1934 Seifert/Threlfall, *Lehrbuch der Topologie* and 1935 Alexandroff/Hopf, *Topologie*

Lehrbuch der Topologie, von H. Seifert und W. Threlfall, Leipzig, B.G. Teubner, 1934, vii, 353 p. diagrs. 24 cm.
A textbook of topology, H. Seifert and W. Threlfall ; translated by Michael A. Goldman, and Seifert, *Topology of 3-dimensional fibered spaces* / H. Seifert ; translated by Wolfgang Heil ; edited by Joan S. Birman and Julian Eisner, New York : Academic Press, 1980., xvi, 437 p.

Topologie, von Paul Alexandroff und Heinz Hopf, J. Springer, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 45, Berlin, 1935. In-8° , XIV-636 p.
Reprints Chelsea Pub. Co., 1965, Chelsea Pub. 1972, Berlin, New York : Springer, 1974, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Fac-sim. de l'éd de Berlin : J. Springer, 1935.

La topologie algébrique avant 1934-35

Les mémoires de Poincaré et l’Analysis situs combinatoire

Les livres de Seifert & Threlfall et d’Alexandroff & Hopf relèvent d’une discipline appelée aujourd'hui "topologie algébrique". Leurs titres les désignent pourtant plus simplement comme des livres de « topologie ». C’est en effet seulement en 1942, avec le livre *algebraic topology* de Salomon Lefschetz (1884-1972) (Lefschetz 1942), que l’adjectif « algébrique » apparaît pour la première fois accolé à «topologie » dans le titre d’un livre ou d’un article. Alexandroff, dans une note de son petit livre (Alexandroff 1932), signalait néanmoins dès 1932 qu’il préférait cette appellation à « combinatorial » topology « since we consider much broader applications of algebraic methods and concepts than the word « combinatorial » would include » (Alexandroff 1961, p. 27). Outre « Topologie » déjà utilisé par J. Listing (1808-1882) en 1847 (Listing 1847), l'expression « Analysis Situs », introduite par G.W. Leibniz (1646-1716), était aussi couramment utilisée jusqu’au début des années 1930 pour désigner cette branche des mathématiques que Bernhard Riemann (1826-1866) définissait comme "l'étude des grandeurs continues où l'on ne considère pas les grandeurs comme existant indépendamment de leur position et comme mesurables les unes par les autres, mais où l'on étudie seulement les rapports de situation des lieux et des régions, en faisant complètement abstraction de tout rapport métrique." (Riemann 1857).

"Analysis Situs" aussi la dénomination utilisée par Henri Poincaré (1854-1912) dans sa série de six mémoires qu'il consacre au sujet (Poincaré 1895-1904). C'est dans ces « fascinating and exaspering » (Dieudonné 1989) mémoires, publiés entre 1895 et 1905, que Poincaré introduit la plupart des notions de bases, des techniques, des théorèmes et des conjectures relatifs à l'homologie et au groupe fondamental. Pendant les trente années qui suivent, la plupart des travaux s'inscrivent dans le prolongement de ces mémoires dont ils tentent de donner une présentation plus satisfaisante de certaines parties au moyen de définitions plus générales ou mieux adaptées. Ainsi se développe en particulier une « combinatorial Analysis situs» ou encore une "combinatorial topology" qui recouvrent une grande diversité d'approches.
Toutes ces dénominations (« topologie », « Analysis situs », « combinatorial Analysis Situs », « algebraic topology ») ne reflètent que très partiellement la diversité des définitions adoptées : les variétés, par exemple, faisaient l'objet d'une nouvelle définition dans à peu près chaque article (Herreman 2000).

Livres de topologie publiés avant 1934-35

Ce n'est qu'en 1922 que paraît le premier livre consacré au sujet : O. Veblen (1880-1960), *Analysis Situs* (Veblen 1922). Ce livre élémentaire de 194 pages a été la référence pendant près de dix ans et a été réédité en 1931. Il propose une présentation qui tente de concilier les approches arithmétique (matrices de nombres) et géométrique des relations d'homologies à coefficients entiers ou réduits modulo 2. Son caractère géométrique apparaît dans sa progression qui suit la dimension des espaces : d'abord les espaces de dimension 1 (graphes linéaires), puis les complexes et les variétés de dimension 2 et enfin les complexes de dimension *n*. C'est par exemple dans ce livre que Saunders McLane essaye de s'initier au sujet : "From such a book, without a teacher, it was exceedingly difficult to understand combinatorial topology; in 1931 I tried with Veblen's book and failed." (MacLane 1986, p. 306). Paraît ensuite livre du collègue de Veblen, Salomon Lefschetz (Lefschetz 1930). Ce livre, qui compte déjà plus de quatre cents pages, présente les théorèmes de dualité, la théorie de l'intersection des chaînes, la théorie de l'intersection et des points fixes des transformations continues entre deux variétés avec des applications aux variétés analytiques et algébriques. Le recours à la théorie des ensembles, dans ce livre par ailleurs encore très géométrique, permet à son auteur d'étendre la notion d'homologie à l'homologie relative à un sous-ensemble d'une variété et d'unifier en un seul théorème les théorèmes de dualité de Poincaré et d'Alexander. Il couvre bien plus de sujet que le précédent mais il est encore jugé «quite difficult to read» par le jeune H. Whitney (1907-1989) (Whitney 1942).

Il convient de citer aussi quelques-uns des livres consacrés à la point-set topology, parmi lesquels :

Young, William Henry & Young, Grace Chishlom, *The Theory of Sets of Points*, Cambridge,1906.

Hausdorff, Felix, *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit & Comp., Leipzig, 1914.

Fréchet, Maurice, *Les espaces abstraits*, Gauthier-Villars, Paris, 1928.

Kuratowski, Casimir, *Topologie t I*, Mongrafije matematyczne, tIII, Warszawa-Lwow, 1933.

Seifert & Threlfall, *Lehrbuch der Topologie*, 1934

Indications biographiques : Seifert & Threlfall

Herbert Seifert (1907-1996) commence à étudier les mathématiques et la physique à la Technische Hochschule de Dresde en 1926. L'année suivante, il suit pour la première fois les cours de topologie de William Threlfall (1888-1949). Cette rencontre se transforme vite en une amitié fructueuse qui donnera lieu à de nombreuses publications communes, parmi lesquelles deux livres (Seifert & Threlfall 1938), dont celui qui nous occupe et pour une part issue de ces cours. Seifert passe une partie de l'année 1928-1929 à Göttingen où il rencontre notamment Alexandroff et Hopf (voir ci-dessous). Il obtient son doctorat en 1930 avec son travail "Konstruktion dreiddimensionaler geschlossener Räume" (Seifert 1931). Il est nommé professeur à l'université de Heidelberg en 1935 en remplacement de Heinrich Liebmann, démis de ses fonctions par les Nazis. Il occupera cette fonction jusqu'à sa retraite, à l'exception des années de guerre durant lesquelles il travaille à l'Institut für Gasdynamik (Institute for Dynamics of Compressible Fluids). En 1938, Threlfall est nommé professeur à l'université de Francfort sur Maine où il succède à C. L. Siegel qui a émigré aux Etats-Unis. En 1946, Seifert obtient pour son ami un poste de professeur dans son université de Heidelberg. Mais les séjours à l'étranger de chacun et la mort de Threlfall en 1949 ne permettront pas la poursuite de leur collaboration (Puppe 1999).

Le livre

Considérant que la « Topology is intimately associated with the theory of groups » (p. 305), les deux auteurs consacrent un chapitre aux éléments de théorie des groupes requis tout au long du livre (un groupe est défini par des générateurs et des relations). Les espaces les plus généraux sont des « neighborhood spaces», c'est-à-dire des ensembles de points auxquels sont associés des voisinages vérifiant les axiomes *ad hoc*. Cette généralité sert surtout à définir les fonctions continues, car le livre est consacré à l'étude d'espaces moins généraux : les complexes. Un complexe (simplicial) est un « neighborhood space which can be simplicially decomposed » (p. 43). Les groupes d'homologie (simpliciale) d'un complexe sont définis à partir des chaînes simpliciales, combinaisons linéaires à coefficients entiers, ou réduits modulo 2, des simplexes orientés du complexe ; les groupes d'homologie sont alors les « residue classes of the lattice G^k of closed k-chains relative to the sublattice N^k of null homologous k-chains» (p. 66). Le livre expose ensuite les résultats classiques de topologie combinatoire obtenus à partir des matrices d'incidence : réduction à leur forme normale, nombres de torsion, caractéristique d'Euler-Poincaré, etc. L'invariance topologique est démontrée via les groupes d'homologie singulière, définis à partir des chaînes singulières, c'est-à-dire des combinaisons linéaires entières de simplexes singuliers orientés non dégénérés. Ces groupes sont des invariants topologiques par définition et l'invariance topologique des groupes d'homologie simpliciale est ensuite obtenue par un théorème de déformation qui permet de ramener les homologies entre chaînes sngulières à des homologies entre chaînes simpliciales d'une subdivision suffisament fine du complexe. C'est là, plus clairement exposée, la démonstration donnée par Veblen (Veblen 1922), elle-même reprise de l'article d'Alexander (Alexander 1915), et pour l'essentiel contenue dans les mémoires de Poincaré. Les auteurs introduisent les « homology groups at a point » : groupes d'homologie du complexe formé des simplexes qui ne contiennent pas le point. Ce sont aussi des invariants topologiques grâce auxquels ils démontrent l'invariance topologique de la dimension. Rappelons que la définition de la dimension d'un espace et la démonstration de son invariance sont devenus des problèmes classiques depuis les travaux de G. Cantor (1845-1918) : plusieurs définitions de la dimension et différentes preuves de leur invariance ont été données, la première démonstration correcte ayant été donnée en 1911 par L.E.J. Brouwer (1881-1966) (Brouwer 1911). Ces éléments de topologie combinatoire introduits illustrés et par de nombreux exemples, les deux auteurs démontrent que la caractéristique d'Euler et l'orientabilité permettent de classifier les surfaces fermées, définies par identifications des côtés de polygones. Si le résultat et la démonstration ne sont bien sûr pas nouveaux, la présentation qu'ils en donnent reste un modèle. Toujours dans la ligne du problème de la classification des complexes de dimension >2, les auteurs introduisent le groupe fondamental, défini comme le groupe des classes d'homotopie des chemins d'un complexe. Ils font le lien entre ce groupe et le premier groupe d'homologie en démontrant que le « first homology group of a connected complex is the Abelianized fundamental group ». Ils démontrent ensuite que le groupe fondamental est aussi le « group of covering transformations of the universal covering complex ». Ces notions sont ensuites appliquées à des variétés de dimension 3, sans bien sûr que ne soit résolu le problème de leur classification. Les auteurs se restreignent ensuite aux variétés qu'ils définissent comme a « connected, finite, n-dimensional complex which at every point has the same homology groups as the *(n-1)*-sphere ». Cette définition, qui consiste à ne retenir que la caractérisation homologique des voisinages simpliciaux, a déjà été considérée par différents mathématiciens, notamment par Alexander et van Kampen, et reprise dans le livre de Lefeschetz (Lefschetz 1930). Etre une variété est ainsi une propriété topologiquement invariante, ce qui n'est pas le cas avec d'autres définitions. Cette définition permet aussi d'énoncer et de demontrer le théorème de dualité de Poincaré, que ce soit à partir des matrices d'incidence ou en construisant des bases duales à l'aide des nombres d'intersection. Les deux démonstrations sont données. Enfin, un chapitre est consacré à la théorie du degré d'une application, développée par Brouwer, appliquée aux théorèmes de points fixes et à la « trace formula » de Hopf.

ALEXANDROFF & HOPF, *TOPOLOGIE*, 1935

Indications biographiques Alexandroff & Hopf

Elève de Nikolai Nikolaevich Luzin (1883-1950), les premiers travaux de P. Alexandroff (1896-1982) sont d'emblée consacrés à la topologie ensembliste. En 1923, il a alors 27 ans, il se rend avec son ami P. Urysohn (1898-1924) à Göttingen qui est alors l'un des principaux centres de mathématique. Ils y rencontrent notamment Emmy Noether (1882-1935) et David Hilbert (1862-1943). Durant l'été 1924, ils vont ensemble en Hollande rencontrer L.E.J. Brouwer. Après la mort accidentelle en 1924 de son ami lors d'une baignade en Bretagne, Alexandroff retourne travailler avec Brouwer durant une partie des années 1925 et 1926. C'est au cours des séjours réguliers qu'il fait ensuite à Göttingen jusqu'en 1932 qu'il se lie d'amitié avec Heinz Hopf (1894-1971), de deux ans son aînés. Hopf a déjà suivi à Breslau puis à Berlin les cours de Erhard Schmidt (1876-1959) sur la théorie des ensembles et les travaux de Brouwer. Il vient à Göttingen pour la première fois en 1925. C'est au mois de décembre de cette même année, après un dîner chez Brouwer auquel Alexandroff assiste, qu'Emmy Noether suggéra de remplacer les

nombres de Betti et les nombres de torsion par des groupes. Hopf tirera parti de ce changement pour généraliser la formule d'Euler-Poincaré (Hopf 1928). Grâce à une bourse Rockefeller, Alexandroff et Hopf se rendent ensemble à Princeton où ils passent l'année universitaire 1927-28. Ils peuvent suivre les cours et discuter avec trois des plus éminents topologues de l'époque : O. Veblen, S. Lefschetz et J.W. Alexander. J.W. Alexander (1888-1971) est connu notamment pour les deux démonstrations qu'il a données de l'invariance des nombres de Betti et de connexion (nombre de Betti réduits modulo 2) (Alexander 1915), des contre-exemples montrant que les nombres de Betti et le groupe fondamentale ne suffisent pas à classifier les variétés de dimension 3, et le théorème du dualité qui porte aujourd'hui son nom (Alexander 1922).
Alexandroff est nommé professeur de mathématiques à l'université de Moscou en 1929. Hopf est nommé en 1931 professeur de mathématiques à la Technische Hochschule de Zürich où il restera jusqu'à sa retraite en 1965 (Arboleda 1979 ; Frei & Stammbach 1999).

Le livre

Le livre d'Alexandroff & Hopf a été écrit pour la collection « Grundlehren der mathematischen Wissenschaften » des éditions Springer-Verlag à l'initiative de R. Courant qui en a proposé le projet aux deux futurs auteurs dès 1928. Alexandroff étant à Moscou et Hopf à Zürich, leur collaboration se fera principalement par correspondance. Le congrès international de Zurich (5-12 septembre 1932), dont Hopf est un des organisateurs, permettra aux deux auteurs de se rencontrer et c'est à la première confèrence internationale de topologie (4-10 septembre 1935), organisée cette fois par Alexandroff à Moscou, qu'ils pourront terminer leur livre.

L'objectif du livre n'est pas de présenter *toute la topologie* («die ganzen topologie ») mais de présenter *la topologie comme un tout* (« die Topologie als ein Ganzes »), ce qui est peut-être plus ambitieux. Au lieu d'opter pour une topologie ensembliste ou une topologie combinatoire il combine ces deux approches comme Brouwer, à qui l'ouvrage est dédié, avait sû le faire le premier. La première partie est consacrée aux notions élémentaires de topologie ensembliste : ensembles ouverts et fermés, espaces métriques et topologiques (définis à partir de la fermeture), applications continues, axiomes de séparation, espaces compacts, bicompacts et complets. La deuxième partie introduit les notions de base de topologie combinatoire : les polyèdres (« courbes ») et leurs subdivisions. Les polyèdres sont définis à partir des complexes où un complexe est un ensemble fini ou dénombrable de simplexes (segments de droites, triangles, tétraèdres, etc.) avec des conditions *ad hoc* sur les relations d'incidences entre simplexes. Un polyèdre est alors l'ensemble des points qui appartiennent à au moins une cellule du complexe. La nécessité de bien faire la distinction entre l'ensemble des cellules (le complexe) et l'ensemble des points (le polyèdre) a été soulignée pour la première fois dans (Alexandroff 1932) ; la confusion était encore fréquente (Herreman 2000). Un polyèdre courbe (*Krumme Polyeder*) est alors un espace topologique homéomorphe à un polyèdre. Ce sont là les objets géométriques. L'algèbre, en l'occurrence la théorie des groupes abéliens, s'introduit avec les complexes algébriques. Un complexe algébrique associe un ensemble de sommets et un groupe abélien : les sommets suffisent à définir les simplexes d'un complexe orienté, un *complexe algébrique* est alors une combinaison linéaire $C=\Sigma t^i x_i$, où les x_i sont des simplexes et les t^i des éléments du groupe abélien ou d'un anneau (entiers naturels, entiers modulo m, nombres rationnels et nombres rationnels modulo 1 dont L. Pontrjagin (1908-1988) a montré l'intérêt). Ces complexes algébriques permettent de définir les groupes de Betti comme quotients du groupe des cycles à coefficients dans un groupe par le groupe des cycles qui sont des bords. Les auteurs précisent l'incidence du choix du groupe de coefficients sur les groupes de Betti et établissent l'invariance des groupes de Betti par subdivision du polyèdre.

La troisième partie du livre est consacrée aux polyèdres et à la preuve de l'invariance topologique de la dimension et des groupes de Betti. Plusieurs démonstrations en sont données : l'une utilise le lien établi par approximation simpliciale entre les classes d'homotopie et les classes d'homologie, l'autre utilise le nerf d'un recouvrement d'un espace métrique, notion introduite par Alexandroff inspirée du polyèdre dual de Poincaré et des techniques simpliciales développées par Brouwer.

La quatrième partie est consacrée à la théorie des nombres d'intersection et d'enlacement dans l'espace euclidien de dimension n qui permet d'établir le théorème de dualité d'Alexander. Un chapitre est aussi consacrée à la formule du point fixe de Lefschetz pour une transformation d'un polyèdre sur lui-même.

Réception des deux livres

On peut attribuer à Leibniz la reconnaissance d'une branche nouvelle et propre des mathématiques : l'Analysis Situs. Elle a un nom, une définition bien établie et stable mais il n'y a alors guère de définition, de théorème, de démonstration qui soient partagés ne serait-ce que par quelques-unes des nombreuses contributions à ce domaine au cours de la deuxième moitié du 19e siècle (Pont 1974). Cette discipline n'a pas non plus de texte fondateur qui servirait de référence commune. Cela change avec les mémoires de Poincaré : ils introduisent un ensemble de définitions, de théorèmes, de démonstrations et de techniques qui est peut-être entièrement à reprendre mais qui sera justement vite repris par de nombreux mathématiciens du monde entier. L'analysis situs a dès lors son texte de référence. Quarante ans plus tard, le livre de Seifert & Threlfall marque une nouvelle étape de cette histoire. Les éléments de la théorie de l'homologie qu'il présente (groupes d'homologie simpliciale, matrices d'incidence, preuve de l'invariance par l'homologie singulière, théorie des variétés, théorème de dualité de Poincaré, intersection et enlacement, théorèmes de points fixes) diffèrent peu de ceux présentés quatre ans plus tôt dans le livre de Lefschetz (Lefschetz 1930). L'organisation d'ensemble de la théorie semble alors à peu près fixée : cette théorie a ses résultats et ses techniques devenues « standards ». Mais Seifert & Threlfall en donnent une présentation dont la clareté est, contrairement aux livres précédents, d'emblée et encore reconnue. Ce livre, qui ne présente aucun résultat véritablement nouveau, offre le premier exposé clair de notions qu'il rend ainsi accessibles à des cohortes d'étudiants. Il est de ce fait un moment important de l'histoire de la topologie algébrique. Il donne accès à sont lecteur à des connaissances qui apparaissent communes et bien établies. C'est là probablement plus une conséquence, ou simplement un effet de ce livre que l'état d'une discipline en plein renouvellement. Quoiqu'il en soit, sa lecture semble permettre de faire l'économie de celle de bien d'autres textes et, en particulier, celle des mémoires de Poincaré. Ainsi modifie-t-il le rapport des lecteurs aux publications précédentes. Ce changement est aussi un effet de sa clarté et de son statut de manuel de référence. Ses nombreuses notes historiques établissent un nouveau lien à ces textes qui seront dès lors moins lus voire plus lus du tout.

Le « séminaire Julia » témoigne de la réception de ces livres de Seifert & Threlfall et d'Alexandroff & Hopf. Ce séminaire se tient à Paris depuis 1933. Il est animé par un groupe de jeunes mathématiciens : J. Dieudonné, A. Weil, Cl. Chevalley, J. Leray, R. de Possel, R., Ch. Ehresmann, P. Dubreil et F. Marty. On reconnaît parmi eux les mathématiciens qui créeront deux ans plus tard le groupe Bourbaki, après que quelques-uns d'entre eux soient passés par Göttingen. Le thème de la première année du séminaire est la «Théorie des groupes et des algèbres ». C'est l'occasion d'étudier les travaux de F.G. Frobenius, E. Noether, E. Artin, A. Speiser, H. Hasse et B. van der Waerden dont le premier tome du *Modern Algebra* a paru en 1930. La deuxième année est consacrée aux espaces de

Hilbert et l’année suivante, 1935-1936, à la topologie : les livres de Seifert & Threlfall et d’Alexandroff & Hopf viennent à leur tour de paraître. Ainsi André Weil, qui a rencontré Alexandroff à Göttingen durant l’été 1927, prend le livre d’Alexandroff & Hopf comme référence pour son exposé sur les « Applications des invariants d'homologie à la caractérisation des classes de représentation » et pour celui sur les « Nombres d'intersection et degrés topologiques ». C’est aussi la référence de l’exposé de R. de Possel sur les «Points fixes des transformations ». Le livre de Seifert & Threlfall est la référence de F. Marty pour son exposé « Recouvrements - groupe fondamental ». Les mémoires de Poincaré ne sont eux jamais cités par ces jeunes mathématiciens français. Le livre de Veblen non plus. Le livre de Lefschetz est seulement cité dans les exposés de Ch. Ehresmann, Cl. Chevalley et A. Weil. Dix ans plus tard, H. Cartan renvoie encore "pour toutes les notions fondamentales » au livre d’Alexandroff & Hopf (Cartan 1945, note p. 2) et Jean Leray aux deux premiers chapitres de «l'excellent Traité de MM. Alexandroff et Hopf» (Leray 1945). La réception est la même aux Etats-Unis. Ainsi, pour Hassler Whitney, du même âge que ces jeunes mathématiciens français : "In 1934, the appearance of [Seifert & Threlfall] gave the young student an excellent first text in the field. In one subject, the fundamental group (with applications), it fills a large gap in earlier works. Soon after (1935), [Alexandroff & Hopf] was published. It is a very full treatment (...). Both [Seifert & Threlfall] and [Alexandroff & Hopf] are written in a clear, detailed style.” Peter Hilton ne dit pas autre chose sur le livre d'Alexandroff & Hopf : "This was an extremely influential book and was a sort of bible for the study of algebraic topology. It was a very beautifully written work. " (Hilton 1988, p. 286).

Chacun de ces livres annoncaient dans leurs introductions d’autres volumes à venir : Seifert & Threlfall entendaient traiter la dualité d’Alexander dans un second volume, Alexandroff & Hopf étaient encore plus précis et prévoyaient deux tomes supplémentaires : le premier devait être consacré aux espaces topologiques dans toute leur généralité et le second aux variétés et au groupe fondamental. Aucun ne verra le jour. Au moment où paraissent ces deux livres, deux découvertes, annoncées au congrès de Moscou de 1935, transforment la topologie algébrique : la cohomologie est découverte indépendamment par J.W. Alexander et N. Kolmogoroff (1903-1987) et les groupes d’homotopie sont définis pour toutes les dimensions par W. Hurewicz (1904-1956).

Les événements politiques modifient aussi la géographie du monde mathématique. A la fin des années 1920 et au début des années 1930, les mathématicens du monde entier se rendaient à Göttingen : G. Birkhoff, H. Whitney, S. Mac Lane pour n’en citer que quelques-uns... L’avènement du nazisme videra l’université de Göttingen et déplacera le coeur des mathématiques aux Etats-Unis, et particulièrement à Princeton lieu d'une nouvelle algébrisation de la topologie. En partie du fait de ces développements et de cette algébrisation, les livres de Seifert & Threfall et d'Alexandroff & Hopf sont vite dépassés pour les spécialistes. Ajouter un ou deux volumes ne suffit plus ; une réécriture s'impose. C'est ce que fît S. Lefschetz en publiant en 1942 son livre *algebraic topology* qui porte l'empreinte de cette nouvelle génération de mathématiciens de Princeton : S. MacLane, S. Eilenberg, N.E. Steenrod, H. Whitney, Cl. Chevalley, etc. Les livres de Seifert & Threlfall et d'Alexandroff & Hopf ne peuvent dès lors plus être appréciés que comme des manuels d'introduction à la topologie. Et là, le livre de Seifert & Threlfall semble s'imposer. Le livre d'Alexandroff & Hopf n'était pas à proprement parler un manuel mais plutôt un exposé cohérent et systématique d'une grande partie du sujet. Il tire notamment sa généralité et sa cohérence du langage ensembliste dans lequel il s'inscrit résolument ; un bon nombre de ses distinctions et de ses développements sont liés à ce choix. Le livre de Seifert & Threlfall est lui plus près des premières intuitions géométriques ; celles-ci n'ont pas vieillies et conservent tout leur intérêt quelques soient les évolutions ultérieures de ces théories. Celles-ci ont au contraire besoin de renvoyer à ces intuitions. Par ailleurs, certains théorèmes de topologie ne sont valables ou ne sont démontrés que pour des dimensions suffisamment grandes ; une distinction apparaît entre une topologie générale et une topologie des petites dimensions. La nécessité d'une topologie des petites dimensions s'impose progressivement comme un champ spécifique à contre-courant d'une recherche de la plus grande généralité. Or le livre d'Alexandroff & Hopf s'inscrit dans cette recherche du plus général alors que celui de Seifert & Threlfall peut, lui, aussi servir d'introduction à la topologie des petites dimensions.

Bibliographie

Alexander, J.W., "A proof of the invariance of certain constants in Analysis Situs", *Transactions of the American Mathematical Society*, 16, p.148-154, 1915.

"A proof and extension of the Jordan-Brouwer separation theorem", *Transactions of the American Mathematical Society*, 23, p.333-349, 1922.

Alexandroff, Paul S, *Einfachste Grundbegriffe der Topologie*, Supplément à Hilbert et Cohn-Vossen, Springer Verlag, Berlin, 48, 1932, Translated by Farley, Alan E., *Elementary concepts of Topology*, Dover, 1961.

Arboleda, L.C., "Les débuts de l'école topologique soviétique: notes sur les lettres de Paul S. Alexandroff et Paul Urysohn à Maurice Fréchet", *Archives for History of Exact Sciences*, 20, p.73, 1979.

Brouwer, L.E.J., "Beweis der Invarianz der Dimensionzahl", *Math. Annalen*, 70, p.161-165, 1911.

Cartan, Henri, "Méthodes modernes en topologie algébrique", *Comm. Math. Helv.*, 18, p.1-15, 1945.

Dieudonné, Jean, *A History of Algebraic and Differential Topology 1900-1960*, Birkhäuser, Boston, 1989.

Herreman, Alain, *La topologie et ses signes. Eléments pour une histoire sémiotique des mathématiques*, L'Harmattan, Paris, 2000.

Frei, Günther & Stammbach, Urs, "Heinz Hopf", in (James 1999), p.991-1008.

Hilton, Peter, "A brief and subjective history of homology and homotopy theory in this century", *Mathematics Magazine*, 61 (5), p.282-291, 1988.

Hopf, Heinz, "Eine Verallgemeinerung der Euler-Poincaré Formel", *Nachr. der Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen*, p.127-136, 1928.

James, I.M. (ed), *History of Topology*, North-Holland, Amsterdam, 1999.

Lefschetz, Solomon, *Topology*, American Mathematical Society Colloquium Publications, 1930.

Algebraic topology, Amer. Math. Soc., colloquium publications, Providence, Rhode Island, 1942.

Leray, Jean, "Sur la forme des espaces topologiques et sur les points fixes des représentations", *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 24, p.95-167, 1945.

Listing, Hohann Benedikt, "Vorstudien zur Topologie", *Göttinger Studien*, p.811-875, 1847.

MacLane, Saunders, "Topology becomes algebraic with Vietoris and Noether", *Journal of Pure and Applied Algebra*, 39, p.305-307, 1986.

Poincaré, Henri, "Analysis Situs", *Journal de l'Ecole polytechnique*, 1, p.1-123, 1895.

"Complément à l'analysis situs", *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 13, p.285-343, 1899.

"Second complément à l'Analysis Situs", *Proceedings of the London Mathematical Society*, 32, p.277-308, 1900.

"Sur les cycles des surfaces algébriques; Quatrième complément à l'Analysis Situs", *Journal de Mathématiques*, 8, p.169-214, 1902.

"Cinquième complément à l'Analysis Situs", *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 18, p.45-110, 1904.

Pont, Jean-Claude, *La topologie algèbrique des origines à Poincaré*, PUF, bibliothèque philosophique contemporaine, Paris, 1974.

Puppe, Dieter, "Herbert Seifert", in (James 1999), p.1021-1027.

Riemann, Bernhard, "Theorie der Abel'schen Functionen", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 54, p.101-155, 1857.
Seifert, H., "Konstruktion dreidimensionaler geschlossener Räume", *Berl. Akad. Wiss.*, 83, p.26-66, 1931.
Seifert & Threlfall, *Variationsrechnung im Grossen*, Teubner, 1938.
Veblen, Oswald, *Analysis Situs*, American Mathematical Society Colloquium Publications, New York, 1922.
Whitney, Hassler, "Review Hopf 1941", *Mathematical Reviews*, 3, p.316, 1942.

Table 1. *Lehrbuch der Topologie* Titres et paginations de la traduction.

Page	Topics
I - Illustrative material	
1-21	The principal Problem of Topolgy - Closed Surfaces - Isotopy, Homotopy, Homology - Higher Dimensional Manifolds
II - Simplicial Complexes	
22-59	Neighborhood Spaces - Mappings - Point Sets in Euclidean Spaces - Identification Spaces - n-Simplexes - Simplicial Complexes - The Schema of a Simplicial Complex - Finite, Pure, Homogeneous Complexes - Normal Subdivision - Examples of Complexes
III - Homology Groups	
60-94	Chains - Boundary, Closed Chains - Homologous Chains - Homology Groups - Computation of the Homology Groups in Simple Cases - Homologies with Division - Computation of Homology Groups from the Incidence Matrices - Block Chains - Chains mod 2, Connectivity Numbers, Euler's Formula - Pseudomanifolds and Orientability
IV - Simplicial Approximation	
95-122	Singular Simplexes - Singular Chains - Singular Homology Groups - The Approximation Theorem, Invariance of Simplicial Homology Groups - Prisms in Euclidean Spaces - Proof of the Approximation Theorem - Deformation and Simplicial Approximation of Mappings
V - Local Properties	
123-133	Homology Groups of a Complex at a Point - Invariance of Dimension - Invariance of the Purity of a Complex - Invariance of the Boundary - Invariance of Pseudomanifolds and of Orientability
VI - Surface Topology	
134-153	Closed Surfaces - Transformation to Normal Form - Types of Normal Form : The Principal Theorem - Surfaces with Boundary - Homology

Table 2. *Topologie*.

Page	Topics
Erster Teil : Grundbegriffe der mengentheoretischen Topologie	
24-82	Topologische und metrische Räume
83-116	Kompakte Räume
Zweiter Teil : Topologie der Komplexe	
124-153	Polyeder und ihre Zellenzerlegungen
154-204	Eckpunkt- und Koeffizientenbereiche
205-239	Bettische Gruppen
240-272	Zerspaltungen und Unterteilungen von Komplexen
273-312	Spezielle Fragen aus der Theorie der Komplexe
Dritter Teil : Topologische Invarianzsätze und anschliessende Begriffsbildungen	
313-346	Simpliziale Approximationen stetiger Abbildungen
347-378	Kanonische Verschiebungen. Nochmals Invarianz der Dimensionszahl und der Bettischen Gruppen. Allgemeiner Dimensionsbegriff
379-408	Der Zerlegungssatz für den Euklidischen Raum. Weitere Invarianzsätze
Vierter Teil : Verschlingungen im Euklidischen Raum. Stetige Abbildungen von Polyedern	
409-456	Verschlingungengstheorie. Der Alexandersche Dualitätssatz
457-497	Der Brouwersche Abbildungsgrad. Die Kroneckersche Charakteristik.
498-526	Homotopie- und Erweiterungssätze für Abbildungen
527-553	Fixpunkte
554-593	**Anhang I : Abelsche Gruppen**
594-616	**Anhang II : Der R^n und seine konvexen Zellen**
617	Verzeichnis der topologischen Bücher
618-621	Literaturverzeichnis
622-636	Sachverzeichnis