif oblige à une analyse sémiotique plus poussée qui nécessite de quitter la surface du conditionnement sémiotique pour aller plus en profondeur dans la sémiotique de l'expression. A ce niveau, tout s'éclaire... Cette conclusion ne contredit en rien la fonction inaugurale des énoncés et des textes inauguraux. D'abord, les expressions de la généralité introduites ne dérivent pas de l'introduction d'un système d'expressions complet comme c'est le cas avec les textes inauguraux. Mais surtout, et c'est essentiel, ces expressions ont été introduites sans inauguration. La controverse des cordes vibrantes nous donne même l'exemple de l'introduction simultanée, mais néanmoins distincte, de deux expressions nouvelles de la généralité, en l'occurrence des fonctions (une variable de fonction et la représentation d'une corde). A nouveau, l'importance historique reconnue depuis longtemps à des textes mathématiques ressort aussi de leur analyse sémiotique.

Cette controverse montre aussi que les caractéristiques sémiotiques des expressions utilisées ont bien effectivement des conséquences : l'introduction par Euler de l'énoncé inaugural (non inaugurant) en est un exemple. Les expressions mathématiques ne sont pas transparentes, leur introduction a des conséquences. Et c'est bien en cherchant la *cause* de l'introduction de cet énoncé que je suis arrivé à ces expressions.

Je terminerai en mentionnant le rapport entre axiomatisation et inauguration. Les textes fondateurs de la logique mathématique (je pense ici à la *Begriffsschrift* de Frege ou aux *Principia mathematica* de Whitehead & Russell) mêlent inauguration et axiomatisation. Il peut dès lors sembler que tout exposé axiomatique va pouvoir être un texte inaugural. Ce n'est pas le cas : les *Eléments* d'Euclide sont à bien des égards fondateurs, c'est aussi un exposé axiomatique, mais ce n'est pas un texte inaugural. En fait, les textes inauguraux axiomatisés ne peuvent être que des textes de logique, plus exactement : l'axiomatisation est un procédé visant une représentation complète de toutes les propositions d'un domaine, il ne peut donc avoir de caractère inaugural que s'il s'agit de représenter une totalité de *propositions*. Il faut donc que la représentation inaugurée soit une représentation de *propositions*. Ce qui est bien le cas de la *Begriffsschrift* de Frege et des *Principia mathematica* de Whitehead & Russell. Mais que ces textes soient à la fois des exposés axiomatiques et des textes inauguraux est en fait très spécifique et n'est possible que parce qu'ils inaugurent une représentation se rapportant à des propositions.

Linguistique intégrationniste et sémiotique de l'expression

Pourquoi m'être occupé de linguistique intégrationniste? J'ai découvert les travaux de Roy Harris à partir de son livre *Introduction to integrational linguistics*, publié en 1998, donc après ma thèse. C'était à la Bibliothèque François Mitterrand, le livre qui n'est maintenant plus disponible ne l'était déjà guère et son prix était de toute façon prohibitif pour ses cent cinquante pages. Mais ce petit livre relié blanc m'avait frappé par les critiques que son auteur adressait aux théories linguistiques, et surtout par les applications qu'il en faisait, c'est-à-dire par leur effectivité.

La linguistique intégrationniste, développée à partir du début des années 1980 (Harris, Roy, *The Language Myth*, Duckworth, London : 1981), dénonce un ensemble de présupposés communs aux principales théories générales du langage (Saussure, Bloomfield, Hjelmslev, Chomsky). Elle dénonce en particulier leur adhésion au « Mythe du langage » qui assimile le langage à un code fixe. Cette assimilation intervient notamment dans la conception de la communication qui suppose l'existence d'un code commun aux interlocuteurs qui permettrait la transmission des idées par le langage (télémentation). Elle dénonce aussi une conception ségrégationniste de la langue et des signes selon laquelle il y aurait une distinction, elle-même fixée, préétablie et partagée, entre des signifiés et des signifiants. Une part importante de ces travaux est consacrée à mettre en évidence l'intervention de ces partis pris et leurs conséquences diverses dans les analyses linguistiques les plus connues et à défendre un point de vue alternatif, dit intégrationniste : "*The integrationist treats meanings not as semantic units established in advance by a fixed code, but as values which arise in context out of particular communication situations. These values are assigned by the participants as part of the integration of activities involved. It is in this sense that, for the integrationist, communication involves a constant making and re-making of meaning. It is intrinsic to the continuous creative process that our engagement with language is.*" Harris 1998, 68. Roy Harris s'est ainsi livré à un réexamen du rapport entre la parole et l'écriture, il a dénoncé la primauté de la parole et du modèle alphabétique, proposé une nouvelle sémiologie de l'écriture⁵⁰, reconsidéré la fonction de la réflexivité du langage et du métalangage dont il fait une partie intégrante du langage nécessaire à la réalisation de la *conception* que l'on en a au moment où on l'emploie ; le métalangage est ainsi ce qui permet au langage d'avoir les caractéristiques qui lui sont attribuées (par exemple d'apparaître comme un code fixe). Autre particularité à la fois remarquable et indissociable : la linguistique intégrationniste conteste le projet d'une linguistique scientifique.

Ces travaux ont attiré mon attention en raison notamment de leur capacité à produire de nombreux énoncés et problèmes originaux à bien des égards semblables à ceux que je m'efforce de dégager. On peut ainsi, rétrospectivement, considérer que le modèle du signe adopté dans ma thèse pour décrire

50 Harris, Roy, *Rethinking Writing*, Athlone: 2000

certaines caractéristiques des premiers textes de topologie algébrique, en particulier la distinction entre différents plans de contenu et la notion de fonction sémiotique qui permet de reconnaître une variété de rapports entre signifiant et signifié, témoignait et prenait acte de l'insuffisance du modèle ségrégationniste du signe et plus généralement de l'impossibilité de rendre correctement compte des textes mathématiques à partir d'un langage conçu sur le modèle du code fixe. Les notions de créativité sémiotique et de conditionnement sémiotique sont à cet égard tout à fait « intégrationnistes ». De même la remise en cause de la transparence du langage mathématique rejoint de bien des manières la critique du « mythe du langage ». Confronter nos démarches me semblait donc un moyen de clarifier les spécificités de chacune. C'est ce à quoi je me suis attaché dans « Linguistique intégrationniste et histoire sémiotique des mathématiques ».

Je présente dans ce texte les principaux concepts de la linguistique intégrationniste (code fixe, télémentation, ségrégationnisme, coterporalité, etc.) en me concentrant plus particulièrement sur quelques-unes des révisions qu'elle introduit sur des sujets qui concernent particulièrement l'histoire des mathématiques : métalangage, l'analyse des conséquences de l'écriture, les contraintes biomécaniques, circonstancielles et macrosociales, etc. Quelques-unes des principales distinctions sémiotiques que j'ai introduites sont ensuite passées au crible de la critique intégrationniste afin d'examiner leur rapport aux différents aspects du « mythe du langage ». Il s'agit de déterminer dans quelle mesure ces analyses tombent ou non sous le coup de ce « mythe ». Inversement, le recours à la sémiotique de l'expression met en évidence certains partis pris que la linguistique intégrationniste partage avec les autres théories linguistiques et sémiotiques dont elle fait la critique. Ces partis pris peuvent être mis en évidence notamment à partir d'une reprise de l'analyse intégrationniste de la signature⁵¹. Cette confrontation permet d'explicitier certaines des spécificités et quelques-uns des enjeux du point de vue sémiotique que je propose. La sémiotique de l'expression apparaît au terme de cette comparaison comme une sémiotique *plus* intégrationniste que les autres (théorisées ou sous-jacentes), mais sans être intégrationniste afin de lui conserver un caractère scientifique recherché plutôt que dénigré.

Rapports et différences pourraient aussi être établis à partir des énoncés et des textes inauguraux. Ces énoncés et ces textes inaugurent des représentations qui ont toutes les caractéristiques du « mythe du langage », notamment le ségrégationnisme et le code fixe, que la linguistique intégrationniste a su parfaitement distinguer et dénoncer. Le mythe a ainsi ses cérémonies, ce qui l'atteste encore un peu plus. Roy Harris saurait aussi très bien mettre en évidence les défauts de conformité de chacune de ces représentations. Mais je crois qu'il convient aussi d'en reconnaître les vertus : elles ne sont sans doute pas conformes, mais elles sont tout de même remarquablement conformes. Ce ne sont pas des codes fixes, elles ne sont pas transparentes, mais elles n'en sont pas moins utiles, parce qu'*il n'est pas sans conséquences de donner une nouvelle expression*, et encore moins d'introduire *un système d'expressions*.

51 Voir notamment Roy Harris, *La sémiologie de l'écriture*. Editions du CNRS, Paris, 1993 et *Rethinking Writing*. Athlone, London, 2000.

Ne considérer que le « mythe », qu'il faut sans aucun doute dénoncer, car il n'est en effet rien moins qu'anodin, conduit néanmoins à négliger l'existence de ces « codes » (même s'ils n'en sont pas tout à fait) et leurs différences : c'est céder soi-même au « mythe » que de ne pas les différencier. Et c'est ce que s'attache à faire la sémiotique de l'expression.

« Découvrir et transmettre » : un exemple d'homologie

« Découvrir et transmettre. Une analyse de la dimension collective des mathématiques dans *Récoltes et semailles* d'Alexandre Grothendieck » est un travail un peu à part. Bien sûr, d'abord en raison du texte considéré : *Récoltes et Semailles*, texte de plus de mille cinq cents pages dactylographiées dans lequel Alexandre Grothendieck revient sur les mathématiques et un milieu dont il s'était éloigné dix ans plus tôt. Cela aide à la diffusion, sinon à la publication, mais ne va pas non plus sans malentendus. Ce texte m'offrait l'opportunité d'analyser en détail les multiples facettes de l'écriture et de la lecture chez un mathématicien, évidemment singulier. L'écriture et la lecture sont des thèmes explicites de la réflexion de Grothendieck. L'écriture est pour lui « l'étape créatrice entre toutes ». La découverte mathématique consiste à écrire « sous la dictée » des choses elles-mêmes. Et nommer, plutôt que démontrer par exemple, en est l'acte essentiel. L'écriture intervient encore, mais différemment, dans la seconde partie du travail du mathématicien : la rédaction. La rédaction est une fonction de l'écriture à la fois dissociée de la découverte mais aussi, sinon autant, valorisée par Grothendieck. Sa finalité est de mettre à disposition de tous des découvertes. Elle fait le lien entre la découverte, face à face solitaire du mathématicien, Grothendieck, avec les choses, et un public au service duquel se met le rédacteur. Les rédacteurs. Car la rédaction est une écriture collective. Collective mais pas publique. Celui qui rédige n'a pas besoin d'être celui qui a découvert. Il n'écrit pas non plus sous sa dictée. Les rédacteurs appartiennent néanmoins à un « microcosme », incontestablement une élite : le petit cercle des élèves et collaborateurs de Grothendieck. Le texte rédigé, publié, est lui destiné au public, le « marais », la « caisse de résonance » aurait dit André Weil. Il faut donc distinguer l'écriture-découverte et l'écriture-rédaction. Celui qui écrit n'est pas le même, il n'écrit pas les mêmes choses, et les intentions de l'écriture ne sont pas non plus les mêmes : se mettre à l'écoute des choses d'un côté, se mettre au service d'un public de l'autre. Et la lecture ? Elle ne nous fait pas connaître les choses. En désignant ce qui est connu, connu de tous, elle désigne ce qui ne peut plus être découvert. Un problème perd de son intérêt quand il a été résolu. L'écrit est ainsi fondamentalement asymétrique, non inversible. Ce statut, la détermination des « droits d'écriture » et des « droits de lecture » de chacun, n'est pas seulement dégagé à partir de ce qu'en dit Grothendieck : il se *manifeste* tout au long de son témoignage.

Mais l'intérêt à mes yeux de cette étude est avant tout de mettre en évidence une chaîne de corrélations qui va d'un rapport intime à l'écrit, l'acte de nommer, jusqu'à la représentation personnelle de la

communauté mathématique, en passant par le microcosme où le statut de l'écrit et de la lecture changent à nouveau. La production et la diffusion du savoir est centrifuge. La distribution des « droits de lecture » et des « droits d'écriture » est ainsi corrélée aussi bien à la conception du savoir (« écoute des choses ») qu'à la conception des rapports entre les personnes (diffusion centrifuge, pas de circulation), à la constitution de groupes sociaux et à leur hiérarchisation.

« Découvrir et transmettre » décrit, à partir de *Récoltes et semailles*, la distribution et la variation des « droits d'écriture » et des « droits de lecture » tout au long des différentes étapes du travail mathématique de Grothendieck, de la recherche solitaire jusqu'à la publication, puis leur modification à la suite de son retrait de la communauté mathématique. Cette étude a pour moi l'intérêt d'indiquer comment les caractéristiques sémiotiques peuvent être corrélées à des caractéristiques sociologiques. C'est l'enjeu de la notion d'homologie. Elle n'épuise évidemment pas l'analyse de ces rapports, loin s'en faut, mais elle indique un autre axe selon lequel les caractéristiques sémiotiques ont des conséquences et des manifestations, dont elles peuvent en partie rendre compte ou à partir desquelles il est possible de remonter à elles⁵². Cette étude déploie donc une dimension qui ne l'est pas dans les autres mais dans laquelle il importe de les inscrire, au moins comme perspective, et parfois comme raison d'être.

Transparence et historiographie

Le premier paragraphe de l'introduction de « La mise en texte mathématique : une analyse de l'« Algorithme de Frankenthal » », écrit il y a plus de dix ans, donne une présentation toujours actuelle des questions qui motivent mes recherches :

Depuis le projet de caractéristique universelle de Leibniz qui devait permettre de réduire tout raisonnement à un calcul, en passant par le développement de l'algèbre symbolique au XIXe siècle, l'idéographie de Frege, la pasigraphie de Peano, les Principia mathematica de Whitehead et de Russell jusqu'au programme de Hilbert, le lien entre les mathématiques et l'écriture n'a pas cessé d'être étroit. Une page d'un livre de Peano en est l'illustration et un simple coup d'œil suffit à soupçonner qu'il s'agit là d'un texte mathématique. Le même coup d'œil ne distinguerait pas la Logique de Hegel du dernier roman de Mary Higgins Clark... Paradoxalement, la tendance à assimiler le raisonnement à un calcul, et partant à établir un lien fort, voire à identifier les mathématiques à leurs textes, s'accompagne de l'affirmation inverse selon laquelle les mathématiques sont « pures », qu'elles n'ont à faire qu'à des entités « idéales »,

52 Cette direction n'est pas sans rapport avec la médiologie promue, notamment, par Régis Debray qui nous dit « quand le sage montre la lune, le médiologue regard le doigt ». Si l'on regarde à la fois le doigt, la lune et le sage, nous avons la fonction sémiotique, l'expression et le contenu...

etc. : il est entendu qu'il n'y a pas de trace d'encre dans le ciel des idées... Ainsi, les textes mathématiques se distinguent par une élaboration de leur composition, une débauche de caractères spéciaux, des mises en pages particulières, des formes nouvelles d'écritures, etc., mais les mathématiques n'en sont pas moins considérées comme une des disciplines qui dépendrait le moins de ces considérations matérielles.

Cet article est une application historiographique de la sémiotique. Il est consacré à l'édition et à la traduction d'un texte du début du XIII^e siècle qui est un des premiers écrits de langue latine présentant les algorithmes de calcul avec les chiffres arabes. André Allard a édité en 1978 le texte latin et en a donné une traduction française. Le texte de Frankenthal présente donc la représentation des nombres au moyen des chiffres arabes et les algorithmes pour leur addition, leur soustraction, leur multiplication, etc. C'est là bien sûr la représentation des nombres que nous utilisons toujours. Leurs caractéristiques sémiotiques ont néanmoins changé entre-temps. Le changement le plus évident vient d'un changement de support : les nombres étaient alors tracés sur une surface effaçable (une table à poussière), alors que nous les écrivons aujourd'hui (en 1978 et encore dans les années 1990...) à l'encre sur du papier. Et même quand ils sont écrits sur un tableau avec de la craie, on opère dessus comme s'ils n'étaient pas effaçables. Ce changement oblige à concevoir de nouveaux algorithmes adaptés à des expressions qui ne s'effacent pas. Autre exemple de nécessité sémiotique... On passe ainsi d'une mise en texte dédoublée dans laquelle l'expression de la description des algorithmes est distincte de l'expression des nombres auxquels ils se rapportent, à une mise en texte simple dans laquelle l'expression de la description des algorithmes et celle des nombres ont les mêmes caractéristiques matérielles⁵³.

L'article d'André Allard comprend donc d'une part l'édition, imprimée sur papier, du manuscrit latin qui présente ces algorithmes et d'autre part une traduction en français de celui-ci. L'une et l'autre sont réalisées par la même personne. Bien évidemment, aussi bien l'édition que la traduction décrivent les algorithmes sans les adapter à des expressions de nombre non effaçables ; André Allard fait ici œuvre de philologue, pas de mathématicien ! Mais une traduction implique de nombreux choix. Il est difficile, voire impossible, de préserver à la fois ne serait-ce que le système des oppositions lexicales et celui des oppositions grammaticales du texte d'origine. Par ailleurs, ces divers systèmes d'oppositions sont eux-mêmes en partie conformes à leur contenu, c'est-à-dire au système d'expressions des nombres, avec ses caractéristiques propres, liées notamment à leurs caractéristiques matérielles.

Ce que cet article montre c'est que ces différences se retrouvent dans les différences entre l'édition latine et la traduction française qui en est proposée. Par exemple, l'édition latine distingue de diverses manières les chiffres écrits dans le texte qui décrit les algorithmes (il faut bien qu'il y en ait...) et ceux tracés sur la

⁵³ Le développement de l'informatique modifie à nouveau en profondeur la mise en texte. Un logiciel comme TeXmacs en est une des illustrations les plus abouties puisque l'éditeur de texte intègre un calculateur formel, ou l'inverse, les calculs n'étant pas non plus restreints aux opérations arithmétiques élémentaires...

table à poussière auxquels ces algorithmes s'appliquent (il faut bien y faire référence...). Or, ces distinctions sont souvent neutralisées dans la traduction française. En particulier, le texte latin distingue l'expression des chiffres et les valeurs dont ils sont l'expression. Dans la traduction le nombre et son expression sont souvent confondus. C'est une manifestation prévisible de la transparence. Celui pour lequel ces expressions sont nouvelles ne va pas les confondre avec ce qu'elles représentent (pas plus que Descartes ne confond une courbe géométrique avec son équation polynomiale). Pour le traducteur cette différence est devenue plus transparente. Ne pas ignorer le changement matériel de l'expression des nombres ne suffit pas à se prémunir contre certains de ses effets qu'une analyse structurale de la langue des deux textes permet en l'occurrence de mettre en évidence⁵⁴.

Cet article montre donc l'incidence qu'un changement d'expression peut avoir sur notre interprétation d'un texte, y compris dans un cas où l'interprétation est minimale puisqu'il s'agit de la traduction d'un texte élémentaire. Or c'est là un phénomène récurrent dans les travaux en histoire des mathématiques où les caractéristiques sémiotiques des expressions familières à l'historien interviennent souvent dans ses interprétations. L'histoire des mathématiques est de ce fait inversement un bon moyen de mettre en évidence par réfraction la transparence des représentations mathématiques. Les représentations inaugurées dans les textes inauguraux s'y prêtent particulièrement. D'ailleurs, ce texte de Frankenthal, comme la plupart de ceux qui introduisent les chiffres arabes, est un texte inaugural.

Analyse sémiotique des *Disquisitiones arithmeticae* de Gauss

« Vers une analyse sémiotique de la théorie des ensembles : hiérarchies et réflexivité » présente les résultats de l'application de la sémiotique de l'expression aux *Disquisitiones arithmeticae*. Il n'est pas difficile de vérifier que les modes d'expression des invariants privilégiés par Gauss dans ce texte sont l'engendrement des variétés à partir de variétés représentantes et les expressions d'invariante génératrices. Ainsi, l'engendrement des variétés à partir de variétés représentantes rend compte aussi bien, par exemple, de la réduction des nombres aux représentants des classes de congruence que de la réduction du problème général de la représentation d'un nombre aux équations de Pell, $t^2 - Du^2 = m^2$. Cela établit la grande cohérence sémiotique de ce texte. Mais cela permet surtout de mettre en évidence *une corrélation stricte entre le recours aux ensembles dans ce texte et le défaut d'expression d'invariante génératrice* : Gauss recourt à des ensembles exactement quand il ne peut plus exprimer ce qu'il veut comme il le veut (c'est-à-dire avec une expression d'invariante génératrice). Ce résultat relativise le lien entre le développement d'une mathématique ensembliste et celui d'une arithmétique transfinie en

54 Cette comparaison de la langue de l'édition latin et de celle de la traduction française pourrait sans aucun doute être obtenue en appliquant à chacun des deux textes la procédure du *Résumé* ; les différences considérées sont exactement du type de celles que sa description d'une langue prend en compte.

donnant une description systématique du recours aux ensembles dans les *Disquisitiones* pour laquelle l'opposition fini-infini n'est pas du tout pertinente (le défaut d'expression d'invariante génératrice peut aussi bien apparaître pour des ensembles finis). C'est aussi un autre exemple d'introduction d'un type d'expression nouveau qui ne s'accompagne d'aucune inauguration. Mais là encore, c'est un type d'expression qui est introduit, et non un système d'expressions. Enfin, j'ai mis en évidence que les ensembles n'avaient pas ici d'autres propriétés que celles que possèdent déjà leurs éléments (par exemple un ensemble sera divisible si tous ses nombres sont divisibles, etc.). C'est là un trait distinctif du recours aux ensembles sans doute lié à sa nouveauté. Suivant cette perspective, l'introduction des ensembles n'est plus l'histoire d'une invention ou d'une découverte, mais celle de l'abandon progressif d'un type remarquable d'expression d'invariante (les expressions d'invariante génératrices). Il resterait à restituer ce que ce moment de l'histoire a de spécifique, compte tenu de cette évolution, tout en l'inscrivant dans une histoire sémiotique plus vaste et sur une plus longue durée. L'histoire sémiotique du recours aux ensembles en mathématiques reste entièrement à écrire et mérite sans doute de l'être. Elle permettrait de mieux apprécier les enjeux et les implications de l'introduction des ensembles, de les considérer mêlés à d'autres types d'expressions (au lieu de ne toujours considérer que des textes exclusivement ensemblistes, ou considérés comme tels), et indépendamment des questions de fondements auxquelles elle reste encore souvent rapportée.

Les inaugurations et leurs conséquences

L'analyse du théorème de Skolem présentée dans « Remarques sur l'expression de la généralité en mathématiques » est une application de la sémiotique de l'expression dont j'aurais souhaité donner plus d'exemples. L'analyse des *Disquisitiones arithmeticae* de Gauss en est aussi un. Celle de l'« Algorithme de Frankenthal » aussi, si ce n'est qu'il s'agit d'une application d'une analyse structurale du langage plutôt que de la sémiotique de l'expression, ce qui m'apparaît encore maintenant mieux adapté dans ce cas. L'étude des énoncés et des textes inauguraux nous en a fait aussi croiser (notamment l'analyse de la formule intégrale de Fourier et l'analyse de l'introduction de l'énoncé inaugural par Euler dans la controverse des cordes vibrantes). L'analyse du théorème de Löwenheim-Skolem indique la suite de mon travail sur les énoncés et les textes inauguraux⁵⁵, c'est-à-dire l'étude sémiotique de la réception des représentations introduites par ces textes. La motivation de cette étude, je l'ai déjà indiqué, était de dégager les conditions de possibilité sémiotiques de divers théorèmes mathématiques généraux. Il s'agit de mettre en évidence que ces théorèmes tirent parti de conditions sémiotiques spécifiques qui ont été, pour certaines, introduites par des textes inauguraux. Il s'agit de montrer que les moyens d'expressions disponibles participent de la possibilité d'énoncer certains théorèmes ou de développer certaines

55 Cet article ayant été présenté lors d'un colloque de sémiotique j'y considère une application du théorème plutôt que de sa démonstration.

théories. Le théorème de Löwenheim-Skolem en est un exemple⁵⁶.

Quand Zermelo introduit en 1908 son système d'axiomes pour la théorie des ensembles, les *Principia mathematica* n'ont pas encore été publiés. Ses axiomes, comme ceux des *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert quelques années plus tôt, contiennent fort peu de symboles. Quand Skolem écrit un article en 1922 pour dénoncer l'idée que les mathématiques pourraient être assimilées à la théorie des ensembles, et que les axiomes de Zermelo pourraient en être le fondement, il peut reprocher à Zermelo d'avoir introduit dans l'un de ses axiomes la notion d'« énoncé bien défini » sans la définir. L'exigence peut sembler exorbitante, mais elle ne l'est plus. Skolem, qui écrit après qu'une représentation des propositions mathématiques ait été inaugurée par Whitehead & Russell, considère être en mesure d'écrire ce qu'est un « énoncé bien défini » : une formule des *Principia* (du premier ordre). Ainsi, Skolem peut considérer disposer d'une représentation de tous les énoncés mathématiques. Et *c'est parce qu'il dispose d'une telle représentation* qu'il peut réécrire les axiomes de Zermelo, y compris l'axiome de séparation dans lequel un « énoncé bien défini » entre comme paramètre, sous la forme d'une liste (dénombrable, mais non plus de sept axiomes comme dans la présentation de Zermelo), à laquelle il peut appliquer son théorème et, de là, dénoncer la relativité de la théorie des ensembles. Cette réécriture, qui exploite cette représentation, est nécessaire à l'application de son théorème (ainsi d'ailleurs qu'à sa démonstration). Comme lui, d'autres mathématiciens vont dès lors pouvoir concevoir et démontrer des théorèmes relatifs à *toutes les propositions* mathématiques. Les théorèmes d'incomplétude de Gödel en sont les exemples les plus célèbres. Ils auront en définitive été énoncés et démontrés fort peu de temps après l'introduction du système d'expressions qui les rendait possibles. Cela ne retire rien au génie de Gödel, qui n'a pas été le seul à les envisager, mais cela précise tout de même les conditions de possibilité et les circonstances de leurs énoncés (et de leur démonstration).

Tenir pour rien la réécriture des axiomes de Zermelo dans un formaliste dérivé de celui des *Principia* est encore un exemple de transparence. Ce déni est en même temps la consécration de la représentation inaugurée par Whitehead et Russell.

Conclusion et perspectives

Les résultats qui viennent d'être présentés illustrent ce que la sémiotique peut apporter à l'histoire des mathématiques. Mais ne nous trompons pas. Il ne s'agit pas d'appliquer une théorie sémiotique constituée à l'histoire des mathématiques. Il s'agit d'élaborer des distinctions sémiotiques pertinentes pour rendre compte de l'évolution des mathématiques. Dès lors que l'on ne s'abandonne pas à la transparence de leurs expressions, les mathématiques apparaissent comme un domaine où la créativité sémiotique est particulièrement intense. Les textes mathématiques sont donc des sources privilégiées

⁵⁶ C'est autant le cas dans l'article de Löwenheim, le texte inaugural dont il reprend la représentation étant l'*Algebra der Logik* de Schröder.

pour l'élaboration des distinctions sémiotiques nécessaires à leur description. Leur intérêt va donc bien au delà d'un intérêt spécifique pour l'histoire des mathématiques. Les développements logiciels que j'ai présentés avec leur analyse ainsi que l'édition et l'analyse du *Résumé* de Hjelmslev ont montré que l'expérience sémiotique acquise par leur étude pouvait ensuite être exploitée à d'autres fins. Il importe donc d'étendre cette expérience.

A partir de là, les perspectives de recherches vont à peu près de soi.

Il s'agit de continuer les travaux réalisés en histoire sémiotique des mathématiques et de montrer leur apport dans le traitement de diverses questions d'histoire des mathématiques. Cela passe par l'analyse de la réception des divers systèmes d'expressions introduits dans les textes inauguraux. Ce qui comprend l'étude de leur incidence sur les travaux d'histoire des mathématiques. Cette analyse doit aussi être complétée, comme j'en ai déjà donné des exemples, par l'étude de problèmes d'expressions dont la résolution ne passe pas par des systèmes d'expressions inaugurés. L'extension des systèmes d'expressions est plus fréquente que leur inauguration. Ces extensions doivent aussi être reconnues et étudiées pour elles-mêmes.

Ces recherches doivent inversement conduire à élaborer de nouvelles distinctions sémiotiques. Elles ne peuvent manquer de le faire en raison de la créativité sémiotique des mathématiques. Il s'agit donc ici de continuer de montrer ce que l'histoire des mathématiques peut apporter à la sémiotique.

Enfin, j'entends développer l'analyse sémiotique des textes informatiques. J'en ai donné ici un exemple avec l'analyse de Thamous. Un des enjeux et à la fois un des intérêts de ces textes tient à leur stratification : ils mettent en jeu diverses « couches » qu'il importe de décrire et dont il convient de bien apprécier le statut et les rapports. Or Hjelmslev a introduit un cadre puissant pour l'analyse de la stratification du langage, et c'est une des rares parties de son œuvre qui a été particulièrement bien étudiée. Ces textes seraient l'occasion autant d'appliquer que d'éprouver ce cadre. Ces recherches permettraient aussi d'aborder l'étude du développement des logiciels de calculs formels, partie de l'histoire récente des mathématiques qui reste à peu près entièrement inexplorée par les historiens. Mon appartenance à un laboratoire de mathématiques offre à cet égard des conditions privilégiées.