UNIVERSITÉ de RENNES 1

Licence de Mathématiques
(année 2006/07)

C01 : Etude Globale des Fonctions

Jacques Camus et Christophe Cheverry

Ce cours intitulé **Etude Globale des Fonctions** a été enseigné en 2005/06 et en 2006/07 à l'université Rennes I sous le sigle C01. Il s'adresse à des étudiants en L2. Pour être abordé certains prérequis sont nécessaires. Les prérequis sont ceux qui, dans les programmes de mathématiques jusqu'au niveau L1 inclus, se rapportent au domaine de l'Analyse. En particulier, les notions de fonction, de limite et de suite sont supposées avoir déjà été assimilées.

Ce cours se répartit en sept chapitres. Les deux premiers s'intéressent aux propriétés induites par la *régularité* ou la *convexité* des fonctions. Le troisième reprend la définition des fonctions *logarithme* et *exponentielle* et met à plat un certain nombre de leurs caractéristiques. Les quatre derniers chapitres se rapportent à l'intégration des fonctions. Ils reposent sur la construction de l'*intégrale de Riemann* et aboutissent à la notion clé d'*intégrale généralisée*, sans oublier d'explorer les liens qui unissent les procédés d'intégration et de sommation, ou encore de décrire ce qui se produit en présence de paramètres. Un examen (page suivante) de la Table des matières donne une vision globale des thèmes abordés. Il permet aussi, selon le besoin, de repérer facilement l'emplacement où tel aspect du sujet se trouve traité.

Chaque chapitre est destiné à introduire un concept nouveau, en réponse à une question posée dans son introduction. La discussion s'ouvre le plus souvent par des rappels ou autres préliminaires. Ensuite vient le corps du texte composé de Propositions et de Théorèmes. Ceux-ci sont illustrés par de nombreux exemples et applications. Ils sont aussi accompagnés d'exercices, de QCM et de problèmes donnés sans preuve car destinés à être traités en Travaux Dirigés.

Les preuves des énoncés ont été rédigées avec un soin tout particulier. Elles sont presque toujours (dans les pages qui suivent) complètes et détaillées alors qu'elles sont parfois (durant les séances en amphitheâtre) juste ébauchées. Ce flottement (du à la densité des programmes par rapport aux horaires attribués) induit une fausse perception de la part des étudiants, à savoir que les démonstrations sont facultatives et donc qu'elles peuvent être négligées. A tort, car celles-ci sont bien au contraire essentielles à tout bon apprentissage. C'est avant tout en comprenant et en reprenant chez soi les preuves (suivant son propre cheminement et quitte à faire des erreurs) que l'étudiant peut se familiariser personnellement, progressivement avec les nouveaux éléments de connaissance qui lui sont présentés. Précisément, l'objectif de ce texte est de pallier les éventuelles lacunes des exposés oraux et de remédier aux mauvaises prises de notes. Le contrat implicite est que tout ce qui est dit en cours doit être connu tandis que tout ce que contient ce texte doit avoir été vu.

La plupart des exercices sont positionnés en support de la notion qui vient d'être introduite. Cela permet de tester en direct le nouveau concept et ainsi d'en faciliter l'assimilation. Le risque toutefois est d'utiliser une connaissance en se référant au seul fait qu'elle vient d'être étudiée. Pour remédier à cet inconvénient, des QCM et des problèmes sont aussi proposés (souvent en fin de chapitre). Ils sont l'occasion de faire le point sur ce qu'on a effectivement appris et de savoir ce qu'on devrait encore travailler ...

Bien sûr, les résultats exposés ici sont classiques. Du coup, il est vivement conseillé de compléter ses efforts en consultant d'autres ouvrages d'enseignement, en ayant recours à d'autres sources d'information. On peut par exemple puiser dans la liste de références placée ci-joint en bibliographie.

Références

[1] Bourbaki N., *Eléments de mathématique. Fonctions d'une variable réelle*, chapitres 1 à 7, Hermann (1949).

[2] Dieudonné J. *Sur un théorème de Glaeser*, Journal d'analyse mathématique.

[3] Doukhan P.; Sifre J.-C., *Cours d'analyse : analyse réelle et intégration*, Dunod.

[4] Glaeser G., *Racine carrée d'une fonction différentiable*, Ann. Inst. Fourier Grenoble (1963).

[5] Valiron G., *Cours d'analyse mathématique*, tome 1, Masson (1955).

Au final, l'étudiant doit être capable de retrouver par lui-même, dans ses notes de cours, dans ce texte, voire dans les livres un élément oublié, dont il a du mal à se remémorer ou dont il n'est pas sûr. Ceci est un répertoire de connaissances dont on demande qu'elles soient maîtrisées au niveau L2.

Table des matières

1 Fonctions numériques d'une variable réelle.

On se donne un intervalle I d'extrémités a et b avec $a < b$. Ainsi, on a $I = (a,b)$, c'est à dire $I =]a,b[$ ou $I = [a,b[$ ou $I =]a,b]$ ou encore $I = [a,b]$. Par ailleurs, on considère une application $f : I \to \mathbb{R}$, c'est à dire une fonction de I à valeurs dans $\mathbb{R}$. On fixe deux point x et y dans I avec par exemple $a < x < y < b$.

Question. Comment comparer les valeurs prises par f en x et en y, c'est à dire les nombres $f(x)$ et $f(y)$?

Une telle comparaison ne peut avoir de sens que si la fonction f possède un peu de *régularité*. En effet, dans le cas contraire, les nombres $f(x)$ et $f(y)$ ne sont pas liés et peuvent prendre des valeurs arbitraires l'un par rapport à l'autre. On commence donc par des rappels sur les notions de continuité et de dérivabilité. Ensuite, on apporte quelques éléments de réponses. Ceux-ci, comme on s'y attend, vont dépendre des hypothèses de régularité dont on dispose sur f.

1.1 Limite, continuité, dérivabilité.

Ce paragraphe rappelle (sans démonstration) les notions essentielles de *limite*, de *continuité* et de *dérivabilité* pour une fonction numérique d'une variable réelle.

Définition 1 - *limite en un point.*
Soient I un intervalle (non réduit à un point) de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$ et $f : I \setminus \{t_0\} \to \mathbb{R}$.
On dit que f admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque t tend vers t_0 , avec $t \neq t_0$, si on a la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad , \quad \exists \eta_\varepsilon > 0 \quad \text{tel que : } \ 0 < |t - t_0| \leqslant \eta_\varepsilon \quad , \quad t \in I \Longrightarrow |f(t) - \ell| \leqslant \varepsilon \, .$$

Dans ces conditions, on note : $\ell = \lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t \in I\,,\, t \neq t_0}} f(t)$.

En particulier, si $I = [t_0\,,\, \beta[$ on parle de limite à droite pour f en t_0 et, dans ce cas, on note parfois $\ell = f(t_0 + 0) = \lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} f(t)$. De même, on parle de limite à gauche en t_0 et on note $f(t_0 - 0) = \lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} f(t)$ pour $f :]\alpha\,,\, t_0[\to \mathbb{R}$ et admettant une limite quand t tend vers t_0 avec $t < t_0$.

Proposition 1
Soit $f :]a\,,\, b) \to \mathbb{R}$ monotone croissante (resp. décroissante) et minorée (resp. majorée) sur $]a\,,\, b)$.
Alors $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a + 0)$ existe.

De même, si $f : (a\,,\, b[\to \mathbb{R}$ est monotone croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée), alors $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = f(b - 0)$ existe.

Preuve
Soit $(x_n)_n$ une suite décroissante de points de $]a\,,\, b)$ convergente vers a.
Alors la suite $(f(x_n))_n$ est décroissante et minorée, elle est donc convergente.
Notons $\ell_{(x_n)} = \lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n)$ et montrons que $\ell_{(x_n)}$ ne dépend pas de la suite $(x_n)_n$ décroissante et convergente vers a.
Soient $(x_n)_n$ et $(x'_n)_n$ deux telles suites et soit $(x''_n)_n$ la suite décroissante, et convergente vers a construite à partir de ces deux suites. Comme $(x_n)_n$ et $(x'_n)_n$ sont des suites extraites de (x''_n), on aura :

$$\ell_{(x_n)} = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell_{(x''_n)} = \lim_{n \to +\infty} f(x''_n) = \lim_{n \to +\infty} f(x'_n) = \ell_{(x'_n)} \, .$$

Soit maintenant ℓ cette limite commune et montrons que si $(x_n)_n$ est une suite de points $]a\,,\, b)$ convergente vers a, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell$.

En raisonnant par l'absurde, il existerait $\varepsilon > 0$ et une sous-suite $(x_{n_k})_k$ telle que, pour tout entier $k \geqslant 0$, $|f(x_{n_k}) - \ell| > \varepsilon$. Mais alors, en extrayant de $(x_{n_k})_k$ une suite $(x_{n_{k,\ell}})_\ell$ décroissante, on aurait, d'après ce qui précède : $\ell = \lim\limits_{\ell \to +\infty} f(x_{n_{k,\ell}})$ alors que $|f(x_{n_{k,\ell}}) - \ell| > \varepsilon$ pour tout entier ℓ. Contradictoire.
Finalement, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell$ pour toute suite $(x_n)_n$ convergente vers a, ce qui équivaut à $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \ell$.

Exemple
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \longmapsto E(t)$ ($E(t)$ étant la partie entière de t).
Alors f admet une limite à droite et à gauche en tout point $t_0 \in \mathbb{R}$ et on a :
si $t_0 \in \mathbb{Z}$, $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} f(t) = E(t_0) - 1$ et $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} f(t) = E(t_0)$.
En particulier, si $t_0 \notin \mathbb{Z}$ on a : $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} f(t) = f(t_0 - 0) = f(t_0 + 0) = \lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} f(t) = E(t_0)$ et, de même $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} f(t) = E(t_0) = f(t_0)$: on dit alors que f est continue en t_0.

Plus généralement,

Définition 2 - *Continuité en un point.*
On dit que f est continue en $t_0 \in I$ si on a la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad , \quad \exists \eta_\varepsilon > 0 \quad \text{tel que : } \; |t - t_0| \leqslant \eta_\varepsilon \quad , \quad t \in I \Longrightarrow |f(t) - f(t_0)| \leqslant \varepsilon \, .$$

En d'autres termes, compte-tenu de la définition 1, dire que f est continue en t_0 équivaut à dire que $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} f(t)$ existe et vaut $f(t_0)$.

Exemple
Toute fonction polynomiale $f : I \to \mathbb{R} : t \longmapsto f(t) = P(t)$ où $P \in \mathbb{R}[X]$ est continue en tout point $t_0 \in I$.

Exercice 1.1.1 *On fixe $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. On considère une fonction croissante $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.*
b) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $D_c^n := \left\{ x \in [a, b] \; ; \; f(x+) - f(x-) > \frac{1}{n} \right\}$ est fini.
b) En déduire que f est continue sur $[a, b]$ sauf, peut-être, en une infinité dénombrable de points de $[a, b]$.

Définition 3 - *Continuité.*
On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.
On dira que f est de classe $\mathcal{C}^0$ sur I. On notera $f \in \mathcal{C}^0(I\,;\mathbb{R})$.

Définition 4 - *Dérivabilité en un point.*
Soit $t_0 \in]a\,,\,b[$. On dit que f est dérivable en t_0 s'il existe $\ell_0 \in \mathbb{R}$ tel que : $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ existe et vaut ℓ_0.
Dans ces conditions, on note : $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = f'(t_0)$.
Soit maintenant $t_0 \in [a\,,\,b[\cap I$.
On dit que f est dérivable à droite en t_0 s'il existe $\ell_0^+ \in \mathbb{R}$ tel que : $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ existe et vaut ℓ_0^+.
Dans ces conditions, on note : $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = f'_d(t_0)$.
De même, pour $t_0 \in]a\,,\,b] \cap I$, on définit la notion de dérivée à gauche de f en t_0, notée $f'_g(t_0) = \lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$

lorsque cette limite existe.

Remarque
Il résulte de la définition : dire que $\lim\limits_{\substack{t\to t_0\\ t\neq t_0}} \dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ existe et vaut ℓ équivaut à écrire :

$$f(t) = f(t_0) + \ell(t-t_0) + (t-t_0)\ \varepsilon_{t_0}(t-t_0)$$

où ε_{t_0} est une fonction réelle définie dans un voisinage de 0 vérifiant $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \varepsilon_{t_0}(h) = 0$.

<u>Exemple</u>
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \longmapsto |t|$.
Cette fonction f est dérivable en tout point $t_0 \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et on a : $f'(t_0) = 1$ si $t_0 > 0$ et $f'(t_0) = -1$ si $t_0 < 0$.
Par contre, si $t_0 = 0$, f est dérivable à droite, et à gauche en 0 et on a : $f'_d(0) = 1$, $f'_g(0) = -1$.

Remarque
Il est clair que si f admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche en t_0 avec $f'_d(t_0) = f'_g(t_0)$, alors f est dérivable en t_0 et $f'(t_0) = f'_d(t_0) = f'_g(t_0)$.

Remarque
Graphiquement, dire que f est dérivable en t_0 signifie que le graphe de f admet une tangente en t_0 de pente $f'(t_0)$. De même, dire que f est dérivable à droite (resp. à gauche) de t_0 signifie que le graphe de f admet une demi-tangente à droite (resp. à gauche) en t_0.

Définition 5 - *Dérivabilité.*
On dira que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point $t_0 \in]a\,,\,b[$, et si, de plus, f est dérivable à droite en $t_0 = a$, si $a \in I$ et est dérivable à gauche en $t_0 = b$, si $b \in I$.
Et on notera $f' : I \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $f'(t)$ si $t \in]a\,,\,b[$, $f'(a) = f'_d(a)$ si $a \in I$, $f'(b) = f'_g(b)$ si $b \in I$;
f' est appelée *fonction dérivée* de f sur l'intervalle I, et est encore notée $f' = \dfrac{df}{dt} = f^{(1)}$.

Remarque - *Dérivable implique continue.*
Si f est dérivable en $t_0 \in]a\,,\,b[$ (resp. dérivable à droite en $t_0 \in [a\,,\,b[\cap I$, ou dérivable à gauche en $t_0 \in]a\,,\,b] \cap I$) alors, f est continue en t_0 (resp. continue à droite, ou à gauche).

Remarque - *Monotone implique "presque partout" dérivable.*
Une fonction f monotone sur un intervalle I est dérivable *presque partout* sur I. C'est un résultat difficile qui signifie qu'il existe un ensemble D de mesure de Lebesgue nulle tel que f soit dérivable en tout point x de $I \setminus D$.

Définition 6.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si f est dérivable sur I et si de plus f' est de classe $\mathcal{C}^0$ sur I, et on note $\mathcal{C}^1(I\,,\,\mathbb{R})$ l'ensemble de telles fonctions.

<u>Exemple</u>
La fonction $f : [0\,,\,1] \to \mathbb{R} : t \longmapsto f(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & \text{si } t > 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,,\,1]$.

Exercice 1.1.2 *Etudier sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$ la continuité et la dérivabilité des fonctions suivantes :*

a) $f\ :\ x \longmapsto \sin(\frac{1}{x})$ *si* $x \neq 0$ *et* $f(0) = 0$.

b) $g\ :\ x \longmapsto x\,\sin(\frac{1}{x})$ *si* $x \neq 0$ *et* $g(0) = 0$.

c) $h : x \longmapsto x^2 \sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $h(0) = 0$.

Ces fonctions sont-elles de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Définition 7 - *Dérivées successives.*
Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.
Si f' est dérivable en $t_0 \in I$, on note le nombre dérivé $(f')'(t_0) = f''(t_0) = \dfrac{d^2 f}{dt^2}(t_0) = f^{(2)}(t_0)$.
Si f' est dérivable sur I, on dit que f est deux fois dérivable sur I et on note $(f')' = f'' = \dfrac{d^2 f}{dt^2}$.
Et ainsi de suite, on note $f^{(n)} = \dfrac{d^n f}{dt^n}$ la dérivée de $f^{(n-1)} = \dfrac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}}$ (si elle existe).
On dira que $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, $k \in \mathbb{N}^*$ si f est k-fois dérivable sur I, et si $f^{(k)}$ est continue sur I. On notera $\mathcal{C}^k(I\,,\mathbb{R})$ l'ensemble de telles fonctions.
Si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I pour tout entier k, on dit que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur I, ou encore que $f \in \mathcal{C}^\infty(I\,;\mathbb{R})$.

On rappelle maintenant quelques propriétés élémentaires liées à la dérivation.

Proposition 2
Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f\,,\,g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I. Alors on a :

(i) $(f+g)' = f' + g'$

(ii) $(fg)' = f'\,g + f\,g'$

(iii) si $t_0 \in I$ et $f(t_0) \neq 0$, $\left(\dfrac{1}{f}\right)'(t_0) = -\dfrac{f'(t_0)}{(f(t_0))^2}$

(iv) si, de plus, f et g sont n-fois dérivables sur I, avec $n \geqslant 1$, on a :
$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(k)}\,g^{(n-k)} \quad \text{où} \quad \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,.$$
Cette expression est appelée *formule de Leibnitz.*

Proposition 3
Soient I et J deux intervalles non vides de $\mathbb{R}$, $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$.
Alors si f est dérivable en $t_0 \in I$, et si g est dérivable en $s_0 = f(t_0) \in J$, la fonction $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en t_0 et on a : $(g \circ f)'(t_0) = g'(f(t_0))\,f'(t_0)$.

<u>Exemple</u>

$f : t \longmapsto f(t) = \ell n(2 + \sin t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(t) = \dfrac{\cos t}{2 + \sin t}$.

Proposition 4
Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone continue.
Alors $J = f(I)$ est un intervalle non vide et f admet une fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ continue.
De plus, si f est dérivable en $t_0 \in I$ avec $f'(t_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $s_0 = f(t_0)$ et on a : $(f^{-1})'(s_0) = \dfrac{1}{f'(t_0)}$.

1.2 Théorèmes de Rolle et des accroissements finis.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On dit que la fonction f présente un maximum local (resp. minimum local) en un point $t_0 \in I$ s'il existe $\eta > 0$

tel que : $\forall t \in]t_0 - \eta\,,\, t_0 + \eta[\cap I\,,\ f(t) \leqslant f(t_0)$ (resp. $f(t) \geqslant f(t_0)$).
On dit que t_0 est un extremum local pour f sur I si t_0 est un maximum local, ou un minimum local sur I.

L'essentiel des résultats de ce paragraphe repose sur la proposition élémentaire suivante :

Proposition 1
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur un intervalle ouvert et soit $t_0 \in I$.
On suppose que f est dérivable en t_0 . Alors : si f présente un extremum local en t_0 , $f'(t_0) = 0$.

Preuve
Supposons par exemple que t_0 soit un maximum local. Il résulte alors que l'on a, par passage à la limite à droite, et à gauche, en t_0 les inégalités suivantes :

$$f'_d(t_0) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \leqslant 0 \qquad \text{et} \qquad f'_g(t_0) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \geqslant 0\,.$$

Comme f est dérivable en t_0 , ces limites sont égales à $f'(t_0)$ et on a bien $f'(t_0) = 0$.

Exercice 1.2.1 *Soit f une fonction continue et dérivable sur $[a, +\infty[$. On suppose que f converge vers $f(a)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Montrer qu'il existe un élément $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Théorème 1 (Rolle)
Soit $f : [a\,,\, b] \to \mathbb{R}$ continue et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a\,,\, b[$ $(a < b)$.
Alors, si $f(a) = f(b)$, il existe $c \in]a\,,\, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

$\triangle$

Preuve
La fonction f étant continue sur le segment $[a\,,\, b]$ est bornée sur $[a\,,\, b]$ et atteint ses bornes.
Ainsi $m = \inf\limits_{t \in [a\,,\, b]} f(t)$ et $M = \sup\limits_{t \in [a\,,\, b]} f(t)$ sont des nombres réels et il existe $t_1\,,\, t_2 \in [a\,,\, b]$ tels que :

$$m = f(t_1)\,,\; M = f(t_2)\,.$$

Si $m = M$, alors f est constante sur $]a\,,\, b[$ et donc $f'(t) = 0$ pour tout $t \in]a\,,\, b[$.
Si $m < M$, alors ou bien $f(a) = f(b) \neq m$, ou bien $f(a) = f(b) \neq M$.
Supposons par exemple que $M \neq f(a) = f(b)$. Ainsi, $t_2 \in]a\,,\, b[$ et f présente en t_2 un extremum local, d'où $f'(t_2) = 0$.

Corollaire 1 (Théorème des accroissements finis)
Soit $f : [a\,,\, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a\,,\, b[$ $(a < b)$.
Alors il existe $c \in]a\,,\, b[$ tel que : $f(b) - f(a) = (b - a)\, f'(c)$.

$\triangle$

Preuve
Considérons la fonction $g : [a\,,\, b] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in [a\,,\, b] \quad , \quad g(t) = f(t) - f(a) + A(t - a)$$

où $A \in \mathbb{R}$ est choisi de sorte que $g(b) = 0$, i.e. : $A = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
Ainsi g est continue sur $[a\,,\, b]$, dérivable sur $]a\,,\, b[$ et vérifie $g(a) = g(b)$. Par suite, il existe $c \in]a\,,\, b[$ tel que : $g'(c) = f'(c) - A = 0$, d'où le résultat.

Exercice 1.2.2 *Montrer que $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.*

Exercice 1.2.3 *Etablir les inégalités suivantes :*

a) $\ell n(1+x) \leq x\,, \quad \forall\, x > -1\,.$

b) $e^x \geq 1+x\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$

c) $\sin x \leq x\,, \quad \forall\, x \geq 0\,.$

d) $|x-y| \leq |tg\,x - tg\,y| \leq 2\,|x-y|\,, \quad \forall\,(x,y) \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]\,.$

Lorsque f n'est pas dérivable sur $]a\,,\,b[$, on peut donner une variante de ce théorème des accroissements finis :

Corollaire 2
Soit $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, admettant une dérivée à droite et à gauche en tout point de $]a\,,\,b[$. Alors, il existe $c \in\,]a\,,\,b[$ tel que : $f(b)-f(a) = (b-a)\,C\;,\; C \in (f'_g(c)\,,\,f'_d(c))$.

Preuve
On commence par une variante du théorème de Rolle : si f vérifie les hypothèses de ce corollaire, et si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in\,]a\,,\,b[$ tel que $0 \in (f'_g(c)\,,\,f'_d(c))$. Il suffit de reprendre la preuve du théorème de Rolle et de remarquer que pour un extremum local $c \in]a\,,\,b[\,, 0 \in (f'_g(c)\,,\,f'_d(c))$.
On considère ensuite la fonction $g(t) = f(t) - f(a) + A(t-a)\,,\; t \in [a\,,\,b]$, et où A est choisi de sorte que $g(b) = 0$. Ainsi g vérifie les conditions précédentes, et il existe $c \in]a\,,\,b[$ tel que $0 \in (g'_g(c)\,,\,g'_d(c))$, c'est-à-dire $A = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \in (f'_g(c)\,,\,f'_d(c))$.

Application 1
Une application importante de ce théorème des accroissements finis est l'étude des variations des fonctions numériques d'une variable réelle :

(i) Si f est continue sur un intervalle $I = (a\,,\,b)$, dérivable à l'intérieur $]a\,,\,b[$ de I, et si f' est positive (resp. négative) sur $]a\,,\,b[$, alors f est croissante (resp. décroissante) sur I. En effet, si $x\,,\,y \in I$ avec $x \leqslant y$, l'égalité $f(y) - f(x) = (y-x)\,f'(c) \geqslant 0\,,\; c \in]x\,,\,y[$, implique $f(y) \geqslant f(x)$.

Exercice 1.2.4 *Soit* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue, deux fois dérivable sur* $]a,b[$ *et vérifiant :*

$f(a) = f(b) = 0 \quad$ *et* $\quad f"(x) \leq 0\,, \quad \forall\, x \in]a,b[\,.$

a) Montrer que f' *est une fonction décroissante.*

b) On suppose qu'il existe $c \in]a,b[$ *tel que* $f(c) < 0$*. Montrer qu'il existe* $y \in]a,c[$ *et* $z \in]c,b[$ *tels que* $f'(y) < 0$ *et* $f'(z) > 0$.

c) En déduire que f *est une fonction positive.*

Remarque
Si f' est strictement positive (resp. négative) sur $]a\,,\,b[\,, f$ est strictement croissante (resp. décroissante) sur I.

(ii) Si f est continue sur un intervalle $I = (a\,,\,b)$ dérivable à l'intérieur $]a\,,\,b[$ de I, et si $f' = 0$ sur I, alors f est constante sur I.

Exercice 1.2.5 *Soit* $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ *une fonction bornée, deux fois dérivable et vérifiant :*

$\exists\, \alpha > 0\,; \qquad \alpha\, f(x) \leq f"(x)\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+.$

a) Montrer que f' *est une fonction croissante.*

b) Montrer que f' *est majorée par* 0.

c) En déduire que f' *a une limite* $l \leq 0$ *en* $+\infty$.

d) Quelle est la valeur de l *?*

e) Montrer que f *converge vers* 0 *en décroissant lorsque* x *tend vers* $+\infty$.

La propriété (i) ci-dessus n'est pas spécifique aux fonctions dérivables sur un intervalle I. En fait, on a :

Théorème 2
Soit $f : I = (a\,,\,b) \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable à droite sur $\,]a\,,\,b[\,$.
Alors, si pour tout $t \in\,]a\,,\,b[\,,\; f'_d(t) \geqslant 0\,,\; f$ est croissante sur I.

$\triangle$

Preuve
Soient $[\alpha\,,\,\beta] \subset I$ avec $\alpha < \beta$. On doit montrer que $f(\alpha) \leqslant f(\beta)$.
Soient $\varepsilon > 0$ et $f_\varepsilon : [\alpha\,,\,\beta] \to \mathbb{R} : t \longmapsto f_\varepsilon(t) := f(t) + \varepsilon t$.
Alors f_ε est continue sur $[\alpha\,,\,\beta]$, dérivable à droite sur $\,]\alpha\,,\,\beta[\,$ et, pour tout $t \in\,]\alpha\,,\,\beta[\,,\; f'_{\varepsilon,d}(t) = f'_d(t) + \varepsilon \geqslant \varepsilon > 0$.
On va montrer que $f_\varepsilon(\alpha) \leqslant f_\varepsilon(\beta)$. Pour cela, on raisonne par l'absurde, et on suppose que $f_\varepsilon(\alpha) > f_\varepsilon(\beta)$. Soient alors γ un réel tel que $f_\varepsilon(\beta) < \gamma < f_\varepsilon(\alpha)$ et $A = \{t \in [\alpha\,,\,\beta]\,;\, f_\varepsilon(t) \geqslant \gamma\}$. A n'est pas vide ($\alpha \in A$) et est contenu dans $[\alpha\,,\,\beta]$. Posons $c = \sup A\,; c \in [\alpha\,,\,\beta]$ et $c < \beta$ puisque, f_ε étant continue, $f_\varepsilon(c) \geqslant \gamma$. Ainsi, pour tout $t \in\,]c\,,\,\beta[\,,\; f_\varepsilon(t) < \gamma$ et, par continuité de f_ε, on déduit que $f_\varepsilon(c) \leqslant \gamma$. Finalement, $f_\varepsilon(c) = \gamma$ et $c \in\,]\alpha\,,\,\beta[$, mais alors $f'_{\varepsilon,d}(c) = \lim\limits_{\substack{t\to c\\ t>c}} \dfrac{f_\varepsilon(t) - f_\varepsilon(c)}{t-c} \leqslant 0$, ce qui est contraire à $f'_{\varepsilon,d}(c) > \varepsilon$.
Finalement, pour tout $\varepsilon > 0$ on a : $f(\alpha) \leqslant f(\beta) + \varepsilon(\beta - \alpha)$, i.e. : $f(\alpha) \leqslant f(\beta)$.

La formule des accroissements finis peut être généralisée de la façon suivante :

Théorème 3
Soient f et $g : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues, dérivables sur $\,]a\,,\,b[\,(a < b)$.
Alors, il existe $c \in\,]a\,,\,b[$ tel que :

$$f'(c)\,(g(b) - g(a)) = g'(c)\,(f(b) - f(a))\,.$$

En d'autres termes, si $g(b) \neq g(a)$ et si $g' \neq 0$ sur $\,]a\,,\,b[$, on a :

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\,.$$

$\triangle$

Ce résultat est bien une généralisation du théorème des accroissements finis en prenant $g : [a\,,\,b] \to \mathbb{R} : t \longmapsto t$.

Preuve du théorème
Considérons la fonction $h : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in [a\,,\,b]\,,\; h(t) = (f(t) - f(a))\,(g(b) - g(a)) - (g(t) - g(a))\,(f(b) - f(a))\,.$$

h est continue sur $[a\,,\,b]$, dérivable sur $\,]a\,,\,b[$ et $h(a) = h(b) (= 0)$, le théorème de Rolle implique qu'il existe $c \in\,]a\,,\,b[$ tel que $h'(c) = 0$, d'où le résultat.

Corollaire (Règle de L'Hospital)
Soient f et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur l'intervalle I, $t_0 \in I$ telles que $f(t_0) = g(t_0) = 0$.
On suppose de plus que f et g sont dérivables sur $I \setminus \{t_0\}$, et que ni g, ni g' ne s'annulent sur $I \setminus \{t_0\}$.
Si $\lim\limits_{\substack{t\to t_0\\ t\neq t_0}} \dfrac{f'(t)}{g'(t)}$ existe et vaut ℓ, alors : $\lim\limits_{\substack{t\to t_0\\ t\neq t_0}} \dfrac{f(t)}{g(t)}$ existe et vaut aussi ℓ.

Preuve
Cela résulte immédiatement du théorème précédent.

Exemple
On a $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \dfrac{1-\cos t}{tg^2\, t} = \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \dfrac{\sin t}{2tg\, t(1 + tg^2\, t)} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\cos t}{2(1 + 3tg^2\, t)(1 + tg^2\, t)} = \dfrac{1}{2}\,.$

Dans la formule des accroissements finis $f(b)-f(a)=(b-a)\,f'(c)$, le réel c, qui d'ailleurs dépend de a et b, n'est pas explicite et, bien souvent, on utilise une variante du théorème des accroissements :

Théorème 4 (Inégalité des accroissements finis)
Soit $f : I=(a\,,\,b)\to\mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a\,,\,b[$. On suppose que f' est bornée sur $]a\,,\,b[$ ou, plus précisément, qu'il existe des constantes réelles m et M telles que : $\forall t\in]a\,,\,b[\,,\ m\leqslant f'(t)\leqslant M$.
Alors, pour tous $x\,,\,y\in I$, avec $x<y$, on a :

$$m(y-x)\leqslant f(y)-f(x)\leqslant M(y-x)\,.$$

$\triangle$

Preuve
Cela résulte de la formule $f(y)-f(x)=(y-x)\,f'(c)$ où $c\in]x\,,\,y[$.

L'inégalité des accroissements finis est encore vraie en supposant seulement f dérivable à droite :

Théorème 4'
Soit $f : I=(a\,,\,b)\to\mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable à droite sur $]a\,,\,b[$. On suppose que f'_d est bornée sur $]a\,,\,b[$, c'est-à-dire qu'il existe des constantes réelles m et M telles que : $\forall t\in]a\,,\,b[\,,m\leqslant f'_d(t)\leqslant M$.
Alors, pour tous $x\,,\,y\in I$, avec $x<y$, on a :

$$m(y-x)\quad\leqslant\quad f(y)-f(x)\quad\leqslant\quad M(y-x)$$

$\triangle$

Preuve
Considérons les fonctions $g(t):=Mt-f(t)\,,\ h(t):=f(t)-mt\,,\ t\in I$.
Ces deux fonctions g et h sont continues sur I, dérivables à droite sur $]a\,,\,b[$ et vérifient :

$$\forall t\in]a\,,\,b[\quad,\quad g'_d(t)=M-f'_d(t)\geqslant 0\quad,\quad h'_d(t)=f'_d(t)-m\geqslant 0$$

Par suite, en utilisant le théorème 2, g et h sont monotones croissantes sur I, d'où le résultat.

Application 2
Soit $f :]a\,,\,b]\to\mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a\,,\,b]$ $(a<b)$ et telle que $\lim\limits_{\substack{t\to a\\ t>a}} f'(t)$ existe, alors f est prolongeable par continuité sur $[a\,,\,b]$; de plus, f est dérivable à droite en a et $f'_d(a)=\lim\limits_{\substack{t\to a\\ t>a}} f'(t)$.

Preuve
On montre d'abord que $\lim\limits_{\substack{t\to a\\ t>a}} f(t)$ existe.
Pour cela, notons $\ell=\lim\limits_{\substack{t\to a\\ t>a}} f'(t)$. Puisque $\lim\limits_{\substack{t\to a\\ t>a}} f'(t)=\ell$, il existe $t_0\in]a\,,\,b]$ et $M\in\mathbb{R}_+$ tels que :

$$\forall t\in]a\,,\,t_0]\,,\ |f'(t)|\leqslant M\,.$$

Alors pour tous $t\,,\,t'\in]a\,,\,t_0]$, d'après l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$|f(t)-f(t')|\leqslant M|t-t'|\quad,\quad\forall t\,,\,t'\in]a\,,\,t_0]\,.$$

Par suite, si $(t_n)_n$ est une suite de points de $]a\,,\,t_0]$ convergente vers a, la suite $(f(t_n))_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc est convergente. Ceci étant vrai quelle que soit la suite convergente vers a, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(t_n)$ ne dépend pas de la suite $(t_n)_n$ convergente vers a (prendre deux suites $(t_n)_n$ et $(t'_n)_n$ convergentes ves a et considérer la suite $(t''_n)_n:=(t_0\,,\,t'_0\,,\,t_1\,,\,t'_1\ldots))$.
Posons $f(a)=\lim\limits_{n\to+\infty} f(t_n)$, où $(t_n)_n$ est une suite tendant vers a. La fonction $f : [a\,,\,b]\to\mathbb{R}$ ainsi prolongée en $t=a$ est bien continue sur $[a\,,\,b]$.
Montrons maintenant que f est dérivable à droite en $t=a$ et que $f'_d(a)=\lim\limits_{\substack{t\to a\\ t>a}} f'(t)$.

Appliquant la formule des accroissements finis, on a :

$$\forall t\in]a\,,\,b]\quad,\quad f(t)-f(a)=(t-a)\,f'(c_t)\quad,\quad c_t\in]a\,,\,t[\,.$$

Comme $\lim\limits_{\substack{t \to a \\ t > a}} c_t = a$, et que $\lim\limits_{\substack{s \to a \\ s > a}} f'(s) = \ell$, on a aussi $\lim\limits_{\substack{t \to a \\ t > a}} f'(c_t) = \ell$ d'où $\lim\limits_{\substack{t \to a \\ t > a}} \dfrac{f(t) - f(a)}{t - a}$ existe et vaut ℓ, i.e. : $f'_d(a)$ existe et $f'_d(a) = \lim\limits_{\substack{t \to a \\ t > a}} f'(t)$.

On déduit de l'inégalité des accroissements finis que si $f : I = (a\,,\,b) \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $]a\,,\,b[$, et que si, pour tout $t \in]a\,,\,b[$, $|f'(t)| \leqslant k$, alors pour tous $x\,,\,y \in I$, on a : $|f(y) - f(x)| \leqslant k|x - y|$.

Ceci nous amène à poser la définition suivante :

Définition 1
Soit $k \in \mathbb{R}_+ = [0\,,+\infty[$. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite Lipschitzienne de rapport k (on dit aussi k-Lipschitzienne) sur I si elle vérifie :

$$\forall x\,,\, y \in I \quad , \quad |f(y) - f(x)| \leqslant k|y - x|\,.$$

<u>Exemple</u>
Les fonctions sin et cos sont 1-Lipschitziennes sur $\mathbb{R}$.

Lorsque f est dérivable, on peut caractériser les fonctions Lipschitziennes sur I :

Proposition 2
Soit $f : I = (a\,,\,b) \to \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $]a\,,\,b[$.
Alors f est k-Lipschitizienne sur $(a\,,\,b)$ si et seulement si $|f'|$ est majorée par k sur $]a\,,\,b[$.

Preuve
Si f est k-Lipschitzienne sur I et dérivable sur $]a\,,\,b[$, il résulte immédiatement de la définition que pour tout $t\,,\,t_0 \in]a\,,\,b[$ avec $t \neq t_0$, $\left|\dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}\right| \leqslant k$.
Par suite si t tend vers t_0, on obtient, puisque f est dérivable sur $]a\,,\,b[$, que : $|f'(t_0)| \leqslant k$.
Réciproquement, si, pour tout $t \in]a\,,\,b[$, on a : $|f'(t)| \leqslant k$, l'inégalité des accroissements finis donne que f est k-Lipschitzienne sur $]a\,,\,b[$ et, puisque f est continue sur I, f est aussi k-Lipschitzienne sur $I = (a\,,\,b)$.

Bien entendu, en utilisant le théorème 4', on a aussi :

Proposition 2'
Soit $f : I = (a\,,\,b) \to \mathbb{R}$ continue et dérivable à droite sur $]a\,,\,b[$.
Alors f est k-Lipschitzienne sur $(a\,,\,b)$ si et seulement si $|f'_d|$ est majorée par k sur $]a\,,\,b[$.

Définition 2 - *Uniforme continuité.*
On dit que f est uniformément continue sur I si f est continue en tout point de I et si de plus :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad , \quad \exists \eta_\varepsilon > 0 \quad \text{tel que} : \forall t\,,\, t' \in I \quad , \quad |t - t'| \leqslant \eta_\varepsilon \Longrightarrow |f(t) - f(t')| \leqslant \varepsilon\,.$$

Remarque
Une fonction k-Lipschitzienne sur un intervalle I est uniformément continue sur I. Cependant, une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ peut être uniformément continue sur I mais non Lipschitzienne sur I.
Par exemple, la fonction $f : t \longmapsto \sqrt{t} : [0\,,\,1] \to \mathbb{R}$ est uniformément continue sur $[0\,,\,1]$, et non Lipschitzienne sur $[0\,,\,1]$ puisque : $\dfrac{|f(t) - f(0)|}{|t - 0|} = \dfrac{\sqrt{t}}{|t|} \to +\infty$ lorsque $t \to 0$.

Que cette fonction $t \longmapsto \sqrt{t} : [0\,,\,1] \to \mathbb{R}$ soit uniformément sur $[0\,,\,1]$ résulte du théorème de Heine que l'on rappelle :

Théorème 4 (Heine)
Soit $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Alors f est uniformément continue sur le segment $[a\,,\,b]$.

$\triangle$

Application 3
Une fonction continue $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle vérifie la propriété des valeurs intermédiaires sur I c'est-à-dire, si a et $b \in I$, alors f prend sur $[a\,,\,b]$ toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$; en d'autres termes, $f(I)$ est un intervalle.

Exercice 1.2.6 *On considère* $f : x \longmapsto x\,\ell nx - x : I =]1, +\infty[\to \mathbb{R}$.

a) Montrer que f *est dérivable sur* I. *Identifier les ensembles* $f(I)$ *et* $f'(I)$.

b) Montrer que f *est une bijection de* I *sur* $f(I)$.

c) On note $g = f^{-1}$ *l'application réciproque de* f. *Calculer* $g(0)$ *et* $g'(0)$.

Exercice 1.2.7 *Soit* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Pour chaque* $n \in \mathbb{N}^*$, *on note* g_n *la fonction qui à* x *associe* $f(x + \frac{1}{n}) - f(x)$.

a) On suppose $g_n(x) > 0$ *pour tout* $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$. *Montrer que* $f(1) > f(0)$.

b) On suppose désormais que $f(0) = f(1)$. *Montrer que, pour chaque* $n \in \mathbb{N}^*$, *la fonction* g_n *s'annule en au moins un point de l'intervalle* $[0, 1 - \frac{1}{n}]$.

Cette propriété ne caractérise pas les fonctions continues. En fait on a :

Théorème 5 (Darboux)
Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.
Alors f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires sur I, i.e. : $f'(I)$ est un intervalle.

$\triangle$

Preuve
Soient $a\,,\,b$ deux points de I avec $a < b$ et C un réel compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$.
On va montrer qu'il existe $c \in (a\,,\,b)$ tel que $f'(c) = C$.
Pour cela, on considère la fonction auxiliaire $G : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} G(t) &= \frac{f(t)-f(a)}{t-a} \quad , \quad t \in]a\,,\,b] \\ G(a) &= f'(a) \end{cases} .$$

Par construction, G est continue sur $[a\,,\,b]$. Par suite, G prend sur $[a\,,\,b]$ toute valeur C_1 comprise entre $G(a) = f'(a)$ et $G(b) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Il existe donc $c_1 \in [a\,,\,b]$ tel que $G(c_1) = C_1$, avec $c_1 \neq a$ si $C_1 \neq f'(a)$.
Ainsi, utilisant la formule des accroissements finis, pour tout réel C_1 compris entre $f'(a)$ et $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ avec $C_1 \neq f'(a)$, il existe $\theta_1 \in]a\,,\,c_1[\subset]a\,,\,b]$ tel que : $C_1 = G(c_1) = \dfrac{f(c_1) - f(a)}{c_1 - a} = f'(\theta_1)$.
En considérant de manière analogue la fonction $H : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} H(t) &= \frac{f(t)-f(b)}{t-b} \quad , \quad t \in [a\,,\,b[\\ H(b) &= f'(b) \end{cases} .$$

on obtient que, pour tout réel C_2 compris entre $H(a) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ et $H(b) = f'(b)$, avec $C_2 \neq f'(b)$, il existe $\theta_2 \in [a\,,\,b[$ tel que : $C_2 = f'(\theta_2)$.
Ainsi, pour tout réel C compris strictement entre $f'(a)$ et $f'(b)$, il existe $\theta = c \in]a\,,\,b[$ tel que $f'(c) = C$.

1.3 Formule de Taylor-Lagrange.

La formule de Taylor-Lagrange est une généralisation de la formule des accroissements finis.

Théorème 1 (Taylor-Lagrange)
Soit $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$, $n \geqslant 1$, admettant une dérivée $f^{(n+1)}$ d'ordre $(n+1)$ sur $]a\,,\,b[$.
Alors, il existe $c \in]a\,,\,b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!}\, f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}\, f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!}\, f^n(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(c)\,.$$

$\triangle$

L'expression $\dfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(c)$ s'appelle reste de Taylor-Lagrange ; le réel c dépend de a , b et n.
Si $n = 0$, on retrouve exactement la formule des accroissements finis.

Preuve du théorème
On considère la fonction auxiliaire $\varphi : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) := f(x) - f(b) + \frac{b-x}{1!}\, f'(x) + \frac{(b-x)^2}{2!}\, f''(x) + \ldots + \frac{(b-x)^n}{n!}\, f^{(n)}(x) + A\,\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

où la constante A est déterminée par la condition $\varphi(a) = 0$.
La fonction φ est continue sur $[a\,,\,b]$, vérifie $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, est dérivable sur $]a\,,\,b[$ avec :

$$\begin{aligned}\varphi'(x) \;=\;\; & f'(x) + \Big(-f'(x) + \frac{b-x}{1!}\, f''(x)\Big) + \Big(-\frac{b-x}{1!}\, f''(x) + \frac{(b-x)^2}{2!}\, f'''(x)\Big) + \ldots \\ & + \Big(-\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}\, f^{(n)}(x) + \frac{(b-x)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(x)\Big) - A\,\frac{(b-x)^n}{n!}\end{aligned}$$

i.e. : $\varphi'(x) = \dfrac{(b-x)^n}{n!}\,[f^{(n+1)}(x) - A]$.

La formule des accroissements finis appliquée à φ donne l'existence d'un point $c \in]a\,,\,b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$, d'où $A = f^{(n+1)}(c)$ et la relation $\varphi(a) = 0$ n'est autre que la formule de Taylor-Lagrange annoncée.

Remarque
La formule de Taylor-Lagrange peut encore s'écrire sous la forme suivante : en posant $b = a+h$, le réel c compris strictement entre a et $a+h$ peut s'écrire sous la forme $c = a + \theta h$, où θ vérifie $0 < \theta < 1$; ainsi on a :

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!}\, f'(a) + \frac{h^2}{2!}\, f''(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!}\, f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(a+\theta h)\,.$$

Bien entendu, θ dépend de a , h et n.
Dans le cas particulier où $a = 0$, et en substituant la lettre x à la place de h, on obtient la formule, dite de Mac Laurin avec reste de Lagrange :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}\, f'(0) + \frac{x^2}{2!}\, f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}\, f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\theta x)\,.$$

Exercice 1.3.1 *Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f \in C^3([a,b],\mathbb{R})$. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange d'une part entre les extrémités a et $\frac{a+b}{2}$ et d'autre part entre les extrémités $\frac{a+b}{2}$ et b, montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :*
$f(b) \;=\; f(a) + (b-a)\, f'(\frac{a+b}{2}) + \frac{1}{24}\,(b-a)^3\, f'''(c)\,.$

Exercice 1.3.2 *Etant donnée une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on note :*

$N_{\infty,I}(f) := \sup_{t\in I} |f(t)|$.

1) On se donne une fonction $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^2. On fixe $x \in \mathbb{R}_+$ et $r > 0$. En appliquant la formule de Taylor au couple de points $(x+r,x)$, montrer que si f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}_+$, alors f' est aussi bornée sur $\mathbb{R}_+$. De plus, établir la majoration :

$(*)\qquad N_{\infty,\mathbb{R}_+}(f') \leq \frac{2}{r}\, N_{\infty,\mathbb{R}_+}(f) + \frac{r}{2}\, N_{\infty,\mathbb{R}_+}(f''), \qquad \forall\, r > 0$.

2) En déduire que :

$N_{\infty,\mathbb{R}_+}(f') \leq 2\, \sqrt{N_{\infty,\mathbb{R}_+}(f)\; N_{\infty,\mathbb{R}_+}(f'')}$.

Exercice 1.3.3

1) On se donne une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2. On fixe $x \in \mathbb{R}_+$ et $r > 0$. En appliquant la formule de Taylor avec les couples de points $(x-r,x)$ et $(x+r,x)$, montrer que si f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$, alors f' est aussi bornée sur $\mathbb{R}$. De plus, établir la majoration :

$(*)\qquad N_{\infty,\mathbb{R}}(f') \leq \frac{1}{r}\, N_{\infty,\mathbb{R}}(f) + \frac{r}{2}\, N_{\infty,\mathbb{R}}(f''), \qquad \forall\, r > 0$.

2) En déduire que :

$N_{\infty,\mathbb{R}}(f') \leq \sqrt{2\, N_{\infty,\mathbb{R}_+}(f)\; N_{\infty,\mathbb{R}_+}(f'')}$.

Exercice 1.3.4 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^p avec $p \geq 1$. On suppose que f et $f^{(p)}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout entier k compris entre 1 et $p-1$, la fonction $f^{(k)}$ est aussi bornée sur $\mathbb{R}$.*

Indication. Sélectionner $(p-1)$ réels distincts notés $h_1, \cdots, h_{p-1}$ puis évaluer pour tout $x \in \mathbb{R}$ les expressions $P_x(h_i) := \sum_{k=1}^{p-1} \frac{h_i^k}{k!}\; f^{(k)}(x)$ en fonction des bornes de f et $f^{(p)}$ sur $\mathbb{R}$.

Application 1 - *Développements asymptotiques.*

La fonction exponentielle $x \to e^x \,:\, \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (qui sera étudiée plus précisément au chapitre 3) est de classe $\mathcal{C}^\infty$; on peut donc lui appliquer la formule de Taylor-Lagrange en $a = 0$, à tout ordre n. Ainsi, pour tout réel x, il existe $\theta \in]0\,,\,1[$ tel que :

$$\exp(x) = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\, e^{\theta x}.$$

Comme $\left|\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|$ tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$, on en déduit que le reste $\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\, e^{\theta x}$ tend aussi vers zéro (θ dépend de n mais, puisque $\theta \in]0\,,\,1[\,,\ |e^{\theta x}| \leqslant e^{|x|}$). La suite $u_n(x) = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!}$ est donc convergente vers e^x, et on écrit, plus simplement :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \exp(x) = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

De même, pour les fonctions trigonométriques $x \longmapsto \sin x$ et $x \longmapsto \cos x$, on obtient (remarquer que $\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\,\dfrac{\pi}{2}\right)$ pour tout entier $n \geqslant 1$) que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k\, \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k\, \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Application 2 - *Inégalités.*

Théorème 2
Soit $f : \mathbb{R} \to [0\,, +\infty[$ une fonction de classe C^2, positive. On suppose que $M = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f''(t)| < +\infty$. Alors :

$$(\star) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad , \quad |f'(t)| \leqslant \sqrt{2M} \cdot \sqrt{f(t)}\,.$$

△

Preuve
Si $M = 0$, f est affine sur $\mathbb{R}$ et, comme $f(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, f est nécessairement constante, ce qui implique $f' = 0$: l'inégalité $(\star)$ est évidente.
Si $M > 0$ et si $t \in \mathbb{R}$, la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 donne :

$$\forall h \in \mathbb{R} \quad , \quad 0 \leqslant f(t+h) = f(t) + \frac{h}{1!}\,f'(t) + \frac{h^2}{2!}\,f''(t+\theta h) \leqslant f(t) + h \cdot f'(t) + M\,\frac{h^2}{2}\,.$$

Ce trinôme en $h \in \mathbb{R}$ étant toujours positif ou nul, son discriminant est négatif ou nul, i.e. : $(\star)$.

Application 3 - *Théorème de Glaeser en dimension 1.*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. On dit que f est 2-plate sur l'ensemble $Z_f = \{t \in I\,;\, f(t) = 0\}$ (formé des zéros de f) si : $f'(t) = f''(t) = 0\,, \quad \forall\, t \in Z_f$.

Théorème 3 (Glaeser)
Soit $f : I \to [0\,, +\infty[$ une fonction positive qui est de classe C^2 sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et qui est 2-plate sur Z_f. Alors, la fonction $g : I \to [0\,, +\infty[: t \longmapsto g(t) = \sqrt{f(t)}$ est de classe C^1 sur I.

△

Preuve
Tout d'abord, si $t_0 \in I \setminus Z_f$, puisque f est continue, il existe $\delta > 0$ tel que, sur $]t_0 - \delta\,, t_0 + \delta[\subset I$, f est strictement positive, et donc g est de classe C^1 sur $]t_0 - \delta\,, t_0 + \delta[$ avec $g'(t) = \dfrac{f'(t)}{2\sqrt{f(t)}}$.
Ensuite, on remarque que si $t_0 \in Z_f$, puisque f est positive ou nulle sur I, t_0 est un minimum relatif pour f et donc $f'(t_0) = 0$. On va montrer que, sous l'hypothèse $f''(t_0) = 0\,, t_0 \in Z_f$, alors g est dérivable en t_0 avec $g'(t_0) = 0$, et que, de plus, $\lim\limits_{\substack{t\to t_0\\ t\in I}} g'(t) = 0$.
La formule de Taylor-Lagrange en $t_0 \in Z_f$ s'écrit :

$$f(t_0+h) = f(t_0) + \frac{h}{1!}\,f'(t_0) + \frac{h^2}{2!}\,f''(t_0+\theta h) = \frac{h^2}{2} \cdot f''(t_0+\theta h) \quad , \quad t_0 + h \in I\,.$$

Par suite,

$$\frac{g(t_0+h) - g(t_0)}{h} = \frac{\sqrt{f(t_0+h)}}{h} = \frac{|h|}{h}\,\sqrt{|f''(t_0+\theta h)|}\,.$$

f'' étant continue, et $f''(t_0) = 0$, on en déduit que g est dérivable en t_0 et que $g'(t_0) = 0\,, t_0 \in Z_f$.

On montre maintenant que $\lim\limits_{\substack{t\to t_0\\ t\in I}} g'(t) = g'(t_0) = 0$, si $t_0 \in Z_f$.
Soit $t_0 \in Z_f$. L'intervalle I étant ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que $I_\delta(t_0) = [t_0 - \delta\,, t_0 + \delta] \subset I$.
Posons $M_\delta = \max\limits_{t\in I_\delta(t_0)} |f''(t)|$. Alors on a :

$$\forall t \in I_{\delta/2}(t_0) \quad , \quad |f'(t)|^2 \leqslant 2M_\delta \cdot f(t)\,.$$

En effet, si $M_\delta = 0$, f est affine sur $I_\delta(t_0)$ et, comme f est positive sur $I_\delta(t_0)$ avec $f(t_0) = 0$, f est constante sur $I_\delta(t_0)$, ce qui implique $f'(t) = 0$ pour $t \in I_\delta(t_0)$.
Si $M_\delta > 0$, alors en utilisant à nouveau la formule de Taylor-Lagrange en $t \in I_{\delta/2}(t_0)$, le trinôme $h \longmapsto f(t) + h \cdot f'(t) + M_\delta\,\dfrac{h^2}{2}$ est positif ou nul pour $|h| \leqslant \dfrac{\delta}{2}$. Par ailleurs, ce trinôme atteint son minimum sur $\mathbb{R}$ en $h_t = -\,\dfrac{f'(t)}{M_\delta}$.
Par ailleurs, la formule des accroissements finis appliquée à f' en t_0 et $t \in I_{\delta/2}$ donne :

$$|f'(t_0) - f'(t)| = |f'(t)| \leqslant M_\delta\,|t_0 - t| \leqslant \frac{\delta}{2}\,M_\delta\,,$$

et donc : $|h_t| \leqslant \dfrac{\delta}{2}$; ce qui prouve que le trinôme $h \longmapsto f(t) + h \cdot f'(t) + M_\delta \dfrac{h^2}{2}$ est positif ou nul en h_t et donc est positif ou nul sur $\mathbb{R}$ tout entier, son discriminant est donc négatif ou nul, i.e. : $|f'(t)|^2 \leqslant 2M_\delta \cdot f(t)$.
Finalement, si $t \in I_{\delta/2}(t_0)$, $|g'(t)| = \dfrac{|f'(t)|}{2\sqrt{f(t)}} \leqslant \sqrt{2M_\delta}$ si $t \notin Z_f$, et cette inégalité est encore pour tout $t \in Z_f$, puisqu'alors $g'(t) = 0$.
La fonction f étant de classe C^2, $\lim\limits_{\delta \to 0} M_\delta = 0$ et donc aussi :

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in I}} g'(t) \quad = \quad 0 \quad = \quad g'(t_0)\,.$$

$\square$

2 Fonctions convexes.

On se donne un intervalle I d'extrémités a et b avec $a < b$. On sélectionne une application $f : I \to \mathbb{R}$. On considère x dans I avec $a < x < b$. Par le point $\big(x, f(x)\big)$ de $\mathbb{R}^2$ passe une infinité de droites notées D_θ^x, chacune étant caractérisées par l' angle $\theta \in [0, 2\pi[$ qu'elle fait avec l' axe des abscisses :

$$D_\theta^x := \big\{ (x + s\cos\theta, f(x) + s\sin\theta)\,;\, s \in \mathbb{R} \big\} = \big\{ \big(\tilde{x}, \tilde{f}(\tilde{x})\big)\,;\, \tilde{x} \in \mathbb{R} \big\}.$$

Chaque droite D_θ^x partage $\mathbb{R}^2$ en deux demi-plans :

$$P_\theta^{x+} = \big\{(\tilde{x}, y)\,;\, y \geq \tilde{f}(\tilde{x})\big\}, \qquad P_\theta^{x-} = \big\{(\tilde{x}, y)\,;\, y \leq \tilde{f}(\tilde{x})\big\}.$$

Question. Comment caractériser les fonctions f pour lesquelles en tout point $x \in I$ on peut trouver $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que le graphe de f se trouve entièrement contenu dans P_θ^{x+} (resp. dans P_θ^{x-}) ?

La propriété sous-jacente s' appelle *convexité* (resp. *concavité*).

2.1 Fonctions convexes : définitions.

Définition 1
$f : I \to \mathbb{R}$, I intervalle de $\mathbb{R}$, est dite convexe si, $\forall t \in [0\,,\,1]$, $\forall a\,,\,b \in I$, on a :

$$f(t\cdot a + (1-t)\cdot b) \leqslant t\cdot f(a) + (1-t)\cdot f(b).$$

Exercice 2.1.1 *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :*

$$(*) \qquad f\big(\tfrac{x+y}{2}\big) \leq \tfrac{1}{2}\big(f(x) + f(y)\big), \qquad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

a) On suppose que f n'est pas convexe. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et :

$$f(t\cdot a + (1-t)\cdot b) > t\cdot f(a) + (1-t)\cdot f(b), \qquad \forall\, t \in]0,1[.$$

b) En raisonnant par l'absurde, montrer que toute fonction f continue vérifiant $(*)$ est convexe.

Définition 2
Une partie A du plan est dite convexe si : pour tout $M\,,\,N \in A$, le segment $[M\,,\,N] \subset A$.
On rappelle que $[M\,,\,N] = \{t\cdot M + (1-t)\cdot N\,,\, t \in [0\,,\,1]\}$.

Proposition 1
Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si son épigraphe $\text{épi}(f) = \{(x\,,\,y)\,|\,x \in I\,,\, y \geqslant f(x)\}$ est une partie convexe de $I \times \mathbb{R}$.

Preuve

C.N. Soient $(x\,,\,y)\,,\,(x'\,,\,y') \in \text{épi}(f)$, i.e. : $x\,,\,x' \in I$ et $y \geqslant f(x)\,,\, y' \geqslant f(x')$. On a donc, $\forall t \in [0\,,\,1]$:

$$t\cdot y + (1-t)\cdot y' \geqslant t\cdot f(x) + (1-t)\cdot f(x') \geqslant f(t\cdot x + (1-t)\cdot f(x'))$$

et donc le point $(t\cdot x + (1-t)\cdot x'\,,\, t\cdot y + (1-t)\cdot y') \in \text{épi}(f)$; en d'autres termes $[(x\,,\,y)\,,\,(x'\,,\,y')] \subset A$.

C.S. Soient $x\,,\,x' \in I$ et $(x\,,\,y)\,,\,(x'\,,\,y') \in \text{épi}(f)$.
Alors $t\cdot(x\,,\,y) + (1-t)\cdot(x'\,,\,y')$ appartient à $\text{épi}(f)$, pour tout $t \in [0\,,\,1]$. On a donc :

$$t\cdot y + (1-t)\cdot y' \geqslant f(t\cdot x + (1-t)\cdot x').$$

Par ailleurs, ceci est valable pour tout $y \geqslant f(x)$ et $y' \geqslant f(x')$.
En faisant tendre y vers $f(x)$ et y' vers $f(x')$, on obtient que pour tout $t \in [0\,,\,1]$:

$$f(t\cdot x + (1-t)\cdot x') \leqslant t\cdot f(x) + (1-t)\cdot f(x').$$

Exemples

1. Une fonction constante sur I ; une fonction affine $f(x) := \alpha\, x + \beta$, $x \in I$, sont convexes.
2. $f(x) := x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe car :
   $\forall t \in [0\,,\,1]\,,\quad t \cdot x^2 + (1-t) \cdot x'^2 - (t \cdot x + (1-t) \cdot x')^2 = t(1-t)\,(x-x')^2 \geqslant 0\,.$

Exercice 2.1.2 *Les affirmations suivantes sont-elles exactes ? Justifier le OUI ou donner un contre-exemple.*

a) Si f est convexe, alors la fonction $x \longmapsto f(x) - x$ est convexe..

b) Si f est convexe et g est concave, alors $f\,g$ est concave.

c) Si f et g sont convexes, alors $Min(f,g)$ est convexe.

d) Si f et g sont convexes, alors $Max(f,g)$ est convexe.

e) Si f est convexe et g concave, alors $f + g$ est convexe.

f) Si f est convexe sur $\mathbb{R}$, alors f ne peut pas tendre vers $-\infty$ en $+\infty$.

g) Si f est convexe et si g est convexe croissante, alors $g \circ f$ est convexe.

Définition 1'

On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est strictement convexe si pour tout couple $(x, x') \in I^2$ avec $x \neq x'$, on a :
$\forall t \in]0\,,\,1[\,,\quad f(t \cdot x + (1-t) \cdot x') < t \cdot f(x) + (1-t) \cdot f(x')$.

Exemples

3. $f(x) := |x| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe mais n'est pas strictement convexe.
4. De la même façon que pour l'exemple 2, la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x} :]0\,,+\infty[\to \mathbb{R}$ est strictement convexe.

Définition 3

$f : I \to \mathbb{R}$ est dite concave (resp. strictement concave) si $-f$ est convexe (resp. strictement convexe), ce qui est équivalent à :

$$\forall t \in [0\,,\,1]\,, \forall x\,,\, x' \in I : f(t \cdot x + (1-t) \cdot x') \geqslant t \cdot f(x) + (1-t) \cdot f(x') \quad (\text{resp.} > \text{si } t \in]0\,,\,1[\text{ et } x \neq x')\,.$$

Exemple

On verra que $f(x) = \ell n\, x :]0\,,+\infty[\to \mathbb{R}$ est strictement concave.

Exercice 2.1.3 *Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ concave.*

a) Montrer que la fonction $x \longmapsto f(x)/x$ est décroissante sur $]0,+\infty[$.

b) Montrer que : $\forall\, (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, on a $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.

Proposition 2

$f : I \to \mathbb{R}$ est convexe (resp. strictement convexe) si et seulement si :
$\forall n \geqslant 2\,, \forall \lambda_i \in [0\,,\,1]\,, \sum_1^n \lambda_i = 1\,, \forall x_i \in I\,, i = 1\,,\,\dots\,,\,n$, on a :

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot f(x_i) \quad (\text{resp.} <, \text{les } x_i \text{ tous distincts}\,,\, \lambda_i \in]0\,,\,1[\,)\,.$$

Preuve

La condition est évidemment suffisante (prendre $n = 2$).

Elle est aussi nécessaire. En effet, elle est vraie pour $n = 2$. On la montre par récurrence sur n.
Soit $n > 2$ et supposons la propriété vraie pour $n-1$. Soient alors $x_1\,,\,\ldots\,,\,x_n \in I$ (que l'on peut supposer distincts deux à deux) et $\lambda_i \in]0\,,\,1[\,, i = 1\,,\,\ldots\,,\,n\,,\ \sum_1^n \lambda_i = 1$.

Posons $\mu = \sum_1^{n-1} \lambda_i \in]0\,,\,1[$ et $\lambda_n = 1 - \mu \in]0\,,\,1[$.

Soient $a = \min_1^n x_i$ et $b = \max_1^n x_i$; $a\,,\,b \in I$.

On a donc $a \leqslant \frac{1}{\mu} \sum_1^{n-1} \lambda_i \cdot x_i \leqslant b$. Et donc $x = \frac{1}{\mu} \sum_1^{n-1} \lambda_i \cdot x_i \in I$.

L'hypothèse de récurrence implique que, en posant $t_i := \frac{\lambda_i}{\mu}$, $t_i \in]0\,,\,1[\,, \sum_1^{n-1} t_i = 1$:

$$f(x) \leqslant \sum_1^{n-1} t_i \cdot f(x_i)$$

i.e. : $\mu \cdot f(x) \leqslant \sum_1^{n-1} \lambda_i \cdot f(x_i)$.
Par ailleurs, f étant convexe on a :

$$f\left(\sum_1^n \lambda_i \cdot x_i\right) = f(\mu \cdot x + (1-\mu) \cdot x_n) \leqslant \mu \cdot f(x) + (1-\mu) \cdot f(x_n)$$

i.e. : $f\left(\sum_1^n \lambda_i \cdot x_i\right) \leqslant \sum_1^n \lambda_i \cdot f(x_i)$.

Interprétation géométrique
L'image de tout barycentre des x_i est inférieure au barycentre, avec les mêmes masses, des images par f.

Exercice 2.1.4 *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \cdots, x_n$ dans $]0, +\infty[$ et $y_1, \cdots, y_n$ dans $]0, +\infty[$.*

a) En utilisant la concavité de la fonction logarithme, montrer l'inégalité arithmético-géométrique : $(x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$.

b) En déduire que : $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

c) Montrer que : $\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{i=1}^n y_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{i=1}^n (x_i + y_i)\right)^{\frac{1}{n}}$.

Indication : Appliquer la question a) avec $x_i = \frac{a_i}{a_i + b_i}$ puis avec $x_i = \frac{b_i}{a_i + b_i}$.

2.2 Fonctions convexes : propriétés.

On commence par un lemme :

Lemme
Soient $A = (a\,,\,a')\,,\ B = (b\,,\,b')\,,\ C = (c\,,\,c')$ trois points de $\mathbb{R}^2$ tels que $a < b < c$.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) B est au-dessous de AC (la droite AC).
(ii) C est au-dessus de AB (la droite AB).
(iii) A est au-dessus de BC (la droite BC).
(iv) La pente $p(AB) \leqslant p(AC)$, pente de AC.

(v) La pente $p(AC) \leqslant p(BC)$, pente de BC.

(vi) La pente $p(AB) \leqslant p(BC)$.

Preuve

L'équation de AC est $y := a' + \dfrac{c' - a'}{c - a} \cdot (x - a)$.

L'équation de AB est $y := a' + \dfrac{b' - a'}{b - a} \cdot (x - a)$.

L'équation de BC est $y := b' + \dfrac{c' - b'}{c - b} \cdot (x - b)$.

On a : (i) $\Longleftrightarrow$ (iv) car (i) signifie exactement que $b' \leqslant a' + \dfrac{c' - a'}{c - a}\,(b - a)$, ce qui est équivalent à $b' - a' \leqslant \dfrac{c' - a'}{c - a}\,(b - a)$ et, comme $b - a > 0$, cela équivaut à $\dfrac{b' - a'}{b - a} \leqslant \dfrac{c' - a'}{c - a}$ i.e. : $p(AB) \leqslant p(AC)$, i.e. : (iv).

De même, (ii) équivaut à (iv).

On a donc (ii) $\Longleftrightarrow$ (iv) $\Longleftrightarrow$ (i).

Par ailleurs (iii) équivaut à (v) car (iii) équivaut à :

$$\begin{aligned} a' \geqslant b' + \frac{c' - b'}{c - b}\,(a - b) &\Longleftrightarrow a' - c' \geqslant b' - c' + \frac{c' - b'}{c - b}\,(a - b) \\ &\Longleftrightarrow a' - c' \geqslant \frac{b' - c'}{b - c}\,(a - c) \end{aligned}$$

et, comme $a - c < 0$, ceci équivaut à : $\dfrac{b' - c'}{b - c} \geqslant \dfrac{c' - a'}{c - a}$ i.e. : $p(AC) \leqslant p(BC)$.

Enfin, (v) équivaut à : $\dfrac{c' - b'}{c - b} \geqslant \dfrac{c' - a'}{c - a} \Longleftrightarrow (c - a)\,(c' - b') \geqslant (c - b)\,(c' - a')$ puisque $c - a > 0$.

Et cette dernière inégalité peut encore s'écrire :

$$(c - a)\,(c' - a' + a' - b') \;\geqslant\; (c' - a')\,(c - a + a - b)$$

i.e. : $(c - a)\,(c' - a') + (c - a)\,(a' - b') \geqslant (c' - a')\,(c - a) + (c' - a')\,(a - b)$

i.e. : $(c - a)\,(a' - b') \geqslant (c' - a')\,(a - b)$

i.e. : $(c' - a')\,(b - a) \geqslant (c - a)\,(b' - a')$

ce qui équivaut à $\dfrac{c' - a'}{c - a} \geqslant \dfrac{b' - a'}{b - a}$ car $b - a > 0$ et $c - a > 0$, i.e. : (iv).

Finalement (iii) $\Longleftrightarrow$ (v) $\Longleftrightarrow$ (iv) $\Longleftrightarrow$ (i) et à (ii). De même on montre que (iv) $\Longleftrightarrow$ (vi).

De ce lemme on déduit la proposition suivante :

Proposition 1

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, I intervalle de $\mathbb{R}$.

Alors f est convexe sur I si et seulement si, pour tout $a \in I$, la fonction $p(AM) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$ (resp. f est strictement convexe sur I si et seulement si $p(AM)$ est strictement croissante sur $I \setminus \{a\}$).

Preuve

Il résulte de la définition et de la proposition 2 que $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si quels que soient $a < b < c$ dans I, les points A, B, C du lemme vérifient l'une des conditions équivalentes du lemme.

Et il résulte de ce lemme que $x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ est croissante, et réciproquement.

De cette proposition, on déduit :

Proposition 2

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors en tout point a intérieur à I, f admet une dérivée à droite $f'_d(a)$ et une dérivée à gauche $f'_g(a)$ et on a :

$$f'_g(a) \;\leqslant\; f'_d(a)\,.$$

En particulier, f est continue en tout point a intérieur à I.

Preuve
Soit $a \in \overset{\circ}{I} =]\alpha\,,\,\beta[$ si $I = (\alpha\,,\,\beta)$ et soient $y < a < x$ deux points de $\overset{\circ}{I}$.
D'après la proposition précédente on a :

$$p_a(y) \;=\; \frac{f(y)-f(a)}{y-a} \;\leqslant\; \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \;=\; p_a(x)\,.$$

La fonction $x \longmapsto p_a(x) :]a\,,\,\beta[\to \mathbb{R}$ est décroissante quand x décroît vers a, à droite, minorée par $p_a(y)$: elle admet donc une limite quand $x \to a\,,\, x > a$ et, par définition, cela signifie que f est dérivable à droite au point a et de plus :

$$\forall y \in]\alpha\,,\,a[\quad , \quad p_a(y) \;=\; \frac{f(y)-f(a)}{y-a} \;\leqslant\; f'_d(a)\,.$$

Comme $y \longmapsto p_a(y) :]\alpha\,,\,a[\to \mathbb{R}$ est croissante, majorée par $f'_d(a)$, elle admet une limite quand y tend vers a, $y < a$ et cette limite n'est autre que $f'_g(a)$ et on a : $f'_g(a) \leqslant f'_d(a)$.

Que f est continue sur $\overset{\circ}{I}$ résulte du fait que, si f est dérivable à droite (resp. à gauche) en $a \in]\alpha\,,\,\beta[$, alors f est continue à droite (resp. à gauche) en $x = a$, i.e. : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = f(a)$ (resp. $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = f(a)$) ; f' étant dérivable à droite et à gauche en tout point de $]\alpha\,,\,\beta[$ est continue sur $]\alpha\,,\,\beta[$.

En fait, on a un résultat supplémentaire sur ces dérivées à droite, et à gauche :

Proposition 2'
Si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe, alors les applications f'_g et f'_d définies sur $\overset{\circ}{I}$, intérieur de I, sont monotones croissantes et plus précisément, on a, pour $a\,,\,b \in \overset{\circ}{I}$, avec $a < b$:

$$f'_d(a) \;\leqslant\; \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \;\leqslant\; f'_g(b)\,.$$

Preuve
D'après le lemme on a :

$$\forall x \in]a\,,\,b[\quad , \quad \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \;\leqslant\; \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \;\leqslant\; \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$$

et si x tend vers a, $x > a$, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tend vers $f'_d(a)$; de même si x tend vers b, $x < b$, $\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}$ tend vers $f'_g(b)$.

Exercice 2.2.1 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. L'objectif de cet exercice est de démontrer que f est nécessairement dérivable sur $]a,b[$ sauf, peut-être, en une infinité dénombrable de points de $]a,b[$.*

a) A l'aide de l'exercice 1.1.1, montrer que f'_d et f'_g sont des fonctions continues sauf, peut-être, en une infinité dénombrable (notée D) de points de $]a,b[$.
c) Montrer que f est dérivable en tout point $x \in]a,b[\backslash D$. Conclure.

Exercice 2.2.2 *Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soit $[c,d] \subset]a,b[$. Montrer que f est une fonction Lipschitzienne sur $[c,d]$. A-t'on le même résultat sur $]a,b[$?*

Preuve de l'exercice 2.2.2. Soient $a\,,\,b \in \overset{\circ}{I}$ avec $a < b$ et $x\,,\,y \in [a\,,\,b]$. D'après la proposition 2' pour $a < x < y < b$, on a (toujours en utilisant le lemme) :

$$f'_d(a) \;\leqslant\; \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \;\leqslant\; \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \;\leqslant\; \frac{f(b)-f(y)}{b-y} \;\leqslant\; f'_g(b)\,.$$

En particulier :

$$f'_d(a)\cdot(y-x) \ \leqslant\ f(y)-f(x) \ \leqslant\ f'_g(b)\cdot(y-x)\,.$$

Posons $M := M_{ab} = \max(|f'_g(b)|\,,\,|f'_d(a)|)$. On a donc, pour $a<x<y<b$:

$$-\,M(y-x) \ \leqslant\ f(y)-f(x) \ \leqslant\ M(y-x) \quad \text{,i.e. : } |f(y)-f(x)| \ \leqslant\ M\cdot|y-x|$$

inégalité encore valable pour $y=b$ et $x=a$ par continuité de f sur $[a\,,\,b]$.

Corollaire
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction convexe, dérivable et majorée sur $\mathbb{R}$. Alors f est constante.

Preuve
Il suffit de montrer que la dérivée f' de f est identiquement nulle.
Supposons qu'il existe $x_0\in\mathbb{R}$ tel que $f'(x_0)=\alpha\neq 0$.
On déduit de la proposition 2' que : si $y<x_0<x$, on a :

$$\frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0} \ \leqslant\ f'(x_0)=\alpha \ \leqslant\ \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,.$$

Par suite, si $\alpha>0$, on a : $f(x)\geqslant f(x_0)+\alpha(x-x_0)$ pour tout $x>x_0$, et f ne serait pas majorée lorsque x tend vers $+\infty$. Et si $\alpha<0$, $f(x_0)-\alpha(y_0-y)\leqslant f(y)$ pour tout $y<x_0$ et, de nouveau, y ne serait pas majorée lorsque y tend vers $-\infty$.

Remarque
En fait, l'hypothèse f dérivable dans cet énoncé est inutile : il suffit d'utiliser à nouveau la double inégalité de la preuve de la proposition 2'. Pour tous $y<a<b<x$,

$$\frac{f(y)-f(a)}{y-a} \ \leqslant\ \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \ \leqslant\ \frac{f(x)-f(b)}{x-b}\,.$$

Des propositions 2 et 2', on déduit une caractérisation des fonctions convexes et dérivables sur I (ce qui implique continues sur I).

Théorème 1
Soit $f:I\to\mathbb{R}$ dérivable. Les propositions suivantes sont équivalentes :
(i) $f':I\to\mathbb{R}$ est croissante.
(ii) f est convexe sur I.

$\triangle$

Rappel : pour $f:I\to\mathbb{R}$, $I=(\alpha\,,\,\beta)$, on entend que f est dérivable sur I si f est dérivable sur $]\alpha\,,\,\beta[$ et si f admet une dérivée à droite en α, si $\alpha\in I$, et une dérivée à gauche en β, si $\beta\in I$.

Preuve
Il résulte des propositions 2 et 2' que (ii) $\Longrightarrow$ (i).
Réciproquement, soient $a<b<c$ trois points de I. D'après le théorème des accroissements finis (car f est continue sur $[a\,,\,c]$ et dérivable sur $]a\,,\,c[$) on a :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c_1) \qquad , \qquad c_1\in\,]a\,,\,b[$$

$$\text{et}\quad \frac{f(c)-f(b)}{c-b} = f'(c_2) \qquad , \qquad c_2\in\,]b\,,\,c[\,.$$

Comme $c_1<c_2$, on a donc d'après (i) :

$$f'(c_1)\leqslant f'(c_2)\,, \quad \text{i.e. : } p(AB) \ =\ \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \ \leqslant\ \frac{f(c)-f(b)}{c-b} \ =\ p(BC)$$

ce qui, d'après le lemme, implique f convexe sur I.

Exercice 2.2.3 *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que les seules situations susceptibles de se produire sont les suivantes :*

- f est croissante sur $\mathbb{R}$.

- f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

- il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que f est décroissante sur $]-\infty, a]$ puis croissante sur $[a, +\infty[$.

Application 1
Si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe et dérivable sur I, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

En effet, $f' : I \to \mathbb{R}$ est monotone croissante et, d'après le théorème de Darboux, vérifie la propriété des valeurs intermédiaires sur I, est donc continue sur I.

Dans le cas où f est deux fois dérivable sur I, on a :

Théorème 2
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur I. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe.

(ii) $f'' \geqslant 0$ sur $\overset{\circ}{I}$.

$\triangle$

Preuve
Il résulte du théorème des accroissements finis que $f' : I \to \mathbb{R}$ est croissante si et seulement si $f'' \geqslant 0$ sur $\overset{\circ}{I}$.

Exercice 2.2.4 *Montrer que la fonction $x \longmapsto \ell n\,(\ell n x)$ est concave sur l'intervalle $[1, +\infty[$. En déduire que :*
$\ell n \, \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{\ell n x \; \ell n y}\,, \quad \forall\, (x, y) \in [1, +\infty[^2\,.$

Exercice 2.2.5 *Montrer que la fonction f définie sur l'intervalle $]0, \pi[$ en posant $f(x) = \ell n\,(1 + \cos x)$ est concave. En déduire que :*
$f(x) \leq \frac{\pi}{2} - x\,, \quad \forall\, x \in]0, \pi[\,.$

Exercice 2.2.6 *Soient f et g deux fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose $g(x) = f(\frac{1}{x})$ et $h(x) = x\, f(x)$. Montrer que g est convexe si et seulement si h est convexe.*

Application 2 : Inégalités de Hölder et Minkowski
En appliquant le théorème 2, on déduit immédiatement que les fonctions :

(i) $x \longmapsto x^p : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $p \geqslant 1$

(ii) $x \longmapsto \exp(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(iii) $x \longmapsto -\,\ell n(x) :]0\,, +\infty[\to \mathbb{R}$

sont convexes.
En particulier, du fait que ℓn est concave sur $]0\,, +\infty[$, on déduit que :

$$(\star) \qquad \forall a\,, b \geqslant 0 \quad , \quad a \cdot b \;\leqslant\; \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad , \quad \text{si} \;\; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \;\; \text{et} \;\; p > 1$$

En effet, on a :

$$\ell n \left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \right) \;\geqslant\; \frac{1}{p}\; \ell n(a^p) + \frac{1}{q}\; \ell n(b^q) \;=\; \ell n(ab)$$

Corollaire (Inégalité de Hölder)
Soient $a_1 , \ldots , a_n$ et $b_1 , \ldots , b_n$, $2n$ nombres complexes.
Alors on a :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad , \quad \text{si } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \text{ et } p>1$$

Preuve
On peut toujours supposer que $a_i , b_i \in [0 , +\infty[$ et que $\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \neq 0$, $\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q \neq 0$.

En posant $a_i' := \dfrac{a_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}}$ et $b_i' := \dfrac{b_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}}$, on est ramené à montrer que : $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i' \cdot b_i'\right| \leqslant 1$, ce qui résulte immédiatement de l'inégalité $(\star)$ appliquée à $a_i' \, b_i'$ et en sommant par rapport à i.

Remarque
Si $p = 2$, on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i \, b_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Corollaire (Inégalité de Minkowski)
Soient $a_1 , \ldots , a_n$ et $b_1 , b_2 , \ldots , b_n$, $2n$ nombres complexes et $p > 1$.
Alors on a :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i+b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Preuve
On a :

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i+b_i|^p \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i+b_i|^{p-1} \cdot |a_i| + \sum_{i=1}^{n} |a_i+b_i|^{p-1} \cdot |b_i|$$

et appliquant l'inégalité de Hölder pour chacune des sommes de droite, il vient :

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i+b_i|^p \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i+b_i|^p\right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

d'où le résultat, puisque $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

Exercice 2.2.7 *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombre réels positifs. On pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$ et $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}$. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi.*

Application 3 : Application aux matrices symétriques réelles positives
On rappelle qu'une matrice $M = (m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est symétrique réelle si, pour tout $i, j \in [1 , \ldots , n]$, $m_{ij} \in \mathbb{R}$ et $m_{ji} = m_{ij}$. Une matrice $M = (m_{ij})$ est dite positive (resp. strictement positive) si la forme quadratique associée $x \longmapsto q_M(x) := \sum_{i,j=1}^{n} m_{ij}\ x_i\ x_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est positive, i.e. $q_M(x) \geqslant 0$ (resp. définie positive, i.e. $q_M(x) > 0$ pour $x \neq 0$).

Proposition 3
Soient A et B deux matrices symétriques réelles et positives.
Alors, pour tout $\theta \in [0\,,\,1]$, on a :

$$(\star) \qquad (\det A)^{\theta} \cdot (\det B)^{1-\theta} \;\leqslant\; \det(\theta \cdot A + (1-\theta) \cdot B)$$

Preuve
A et B étant réelles symétriques et positives, leurs valeurs propres sont toutes réelles et positives, et il en est de même de la matrice $\theta \cdot A + (1-\theta) \cdot B$: l'inégalité $(\star)$ a donc un sens.
On peut toujours supposer que $\det A \neq 0$, i.e. A strictement positive ; il existe alors une matrice P inversible telle que :

$$^{t}PAP = I \quad \text{et} \quad {}^{t}PBP = D$$

où $D = \operatorname{diag}(\alpha_i)$ est une matrice diagonale à coefficients $\alpha_i \geqslant 0$.
En posant $Q = P^{-1}$, on a donc :

$$A = {}^{t}QQ \quad \text{et} \quad B = {}^{t}QDQ$$

et $\det A = (\det Q)^2$, $\det(B) = (\det Q)^2 \cdot \prod_{i=1}^{n} \alpha_i$ et $\det(\theta \cdot A + (1-\theta) \cdot B) = (\det Q)^2 \cdot \prod_{i=1}^{n} (\theta + (1-\theta) \cdot \alpha_i)$.
La fonction ℓn étant concave, on a donc, pour tout $i = 1\,,\,\ldots\,,\,n$:

$$\theta \cdot \ell n\, 1 + (1-\theta) \cdot \ell n\, \alpha_i \;\leqslant\; \ell n(\theta + (1-\theta) \cdot \alpha_i)$$

d'où l'inégalité :

$$\left(\prod_{i=1}^{n} \alpha_i \right)^{1-\theta} \;\leqslant\; \prod_{i=1}^{n} (\theta + (1-\theta) \cdot \alpha_i)$$

c'est-à-dire $(\star)$.

Proposition 4
Soient A et B deux matrices d'ordre $n \geqslant 1$ symétriques réelles et positives.
Alors on a :

$$(\star\star) \qquad (\det A)^{\frac{1}{n}} + (\det B)^{\frac{1}{n}} \;\leqslant\; [\det(A+B)]^{\frac{1}{n}}$$

Preuve
On peut toujours supposer A inversible, i.e. A strictement positive (sinon remplacer A par $A + \varepsilon I$, $\varepsilon > 0$, et faire tendre ε vers 0).
Comme pour la proposition précédente, il existe Q inversible telle que :

$$A = {}^{t}QQ \quad \text{et} \quad B = {}^{t}QDQ \quad , \quad D = \operatorname{diag}(\alpha_i)$$

où $\alpha_1\,,\,\ldots\,,\,\alpha_n \in [0\,,\,+\infty[$. Dans ces conditions, l'inégalité $(\star\star)$ à établir n'est autre que :

$$(\star\star)' \qquad 1 + \left[\prod_{i=1}^{n} \alpha_i \right]^{\frac{1}{n}} \;\leqslant\; \left[\prod_{i=1}^{n} (1 + \alpha_i) \right]^{\frac{1}{n}}$$

Soit alors $\varphi : x \longmapsto \varphi(x) := \ell n(1 + e^x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Cette fonction est convexe puisque $\varphi''(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} \geqslant 0$. Par suite, pour $s_1\,,\,\ldots\,,\,s_n \in \mathbb{R}$, on a :

$$\varphi\,\left(\frac{s_1 + s_2 \,+\, \ldots \,+\, s_n}{n} \right) \;\leqslant\; \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varphi(s_i)$$

ce qui est équivalent à $(\star\star)'$ puisque ℓn est monotone croissante, et où on a choisi s_i tels que $\alpha_i = e^{s_i}$.

Remarque
En utilisant à nouveau la concavité de la fonction ℓn, pour a et $b \geqslant 0$, pour tout $\theta \in [0\,,\,1]$, on a :

$$a^{\theta} \cdot b^{1-\theta} \;\leqslant\; \theta \cdot a + (1-\theta)\, b$$

et, en posant $a = (\det A)^{\frac{1}{n}}$, $b = (\det B)^{\frac{1}{n}}$, il résulte de $(\star\star)$ que l'on a :

$$(\det A)^{\theta} \cdot (\det B)^{1-\theta} \;\leqslant\; \left[\theta \cdot (\det A)^{\frac{1}{n}} + (1-\theta)\,(\det B)^{\frac{1}{n}} \right]^{n} \;\leqslant\; \det(\theta \cdot A + (1-\theta)\, B)$$

où n est l'ordre des matrices A et B.

On a vu que si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe, f est continue sur $\overset{\circ}{I}$. Elle peut ne pas être continue sur I tout entier.

Exemple
Soit $f :]a\,,\,b[\to \mathbb{R}$ une fonction constante égale à λ, et définissons $f(a)$ et $f(b)$ arbitrairement strictement plus grands que λ : $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ est convexe non continue en a et b.

2.3 Extrema d'une fonction convexe.

Proposition 1
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe.
Alors si f est dérivable sur $\overset{\circ}{I}$ et si $f'(x_0) = 0$ en un point $x_0 \in \overset{\circ}{I}$, $f(x_0)$ est un minimum de f sur I.

Preuve
Puisque $f'(x_0) = 0$ et $x_0 \in \overset{\circ}{I}$, et f' croissante sur $\overset{\circ}{I}$, on a pour tout $x \leqslant x_0$: $f'(x) \leqslant 0$, et $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant x_0$, d'où le tableau de variations :

x		x_0	
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

et donc $f(x_0)$ est un minimum global sur $\overset{\circ}{I}$.
Il reste à montrer que si $I = [\alpha\,,\,\beta)$ alors $f(\alpha) \geqslant f(x_0)$. De même, si $I = (\alpha\,,\,\beta]$, alors $f(\beta) \geqslant f(x_0)$.
Si ce n'était pas le cas on aurait : $\forall x \in]\alpha\,,\,x_0[\,,\ f(x) \geqslant f(x_0)$ et $f(\alpha) < f(x_0)$ ce qui contredirait le fait que f est convexe sur $[\alpha\,,\,x_0]$ (cf. : le lemme, B est au-dessous de la droite AC !). De même, on ne peut avoir $f(\beta) < f(x_0)$.

Proposition 2
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe.
On suppose que f atteint un maximum global en un point $x_0 \in \overset{\circ}{I}$. Alors f est constante sur I.

Preuve
Si f n'est pas constante sur I, il existe $y \in I$ tel que $f(y) < f(x_0)$.
Comme $x_0 \in \overset{\circ}{I}$, il existe $z \in I$ tel que $x_0 \in]y\,,\,z[$. x_0 est donc barycentre de y et z de la forme : $x_0 = t\cdot y + (1-t)\cdot z$ avec $t \in]0\,,\,1[$.
Mais alors : $f(x_0) \leqslant t \cdot f(y) + (1-t) \cdot f(z) < t \cdot f(x_0) + (1-t) \cdot f(x_0) = f(x_0)$ ce qui est absurde.

Corollaire
Si $f : I = [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ est convexe et continue sur le segment $[a\,,\,b]$, alors f atteint son maximum en a ou b.

Preuve
f étant continue sur le segment $[a\,,\,b]$ admet et atteint son maximum en un point $x_0 \in [a\,,\,b]$.
Si $x_0 \in]a\,,\,b[$, f est constante sur $I = [a\,,\,b]$, mais alors, dans ce cas : $f(x_0) = f(a) = f(b)$.

3 Fonctions logarithme et exponentielle.

Ce chapitre a pour objectif de rappeler les définitions et les propriétés fondamentales des fonctions logarithme et exponentielle d'une variable réelle.

On admettra pour cela la propriété suivante (qui sera démontrée au chapitre IV) :
Si f est une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors f admet au moins une primitive sur I.

3.1 Etude de quelques suites élémentaires.

On rappelle ici quelques résultats concernant le comportement d'une suite géométrique $(a^n)_n$, $a \in \mathbb{C}$.

Proposition 1
On a :
(i) $a \in]1\,,\infty[\,,\ \lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty\,.$
(ii) $|a| < 1\,,\ \lim_{n\to+\infty} a^n = 0\,.$
(iii) $a = 1\,,\ \lim_{n\to+\infty} a^n = 1\,.$
(iv) $|a| > 1$ et $a \notin]1\,,+\infty[$, la suite $(a^n)_n$ n'a pas de limite.
(v) $|a| = 1$ avec $a \neq 1$, la suite $(a^n)_n$ n'a pas de limite.

Preuve
(i) On écrit $a = 1 + h$ avec $h > 0$ et on utilise la formule (algébrique) du binôme :

$$a^n = (1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} h^k = 1 + nh + \cdots + h^n\,.$$

Donc $a^n \geqslant 1 + nh$ d'où le résultat.
(ii) Si $a = 0$, c'est évident.
Si $|a| < 1$ et $a \neq 0$, $0 < r = |a| < 1$ et, d'après (i) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{r^n} = +\infty$ ce qui implique $\lim_{n\to+\infty} r^n = 0$ et donc aussi $\lim a^n = 0$ car $|a^n| = |a|^n = r^n$.
(iv) Si la suite $(a^n)_n$ était convergente, elle serait bornée, i.e. : il existerait une constante $M \geqslant 0$ telle que, pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$|a^n| \leqslant M$$

ce qui impliquerait que la suite $(|a|^n)_n$ serait bornée, ce qui n'est pas possible d'après (i).
(v) a s'écrit $a = e^{i\,\theta}$ avec $\theta \in]0, 2\,\pi[$. On raisonne par l'absurde. Si la suite $(a^n)_n$ était convergente, la suite
$S_n := 1 + e^{i\,\theta} + \cdots + e^{i\,n\,\theta} = \frac{1-e^{i\,(n+1)\,\theta}}{1-e^{i\,\theta}}\,,\qquad n \in \mathbb{N}$
serait aussi convergente. Mais alors $a^n = S_n - S_{n-1}$ doit tendre vers 0. C'est contradictoire avec le fait que $|a^n| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

<u>La suite</u> $\left(\dfrac{a^n}{n!}\right)_n$, <u>$a \in \mathbb{C}$</u>.

Proposition 2
Pour tout $a \in \mathbb{C}$, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$.

Preuve
On pose $u_n = \dfrac{a^n}{n!}$ et donc, pour $a \neq 0$: $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \dfrac{|a|}{n+1}\,.$
Comme $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{|a|}{n+1} = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant N$, $\dfrac{|a|}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}\,.$
Par suite, pour $n \geqslant \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{2^{n-N}}\,|u_N| = \dfrac{1}{2^n}\,2^N\,|u_N|$ et donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ d'où le résultat.

3.2 La fonction logarithme.

Définition
On appelle fonction logarithme népérien, notée ℓn, la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ comme la primitive sur $]0\,,+\infty[$ qui s'annule en $t=1$ de la fonction continue $t \longmapsto \dfrac{1}{t} :]0\,,+\infty[\to \mathbb{R}$.

Ce qui, en utilisant les notations du chapitre IV, s'écrit : $\forall t \in]0\,,+\infty[\;\;,\;\; \ell n t = \displaystyle\int_1^t \frac{ds}{s}$.

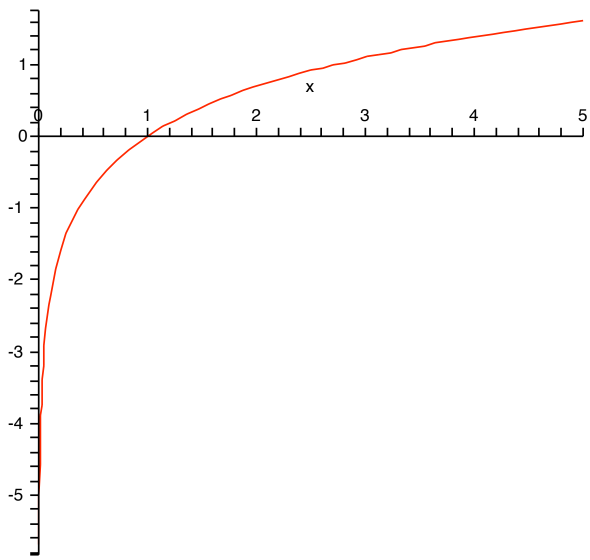

FIG. 1 – Graphe de la fonction logarithme.

Propriété fondamentale de la fonction logarithme
Pour tous $x\,,\,y \in]0\,,+\infty[$ on a : $\ell n(x \cdot y) = \ell n\, x + \ell n\, y$.

Preuve
Considérons la fonction $F : x \longmapsto \ell n(x \cdot y) :]0\,,+\infty[\to \mathbb{R}$.
Cette fonction est dérivable, de dérivée : $F'(x) = \dfrac{1}{x \cdot y} \cdot y = \dfrac{1}{x} = (\ell n)'(x)$.
Par suite, F est une primitive de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ sur $]0\,,+\infty[$. Il existe donc une constante $c = c(y)$ telle que :

$$\forall x \in]0\,,+\infty[\quad , \quad F(x) = \ell n\, x + c(y).$$

Pour $x = 1$, on obtient $F(1) = \ell n\, y = \ell n\, 1 + c(y) = c(y)$, d'où :

$$\forall x \in]0\,,+\infty[\quad , \quad \ell n(xy) = \ell n\, x + \ell n\, y.$$

Corollaire 1
$\forall x \in]0\,,+\infty[\quad , \quad \ell n \dfrac{1}{x} = -\,\ell n\, x$

Preuve
Il suffit de faire $y = \dfrac{1}{x}$ dans la relation fondamentale.

Corollaire 2

$\forall x \in]0\,,+\infty[\quad , \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad , \quad \ell n\, x^n = n \cdot \ell n\, x$

Théorème
On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ell n\, x = +\infty\,.$

Preuve
Soit $a \in]1\,,+\infty[\,$. Comme la fonction $t \longmapsto \ell n\, t$ a pour dérivée $\dfrac{1}{t} > 0$, ℓn est strictement croissante sur $]0\,,+\infty[$ et, comme $\ell n\, 1 = 0$ on en déduit que $\ell n\, a > 0$.
Soit $x \in]0\,,+\infty[\,$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que : $a^n \leqslant x < a^{n+1}$ et par suite $n\,\ell n\, a \leqslant \ell n\, x < (n+1)\,\ell n\, a$.
Comme $n\,\ell n\, a$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, on en déduit que $\ell n\, x$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Corollaire 3
$\lim\limits_{x \to 0^+} \ell n\, x = -\infty$

Preuve
Cela résulte de la relation $\ell n\, \dfrac{1}{x} = -\,\ell n\, x$.

Proposition
La fonction logarithme $\ell n :]0\,,+\infty[\to \mathbb{R}$ est concave et on a : $\ell n\, x \leqslant x - 1$ pour tout $x > 0$.

Preuve
La dérivée $\dfrac{1}{x}$ est décroissante, et la fonction $\ell n\, x - x + 1$ s'annule en $x = 1$ et sa dérivée est négative pour $x \geqslant 1$.

Exercice 3.2.1

a) Montrer que pour tout x *on a :* $\frac{1}{x+1} < \ell n(x+1) - \ell n x < \frac{1}{x}$.

b) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$ *on a :* $\ell n(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \ell n n$.

c) Posons $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ell n n$*. Montrer que la suite* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est décroissante et convergente.*

Nombre e

Par définition e est l'unique nombre réel strictement positif tel que $\underline{\ell n\, e = 1}$.

3.3 La fonction exponentielle.

Compte-tenu des propriétés précédentes de la fonction logarithme, il résulte que ℓn est une fonction continue strictement croissante de $]0\,,+\infty[$ sur $]-\infty\,,+\infty[$: elle admet donc une fonction réciproque, notée $\exp :]-\infty\,,+\infty[$ sur $]0\,,+\infty[\,$. On a donc :

(1) $\forall t \in]0\,,+\infty[\ , \ \exp(\ell n\, t) = t\,.$

(2) $\forall t \in \mathbb{R} \ , \ \ell n(\exp t) = t\,.$

(3) $\exp 1 = e \quad$ (car $\exp(\ell n\, e) = \exp 1)\,.$

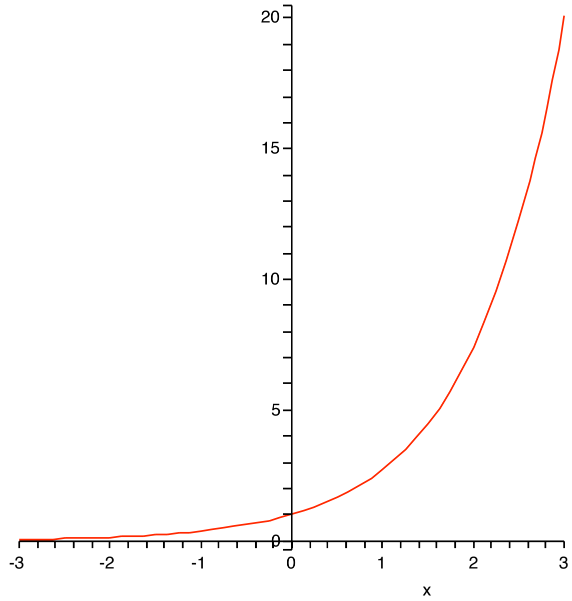

FIG. 2 – Graphe de la fonction exponentielle.

Propriétés fondamentales de l'exponentielle
On a :

(i) exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\exp t)'(t) = \exp(t)$.

(ii) $\forall x\,,\ y \in \mathbb{R}\,,\ \exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y\,.$

(iii) $\exp : \mathbb{R} \to]0\,,+\infty[$ est convexe et on a $\exp x \geqslant 1 + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Preuve

(i) exp étant la fonction réciproque de la fonction dérivable ℓn, on obtient, en dérivant (1) :

$$\forall t > 0 \quad , \quad (\exp)'\,(\ell n\, t) \cdot \frac{1}{t} = 1$$

i.e. : en posant $x = \ell n\, t$; $(\exp)'(x) = \exp x$ car $x = \ell n\, t \Longleftrightarrow t = \exp x$.

(ii) Partant, de la relation $\ell n(y_1 \cdot y_2) = \ell n\, y_1 + \ell n\, y_2$, et en posant $x_1 = \ell n\, y_1\,,\ x_2 = \ell n\, y_2$, i.e. : $y_1 = \exp x_1\,,\ y_2 = \exp x_2$, on obtient que $\exp(\ell n\, y_1\, y_2) = y_1 \cdot y_2 = \exp(x_1 + x_2) = (\exp x_1) \cdot (\exp x_2)$.

(iii) La dérivée est croissante donc exp est convexe et est au-dessus de la tangente en $x = 0$.

Conséquence :
La fonction exp est indéfiniment dérivable et on a :

$$\forall p \text{ entier }, \ \forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad \exp^{(p)} x = \exp x\,.$$

On en déduit :

Proposition 1
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout entier $n \geqslant 0$, soit :

$$P_n(x) \ = \ 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\,.$$

On a alors : $\exp(x) = \lim_{n \to +\infty} P_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

En particulier, $e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ et $0! = 1$.

Preuve
Ceci résulte de la formule de Taylor-Lagrange (cf. Chapitre I, §3, application 1).

3.4 Définition de a^b, $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on a $\exp(n\,\ell n\, a) = (\exp \ell n\, a)^n = a^n$.
Soient maintenant $n \geqslant 2$ entier et $y = \exp\left(\frac{1}{n}\,\ell n\, a\right)$. Alors on a :

$$y^n \;=\; \exp\left(n\,\frac{1}{n}\,\ell n\, a\right) = a$$

i.e. : puisque y est strictement positif et que $y = \sqrt[n]{a}$. On a donc :

$$\sqrt[n]{a} \;=\; \exp\left(\frac{1}{n}\,\ell n\, a\right) \quad , \quad \forall a > 0 .$$

Ceci nous amène à la définition suivante :

Définition
Soient $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$. On définit le nombre réel a^b, a puissance b, par :

$$a^b := \exp(b\,\ell n\, a) .$$

Proposition 1
On a :
(i) $1^b = 1 \;,\; b \in \mathbb{R}$.
(ii) $a^{(b+c)} = a^b \cdot a^c \;,\; a > 0 \;,\; b, c \in \mathbb{R}$.
(iii) $(ab)^c = a^c \cdot b^c \;,\; a > 0 \,,\, b > 0$ et $c \in \mathbb{R}$.

Preuve
(i) $1^b = \exp(b\,\ell n\, 1) = \exp 0 = 1$.
(ii) $a^{(b+c)} = \exp((b+c)\ell n\, a) = \exp(b\,\ell n\, a) \cdot \exp(c\,\ell n\, a) = a^b \cdot a^c$.
(iii) $(ab)^c = \exp(c\,\ell n\,(ab)) = \exp(c\,\ell n\, a + c\,\ell n\, b) = a^c \cdot b^c$.

Proposition 2
Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \exp a$.
En particulier, la suite $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ tend vers $\exp 1 = e$.

Preuve
Tout d'abord, puisque x tend vers $+\infty$, $\frac{a}{x}$ tend vers 0 et donc pour x assez grand $\left|\frac{a}{x}\right| < 1$ et $1 + \frac{a}{x} > 0$

pour x assez grand. Ainsi, l'expression $\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$ a un sens pour x assez grand.
Si $a=0$, on a : $\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x = 1^x = 1 = \exp(0)$.
Si $a \neq 0$, on a : $\ell n\left[\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x\right] = x\,\ell n\left(1+\dfrac{a}{x}\right)$ par définition et $\ell n\left(1+\dfrac{a}{x}\right)$ tend vers $\ell n\,1 = 0$ quand x tend vers $+\infty$. On doit chercher la limite d'une expression du type $+\infty \times 0$. Pour lever cette difficulté, on procède de la façon suivante :
on écrit $x\,\ell n\left(1+\dfrac{a}{x}\right) = \dfrac{1}{t}\,\ell n\,(1+at)$ avec $t = \dfrac{1}{x} \to 0$ quand $x \to +\infty$.
Or : $\dfrac{\ell n\,(1+at)}{at} = \dfrac{1}{at}\left[\ell n\,(1+at) - \ell n\,1\right]$ tend vers la dérivée de la fonction $y \longmapsto \ell n\,(1+y)$ au point $y=0$, i.e. : $\dfrac{1}{1+y}\,|_{y=0} = 1$.
On a donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\,\ell n\left(1+\dfrac{a}{x}\right)\right] = \lim\limits_{t\to 0} a\left[\dfrac{1}{at}\,\ell n\,(1+at)\right] = a\,.$
Par suite : $\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x = \exp\left(x\,\ell n\left(1+\dfrac{a}{x}\right)\right)$ tend vers $\exp a$ quand a tend vers $+\infty$ puisque exp est continue.

Remarque : On aurait pu utiliser la règle de l'Hospital.

3.5 Fonctions puissances.

Définition
Soit $b \in \mathbb{R}$. On appelle fonction puissance b la fonction $u : x \longmapsto x^b :]0\,,+\infty[\to \mathbb{R}\ ,\ x^b := \exp\,(b\,\ell n\,x)$.

Remarque : Si $b \in \mathbb{N}^*$, on a $x^n = x \times \cdots \times x$ (n fois).

Exercice 3.5.1 *Etant donné y un réel positif et n un entier naturel pair, montrer que $(x+y)^n = x^n + y^n$ si et seulement si $x=0$. Cas n entier naturel impair ?*

Propriétés
La fonction puissance b (c'est à dire u) est dérivable et, pour tout $x > 0$:

$$u'(x) = (\exp\,(b\,\ell n\,x))'(x) = \frac{b}{x}\,(\exp\,b\,\ell n\,x) = \frac{b}{x}\cdot x^b = b\,x^{b-1}\,.$$

Etude du graphe de u

<u>Premier cas : $b > 0$</u>
La dérivée u' est strictement positive.

x	0	$+\infty$
u'	$+$	
u	0	$+\infty$

$b > 1$

x	0	$+\infty$
u'	$+$	
u	0	$+\infty$

$0 < b < 1$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^b = \lim\limits_{x\to+\infty}[\exp\,(b\,\ell n\,x)] = +\infty$
et $\lim\limits_{x\to 0} x^b = \lim\limits_{x\to 0}[\exp\,b\,\ell n\,x] = 0$: on peut prolonger u en 0 par continuité par $u(0)=0$.

Et, si $b > 1$: $\dfrac{u(x)-u(0)}{x} = \dfrac{u(x)}{x} = \dfrac{x^b}{x} = x^{b-1} \to 0$ quand $x \to 0$: donc u est dérivable à droite en $x=0$, de dérivée égale à 0.

Si $0 < b < 1$: $\dfrac{u(x) - u(0)}{x} = x^{b-1} \to +\infty$, la courbe admet une demi-tangente en $x = 0$ égale à l'axe des ordonnées.

Par ailleurs, si $b > 1$, $u'(x) = b\, x^{b-1} = b \exp((b-1)\,\ell n\, x)$ est croissante et donc u est <u>convexe</u> et, si $0 < b < 1$, $u'(x)$ est décroissante et u est <u>concave</u>.

Bien entendu, pour $b = 1$, $u(x) = x$. On a donc les tracés suivants :

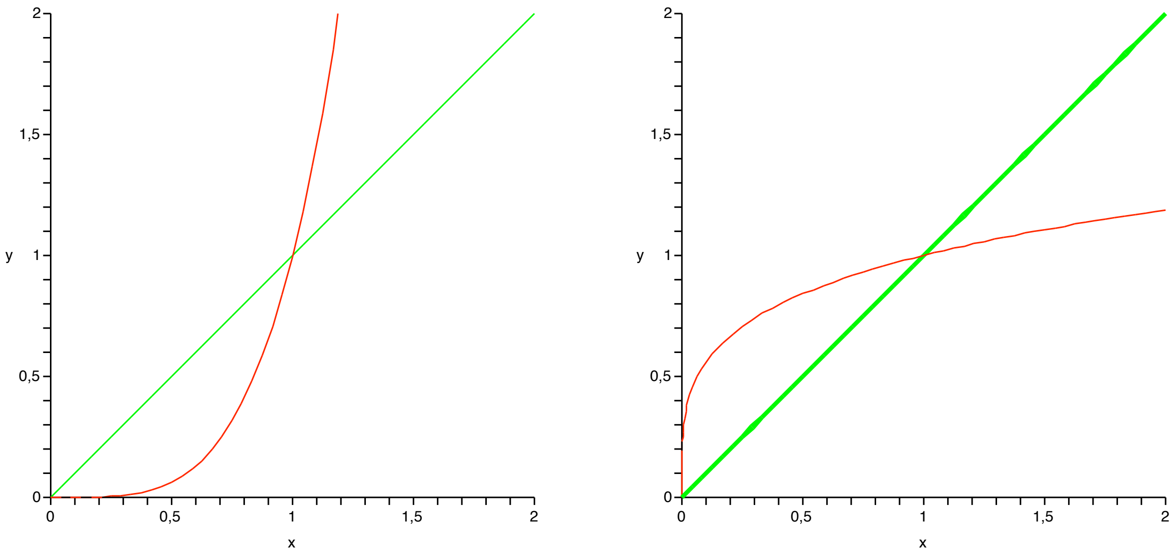

FIG. 3 – Cas $b = 1$ et $b = 4$. Cas $b = 1$ et $b = 0,25$.

<u>Deuxième cas : $b < 0$</u>
On a $u'(x) = b\, x^{b-1}$ est négative et u est décroissante.
Par ailleurs, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} x^b = \lim_{x \to +\infty} \exp(b\,\ell n\, x) = 0$$

et

$$\lim_{x \to 0} x^b = \lim_{x \to 0} \exp(b\,\ell n\, x) = +\infty\,.$$

Et comme $u'(x) = b\, x^{b-1} = b \exp((b-1)\,\ell n\, x)$ est croissante (car $b < 0$), la fonction u est <u>convexe</u>.

Corollaire
Si $b > 0$, la fonction $x \longmapsto x^b$ est une bijection continue strictement croissante de $[0\,, +\infty[$ sur $[0\,, +\infty[$.
Si $b < 0$, la fonction $x \longmapsto x^b$ est une bijection continue strictement décroissante de $]0\,, +\infty[$ sur $]0\,, +\infty[$.

3.6 Fonction exponentielle de base a.

Définition
Soit $a > 0$. La fonction $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \longmapsto a^x$ s'appelle fonction exponentielle de base a.

Etude de la fonction exponentielle de base a

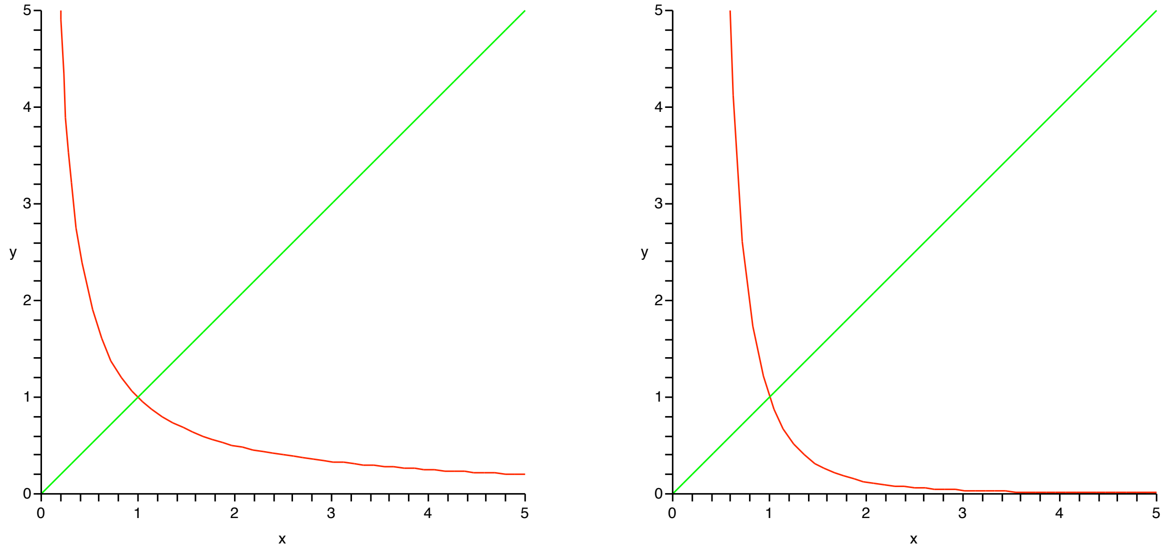

FIG. 4 – Cas $b = 1$ et $b = -1$. Cas $b = 1$ et $b = -3$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $v'(x) = \ell n\, a \cdot v(x) = \ell n\, a \cdot a^x$.
On en déduit que :
Si $a > 1$: $v'(x) > 0$ et v est strictement croissante.
De plus :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
v'		$+$	
v		1	$+\infty$
	0		

$a > 1$

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \lim_{x \to +\infty} \exp(x\, \ell n\, a) = +\infty \text{ et } \lim_{x \to -\infty} a^x = 0\,.$$

De plus, $v'(x) = \ell n\, a \cdot a^x$ est croissante et la fonction v est donc convexe.

Si $a = e$, $\ell n\, a = 1$ et $v(x) = \exp x$, on obtient la fonction exponentielle (de base e) ordinaire.
Avec la notation adoptée on peut écrire : $e^x = \exp x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Si $0 < a < 1$: $v'(x) < 0$ et v est strictement décroissante.
De plus :

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \lim_{x \to +\infty} \exp(x\, \ell n\, a) = 0 \text{ et } \lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty\,.$$

Et, comme $v'(x) = \ell n\, a \cdot \exp(x\, \ell n\, a)$ est croissante, la fonction est convexe.

x	$-\infty$		$+\infty$
v'		$-$	
v	$+\infty$		
			0

$a < 1$

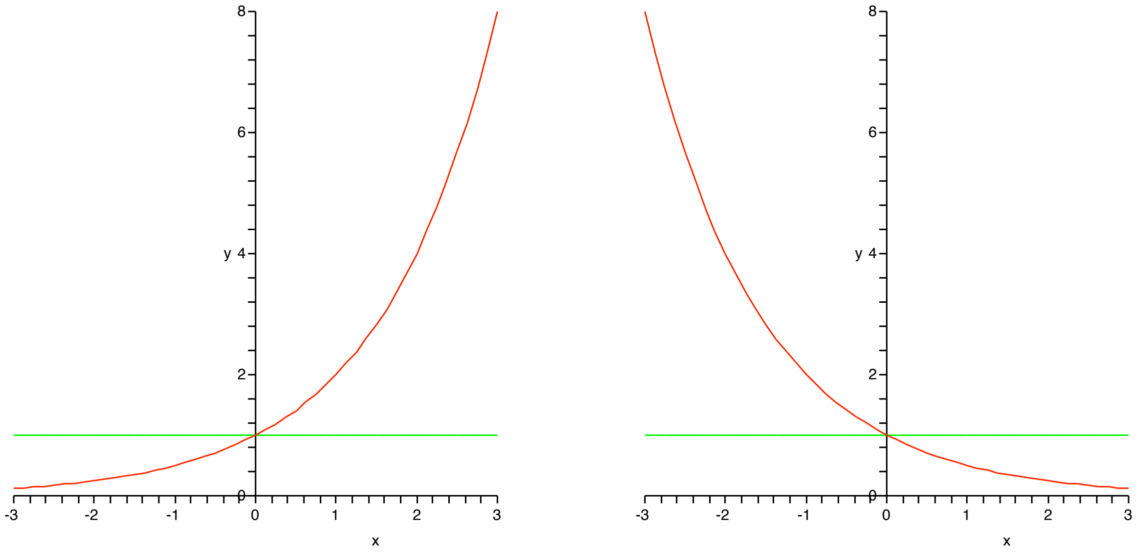

FIG. 5 – Cas $a = 2$ et $a = 1$. Cas $a = 0,5$ et $a = 1$.

3.7 Comparaison des fonctions logarithme, exponentielle et puissance.

Proposition 1
On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ell n\, x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

Preuve
On a vu (grâce à la convexité, mais on pourrait le démontrer directement) que $\ell n\, x \leqslant x - 1$, pour tout $x > 0$ et donc, en particulier $\ell n\, x < x$, pour tout $x > 0$.
Par ailleurs, on a : pour tout $x > 1$, $0 \leqslant \dfrac{\ell n\, x}{x} = \dfrac{\ell n\,(\sqrt{x} \cdot \sqrt{x})}{x} = 2\, \dfrac{\ell n\, \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x}} \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ qui tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Et $\dfrac{e^x}{x} = \dfrac{t}{\ell n\, t}$ en posant $x = \ell n\, t$ (i.e. : $t = \exp x$).
Et donc, si x tend vers $+\infty$, t tend aussi vers $+\infty$, et d'après ce qui précède $\dfrac{\ell n\, t}{t} \to 0$, soit $\dfrac{t}{\ell n\, t} \to +\infty$.

Proposition 2
Soit $b > 0$. Alors :

(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ell n\, x}{x^b} = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^b\, \ell n\, x = 0$.

(ii) Si $a > 1$ et $b > 0$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{x^b} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^n\, a^x) = 0$, $n \in \mathbb{Z}$.

Preuve
(i) On a : $\dfrac{\ell n\, x}{x^b} = \dfrac{\ell n\, x}{e^{b\, \ell n\, x}} = \dfrac{1}{b} \cdot \dfrac{b\, \ell n\, x}{e^{b\, \ell n\, x}} \to 0$ d'après la proposition 1 car si $x \to +\infty$, $b\, \ell n\, x \to +\infty$.

Et $x^b \cdot \ell n\, x = \left(\dfrac{1}{t}\right)^b \cdot \ell n \left(\dfrac{1}{t}\right)$ où $t = \dfrac{1}{x}$,
i.e. : $x^b\, \ell n\, x = -\dfrac{\ell n\, t}{t^b}$ avec $t \to +\infty$ si $x \to 0$, et donc : $x^b\, \ell n\, x \to 0$ quand $x \to 0$ d'après le résultat précédent.

(ii) On a : $\dfrac{a^x}{x^b} = \dfrac{e^{x\,\ell n\, a}}{x^b}$.

Et, si $b = 1$, cela s'écrit : $\dfrac{a^x}{x} = \dfrac{e^{x\,\ell n\, a}}{x} = \ell n\, a \cdot \dfrac{e^t}{t} \to +\infty$ si $x \to +\infty$, d'après la proposition 1, puisque $t = \ell n\, a \cdot x$ avec $a > 1$ tend vers $+\infty$.
Maintenant, soit b réel strictemement positif. La fonction $x \longmapsto x^b$ étant une bijection de $]1\,,+\infty[$ sur $]1\,,+\infty[$, il existe $\alpha > 1$ tel que : $\alpha^b = a$. On a alors :

$$a^x \;=\; (\alpha^b)^x \;=\; (\alpha^x)^b \qquad (= \alpha^{bx})\,.$$

D'après ce qui précède (cas $b = 1$ et $\alpha > 1$), on sait que $\dfrac{\alpha^x}{x} \to +\infty$. Comme $b > 0$, on a :

$\dfrac{a^x}{x^b} = \left(\dfrac{\alpha^x}{x}\right)^b \to +\infty.$

Enfin, pour $x \in \mathbb{R}$, $a^x = \dfrac{1}{a^{-x}}$, et donc :

$$\lim_{x \to -\infty} |x^n\, a^x| \;=\; \lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{a^{+x}} \;=\; \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{a^x}{x^n}\right)^{-1} \;=\; 0\,.$$

Exercice 3.7.1 *Soit $a \in \mathbb{C}$ avec $|a| > 1$ et $k \in \mathbb{Z}$. Identifier la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = n^k\, a^{-n}$.*

4 Intégrales de Riemann

Introduction
Dans tout ce chapitre, $I = [a\,,\,b]$ désignera un segment de $\mathbb{R}$ avec $a\,,\,b \in \mathbb{R}$ et $a < b$.

4.1 Intégrale d'une fonction étagée.

Définition - *Subdivision.*
On appelle subdivision σ du segment $[a\,,\,b]$ une suite finie $\sigma = \{x_0\,,\,x_1\,,\,\dots\,,\,x_n\}$ de points de $[a\,,\,b]$ tels que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. On notera $\boldsymbol{\sigma}([a\,,\,b])$ l'ensemble des subdivisions de $[a\,,\,b]$. $\triangle$

Définition - *Subdivision régulière.*
On appelle subdivision régulière d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ de $[a\,,\,b]$ l'unique élément $\sigma_n \in \boldsymbol{\sigma}([a\,,\,b])$ obtenu en découpant l'intervalle $[a\,,\,b]$ en n sous-intervalles de même longueur. Ainsi :

$$\sigma_n := \left\{ x_0 = a\,,\,\dots\,,\,x_k = a + k\,\frac{b-a}{n}\,,\,\dots\,,\,x_n = b \right\}. \qquad \triangle$$

Définition - *Fonction étagée.*
On appelle fonction *étagée* ou *en escalier* sur $[a\,,\,b]$ une fonction $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ pour laquelle il existe une subdivision $\sigma = \{x_0\,,\,\dots\,,\,x_n\}$ de $[a\,,\,b]$ telle que, pour tout entier $i \in [\![0\,,\,\dots\,,\,n-1]\!]$, la restriction de f à l'intervalle $]x_i\,,\,x_{i+1}[$ soit constante. Une telle subdivision σ est dite associée, ou adaptée, à f. On désignera par $\mathcal{E}([a\,,\,b])$ l'ensemble des fonctions étagées sur $[a\,,\,b]$. $\triangle$

Ainsi, si $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ est étagée et si $\sigma = \{x_0\,,\,\dots\,,\,x_n\}$ est une subdivision associée à f, il existe des constantes réelles $m_i\,,\,i \in [\![0\,,\,\dots\,,\,n-1]\!]$ telles que :

$$\forall t \in]x_i\,,\,x_{i+1}[\quad , \quad f(t) = m_i\,.$$

Ex.1 Toute fonction constante sur $[a\,,\,b]$ est étagée sur $[a\,,\,b]$.

Ex.2 La fonction $f : [0\,,\,2] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad 0 \leqslant t < 1 \\ 1 & \text{si} \quad t = 1 \\ 2 & \text{si} \quad 1 < t \leqslant 2 \end{cases}$$

est étagée sur $[0\,,\,2]$. Pour le voir, il suffit de remarquer que la subdivision $\sigma = \{0\,,\,1\,,\,2\}$ est adaptée à f. Le choix d'une subdivision adaptée à f n'est pas unique. Par exemple, la subdivision $\sigma' = \{0\,,\,1/2\,,\,1\,,\,2\}$ est aussi adaptée à f puisque $f\,|_{]0\,,\,\frac{1}{2}[}$ et $f\,|_{]\frac{1}{2}\,,\,1[}$ sont des fonctions constantes.

Exercice 4.1.1 *Soit $f : [0\,,\,3] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :*

$$f(t) = \begin{cases} -1 & si \quad t = 0 \\ 1 & si \quad 0 < t < 1 \\ 3 & si \quad t = 1 \\ -2 & si \quad 1 < t \leq 2 \\ 4 & si \quad 2 < t \leq 3\,. \end{cases}$$

Montrer que f est étagée sur $[0, 3]$ et identifier une subdivision adaptée à f.

La notion d'intégrale repose sur la proposition suivante.

Proposition 1
Soient $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ une fonction étagée et $\sigma = \{x_0\,,\,\dots\,,\,x_n\}$ une subdivision adaptée à f. Pour tout entier $i \in [\![0\,,\,\dots\,,\,n-1]\!]$, posons : $f(t) = m_i$ si $t \in]x_i\,,\,x_{i+1}[$. Alors l'expression $I(\sigma\,,\,f) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\,m_i$ ne dépend

pas du choix de la subdivision σ adaptée à f. Le nombre réel $I(\sigma\,,\,f)$ ainsi obtenu se note

$$\int_a^b f(t)\,dt \;=\; I(\sigma\,,\,f) \;=\; \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\,m_i$$

et s'appelle *intégrale* de f sur $[a\,,\,b]$.

Preuve
Choisissons une subdivision $\sigma \in \mathcal{O}([a\,,\,b])$ telle que $\sigma = \{x_0\,,\,\dots\,,\,x_n\}$ soit une subdivision adaptée à f sur $[a\,,\,b]$. Considérons la subdivision $\tilde{\sigma} = \sigma \cup \{y\}$, où y est un point de $[a\,,\,b]$, distinct des points $x_i\,, i = 0\,,\,\dots\,,\,n$. Soit $i_0 \in \{0\,,\,1\,,\,\dots\,,\,n-1\}$ tel que $x_{i_0} < y < x_{i_0+1}$. Alors $\tilde{\sigma} = \{x_0\,,\,x_1\,,\,\dots\,,\,x_{i_0}\,,\,y\,,\,x_{i_0+1}\,,\,\dots\,,\,x_n\}$ est adaptée à f et on a :

$$\begin{aligned}
I(\tilde{\sigma}\,,\,f) &= \sum_{i=0}^{i_0-1}(x_{i+1}-x_i)\,m_i + (y-x_{i_0})\,m_{i_0} + (x_{i_0+1}-y)\,m_{i_0} + \sum_{i=i_0+1}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\,m_i \\
&= \sum_{i=0}^{i_0-1}(x_{i+1}-x_i)\,m_i + (x_{i_0+1}-x_{i_0})\,m_i + \sum_{i=i_0+1}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\,m_i = I(\sigma\,,\,f).
\end{aligned}$$

Soient maintenant σ et σ' deux subdivisions adaptées à f. Alors, la subdivision $\sigma'' = \sigma \cup \sigma'$ est encore adaptée à f et, itérant le calcul précédent pour chaque point de σ'', on obtient immédiatement que $I(\sigma\,,\,f) = I(\sigma''\,,\,f)$, et aussi $I(\sigma'\,,\,f) = I(\sigma''\,,\,f)$. Par suite, $I(\sigma\,,\,f) = I(\sigma'\,,\,f)$.

$\square$

Exercice 4.1.2 *Soit $f : [0\,,\,3] \to \mathbb{R}$ la fonction définie au niveau de l'exercice 4.1.1.*
1) Calculer $\int_0^3 f(t)\,dt$ puis $\int_0^3 |f(t)|\,dt$.
2) Soit $x \in [0,3]$. Calculer $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.
3) Montrer que l'application $F : [0\,,\,3] \to \mathbb{R}$ (avec $F(x)$ défini comme en 2) est continue sur $[0\,,\,3]$. La fonction F est-elle dérivable en tout point de l'intervalle $[0\,,\,3]$?

Interprétation de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ pour une fonction étagée positive ou nulle

Si $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ est étagée et positive ou nulle sur $[a\,,\,b]$, alors, pour tout entier $i \in [\![0\,,\,\dots\,,\,n-1]\!]$, m_i est positif ou nul. Par suite : $I(\sigma\,,\,f) = \int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$.
De plus, de la définition de $I(\sigma\,,\,f)$, il résulte que ce nombre est exactement la mesure de l'aire comprise entre l'axe des abscisses, les deux droites $t = a\,,\,t = b$, et le graphe de la fonction f.

Lorsque $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ est étagée et n'est pas supposée positive ou nulle, $I(\sigma\,,\,f) = \int_a^b f(t)\,dt$ correspond à l'aire algébrique comprise entre l'axe des abscisses, les deux droites $t = a\,,\,t = b$, et le graphe de la fonction f. Par exemple, si $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ est constante et égale à -1, $\int_a^b f(t)\,dt = -\,(b-a) = -\,|b-a| < 0$.

Remarque importante. On fixe $c \in]a\,,\,b[$. On considère $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = 0$ si $t \in [a\,,\,b] \setminus \{c\}$ et $f(c) \in \mathbb{R}^*$. Alors $\int_a^b f(t)\,dt = (c-a)\,0 + (b-c)\,0 = 0$. Ainsi $\int_a^b f(t)\,dt$ peut être nulle sans que f soit identiquement nulle. Plus généralement, si $f(t) = 0$ sauf en un nombre fini de points de $[a\,,\,b]$, alors f est étagée sur $[a\,,\,b]$ et on a $\int_a^b f(t)\,dt = 0$.

Propriétés de l'intégrale d'une fonction étagée

Proposition 2
Soient f , $g \in \mathcal{E}([a\,,\,b])$. Alors :

(i) $f+g \in \mathcal{E}([a\,,\,b])$ et $\displaystyle\int_a^b (f+g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$.

(ii) Pour tout réel λ, on a $\lambda \cdot f \in \mathcal{E}([a\,,\,b])$ et $\displaystyle\int_a^b (\lambda \cdot f)(t)\,dt = \lambda \cdot \int_a^b f(t)\,dt$.

(iii) Si $f \geqslant g$ (i.e. : $\forall t \in [a\,,\,b]\,,\; f(t) \geqslant g(t)$), alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \geqslant \int_a^b g(t)\,dt$.

En particulier, $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt$.

(iv) Si $f = g$, sauf en un nombre fini de points de $[a\,,\,b]$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt$.

(v) Pour tout $c \in]a\,,\,b[$, on a : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$, où $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt$ (resp. $\displaystyle\int_c^b f(t)\,dt$) désigne l'intégrale de la restriction de f au segment $[a\,,\,c]$ (resp. $[c\,,\,b]$). Cette relation s'appelle *relation de Chasles* pour les éléments de $\mathcal{E}([a\,,\,b])$.

Preuve
Soient σ et σ' deux subdivisions de $[a\,,\,b]$ adaptées à f et g. Alors $\sigma'' = \sigma \cup \sigma' = \{x_0\,,\,\dots\,,\,x_N\}$ est adaptée à f, et à g. On en déduit que :

$$I_{\sigma''}(f) = \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i)\, m_i \quad , \quad \text{où } m_i = f(t) \text{ si } t \in]x_i\,,\,x_{i+1}[$$

$$I_{\sigma''}(g) = \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i)\, m'_i \quad , \quad \text{où } m'_i = g(t) \text{ si } t \in]x_i\,,\,x_{i+1}[$$

et donc $I_{\sigma''}(f+g) = I_{\sigma''}(f) + I_{\sigma''}(g)$, d'où (i) et, de même (ii), (iii). En particulier, si $f \in \mathcal{E}([a\,,\,b])$, $|f| \in \mathcal{E}([a\,,\,b])$ et comme $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$, on en déduit que $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt$.
Pour (iv), soit $\theta = \{x_0\,,\,\dots\,,\,x_N\}$ une subdivision de $[a\,,\,b]$ contenant les points t de $[a\,,\,b]$ pour lesquels $f(t) \neq g(t)$. Alors, on a immédiatement : $I_\theta(f) = I_\theta(g)$, d'où (iv).
Soit maintenant $c \in]a\,,\,b[$. Notons f_1 et f_2 les restrictions de f aux segments $[a\,,\,c]$ et $[c\,,\,b]$; f_1 et f_2 sont encore des fonctions étagées. Considérons les fonctions $\tilde{f}_1$ et $\tilde{f}_2$ définies par :

$$\tilde{f}_1(t) = \begin{cases} f(t) & , \quad t \in [a\,,\,c] \\ 0 & , \quad t \in]c\,,\,b] \end{cases} \qquad , \qquad \tilde{f}_2(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t \in [a\,,\,c[\\ f(t) & , \quad t \in [c\,,\,b] \end{cases} \quad .$$

Il résulte immédiatement de la définition et de la proposition que :

$$\int_a^c f_1(t)\,dt = \int_a^b \tilde{f}_1(t)\,dt \quad \text{et} \quad \int_c^b f_2(t)\,dt = \int_a^b \tilde{f}_2(t)\,dt\,.$$

Par ailleurs, les fonctions f et $g = \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2$ coïncident en tout point de $[a\,,\,b] \setminus \{c\}$, d'après (iv), on a donc : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt$, ce qui prouve (v).

$\square$

Exercice 4.1.3 *Soit f une fonction qui est étagée sur $[0,1]$ et qui prend ses valeurs dans l' intervalle $[a,b]$ où $a < 0 < b$. On suppose de plus que $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$.*
1) Montrer que les fonctions $f_+ := \max(f,0)$ et $f_- := -\min(f,0)$ sont encore étagées sur $[0,1]$.

2) Prouver que : $\int_0^1 f_+(t)\,dt = \int_0^1 f_-(t)\,dt$. *On note* γ *ce nombre.*
3) Prouver qu'il existe $\theta \in [0,1]$ *tel que :* $0 \leq \gamma \leq \min\big(\theta\, b\,;\, -(1-\theta)\, a\big)$.
4) Etablir l'inégalité : $\int_0^1 f(t)^2\,dt \leq b \int_0^1 f_+(t)\,dt - a \int_0^1 f_-(t)\,dt$.
5) Déduire de ce qui précède la majoration : $\int_0^1 f(t)^2\,dt \leq -a\,b$.

Remarque. Il résulte de cette proposition que $\mathcal{E}([a\,,\,b])$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que l'application $f \longmapsto I(f) = \int_a^b f(t)\,dt \,:\, \mathcal{E}([a\,,\,b]) \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire, compatible avec la structure d'ordre partiel $\leqslant$ sur $\mathcal{E}([a\,,\,b])$.

4.2 Fonction intégrable au sens de Riemann.

On va étendre la notion d'intégrale à des fonctions $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ plus générales que les fonctions étagées.

Définition - *Intégrable au sens de Riemann.*
Une fonction $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ est dite intégrable au sens de Riemann (on dit aussi Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions étagées u_ε et $v_\varepsilon \in \mathcal{E}([a\,,\,b])$ telles que :
(i) $u_\varepsilon \leqslant f \leqslant v_\varepsilon$.
(ii) $\displaystyle\int_a^b (v_\varepsilon - u_\varepsilon)(t)\,dt \leqslant \varepsilon$.
On notera $\mathcal{R}([a\,,\,b])$ l'ensemble des fonctions Riemann-intégrables sur $[a\,,\,b]$. △

Il résulte de cette définition que :
- Toute fonction étagée sur $[a\,,\,b]$ est Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$, i.e. : $\mathcal{E}([a\,,\,b]) \subset \mathcal{R}([a\,,\,b])$.
- Si $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable, alors f est bornée sur $[a\,,\,b]$, puisque f est majorée et minorée sur $[a\,,\,b]$ par une fonction étagée sur $[a\,,\,b]$, et que toute fonction étagée sur $[a\,,\,b]$ est évidemment bornée sur $[a\,,\,b]$.

Exercice 4.2.1 *Les fonctions f suivantes sont-elles intégrables au sens de Riemann ?*
1) $f : [0\,,\,2] \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(t) = [t]$ *où le symbole* $[t]$ *désigne la partie entière de* t.

2) $f : [0\,,\,1] \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(t) = \begin{cases} [\frac{1}{t}] & si \quad 0 < t \leq 1\,, \\ 1 & si \quad t = 0\,. \end{cases}$

3) $f : [0\,,\,1] \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t}\sin(\frac{1}{t}) & si \quad 0 < t \leq 1\,, \\ 1 & si \quad t = 0\,. \end{cases}$

4) $f : [0\,,\,1] \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(t) = \begin{cases} 1 & si \quad t \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\,, \\ 1 & si \quad t \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}\,. \end{cases}$

Soit maintenant f une fonction bornée sur $[a\,,\,b]$.
Considérons $A(f) = \left\{ \displaystyle\int_a^b u(t)\,dt\,;\, u \in \mathcal{E}([a\,,\,b]) \text{ avec } u \leqslant f \right\}$ et $B(f) = \left\{ \displaystyle\int_a^b v(t)\,dt\,;\, v \in \mathcal{E}([a\,,\,b]) \text{ avec } f \leqslant v \right\}$.
$A(f)$ et $B(f)$ sont deux sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$ puisque f est majorée et minorée sur $[a\,,\,b]$.
De plus, pour tout $\alpha \in A(f)$ et $\beta \in B(f)$, il existe des fonctions étagées sur $[a\,,\,b]$, $u\,,\,v$ telles que : $\alpha = \displaystyle\int_a^b u(t)\,dt$ et $\beta = \displaystyle\int_a^b v(t)\,dt$. Comme on a : $u \leqslant v$, on a donc $\alpha \leqslant \beta$.

Ainsi $A(f)$ est non vide, majoré, il admet donc une borne supérieure $I_+(f) = \sup A(f) = \sup\limits_{\alpha \in A(f)} \alpha$.
De même, $B(f)$ est non vide minoré et admet une borne inférieure $I_-(f) = \inf B(f) = \inf\limits_{\beta \in B(f)} \beta$ et, de ce qui précède, on déduit que : $I_+(f) \leqslant I_-(f)$.

Maintenant, si $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann, on va voir que $I_-(f) = I_+(f)$. En effet, soit $\varepsilon > 0$, il existe u_ε et $v_\varepsilon \in \mathcal{E}([a\,,\,b])$ telles que (i) et (ii). On a donc : $\alpha_\varepsilon = \displaystyle\int_a^b u_\varepsilon(t)\,dt \in A(f)$ et $\beta_\varepsilon = \displaystyle\int_a^b v_\varepsilon(t)\,dt \in B(f)$ et $\beta_\varepsilon - \alpha_\varepsilon \leqslant \varepsilon$. Comme par ailleurs, on a : $\alpha_\varepsilon \leqslant I_+(f) \leqslant I_-(f) \leqslant \beta_\varepsilon$, on en déduit que $I_-(f) = I_+(f)$.

Ceci nous amène à la définition suivante :

Définition - *Intégrale de f sur $[a\,,\,b]$.*
Soit $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable. Le nombre $I_+(f) = \sup A(f) = \inf B(f) = I_-(f)$ s'appelle intégrale de f sur le segment $[a\,,\,b]$ et se note $I(f) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$. $\triangle$

Remarques

- Si f est étagée sur $[a\,,\,b]$, on a immédiatement que $I_+(f) = I_-(f) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ (prendre $u_\varepsilon = v_\varepsilon = f$). Ainsi, cette définition de l'intégrale $I(f) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ pour $f \in \mathcal{R}([a\,,\,b])$ est bien une généralisation de la notion d'intégrale des fonctions étagées sur $[a\,,\,b]$.
- Si f est Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$, il résulte de la définition que si $u\,,\,v \in \mathcal{E}([a\,,\,b])$ et vérifient $u \leqslant f \leqslant v$, alors : $\displaystyle\int_a^b u(t)\,dt \leqslant \int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b v(t)\,dt$.

Définition - *Somme de Riemann.*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma_n = \{x_0, \cdots, x_n\}$ la subdivision régulière d'ordre n de l'intervalle $[a, b]$. On considère un n-uplet $\xi = (\xi_0\,,\,\ldots\,,\,\xi_{n-1})$ formé de n points de $[a\,,\,b]$ répartis selon :

$$\xi_k \in [x_k\,,\,x_{k+1}] \;=\; \left[a + k\,\tfrac{b-a}{n}\,,\,a + (k+1)\,\tfrac{b-a}{n}\right], \qquad \forall\, k \in \{0, \ldots, n-1\}\,.$$

Soit $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$. La somme de Riemann associée à la fonction f, à σ_n et au choix de ξ est l'expression :

$$\sigma_n(f\,,\,\xi) \;:=\; \frac{b-a}{n}\,\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,. \qquad \triangle$$

Exemple. Les sommes $\displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$ et $\displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$ sont des sommes de Riemann particulières obtenues en prenant respectivement $\xi = (x_0\,,\,\ldots\,,\,x_{n-1})$ et $\xi = (x_1\,,\,\ldots\,,\,x_n)$.

Le résultat qui suit identifie une famille de fonctions Riemann-intégrables (les fonctions monotones). Il établit aussi un lien entre l'intégrabilité d'une fonction f et la convergence (lorsque $n \longrightarrow \infty$) de certaines sommes de Riemann attachées à f.

Théorème 1
Soit $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. Alors f est Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$.
De plus, si $\sigma_n = \left\{x_0 = a\,,\,\ldots\,,\,x_k = a + k\,\dfrac{b-a}{n}\,,\,\ldots\,,\,x_n = b\right\}$ est la subdivision régulière d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ de

$[a\,,\,b]$, on a :
$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

Preuve
On suppose d'abord que $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ est croissante et on considère la subdivision régulière σ_n associée aux points $x_k = a + k\,\dfrac{b-a}{n}$, $k \in [\![0\,,\,\dots\,,\,n]\!]$, $n \in \mathbb{N}^*$.
On considère les fonctions étagées u_n et v_n sur $[a\,,\,b]$ définies par :

$$u_n(t) = \begin{cases} f(x_k) & \text{si} \quad x_k \leqslant t < x_{k+1} \quad , \quad 0 \leqslant k < n \\ f(b) & \text{si} \quad t = b \end{cases}$$
$$v_n(t) = \begin{cases} f(a) & \text{si} \quad t = a \\ f(x_{k+1}) & \text{si} \quad x_k < t \leqslant x_{k+1} \quad , \quad 0 \leqslant k < n \end{cases} .$$

On a clairement $u_n \leqslant f \leqslant v_n$ puisque f est monotone croissante. De plus :
$$\int_a^b u_n(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)\,f(x_k) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$
$$\int_a^b v_n(t)\,dt = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$
$$\text{et} \quad \int_a^b (v_n - u_n)(t)\ dt = \int_a^b v_n(t)\,dt - \int_a^b u_n(t)\,dt = \frac{b-a}{n}\,[f(b) - f(a)].$$

Par suite, puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\,[f(b)-f(a)] = 0$, f est Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$ et, comme pour tout entier $n \geqslant 1$, $\displaystyle\int_a^b u_n(t)\,dt \leqslant \int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b v_n(t)\,dt$, on déduit que :
$$0 \leqslant \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b u_n(t)\,dt \leqslant \int_a^b (v_n - u_n)(t)\,dt = \frac{b-a}{n}\,[f(b) - f(a)]\,.$$

La suite $\displaystyle\int_a^b u_n(t)\,dt = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$ est donc convergente vers $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.
De même, la suite $\displaystyle\int_a^b v_n(t)\,dt = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$ est convergente vers $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.
Maintenant si $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ est monotone décroissante, il suffit d'appliquer ce qui précède à la fonction $-f$.
□

Exercice 4.2.2 *Montrer que les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ via $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ et $h(x) = e^x$ sont intégrables sur tout intervalle $[a, b]$ avec $0 \le a < b$. En utilisant comme ci-dessus des subdivisions régulières, calculer les intégrales $\int_0^1 f(t)\,dt$, $\int_1^2 g(t)\,dt$ et $\int_0^x h(t)\,dt$ (avec $x > 0$).*

Exercice 4.2.3 *On pose :* $S_n = \dfrac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n}}{n\,\sqrt{n}}$, $\qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1) Donner un exemple de fonction $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue positive et croissante telle que :
$S_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(\frac{j}{n})$.

2) On se place sur l'intervalle $[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}]$. Etablir l'encadrement :
$\frac{1}{n}\ f(\frac{j}{n}) \le \int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} f(t)\ dt \le \frac{1}{n}\ f(\frac{j+1}{n})$, $\qquad \forall\, j \in \{0, \cdots, n\}$.

3) En déduire que :

$\int_0^1 f(t)\ dt \ \le\ S_n\ \le\ \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n+1}{n}} f(t)\ dt\,.$

4) Prouver que S_n converge lorsque n tend vers l'infini vers une limite finie $l \in \mathbb{R}$. Calculer l.

Application

Une fonction continue $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si elle est l'intégrale d'une fonction croissante sur $[a\,,\,b]$, c'est-à-dire qu'il existe une fonction croissante $\phi : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in [a\,,\,b] \quad , \quad f(x) \ = \ f(a) + \int_a^x \phi(t)\,dt\,.$$

Preuve

Si $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall x \in [a\,,\,b] \quad , \quad f(x) \ = \ f(a) + \int_a^x \phi(t)\,dt$$

alors la fonction $y \longmapsto \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} = \dfrac{\int_x^y \phi(t)\,dt}{y - x} : [a\,,\,b] \setminus \{x\} \to \mathbb{R}$ est une fonction croissante.

En effet, supposons que $x < y_1 < y_2$, on doit alors vérifier que :

$$(y_2 - x) \int_x^{y_1} \phi(t)\,dt \ \leqslant\ (y_1 - x) \int_x^{y_2} \phi(t)\,dt\,.$$

Puisque ϕ est croissante on a :

$$\begin{aligned}
(y_2 - x) \int_x^{y_1} \phi(t)\,dt \ &= \ (y_2 - y_1) \int_x^{y_1} \phi(t)\,dt + (y_1 - x) \int_x^{y_1} \phi(t)\,dt \\
&\leqslant \ (y_2 - y_1)\,\phi(y_1)\,(y_1 - x) + (y_1 - x) \int_x^{y_1} \phi(t)\,dt \\
&\leqslant \ (y_1 - x) \int_{y_1}^{y_2} \phi(t)\,dt + (y_1 - x) \int_x^{y_1} \phi(t)\,dt \\
&= \ (y_1 - x) \int_x^{y_2} \phi(t)\,dt\,.
\end{aligned}$$

On étudie de même les cas où $y_1 < y_2 < x$ et $y_1 < x < y_2$. Ainsi, f est convexe sur $[a\,,\,b]$.

Réciproquement, si f est convexe sur $[a\,,\,b]$, f admet des dérivées à gauche f'_g sur $]a\,,\,b]$ et à droite f'_d sur $[a\,,\,b[$ croissantes sur $[a\,,\,b]$, donc Riemann-intégrables sur $[a\,,\,b]$.

On va démontrer que pour tout $x \in [a\,,\,b]$, $f(x) - f(a) = \displaystyle\int_a^x f'_d(t)\,dt = \int_a^x f'_g(t)\,dt\,.$

Soit $\sigma = \{a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = x\}$ une subdivision régulière d'ordre n de $[a\,,\,x]$. On a alors, puisque f est convexe :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\, f'_d(a_k) \ \leqslant\ \sum_{k=0}^{n-1} (f(a_{k+1}) - f(a_k)) \ \leqslant\ \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\, f'_g(a_{k+1})\,,$$

i.e. :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\, f'_d(a_k) \leqslant f(x) - f(a) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\, f'_g(a_{k+1})\,.$$

Par ailleurs,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\, f'_g(a_{k+1}) - \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\, f'_d(a_k) \ = \ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (f'_g(a_{k+1}) - f'_d(a_k))$$

$$= \frac{1}{n}\left[(f'_g(x) - f'_d(a)) + \sum_{k=0}^{n-2} (f'_g(a_{k+1}) - f'_d(a_{k+1}))\right] \leqslant \frac{1}{n}(f'_g(x) - f'_d(a))$$

puisque pour $k = 0, \ldots, n-1$, $f'_g(a_{k+1}) \leqslant f'_d(a_{k+1})$.

Par suite, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} (a_{k+1}-a_k)\, f'_g(a_{k+1}) = \int_a^x f'_g(t)\,dt$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} (a_{k+1}-a_k)\, f'_d(a_k) = \int_a^x f'_d(t)\,dt$, on obtient que : $f(x) - f(a) = \int_a^x f'_d(t)\,dt = \int_a^x f'_g(t)\,dt$. □

Théorème 2
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$.
De plus, si $\sigma_n = \left\{x_0 = a, \ldots, x_k = a + k\frac{b-a}{n}, \ldots, x_n = b\right\}$ est la subdivision régulière d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ de $[a, b]$, on a :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

Pour démontrer ce résultat, on a besoin de rappeler le résultat classique suivant :

Proposition (Heine)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, f est uniformément continue sur $[a, b]$, i.e. :

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists \eta_\varepsilon > 0 \text{ tel que} : \forall t, t' \in [a, b], |t - t'| \leqslant \eta_\varepsilon \Longrightarrow |f(t) - f(t')| \leqslant \varepsilon.$$

Preuve du théorème 2
La fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ étant continue sur $[a, b]$ est uniformément continue sur $[a, b]$ et vérifie la proposition précédente.
Soit $M \geqslant 0$ tel que : $\forall t \in [a, b]$, $|f(t)| \leqslant M$. Soient alors $\varepsilon > 0$ et $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{b-a}{N_\varepsilon} \leqslant \eta_\varepsilon$. Considérons la subdivision régulière σ_n d'ordre n de $[a, b]$. Pour tout entier $k \in [\![0, \ldots, n-1]\!]$, la fonction continue $f : [x_k, x_{k+1}] \to \mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes :

$$m_k = \inf_{t\in[x_k, x_{k+1}]} f(t) = \min_{t\in[x_k, x_{k+1}]} f(t) \quad , \quad M_k = \sup_{t\in[x_k, x_{k+1}]} f(t) = \max_{t\in[x_k, x_{k+1}]} f(t).$$

Ainsi, pour tout entier $n \geqslant N_\varepsilon$ et $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $M_k - m_k \leqslant \varepsilon$.
Considérons les fonctions étagées u_n et v_n définies par :

$$u_n(t) = \begin{cases} m_k & \text{si } t \in [x_k, x_{k+1}[\ , \ k \in \{0, \ldots, n-1\} \\ f(b) & \text{si } t = b \end{cases}$$

$$v_n(t) = \begin{cases} f(a) & \text{si } t = a \\ M_k & \text{si } t \in]x_k, x_{k+1}] \ , \ k \in \{0, \ldots, n-1\} \end{cases}.$$

On a alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$: u_n et v_n sont étagées sur $[a, b]$ et vérifient :

(i) $u_n \leqslant f \leqslant v_n$

(ii) $\int_a^b (v_n - u_n)(t)\,dt = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)(M_k - m_k) = \frac{b-a}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)$

et, pour $n \geqslant N_\varepsilon$:

$$\int_a^b (v_n - u_n)(t)\,dt \leqslant \varepsilon \cdot \frac{b-a}{n} \cdot n = \varepsilon(b-a).$$

On en déduit que f est Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$ et que :

$$\int_a^b u_n(t)\,dt = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} m_k \quad \leqslant \quad \int_a^b f(t)\,dt \quad \leqslant \quad \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} M_k \quad = \quad \int_a^b v_n(t)\,dt\,.$$

Par suite, puisque : $0 \leqslant \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b u_n(t)\,dt \leqslant \int_a^b (v_n - u_n)(t)\,dt \leqslant \varepsilon(b-a)$, $n \geqslant N_\varepsilon$, on a donc :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b u_n(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} m_k\,.$$

De même, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b v_n(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} M_k\,.$
Par ailleurs, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$(\star)\quad \begin{cases} \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} m_k \leqslant \dfrac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \leqslant \dfrac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} M_k \\[2ex] \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} m_k \leqslant \dfrac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \leqslant \dfrac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} M_k \end{cases}.$$

On en déduit que l'on a aussi :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,.$$

□

Exemple.
Soit $f(t) = \sqrt{t}$, $t \in [0\,,\,1]$. La fonction f est continue sur $[0\,,\,1]$ et on déduit de ces théorèmes que :

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\,[\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}]\,.$$

On verra ultérieurement que la valeur de cette intégrale peut être calculée en utilisant une primitive de f sur $[0\,,\,1]$; ainsi $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{t}\cdot dt = \frac{2}{3}$.

Exercice 4.2.4 *Calculer l'intégrale de $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ obtenue comme limite de sommes de Riemann dans les cas suivants :*
1) $f(x) = \sin\, x$ *sur* $[0, \frac{\pi}{2}]$.
2) $f(x) = \cos\, x$ *sur* $[0, \frac{\pi}{2}]$.
3) $f(x) = \alpha^x$ *sur* $[a,b]$ *(on prend* $\alpha > 0$*).*

Exercice 4.2.5 *Montrer que chacune des expressions mises en jeu ci-dessous peut s'interpréter comme une somme de Riemann. Identifier chaque fois la fonction qui permet une telle interprétation. Calculer alors les limites dont il est question.*

1) $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow\infty} n\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-\frac{n}{k}}}{k^2}$, *2)* $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k^2}$,

3) $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$, *4)* $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow\infty}\prod_{k=1}^{n}\Big(1+\frac{k^2}{n^2}\Big)^{\frac{1}{n}}$.

Application (Formule de Jensen)
Soient f une fonction continue strictement positive sur $[0\,,\,1]$ et g une fonction continue positive sur $[0\,,\,1]$ avec $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,dt = 1$. Alors :

$$\exp\left(\int_0^1 \ell n\,[f(t)]\cdot g(t)\,dt\right) \;\leqslant\; \int_0^1 f(t)\cdot g(t)\,dt\,.$$

En particulier, si $g \equiv 1$, on a :

$$\exp\left(\int_0^1 \ell n\,[f(t)]\,dt\right) \;\leqslant\; \int_0^1 f(t)\,dt\,.$$

Preuve
Le théorème 2 permet d'écrire que :

$$(1) \qquad \int_0^1 \ell n\,[f(t)]\cdot g(t)\,dt \;=\; \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ell n\left[f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\cdot g\left(\frac{k}{n}\right)\,.$$

$$(2) \qquad \int_0^1 f(t)\cdot g(t)\,dt \;=\; \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot g\left(\frac{k}{n}\right)\,.$$

$$(3) \qquad 1 \;=\; \int_0^1 g(t)\,dt \;=\; \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right)\,.$$

Par suite, pour n assez grand, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right) > 0$ et on peut considérer $\alpha_k := \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} g\left(\frac{\ell}{n}\right)}\cdot g\left(\frac{k}{n}\right)$, $k \in [\![1\,,\,\ldots\,,\,n]\!]$.

Posons aussi $a_k := f\left(\dfrac{k}{n}\right)$; on a alors : $a_k > 0\,,\ \alpha_k \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\alpha_k = 1$.
La fonction $-\,\ell n$ étant convexe sur $]0\,,\,+\infty[$, on a donc :

$$(\star) \qquad u_n \;=\; \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\cdot \ell n\,(a_k) \;\leqslant\; \ell n\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\cdot a_k\right) \;=\; v_n$$

Or, d'après (1) et (3) :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} u_n \;&=\; \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} g\left(\frac{\ell}{n}\right)}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ell n\left[f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\cdot g\left(\frac{k}{n}\right)\right]\\ &=\; \int_0^1 \ell n\,[f(t)]\cdot g(t)\,dt\end{aligned}$$

et, d'après (2) et (3) :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\exp(v_n) \;&=\; \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\cdot a_k\right)\\ &=\; \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} g\left(\frac{\ell}{n}\right)}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot g\left(\frac{k}{n}\right)\right]\\ &=\; \int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt\,.\end{aligned}$$

La fonction exp étant croissante et continue, on déduit le résultat cherché à partir de l'inégalité ($\star$). $\square$

Remarque
Considérons une somme de Riemann générale :

$$\sigma_n(f\,,\,\xi) := \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)$$

associée à la fonction f, à la subdivision régulière σ_n et au n-uplet de points $\xi = (\xi_0\,,\,\dots\,,\,\xi_{n-1})$. Reprenant les démonstrations des théorèmes 1 et 2, il résulte que l'on a encore :

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_n(f\,,\,\xi) = \int_a^b f(t)\,dt$$

pour f monotone croissante car on a :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \leqslant \sigma_n(f\,,\,\xi) \leqslant \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

et, pour f continue sur $[a\,,\,b]$, car :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} m_k \leqslant \sigma_n(f\,,\,\xi) \leqslant \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} M_k\,.$$

Par exemple, si $f(t) = \sqrt{t}\,,\ t \in [0\,,\,1]$, en choisissant $\xi = (\xi_0\,,\,\dots\,,\,\xi_{n-1})$ tel que : $\xi_k = \frac{1}{2}\,(x_{k+1}+x_k)$, on obtient :

$$\frac{2}{3} = \int_0^1 \sqrt{t}\,dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{k+\frac{1}{2}}\,.$$

Un contre-exemple : une fonction de type "peigne".
Considérons la fonction $f : [0\,,\,1] \to \mathbb{R}$ définie par : $f(t) = 1$ si $t \in \mathbb{Q}\cap[0\,,\,1]$ et $f(t) = 0$ si $t \in (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap[0\,,\,1]$. Cette fonction n'est pas Riemann-intégrable sur $[0\,,\,1]$. En effet, s'il en était ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existerait deux fonctions en escalier $u_\varepsilon\,,\ v_\varepsilon$ sur $[0\,,\,1]$ telles que :

(i) $u_\varepsilon \leqslant f \leqslant v_\varepsilon$

(ii) $\displaystyle\int_0^1 (v_\varepsilon - u_\varepsilon)(t)\,dt \leqslant \varepsilon$.

Soit $\sigma_\varepsilon = \{x_0\,,\,\dots\,,\,x_{N_\varepsilon} = 1\}$ une subdivision adaptée à u_ε et v_ε (ce qui est toujours possible). Il résulte des inégalités (i) que, pour tout entier $k \in \{0\,,\,\dots\,,\,N_\varepsilon - 1\}$ et pour tout réel $t \in]x_k\,,\,x_{k+1}[$, on doit avoir $u_\varepsilon(t) \leq 0$ et $v_\varepsilon(t) \geq 1$ car d'une part $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap]x_k\,,\,x_{k+1}[\,\neq\varnothing$ et d'autre part $\mathbb{Q}\cap]x_k\,,\,x_{k+1}[\,\neq\varnothing$.
Par suite : $\displaystyle\int_0^1 u_\varepsilon(t)\,dt \leq 0$ et $\displaystyle\int_0^1 v_\varepsilon(t)\,dt \geq 1$. L'inégalité (ii) ne peut donc pas avoir lieu dès que $\varepsilon < 1$.

Propriétés de l'intégrale

Les propriétés de l'intégrale des fonctions étagées sur $[a\,,\,b]$ se généralisent aux fonctions Riemann-intégrables sur $[a\,,\,b]$ comme suit :

Proposition 1
Soient $f\,,\,g \in \mathcal{R}([a\,,\,b])$. Alors :

(i) $f+g \in \mathcal{R}([a\,,\,b])$ et $\displaystyle\int_a^b (f+g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$.

(ii) Pour tout réel λ, $\lambda \cdot f \in \mathcal{R}([a\,,\,b])$ et $\displaystyle\int_a^b (\lambda \cdot f)(t)\,dt = \lambda \cdot \int_a^b f(t)\,dt$.

(iii) Si $f \geqslant g$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \geqslant \int_a^b g(t)\,dt$.

(iv) Si $f = g$ sauf en un nombre fini de points de $[a\,,\,b]$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt$.

(v) Pour tout $c \in]a\,,\,b[$, on a : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$.
Ci-dessus, la quantité $\int_a^c f(t)\,dt$ $\big($resp. $\int_c^b f(t)\,dt\big)$ désigne l'intégrale de la restriction de f au segment $[a\,,\,c]$ (resp. $[c\,,\,b]$). Cette relation s'appelle *relation de Chasles* pour les éléments de $\mathcal{R}([a\,,\,b])$.

Preuve

(i) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe u_ε, v_ε, u'_ε, v'_ε étagées sur $[a\,,\,b]$ telles que :

$$u_\varepsilon \leqslant f \leqslant v_\varepsilon \quad \text{et} \quad \int_a^b (v_\varepsilon - u_\varepsilon)(t)\,dt \leqslant \varepsilon$$

$$u'_\varepsilon \leqslant g \leqslant v'_\varepsilon \quad \text{et} \quad \int_a^b (v'_\varepsilon - u'_\varepsilon)(t)\,dt \leqslant \varepsilon\,.$$

On en déduit que : $(u_\varepsilon + u'_\varepsilon) \leqslant f + g \leqslant (v_\varepsilon + v'_\varepsilon)$ et $\displaystyle\int_a^b [(v_\varepsilon + v'_\varepsilon) - (u_\varepsilon + u'_\varepsilon)](t)\,dt \leqslant 2\varepsilon$ d'après les propriétés de l'intégrale sur $\mathcal{E}([a\,,\,b])$. Par suite, $f+g$ est Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$ et des inégalités :

$$\int_a^b u_\varepsilon(t)\,dt \quad \leqslant \quad \int_a^b f(t)\,dt \quad \leqslant \quad \int_a^b v_\varepsilon(t)\,dt$$

$$\int_a^b u'_\varepsilon(t)\,dt \quad \leqslant \quad \int_a^b g(t)\,dt \quad \leqslant \quad \int_a^b v'_\varepsilon(t)\,dt$$

on obtient que :

$$\int_a^b (u_\varepsilon + u'_\varepsilon)(t)\,dt \quad \leqslant \quad \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt \quad \leqslant \quad \int_a^b (v_\varepsilon + v'_\varepsilon)(t)\,dt$$

et comme :

$$\int_a^b (u_\varepsilon + u'_\varepsilon)(t)\,dt \quad \leqslant \quad \int_a^b (f+g)(t)\,dt \quad \leqslant \quad \int_a^b (v_\varepsilon + v'_\varepsilon)(t)\,dt$$

on déduit que :

$$\left|\int_a^b (f+g)(t)\,dt - \left(\int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt\right)\right| \quad \leqslant \quad \int_a^b [(v_\varepsilon + v'_\varepsilon) - (u_\varepsilon + u'_\varepsilon)](t)\,dt \quad \leqslant \quad 2\varepsilon\,.$$

Par suite, $\displaystyle\int_a^b (f+g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$.

(ii) Se démontre de manière analogue.

(iii) Compte-tenu de (i) et (ii), il suffit de montrer que si f est positive ou nulle, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$. Or si $u \in \mathcal{E}([a\,,\,b])$ vérifie $u \leqslant f$ alors la fonction u_+ définie par : $u_+(t) = \max(u(t)\,,\,0)\,, t \in [a\,,\,b]$, est encore étagée sur $[a\,,\,b]$ et vérifie $u_+ \leqslant f$. Par suite, de la définition de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$, on obtient que $0 \leqslant \displaystyle\int_a^b u_+(t)\,dt \leqslant \int_a^b f(t)\,dt$, d'où le résultat.

(iv) Soient f et g deux fonctions Riemann-intégrables sur $[a\,,\,b]$ telles que $f = g$ sauf en un nombre fini de points de $[a\,,\,b]$. En posant $h = f - g$, d'après (i) h est Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$ et nulle sauf en un nombre fini de points. On doit montrer que $\displaystyle\int_a^b h(t)\,dt = 0$. Or une telle fonction $h \in \mathcal{E}([a\,,\,b])$ et, d'après la relation de Chasles, il est immédiat que $\displaystyle\int_a^b h(t)\,dt = 0$.

(v) Soit $c \in]a\,,\,b[$. Notons f_1 et f_2 les restrictions de f aux segments $[a\,,\,c]$ et $[c\,,\,b]$. On va montrer que f_1 et f_2 sont Riemann-intégrables sur $[a\,,\,c]$ et $[c\,,\,b]$ respectivement. Par hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions $u_\varepsilon\,,\, v_\varepsilon \in \mathcal{E}([a\,,\,b])$ telles que :

$$u_\varepsilon \leqslant f \leqslant v_\varepsilon \qquad \text{et} \qquad \int_a^b (v_\varepsilon - u_\varepsilon)(t)\,dt \leqslant \varepsilon\,.$$

Notons $u_\varepsilon^1\,,\, v_\varepsilon^1$ et $u_\varepsilon^2\,,\, v_\varepsilon^2$ les restrictions de $u_\varepsilon\,,\, v_\varepsilon$ aux segments $[a\,,\,c]$ et $[c\,,\,b]$. On a donc : $u_\varepsilon^1\,,\, v_\varepsilon^1 \in \mathcal{E}([a\,,\,c])$ et $u_\varepsilon^2\,,\, v_\varepsilon^2 \in \mathcal{E}([c\,,\,b])$ et :

$$u_\varepsilon^1 \leqslant f_1 \leqslant v_\varepsilon^1 \ \text{ sur } [a\,,\,c] \qquad \text{et} \qquad u_\varepsilon^2 \leqslant f_2 \leqslant v_\varepsilon^2 \ \text{ sur } [c\,,\,b]\,.$$

En outre :

$$\begin{aligned}\int_a^b (v_\varepsilon - u_\varepsilon)(t)\,dt &= \int_a^c (v_\varepsilon - u_\varepsilon)(t)\,dt + \int_c^b (v_\varepsilon - u_\varepsilon)(t)\,dt \\ &= \int_a^c (v_\varepsilon^1 - u_\varepsilon^1)(t)\,dt + \int_c^b (v_\varepsilon^2 - u_\varepsilon^2)(t)\,dt\,.\end{aligned}$$

On en déduit (puisque $\displaystyle\int_a^c (v_\varepsilon^1 - u_\varepsilon^1)(t)\,dt \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_c^b (v_\varepsilon^2 - u_\varepsilon^2)(t)\,dt \geqslant 0$) que :

$$\int_a^c (v_\varepsilon^1 - u_\varepsilon^1)(t)\,dt \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \int_c^b (v_\varepsilon^2 - u_\varepsilon^2)(t)\,dt \leqslant \varepsilon\,.$$

Par suite, f_1 et f_2 sont Riemann-Intégrables sur $[a\,,\,c]\,,\,[c\,,\,b]$ respectivement.
Et, des inégalités :

$$\begin{aligned}\int_a^c u_\varepsilon^1(t)\,dt &\leqslant \int_a^c f_1(t)\,dt \leqslant \int_a^c v_\varepsilon^1(t)\,dt \\ \int_c^b u_\varepsilon^2(t)\,dt &\leqslant \int_c^b f_2(t)\,dt \leqslant \int_c^b v_\varepsilon^2(t)\,dt\end{aligned}$$

on déduit que :

$$\int_a^b u_\varepsilon(t)\,dt \leqslant \int_a^c f_1(t)\,dt + \int_c^b f_2(t)\,dt \leqslant \int_a^b v_\varepsilon(t)\,dt$$

et, conmme on a aussi :

$$\int_a^b u_\varepsilon(t)\,dt \leqslant \int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b v_\varepsilon(t)\,dt$$

on obtient que :

$$\left|\int_a^b (f)(t)\,dt - \left(\int_a^c f_1(t)\,dt + \int_c^b f_2(t)\,dt\right)\right| \leqslant \int_a^b v_\varepsilon(t)\,dt - \int_a^b u_\varepsilon(t)\,dt \leqslant \varepsilon\,.$$

□

Exercice 4.2.6 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive. On pose $m := \sup\{f(x)\,;\, x \in [a,b]\}$. Prouver que :*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f(x)^n\,dx\right)^{\frac{1}{n}} = m\,.$$

Exercice 4.2.7 *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application strictement croissante telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Calculer :*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)^n \, dx \, .$$

Exercice 4.2.8 *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_0^1 f(t)^n \, dt$ ne prenne qu'un nombre fini de valeurs lorsque n décrit $\mathbb{N}$.*

1) Montrer que $\int_0^1 f(t)^{2n} \, dt$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs lorsque n décrit $\mathbb{N}$.

2) On suppose qu'il existe $\bar{t} \in [0,1]$ tel que $f(\bar{t})^2 > 1$. Trouver une contradiction.

3) On suppose que $f^2 : [0,1] \to [0,1]$ est différente de $f^2 \equiv 0$ et $f^2 \equiv 1$. En examinant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ obtenue en posant $u_n = \int_0^1 f(t)^{2n} \, dt$, trouver une contradiction.

4) Déduire de ce qui précède que $f \equiv -1$ ou $f \equiv 0$ ou bien $f \equiv 1$.

En fait, le point (v) de la Proposition 1 admet une réciproque :

Proposition 2
Soient $a < c < b$ trois nombres réels, et soit f une fonction Riemann-intégrable sur $[a\,,\,c]$ et sur $[c\,,\,b]$. Alors, f est Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$ et on a :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt \, .$$

Preuve
Il suffit, d'après la proposition précédente, de montrer que f est Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$.
Soit $\varepsilon > 0$. Les restrictions f_1 et f_2 de f à $[a\,,\,c]$ et $[c\,,\,b]$ étant Riemann-intégrables, il existe $u_\varepsilon^1\,,\,v_\varepsilon^1 \in \mathcal{E}([a\,,\,c])\,,\,u_\varepsilon^2\,,\,v_\varepsilon^2 \in \mathcal{E}([c\,,\,b])$ telles que :

$$u_\varepsilon^1 \leqslant f_1 \leqslant v_\varepsilon^1 \quad , \quad \int_a^c (v_\varepsilon^1 - u_\varepsilon^1)(t)\,dt \leqslant \varepsilon$$

et

$$u_\varepsilon^2 \leqslant f_2 \leqslant v_\varepsilon^2 \quad , \quad \int_c^b (v_\varepsilon^2 - u_\varepsilon^2)(t)\,dt \leqslant \varepsilon \, .$$

Soient $u_\varepsilon\,,\,v_\varepsilon \in \mathcal{E}([a\,,\,b])$ définies par :

$$u_\varepsilon(t) = \begin{cases} u_\varepsilon^1 & \text{si} \quad t \in [a\,,\,c] \\ u_\varepsilon^2 & \text{si} \quad t \in]c\,,\,b] \end{cases}$$

$$v_n(t) = \begin{cases} v_\varepsilon^1 & \text{si} \quad t \in [a\,,\,c] \\ v_\varepsilon^2 & \text{si} \quad t \in]c\,,\,b] \end{cases} \, .$$

On a donc : $u_\varepsilon \leqslant f \leqslant v_\varepsilon$ sur $[a\,,\,b]$. De plus, grâce à la relation de Chasles on a :

$$\int_a^b u_\varepsilon(t)\,dt = \int_a^c u_\varepsilon^1(t)\,dt + \int_c^b u_\varepsilon^2(t)\,dt$$

$$\int_a^b v_\varepsilon(t)\,dt = \int_a^c v_\varepsilon^1(t)\,dt + \int_c^b v_\varepsilon^2(t)\,dt \, .$$

Par suite, $\displaystyle\int_a^b (v_\varepsilon - u_\varepsilon)(t)\,dt \leqslant 2\varepsilon$, ce qui prouve que f est Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$. □

Afin d'étendre cette relation de Chasles au cas où les réels a , b et c sont dans un ordre quelconque, on conviendra de poser, pour f Riemann-intégrable sur un segment $[a\,,\,b]$, $\displaystyle\int_\beta^\alpha f(t)\,dt = -\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$ si $\alpha\,,\,\beta \in [a\,,\,b]$ avec $\alpha < \beta$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = 0$ si $\alpha = \beta$.

Avec cette convention, il résulte des propositions 1 et 2 :

Proposition 3 (Relation de Chasles)
Soient $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable et $\alpha\,,\,\beta\,,\,\gamma$ trois points de $[a\,,\,b]$. Alors on a :

$$\int_\alpha^\gamma f(t)\,dt \;=\; \int_\alpha^\beta f(t)\,dt + \int_\beta^\gamma f(t)\,dt\,.$$

Preuve
Traitons par exemple le cas $\alpha < \gamma < \beta$. D'après la proposition 1, les restrictions de f aux segments $[\alpha\,,\,\gamma]$, $[\alpha\,,\,\beta]$ et $[\gamma\,,\,\beta]$ sont Riemann-intégrables et d'après la proposition 2 :

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt \;=\; \int_\alpha^\gamma f(t)\,dt + \int_\gamma^\beta f(t)\,dt$$

i.e. :

$$\int_\alpha^\gamma f(t)\,dt \;=\; \int_\alpha^\beta f(t)\,dt - \int_\gamma^\beta f(t)\,dt$$

et, d'après la convention adaptée :

$$= \int_\alpha^\beta f(t)\,dt + \int_\beta^\gamma f(t)\,dt\,.$$

$\square$

Autres exemples de fonctions Riemann-intégrables : les fonctions continues par morceaux

Définition - *Fonction continue par morceaux.*
On dit qu'une fonction $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux s'il existe une subdivision $\sigma = \{x_0 = a\,,\,x_1\,,\,\ldots\,,\,x_n = b\}$ de $[a\,,\,b]$ telle que la restriction de f aux intervalles $]x_i\,,\,x_{i+1}[$ soit continue et admette une limite à gauche en x_i et une limite à droite en $x_{i+1}\,,i \in \{0\,,\,\ldots\,,\,(n-1)\}$ (i.e. : que $f\,|_{]x_i\,,\,x_{i+1}[} = f_i\,|_{]x_i\,,\,x_{i+1}[}$ avec $f_i : [x_i\,,\,x_{i+1}]$ continue). $\triangle$

Il résulte alors de ce qui précède que :

Proposition 4
Soit $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Alors, f est Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$ et, si $\sigma = \{x_0 = a\,,\,\ldots\,,\,x_n = b\}$ est une subdivision adaptée à f, $f_i : [x_i\,,\,x_{i+1}] \to \mathbb{R}$ un prolongement continu de f à $[x_i\,,\,x_{i+1}]$, on a :

$$\int_a^b f(t)\,dt \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_i(t)\,dt\,.$$

Exemple
Soit $t \longmapsto f(t) = E(t) : [0\,,\,3] \to \mathbb{R}$ où $E(t)$ désigne la partie entière du réel t. Alors f est continue par morceaux sur $[0\,,\,3]$, et son intégrale $\displaystyle\int_0^3 f(t)\,dt$ est égale à 3.

Exercice 4.2.9 *Soit* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue par morceaux. Trouver une suite* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de fonctions en escaliers telle que :*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_0^1 f(t)\ g_n(t)\ dt \ = \ f(0+)\,.$$

Proposition 5 (Propriété de la moyenne)
Soit $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable, et soient $m\,,\,M \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall t \in [a\,,\,b] \qquad , \qquad m \leqslant f(t) \leqslant M\,.$$

Alors :

$$m(b-a) \quad \leqslant \quad \int_a^b f(t)\,dt \quad \leqslant \quad M(b-a)\,.$$

Preuve
Cela résulte immédiatement du point (iii) de la proposition avec $g(t) = m$ et $h(t) = M$, $t \in [a\,,\,b]$.

□

Remarque
Si f est Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$, on sait que f est alors bornée sur $[a\,,\,b]$ et on peut prendre $m = \inf\limits_{t\in[a\,,\,b]} f(t)$ et $M = \sup\limits_{t\in[a\,,\,b]} f(t)$.

Dans le cas particulier où $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ est continue, on peut préciser davantage ce résultat :

Proposition 6 (Formule de la moyenne)
Soit $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, il existe $c \in [a\,,\,b]$ tel que :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,dt \ = \ f(c)\,.$$

Preuve
La fonction f étant continue sur le segment $[a\,,\,b]$ est bornée sur $[a\,,\,b]$ et atteint ses bornes.
Soient $m = \inf\limits_{t\in[a\,,\,b]} f(t) = f(c_1)$ et $M = \sup\limits_{t\in[a\,,\,b]} f(t) = f(c_2)\,,\, c_1\,,\,c_2 \in [a\,,\,b]$. Par suite, d'après la proposition précédente, le nombre $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ appartient au segment $[m\,,\,M] = [f(c_1)\,,\,f(c_2)]$. Et, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [c_1\,,\,c_2] \subset [a\,,\,b]$ tel que : $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = f(c)$.

□

Autres propriétés de l'intégrale

Il résulte de la proposition 1 que $\mathcal{R}([a\,,\,b])$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que l'application $f \longmapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$: $\mathcal{R}([a\,,\,b]) \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire.
Il résulte aussi de cette même proposition que l'on a :

Théorème
Soient $f\,,\,g \in \mathcal{R}([a\,,\,b])$. Alors $\max(f\,,\,g)$ et $\min(f\,,\,g)$ sont Riemann-intégrables sur $[a\,,\,b]$ et on a :

$$\max\left(\int_a^b f(t)\,dt \ ,\ \int_a^b g(t)\,dt\right) \quad \leqslant \quad \int_a^b \max(f(t)\,,\,g(t))\,dt$$

$$\min\left(\int_a^b f(t)\,dt\ ,\ \int_a^b g(t)\,dt\right) \ \geqslant\ \int_a^b \min(f(t)\,,\,g(t))\,dt.$$

Preuve
Tout d'abord, il est facile de vérifier que si $\alpha\,,\,\beta$ sont deux nombres réels alors :

$$\max(\alpha\,,\,\beta) = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{|\alpha-\beta|}{2} \qquad \text{et} \qquad \min(\alpha\,,\,\beta) = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{|\alpha-\beta|}{2}\,.$$

En particulier, on a :

$$\max(f\,,\,g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2} = g + \frac{f-g}{2} + \frac{|f-g|}{2} = g + \max(f-g\,,\,0)$$

et

$$\min(f\,,\,g) = -\ \max(-\,f\,,\,-g)\,.$$

Il suffit donc de montrer que si $f \in \mathcal{R}([a\,,\,b])$, alors $f^+ = \max(f\,,\,0) \in \mathcal{R}([a\,,\,b])$.
Or si f est Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u_\varepsilon\,,\,v_\varepsilon \in \mathcal{E}([a\,,\,b])$ telles que :

$$u_\varepsilon \ \leqslant\ f \ \leqslant\ v_\varepsilon \qquad \text{et} \qquad \int_a^b (v_\varepsilon - u_\varepsilon)(t)\,dt \ \leqslant\ \varepsilon\,.$$

Les fonctions $u_\varepsilon^+ = \max(u\,,\,0)$ et $v_\varepsilon^+ = \max(v_\varepsilon\,,\,0)$ sont encore étagées sur $[a\,,\,b]$ et vérifient :

$$u_\varepsilon^+ \ \leqslant\ f^+ \ \leqslant\ v_\varepsilon^+ \qquad \text{et} \qquad \int_a^b (v_\varepsilon^+ - u_\varepsilon^+)(t)\,dt \ \leqslant\ \varepsilon$$

car :

$$v_\varepsilon^+ - u_\varepsilon^+ = \frac{1}{2}\,(v_\varepsilon - u_\varepsilon) + \frac{1}{2}\,(|v_\varepsilon| - |u_\varepsilon|)$$

et

$$|v_\varepsilon| - |u_\varepsilon| \ \leqslant\ ||v_\varepsilon| - |u_\varepsilon|| \ \leqslant\ |v_\varepsilon - u_\varepsilon| \ =\ v_\varepsilon - u_\varepsilon$$

d'où : $v_\varepsilon^+ - u_\varepsilon^+ \leqslant v_\varepsilon - u_\varepsilon$. Par suite, f^+ est Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$.

□

Remarque
Il résulte des expressions $\max(f\,,\,g)$ et $\min(f\,,\,g)$ données dans cette démonstration que si f et g sont continues en un point $t_0 \in [a\,,\,b]$, il en est de même de $\max(f\,,\,g)$ et $\min(f\,,\,g)$.

Corollaire 1
Si f est Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$, alors $|f|$ est Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$ et, de plus :

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \ \leqslant\ \int_a^b |f(t)|\,dt\,.$$

Preuve
Comme $|f| = f^+ + f^-$, où $f^- = -\,\min(f\,,\,0)$, il résulte du théorème précédent que si $f \in \mathcal{R}([a\,,\,b])$, alors $|f| \in \mathcal{R}[a\,,\,b]$. Par ailleurs, puisque $-\,|f| \leqslant f \leqslant |f|$, on obtient que :

$$-\int_a^b |f|(t)\,dt \ \leqslant\ \int_a^b f(t)\,dt \ \leqslant\ \int_a^b |f|(t)\,dt$$

c'est-à-dire :

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \ \leqslant\ \int_a^b |f|(t)\,dt\,.$$

□

Un contre-exemple
Soit $f : [0\,,\,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$f(t) = 1 \qquad \text{si } \ t \in \mathbb{Q} \cap [0\,,\,1]$
$f(t) = -1 \quad \text{si } \ t \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0\,,\,1].$
Alors f n'est pas Riemann-intégrable sur $[0\,,\,1]$, et cependant $|f| \equiv 1$ est Riemann-intégrable sur $[0\,,\,1]$.

On a déjà remarqué que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = 0$ pour f Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$ n'implique pas $f \equiv 0$ sur $[a\,,\,b]$. Cependant, si f est continue on a :

Corollaire 2
Si f est Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$, alors on a : $\forall \varepsilon > 0\,,\, \exists f_\varepsilon$, en escalier sur $[a\,,\,b]$, telle que :

$$\int_a^b |(f - f_\varepsilon)(t)|\,dt \quad \leqslant \quad \varepsilon$$

Preuve
En effet, f étant Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier sur $[a\,,\,b]$, u_ε et v_ε , telles que :

(i) $\quad u_\varepsilon \leqslant f \leqslant v_\varepsilon$
(ii) $\quad \displaystyle\int_a^b (v_\varepsilon - u_\varepsilon)(t)\,dt \leqslant \varepsilon$

Posons $f_\varepsilon := v_\varepsilon$, alors $|f - f_\varepsilon| = v_\varepsilon - f \leqslant v_\varepsilon - u_\varepsilon$ et donc : $\displaystyle\int_a^b |(f - f_\varepsilon(t)|\,dt \leqslant \varepsilon\,.$

□

Applications
Soit f une fonction continue sur $[a\,,\,b]$. Alors :

(1) $\quad$ Lemme de Riemann-Lebesgue : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\cdot\sin(nt)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\cdot\cos(nt)\,dt = 0$

(2) $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\,|\sin nt|\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\,|\cos(nt)|\,dt = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)\,dt$

Preuve de (1)
f étant continue, la fonction $t \longmapsto f(t)\cdot\sin nt \ : \ [a\,,\,b] \to \mathbb{K}$ est aussi continue, donc Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$; $\displaystyle\int_a^b f(t)\cdot\sin(nt)\,dt$ a bien un sens. Pour la suite de la démonstration, on a besoin de connaître les valeurs des intégrales suivantes (les calculs correspondants seront expliqués et justifiés au paragraphe 4.4) :

$$\int_a^b \sin(nt)\,dt \;=\; \frac{1}{n}\,\big[\cos(na) - \cos(nb)\big]\,, \qquad \int_a^b \cos(nt)\,dt \;=\; \frac{1}{n}\,\big[\sin(nb) - \sin(na)\big]\,.$$

Tout d'abord, comme on le verra au paragraphe 4 suivant (corollaire 1), pour tout $\alpha \leqslant \beta$, on a :

$$\left|\int_\alpha^\beta \sin nt\,dt\right| = \left|\frac{1}{n}\,[\cos n\,\alpha - \cos n\,\beta]\right| \leqslant \frac{2}{n}\,.$$

<u>1ère étape</u>
Si f est constante (égale à λ) sur $[a\,,\,b]$, on a :

$$\left|\int_a^b f(t)\cdot\sin(nt)\,dt\right| = \left|\lambda\cdot\int_a^b \sin nt\,dt\right| \leqslant |\lambda|\cdot\frac{2}{n} \to 0 \quad \text{, quand } n \to +\infty.$$

<u>2ème étape</u>

Si f est en escalier sur $[a\,,\,b]$, alors :

$$\int_a^b f(t)\cdot\sin(nt)\,dt = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \cdot \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sin nt\,dt \to 0 \quad \text{, quand } n \to +\infty.$$

3ème étape

On applique le corollaire 2, on approche f par des fonctions en escalier.

Soient $\varepsilon > 0$ et f_ε , en escalier sur $[a\,,\,b]$ telle que : $\displaystyle\int_a^b |(f - f_\varepsilon)(t)|\,dt \leqslant \varepsilon$.

Par suite :

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(t)\cdot\sin(nt)\,dt\right| &\leqslant \left|\int_a^b (f - f_\varepsilon)(t)\cdot\sin(nt)\,dt\right| + \left|\int_a^b f_\varepsilon(t)\cdot\sin(nt)\,dt\right| \\
&\leqslant \varepsilon + \left|\int_a^b f_\varepsilon(t)\cdot\sin(nt)\,dt\right|
\end{aligned}$$

Il résulte de la 2ème étape que : il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N_\varepsilon \Longrightarrow \left|\displaystyle\int_a^b f_\varepsilon(t)\cdot\sin nt\,dt\right| \leqslant \varepsilon$.

Finalement, pour $n \geqslant N_\varepsilon$, $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\cdot\sin nt\,dt\right| \leqslant 2\varepsilon$, d'où (1).

Preuve de (2)

On procède comme précédemment.

1ère étape

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b |\sin nt|\,dt = \frac{2}{\pi}\,(b - a)$$

En effet, pour n assez grand, désignons par $k_0 = k_0(n)$ et $k_1 = k_1(n)$ les entiers relatifs tels que :

$$(k_0 - 1)\,\frac{\pi}{n} < a \leqslant k_0\,\frac{\pi}{n} < k_1\,\frac{\pi}{n} \leqslant b < (k_1 + 1)\,\frac{\pi}{n}$$

Alors, pour $k \in [\![k_0\,,\,k_1 - 1]\!]$, la fonction $t \longmapsto \sin nt$ garde un signe constant sur chaque intervalle $\left]k\,\frac{\pi}{n}\,,\,(k+1)\,\frac{\pi}{n}\right[$,

et donc : $\displaystyle\int_{k\frac{\pi}{n}}^{(k+1)\frac{\pi}{n}} |\sin nt|\,dt = \frac{2}{n}$.

Par suite $\displaystyle\int_{k_0\frac{\pi}{n}}^{k_1\frac{\pi}{n}} |\sin nt|\,dt = \frac{2}{n}\,(k_1 - k_0)$.

Comme $|\sin nt| \leqslant 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(k_0(n)\,\frac{\pi}{n} - a\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(b - k_1(n)\,\frac{\pi}{n}\right) = 0$, on déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{k_1(n) - k_0(n)}{n} = \frac{b - a}{\pi} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_a^b |\sin nt|\,dt = \frac{2}{\pi}\,(b - a)$$

2ème étape

Si f est en escalier sur $[a\,,\,b]$, on peut écrire :

$$\int_a^b f(t)\cdot|\sin nt|\,dt = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \cdot \int_{x_i}^{x_{i+1}} |\sin nt|\,dt$$

et donc : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\cdot|\sin nt|\,dt = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i\,\frac{2}{\pi}\,(x_{i+1} - x_i) = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)\,dt$

3ème étape

On approche f par des fonctions en escalier au sens du corollaire 2.

Soient $\varepsilon > 0$ et f_ε , en escalier sur $[a\,,\,b]$ telle que : $\displaystyle\int_a^b |(f - f_\varepsilon)(t)|\,dt \leqslant \varepsilon$.

On a donc :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\cdot|\sin nt|\,dt - \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)\,dt\right| &\leqslant \int_a^b |(f - f_\varepsilon)(t))|\,|\sin nt|\,dt \\ &\quad + \left|\int_a^b f_\varepsilon(t)\cdot|\sin nt|\,dt - \frac{2}{\pi}\int_a^b f_\varepsilon(t)\,dt\right| + \frac{2}{\pi}\int_a^b |(f - f_\varepsilon)(t)|\,dt \\ &\leqslant \varepsilon\left(1 + \frac{2}{\pi}\right) + \left|\int_a^b f_\varepsilon(t)\cdot|\sin nt|\,dt - \frac{2}{\pi}\int_a^b f_\varepsilon(t)\,dt\right|\end{aligned}$$

D'après la seconde étape, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant \mathbb{N}$ implique :

$$\left|\int_a^b f_\varepsilon(t)\cdot|\sin nt|\,dt \;-\; \frac{2}{\pi}\int_a^b f_\varepsilon(t)\,dt\right| \;\leqslant\; \varepsilon$$

d'où, pour $n \geqslant N_\varepsilon$: $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\cdot|\sin nt|\,dt \;-\; \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)\,dt\right| \;\leqslant\; 2\varepsilon\left(1 + \frac{2}{\pi}\right)$.

□

Proposition 7

Soit $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue positive ou nulle, i.e. : $\forall t \in [a\,,\,b]\,,\ f(t) \geqslant 0$.

Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = 0$ équivaut à $f \equiv 0$ sur $[a\,,\,b]$, i.e. : $\forall t \in [a\,,\,b]\,,\ f(t) = 0$.

Preuve

On va déduire ce résultat de la relation de Chasles.

Soit $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$, continue, positive ou nulle et non identiquement nulle. On va montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt > 0$.

Puisque f n'est pas identiquement nulle sur $[a\,,\,b]$, il existe $c \in [a\,,\,b]$ tel que $f(c) > 0$ et, puisque f est continue sur $[a\,,\,b]$, on peut toujours supposer que $c \in\,]a\,,\,b[$. La continuité de f au point c signifie :

$$\forall \varepsilon > 0\ \ ,\ \ \exists \eta_\varepsilon > 0\ \ \text{tel que :}\ \ |t - c| \leqslant \eta_\varepsilon\ \ ,\ \ t \in [a\,,\,b] \quad\Longrightarrow\quad |f(t) - f(c)| \leqslant \varepsilon\,.$$

Choisissons $0 < \varepsilon < \dfrac{f(c)}{2}$ et $\eta_\varepsilon > 0$ assez petit de sorte que $[c - \eta_\varepsilon\,,\,c + \eta_\varepsilon] \subset [a\,,\,b]$.

Alors pour $|t - c| \leqslant \eta_\varepsilon$, on a : $\dfrac{f(c)}{2} \leqslant f(c) - \varepsilon \leqslant f(t)$. Par suite, puisque $f \geqslant 0$:

$$\int_a^b f(t)\,dt \;=\; \int_a^{c-\eta_\varepsilon} + \int_{c-\eta_\varepsilon}^{c+\eta_\varepsilon} + \int_{c+\eta_\varepsilon}^b f(t)\,dt \;\geqslant\; \int_{c-\eta_\varepsilon}^{c+\eta_\varepsilon} f(t)\,dt \;\geqslant\; \frac{f(c)}{2}\cdot(2\eta_\varepsilon) \;>\; 0\,.$$

□

Exercice 4.2.10 *Déterminer toutes les fonctions continues $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ qui vérifient :*

$$\int_a^b f(t)\ dt \;=\; (b-a)\sup_{t\in[a,b]} |f(t)|\,.$$

Exercice 4.2.11 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[a,b]$ (avec $a < b$).*

1) On suppose que f est continue en un point $x_0 \in [a,b]$ en lequel $f(x_0) > 0$. Montrer qu'il existe un couple de points $(\tilde a, \tilde b) \in [a,b]^2$ avec $\tilde a \le x_0 \le \tilde b$ et $\tilde b - \tilde a > 0$ ajusté de façon à ce que $\int_{\tilde a}^{\tilde b} f(x)\,dx > 0$.

2) En déduire que si f est continue positive sur $[a,b]$ et telle que $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ alors f est identiquement nulle.

3) On suppose que f est continue sur $[a,b]$ avec $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.

4) On suppose que f est continue sur $[0,1]$ avec $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $d \in [0,1]$ tel que $f(d) = d$.

Exercice 4.2.12 *Soit $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_0^\pi f(u)\ \cos u\ du = \int_0^\pi f(u)\ \sin u\ du = 0$. Prouver que f s'annule au moins deux fois sur l'intervalle ouvert $]0,\pi[$.*

Proposition 8 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)
Soient f et g deux fonctions continues sur le segment $[a\,,\,b]$ et à valeurs réelles. On a :

$$(\star) \qquad \left| \int_a^b [f(t)\ g(t)]\,dt \right|^2 \ \leqslant\ \left(\int_a^b |f|^2(t)\,dt \right) \cdot \left(\int_a^b |g(t)|^2\,dt \right).$$

De plus, si $f \not\equiv 0$, il y a égalité dans $(\star)$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $g = \lambda \cdot f$.

Preuve
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction $t \longmapsto [\lambda\, f(t) - g(t)]^2 : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ est continue et positive ou nulle et donc :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad , \quad \int_a^b [\lambda\, f(t) - g(t)]^2\,dt \geqslant 0$$

i.e. : $\forall \lambda \in \mathbb{R}\,,\ \lambda^2\, I - 2\lambda\, J + K \geqslant 0$
où $I = \displaystyle\int_a^b |f(t)|^2\,dt$, $J = \displaystyle\int_a^b [f(t)\ g(t)]\,dt$ et $K = \displaystyle\int_a^b |g(t)|^2\,dt$.
Le trinôme $\lambda^2\, I - 2\lambda\, J + K$ étant toujours positif ou nul, vérifie donc :

$$J^2\ \leqslant\ I \cdot K$$

i.e. $(\star)$. Maintenant, si on a l'égalité dans $(\star)$, cela signifie que ce trinôme a une racine double λ_0 et que, pour ce λ_0 ,
on a :

$$\int_a^b [\lambda_0\, f - g]^2(t)\,dt\ =\ 0\,.$$

La fonction $t \longmapsto (\lambda_0\, f - g)^2(t) \cdot [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ étant continue, et positive ou nulle, on déduit de la proposition précédente que $\lambda_0\, f - g \equiv 0$ i.e. : $g \equiv \lambda_0\, f$.

□

Corollaire 3 (Inégalité de Minkowski)
Soient f et g deux fonctions continues sur le segment $[a\,,\,b]$ à valeurs réelles.
Alors on a :

$$(\star\star) \qquad \left(\int_a^b |(f+g)(t)|^2\,dt \right)^{\frac{1}{2}}\ \leqslant\ \left(\int_a^b |f(t)|^2\,dt \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b |g(t)|^2\,dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

De plus, si $f \not\equiv 0$, il y a égalité dans $(\star\star)$ si et seulement si il existe $\lambda \geqslant 0$ tel que : $g = \lambda \cdot f$.

Preuve
En développant $(f(t) + g(t))^2$, on obtient :

$$\int_a^b |(f+g)(t)|^2\,dt\ =\ \int_a^b |f(t)|^2\,dt\ +\ 2\int_a^b f(t) \cdot g(t)\,dt\ +\ \int_a^b |g(t)|^2\,dt$$

L'inégalité $(\star\star)$ résulte alors de l'inégalité de Cauchy-Schwarz $(\star)$.
Il en résulte aussi que, si de plus $f \not\equiv 0$ et si on a égalité dans $(\star\star)$, nécessairement, on a aussi égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $g = \lambda \cdot f$. En reportant cette expression dans l'égalité $(\star\star)$, il vient : $|1 + \lambda| = 1 + |\lambda|$, ce qui implique $\lambda \geqslant 0$.

□

Exercice 4.2.13 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $\mathbb{R}$ *et* $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. *Répondre par* vrai *ou par* faux *aux affirmations suivantes :*
1) F *est continue sur* $\mathbb{R}$.
2) F *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *de dérivée* f.
3) Si f *est croissante sur* $\mathbb{R}$ *alors* F *est croissante sur* $\mathbb{R}$.
4) Si f *est positive sur* $\mathbb{R}$ *alors* F *est positive sur* $\mathbb{R}$.
5) Si f *est positive sur* $\mathbb{R}$ *alors* F *est croissante sur* $\mathbb{R}$.
6) Si f *est* T*-périodique sur* $\mathbb{R}$ *alors* F *est* T*-périodique sur* $\mathbb{R}$.
7) Si f *est paire alors* F *est impaire.*

4.3 Intégrale de fonctions à valeurs complexes.

Soit f une fonction définie sur le segment $[a\,,\,b]$ à valeurs complexes. Notons $g = Re(f)$ et $h = Im(f)$ les parties réelle et imaginaire de f. On a donc :

$$\forall t \in [a\,,\,b] \quad , \quad f(t) = g(t) + i\,h(t)\,.$$

Définition - *Fonction* $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{C}$ *Riemann-intégrable.*
On dit que la fonction $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{C}$ est Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$ si g et h sont Riemann-intégrables sur $[a\,,\,b]$ et on pose :

$$\int_a^b f(t)\,dt \;\; := \;\; \int_a^b g(t)\,dt + i\int_a^b h(t)\,dt\,.$$

$\triangle$

Exemple
Soit $f(t) = e^{it}\,,\, t \in \left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$. Alors $g(t) = \cos t$ et $h(t) = \sin t$, et on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{it}\,dt \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt + i\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt \;=\; 1 + i\,.$$

L'intégrale de fonctions à valeurs complexes hérite de la plupart des propriétés de l'intégrale des fonctions à valeurs réelles, et notamment de la linéarité :

$$\int_a^b (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(t)\,dt \;=\; \lambda_1\int_a^b f_1(t)\,dt + \lambda_2\int_a^b f_2(t)\,dt \quad , \quad \lambda_1\,,\,\lambda_2 \in \mathbb{C}$$

de la relation de Chasles :

$$\int_\alpha^\gamma f(t)\,dt \;=\; \int_\alpha^\beta f(t)\,dt + \int_\beta^\gamma f(t)\,dt \quad , \quad \alpha\,,\,\beta\,,\,\gamma \in [a\,,\,b]$$

et de l'inégalité :

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \;\leqslant\; \int_a^b |f(t)|\,dt\,.$$

Donnons la preuve de cette dernière inégalité :
On admettra que $|f|$ est Riemann-intégrable si f est Riemann-intégrable à valeurs complexes.
Notons $I = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$. Si $I = 0$, cette inégalité est bien vérifiée. Sinon, si $I \neq 0$, alors $I \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et s'écrit sous forme polaire $I = |I| \cdot e^{i\theta}\,,\, \theta \in \mathbb{R}$. Mais alors :

$$|I| \;=\; e^{-\,i\theta} \cdot I \;=\; \int_a^b e^{-\,i\theta} f(t)\,dt \in \mathbb{R}$$

et donc $\displaystyle\int_a^b e^{-i\theta} f(t)\, dt = \int_a^b Re(e^{-i\theta} f(t))\, dt$.
Or :

$$Re(e^{-i\theta} f(t)) \leqslant |e^{-i\theta} f(t)| = |f(t)|$$

d'où :

$$|I| \quad \leqslant \quad \int_a^b |f(t)|\, dt\,.$$

Conséquence
Si f , $g : [a\,,\,b] \to \mathbb{C}$ sont continues, $|f|$, $|g| : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ sont continues et, puisque $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt\right| \leqslant \displaystyle\int_a^b |f|(t)\cdot|g|(t)\,dt$, on déduit immédiatement que les inégalités ($\star$) et ($\star\star$), de Cauchy-Schwarz et Minkowski, sont encore valables pour des fonctions continues à valeurs complexes.

En fait, les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski correspondent à un cas particulier des inégalités de Hölder et Minkowski.

Inégalités de Hölder et de Minkowski

Proposition (Inégalité de Hölder)
Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a\,,\,b]$ à valeurs complexes et $p \in]1\,,+\infty[$. Alors, on a :

$$\left|\int_a^b f(t)\cdot g(t)\,dt\right| \quad \leqslant \quad \left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \quad , \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

Preuve
Il suffit de se limiter au cas de fonctions f et $g \geqslant 0$, puisque $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\cdot g(t)\,dt\right| \leqslant \displaystyle\int_a^b |f(t)|\cdot|g(t)|\,dt$.
On peut supposer de plus f et g non identiquement nulles sur $[a\,,\,b]$ et par suite :

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \|g\|_q := \left(\int_a^b |g(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \neq 0$$

Utilisant alors l'inégalité de convexité (cf. Chapitre II) :

$$\forall a, b \in [0\,,+\infty[\quad , \quad a\cdot b \;\leqslant\; \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$$

il vient, pour tout $t \in [a\,,\,b]$:

$$\frac{f(t)}{\|f\|_p}\cdot\frac{g(t)}{\|g\|_q} \quad \leqslant \quad \frac{1}{p}\;\left(\frac{f(t)}{\|f\|_p}\right)^p + \frac{1}{q}\;\left(\frac{g(t)}{\|g\|_q}\right)^q$$

En intégrant sur l'intervalle $[a\,,\,b]$, on obtient l'inégalité cherchée.

□

Proposition (Inégalité de Minkowski)
Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a\,,\,b]$ à valeurs complexes, et $p \in [1\,,+\infty[$. Alors on a :

$$\left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \quad \leqslant \quad \left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

Preuve
Si $p = 1$, cette inégalité est immédiate puisque pour tout $t \in [a\,,\,b]$, $|f(t)+g(t)| \leqslant |f(t)|+|g(t)|$.
Si $p \in]1\,,\,+\infty[$, on écrit, pour tout $t \in [a\,,\,b]$:

$$|f(t)+g(t)|^p \quad\leqslant\quad |f(t)+g(t)|^{p-1}\cdot|f(t)| + |f(t)+g(t)|^{p-1}\cdot|g(t)|$$

En appliquant l'inégalité de Hölder à chacun des deux membres de droite, on obtient :

$$\int_a^b |f(t)+g(t)|^p\,dt \quad\leqslant\quad \left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

d'où le résultat puisque $1 - \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p}$.

□

4.4 Intégrale et primitive d'une fonction continue.

Tout d'abord, on rappelle que si f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$, on appelle primitive F de f sur I, une fonction $F : I \to \mathbb{K}$ dérivable telle que, pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Remarque 1
Il résulte du théorème des accroissements finis que si $f : I \to \mathbb{K}$ admet une primitive F_1 sur I, alors toute autre primitive F de f sur I est de la forme $F = F_1 + \lambda$, où $\lambda \in \mathbb{K}$, et réciproquement, toute fonction F de la forme $F = F_1 + \lambda$ est une primitive de f sur I.

Remarque 2
Si $f : I \to \mathbb{R}$ admet une primitive sur I, alors f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires sur I : pour tous $[a\,,\,b] \subset I$, f prend sur $[a\,,\,b]$ toute valeur C comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ (i.e. : il existe $c \in [a\,,\,b]$ tel que $f(c) = C$) (Théorème de Darboux).
Ainsi la fonction $f : [0\,,\,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = 0$ si $t \in \left[0\,,\,\dfrac{1}{2}\right[$ et $f(t) = 1$ si $t \in \left[\dfrac{1}{2}\,,\,1\right]$, n'admet pas de primitive sur $[0\,,\,1]$.

Maintenant, si f est continue on a :

Théorème
Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur l'intervalle I. Soit $a \in I$. Pour tout $x \in I$, on pose $= F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$.
Alors, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et, pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$: F est <u>la</u> primitive de f sur I qui s'annule en $x = a$.

Ainsi, toute fonction continue sur un intervalle admet au moins une primitive sur I, et on les connaît alors toutes (remarque 1).

Preuve
Il suffit de montrer que F est dérivable sur I avec $F'(x) = f(x)$ pour $x \in I$.

Soient $x \in I$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tels que $x+h \in I$. On a alors :

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x) &= \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right] - f(x)\\ &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt - f(x)\\ &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} [f(t)-f(x)]\,dx\,.\end{aligned}$$

La fonction f étant continue au point x, on a :

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists \eta_\varepsilon > 0 \ \text{ tel que } \ \forall t \in I \ , \ |t-x| \leqslant \eta_\varepsilon \implies |f(t)-f(x)| \leqslant \varepsilon\,.$$

Ainsi, si $0 < |h| \leqslant \eta_\varepsilon$, $x+h \in I$, on obtient :

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| \leqslant \varepsilon\,.$$

□

Remarque
Dans le cas où f est à valeurs réelles, la démonstration peut être conduite différemment, en s'appuyant sur la formule de la moyenne :

$$F(x+h)-F(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt = h \cdot f(\xi_h)$$

où ξ_h est compris entre x et $x+h$. Et, si h tend vers 0, la continuité de f implique que $f(\xi_h)$ tend vers $f(x)$.

Exercice 4.4.1 *Identifier toutes les primitives des fonctions f sélectionnées ci-dessous.*

i) $f(x) = (tg\,x)^2$; *ii)* $f(x) = 1/(x\,\ell n x)$; *iii)* $f(x) = x/\sqrt{x+1}$;

iv) $f(x) = 1/(3+e^{-x})$; *v)* $f(x) = (x-1)/(x^2+x+1)$; *vi)* $f(x) = (x+2)/(x^2-3\,x-4)$.

Lorsque la fonction f n'est pas continue mais seulement monotone, on peut encore considérer $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$.
On peut alors se demander si la fonction F ainsi obtenue est dérivable. La réponse (en général) est NON. Par contre, on conserve certaines informations comme l'indique l'exercice ci-dessous.

Exercice 4.4.2 *Soit $\Phi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone croissante. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour $x \in [a,b]$, on pose $f(x) := \lambda + \int_a^x \Phi(t)\,dt$. Soient y, y_1 et y_2 trois points de $[a,b]$.*

1) Montrer que pour $y < y_1 < y_2 \leq b$, on a :

$$(y_2-y_1)\int_y^{y_1} \Phi(t)\,dt \leq (y_2-y_1)\ \Phi(y_1)\ (y_1-y) \leq (y_1-y)\int_{y_1}^{y_2} \Phi(t)\,dt\,.$$

2) Montrer que pour $a \leq y_1 < y_2 < y$, on a :

$$(y-y_2)\int_{y_1}^{y_2} \Phi(t)\,dt \leq (y-y_2)\ \Phi(y_2)\ (y_2-y_1) \leq (y_2-y_1)\int_{y_2}^{y} \Phi(t)\,dt\,.$$

3) Montrer que pour $a \leq y_1 < y < y_2 \leq b$, on a :

$$(y_2-y)\int_{y_1}^{y} \Phi(t)\,dt \leq (y_2-y)\ \Phi(y)\ (y-y_1) \leq (y-y_1)\int_{y}^{y_2} \Phi(t)\,dt\,.$$

4) On fixe $y \in]a,b[$. Déduire de ce qui précède que l'application $G : [a,b]\setminus\{y\} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à x associe le quotient $\big(f(x)-f(y)\big)/(x-y)$ est croissante sur $[a,b]$.

5) Montrer que f est convexe sur $[a,b]$.

6) On fixe $y \in]a,b[$. Que vaut $f'_g(y)$? Et $f'_d(y)$?

On déduit du théorème précédant la propriété fondamentale du calcul intégral :

Corollaire 1
Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue. Soit F une primitive de f sur I. Alors, pour tous $a\,,\, b \in I$, on a :

$$\int_a^b f(t)\,dt \quad = \quad F(b) - F(a)\,.$$

Preuve
Notons F_1 la fonction $x \longmapsto F_1(x) := \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt : I \to \mathbb{K}$. Alors, la fonction $F_2 = F - F_1$ est dérivable sur I avec $F_2' = 0$ sur I ; F_2 est donc constante sur I et, pour $x = a$, on obtient : $F_2 = F(a)$. D'où :

$$F(x) - F(a) \quad = \quad F_1(x) \quad = \quad \int_a^x f(t)\,dt \quad , \quad x \in I\,.$$

□

<u>Notation</u> : généralement, on utilise la notation $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = F\,\big|_a^b$.

Remarque
Il résulte du corollaire 1 que si f est de classe C^1 sur $[a\,,\, b]$, alors on a :

$$f(b) - f(a) \;=\; \int_a^b f'(t)\,dt\,.$$

Cependant, cette formule est encore vraie si f est continue dérivable sur $[a\,,\, b]$ avec f' Riemann-intégrable sur $[a\,,\, b]$. En effet, si $\sigma = \{a_0 = a\,,\, a_1\,,\,\ldots\,,\, a_n = b\}$ est une subdivision de $[a\,,\, b]$, en appliquant la formule des accroissements finis, on obtient :

$$f(b) - f(a) \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} (f(a_{k+1}) - f(a_k)) \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\, f'(\xi_k) \quad , \quad \xi_k \in]a_k\,,\, a_{k+1}[\,.$$

Et comme f' est Riemann-intégrable sur $[a\,,\, b]$, on a :

$$'' \lim '' \;\sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\, f'(\xi_k) \;=\; \int_a^b f'(t)\,dt$$

où la notion $''\lim''$ signifie limite selon que $|\sigma| := \max\limits_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)$ tend vers 0.

Exercice 4.4.3 *Calculer l'aire de la région délimitée par les courbes dont les équations sont $y = x^2/2$ d'une part et $y = 1/(1 + x^2)$ d'autre part.*

Exercice 4.4.4 *Soit f une fonction dérivable sur $[0\,,\, 1]$ vérifiant les trois conditions suivantes :*

i) $0 \leq f' \leq 2$; *ii)* f' *est décroissante ;* *iii)* $f(0) = 0$ *et* $f(1) = 1$.

Identifier le plus grand nombre m et le plus petit nombre M donnant lieu à l'encadrement $m \leq \int_0^1 f(t)\,dt \leq M$. Peut-il y avoir égalité.

Applications

Lemme (Lemme de Gronwall)
Soient $\varphi : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue et $c \in [a\,,\,b]$.
On suppose qu'il existe des constantes positives A et B telles que :

$$\forall t \in [a\,,\,b] \quad , \quad \varphi(t) \leqslant A + B \left| \int_c^t \varphi(s)\,ds \right|.$$

Alors :

$$\forall t \in [a\,,\,b] \quad , \quad \varphi(t) \leqslant A \cdot e^{B|t-c|}.$$

Preuve
Considérons la fonction $F : [c\,,\,d] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$F(t) := A + B \int_c^t \varphi(s)\,ds.$$

D'après le théorème précédent , F est de classe C^1 sur $[c\,,\,b]$ et vérifie $\forall t \in [c\,,\,b]\,,\, \varphi(t) \leqslant F(t)$.
Comme $F'(t) = B\,\varphi(t) \leqslant B\,F(t)$, on en déduit que $\dfrac{d}{dt}\,[e^{-Bt}\,F(t)] = e^{-\,Bt}\,[F'(t) - B\,F(t)] \leqslant 0$ sur $[c\,,\,b]$.
Par suite,

$$\forall t \in [c\,,\,b] \quad , \quad e^{-\,Bt}\,F(t) \leqslant e^{-\,Bc}\,F(c) = A\,e^{-\,Bc}$$

d'où : $\forall t \in [c\,,\,b]\,,\, \varphi(t) \leqslant F(t) \leqslant A\,e^{B\,(t-c)}$.
Pour $t \in [a\,,\,c]$, on considère la fonction $G(t) := A + B \displaystyle\int_t^c \varphi(s)\,ds$.
G est de classe C^1 sur $[a\,,\,c]$, vérifie : $\varphi(t) \leqslant G(t)$ et $G'(t) = -\,B\,\varphi(t) \geqslant -\,B\,G(t)$, i.e. : $\dfrac{d}{dt}\,[e^{Bt}G] \geqslant 0$, ce qui implique $e^{Bt}\,G(t) \leqslant e^{Bc}\,G(c)$, d'où $\varphi(t) \leqslant G(t) \leqslant A\,e^{B\,(c-t)}$.

Théorème du relèvement
Soit $f : I \to U$ une application de classe C^1 d'un intervalle I, non vide, de $\mathbb{R}$ dans l'ensemble U des nombres complexes de module 1. Alors :

(i) Il existe une application $\varphi_0 : I \to \mathbb{R}$, de classe C^1 telle que :

$$\forall t \in I \quad , \quad f(t) = e^{i\,\varphi_0(t)}\,.$$

(ii) Les applications $\varphi : I \to \mathbb{R}$, de classe C^1, vérifiant :

$$(\star) \qquad \forall t \in I \quad , \quad f(t) = e^{i\,\varphi(t)}$$

sont exactement les fonctions φ de la forme $\varphi = \varphi_0 + 2k \cdot \pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.
(Il y a donc unicité des applications φ de classe C^1 sur I vérifiant $(\star)$ à un multiple entier de 2π près.)

Preuve
Si $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 et vérifie $(\star)$, φ vérifie :

$$\forall t \in I \quad , \quad i\,\varphi'(t)\,f(t) = f'(t)\,.$$

La fonction $h : t \longmapsto \dfrac{1}{i} \cdot \dfrac{f'(t)}{f(t)}$ est continue sur I et à valeurs réelles puisque, pour tout $t \in I$, $f(t) \in U$ et donc :

$$\forall t \in I \quad , \quad |f(t)|^2 = f(t) \cdot \overline{f}(t) = 1$$

ce qui, par dérivation, donne :

$$\forall t \in I \quad , \quad f'(t) \cdot \overline{f}(t) + f(t) \cdot \overline{f'(t)} = 0\,.$$

Ainsi, $h(t) \in \mathbb{R}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.
On a donc nécessairement, pour $t_0 \in I$:

$$\forall t \in I \quad , \quad \varphi(t) - \varphi(t_0) = \frac{1}{i} \int_{t_0}^{t} \frac{f'(s)}{f(s)}\, ds = \phi(t)\,.$$

Par ailleurs, $f(t_0) \in U$: il existe donc $\theta_0 \in \mathbb{R}$ telle que $f(t_0) = e^{i\,\theta_0}$.
Et, comme $e^{i\,\varphi(t_0)} = f(t_0)$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\varphi(t_0) = \theta_0 + 2k \cdot \pi$. Ainsi, pour tout $t \in I$, on a :

$$\varphi(t) \;=\; \theta_0 + \phi(t) + 2k \cdot \pi\,.$$

Considérons alors la fonction $\varphi_0 : t \longmapsto \theta_0 + \phi(t) : I \to \mathbb{R}$. Cette fonction est de classe C^1 sur I, et si on pose $F(t) = e^{i\,\varphi_0(t)}$, on a :

$$\forall t \in I \quad , \quad \left(\frac{F}{f}\right)'(t) \;=\; \left(i\,\frac{\varphi_0'(t)}{f(t)} - \frac{f'(t)}{(f(t))^2}\right) F(t) \;=\; 0\,.$$

Il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que : $\forall t \in I$, $F(t) = \lambda \cdot f(t)$.
En particulier, pour $t = t_0$, $F(t_0) = e^{i\,\varphi_0(t_0)} = e^{i\,\theta_0} = \lambda\, f(t_0) = \lambda\, e^{i\,\theta_0}$, ce qui implique $\lambda = 1$: φ_0 est donc une solution de classe C^1 sur I à $(\star)$. Compte-tenu de ce qui précède, les autres solutions sont exactement de la forme : $\varphi_0 + 2k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

□

Corollaire
Soit $\phi : I \to \mathbb{C}^*$ une fonction de classe C^1.
Alors, il existe deux fonctions $\rho : I \to \mathbb{R}_+^* =]0\,, +\infty[$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall t \in I \quad , \quad \phi(t) = \rho(t)\, e^{i\,\varphi(t)}\,.$$

Preuve
Posons $\rho(t) = |\phi(t)|$, $t \in I$. Puisque $\phi(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$, ρ est de classe C^1 sur I, ainsi que la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{\phi(t)}{|\phi(t)|} : I \to U$. Il suffit ensuite d'appliquer le théorème de relèvement à cette fonction f.

□

Proposition (Inégalité de Poincaré)
Soit $f : [a\,, b] \to \mathbb{K}\,(\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose $f(a) = 0$.
Alors :

$$\int_a^b |f(t)|^2\, dt \quad \leqslant \quad \frac{(b-a)^2}{2} \quad \int_a^b |f'(t)|^2\, dt$$

Preuve
La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a\,, b]$ et $f(a) = 0$, on a donc, pour tout $t \in [a\,, b]$: $f(t) = \displaystyle\int_a^t f'(s) ds$.

Par suite, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|f(t)|^2 \quad \leqslant \quad \left(\int_a^t |f'(s)|\, ds\right)^2 \quad \leqslant \quad \int_a^t |f'(s)|^2\, ds \cdot \int_a^t 1^2\, ds$$

i.e. $|f(t)|^2 \;\leqslant\; (t-a) \displaystyle\int_a^b |f'(s)|^2\, ds$.
En intégrant sur $[a\,, b]$, on obtient l'inégalité annoncée.

□

Remarque
Si on suppose de plus que $f(b) = 0$, on a :

$$(\star) \qquad \int_a^b |f(t)|^2\, dt \;\leqslant\; \frac{(b-a)^2}{8} \int_a^b |f'(t)|^2\, dt$$

En effet, puisque $f(a) = 0$, en utilisant l'inégalité de Poincaré sur le segment $\left[a\,,\,\dfrac{a+b}{2}\right]$, on a :

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(t)|^2\, dt \;\leqslant\; \frac{(b-a)^2}{8} \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f'(t)|^2\, dt$$

De même, puisque $f(b) = 0$, en utilisant à nouveau l'inégalité de Poincaré sur le segment $\left[\dfrac{a+b}{2}\,,\,b\right]$, on a aussi :

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(t)|^2\, dt \;\leqslant\; \frac{(b-a)^2}{8} \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f'(t)|^2\, dt$$

On en déduit l'inégalité $(\star)$.
Cependant, la constante $\dfrac{(b-a)^2}{8}$ dans l'inégalité $(\star)$ n'est pas la meilleure.

Proposition (Inégalité de Wirtinger)
Soit $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
Alors, si $f(a) = f(b) = 0$, on a :

$$\int_a^b |f(t)|^2\, dt \;\leqslant\; \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b |f'(t)|^2\, dt$$

avec égalité si et seulement si $f(t) := \lambda \sin\left(\pi\, \dfrac{t-a}{b-a}\right)$ où λ est une constante réelle.

Preuve
En posant $g(s) := f\left(a + s \cdot \dfrac{b-a}{\pi}\right)$, $s \in [0\,,\,\pi]$, on se ramène au cas $[a\,,\,b] = [0\,,\,\pi]$ et à l'inégalité :

$$(\star) \qquad \int_0^\pi |g(s)|^2\, ds \;\leqslant\; \int_0^\pi |g'(s)|^2\, ds$$

avec égalité si et seulement si $g(s) = \lambda \cdot \sin s\,,\ s \in [0\,,\,\pi]$.

Soit $h(s) := g(s)\,\mathrm{cotg}(s) = \dfrac{g(s)}{\mathrm{tg} s}$.

Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,,\,\pi[$ et se prolonge par continuité en $s = 0$ par $h(0) = g'(0)$ et en $s = \pi$ par $h(\pi) = g'(\pi)$.
On va montrer que :

$$\int_0^\pi [g'(s) - h(s)]^2\, ds \;=\; \int_0^\pi |g'(s)|^2\, ds - \int_0^\pi |g(s)|^2\, ds$$

ce qui démontrera l'inégalité $(\star)$ recherchée.
Comme $[g'(s) - h(s)]^2 = |g'(s)|^2 + |g(s)|^2 \dfrac{1}{\mathrm{tg}^2\, s} - 2g(s)\, g'(s)\, \dfrac{1}{\mathrm{tg}\, s}$ et que : $\dfrac{1}{\mathrm{tg}^2\,(s)} = -1 - \left(\dfrac{1}{\mathrm{tg}}\right)'(s)$, on peut écrire :

$$\int_0^\pi [g'(s) - h(s)]^2\, ds \;=\; \int_0^\pi |g'(s)|^2\, ds - \int_0^\pi |g(s)|^2\, ds - \int_0^\pi \left[g(s)^2 \cdot \frac{1}{\mathrm{tg}\, s}\right]' ds$$

et comme $g(s)^2 \cdot \dfrac{1}{\mathrm{tg}(s)} = g(s)\, h(s)$, et que $\lim\limits_{s \to 0} g(s)\, h(s) = 0 = \lim\limits_{s \to \pi} g(s)\, h(s)$, on en déduit $(\star)$.
Enfin, on a égalité dans $(\star)$ si et seulement si $\displaystyle\int_0^\pi |g'(s) - h(s)|^2\, ds = 0$, c'est-à-dire, puisque la fonction

$s \longmapsto g'(s) - h(s)$ est continue sur $[0\,,\,\pi]$, si et seulement si $g'(s) = h(s)$, i.e. puisque $g(0) = g(\pi) = 0$, $g(s) = \lambda \cdot \sin s\,,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

$\square$

Exercice 4.4.5 *Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a\,,\,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(a) = f(b) = 0$.*

1) On pose $M := \sup_{t\in[a,b]} |f'(t)|$. Etablir l'inégalité : $|\int_a^b f(t)\ dt| \leq \dfrac{(b-a)^2}{4}\ M$.

2) Dans quels cas a-t'on égalité ?

Exercice 4.4.6 *Soit $f : [0,1] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $0 \leq f'(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0,1]$. Etablir l'inégalité :*

$$\int_0^1 f(t)^3\ dt \leq \Big(\int_0^1 f(t)\ dt\Big)^2.$$

Corollaire 2
Soient $I = (a\,,\,b)\,,\ J = (\alpha\,,\,\beta)$ deux intervalles de $\mathbb{R}\,,\, f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue, et $u\,,\,v : J \to I$ deux fonctions dérivables.
On pose :

$$\forall x \in J \quad , \quad \phi(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt\,.$$

Alors $\phi : J \to \mathbb{K}$ est dérivable et,

$$\forall x \in J \quad , \quad \phi'(x) = v'(x)\cdot f(v(x)) - u'(x)\cdot f(u(x))\,.$$

Preuve
Soit F une primitive de f sur I. On a donc : $\phi(x) = F(v(x)) - F(u(x))$.
Ainsi, ϕ, composée de fonctions dérivables, est dérivable sur J et :

$$\forall x \in J \quad , \quad \phi'(x) = F'(v(x))\,v'(x) - F'(u(x))\,u'(x)$$

c'est-à-dire, puisque $F' = f$, $\phi'(x) = v'(x)\cdot f(v(x)) - u'(x)\cdot f(u(x))$.

$\square$

Exemple
Soit $\phi(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \ell n\, t\,dt\,,\ x \in]0\,,+\infty[$; ϕ est dérivable sur $]0\,,+\infty[$ et on a :
$\phi'(x) = 2x\,\ell n(x^2) - \ell n\,x = (4x-1)\,\ell n\,x$.

Exercice 4.4.7 *Calculer la dérivée de l'application $x \longmapsto G(x) = \int_x^{2\,x} 1/(1+t^2+t^4)\,dt$.*

Exercice 4.4.8 *On pose $F(x) = \int_x^{x^2} 1/\ell n\,t\,dt$.*
1) Quel est l'ensemble de définition de F ? La fonction F est-elle continue ? La fonction F est-elle dérivable sur son ensemble de définition ?
2) Déterminer $\lim_{x\to 1+} F(x)$ en comparant la fonction F à $H(x) = \int_x^{x^2} 1/(t\,\ell n\,t)\,dt$.

Corollaire 3 (Intégration par parties)
Soient f , $g : [a\,,\,b] \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\cdot g'(t)\,dt &= fg\,|_a^b - \int_a^b f'(t)\,g(t)\,dt \\ &= [f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a)] - \int_a^b f'(t)\,g(t)\,dt\,.\end{aligned}$$

Preuve
Si $h = fg$, h est une primitive de h' sur $I = [a\,,\,b]$ et il résulte du corollaire 1 que :

$$\int_a^b h'(t)\,dt \quad = \quad h(b) - h(a)\,.$$

□

Exemple : Intégrales de Wallis
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $I_n := \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\, t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\, t\,dt$ (effectuer le changement de variable $t = \dfrac{\pi}{2} - s$).
En intégrant par parties, on obtient immédiatement que, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}\, t\,dt = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\, t\cdot\cos^2\, t\,dt$$

i.e. $(n+2)\,I_{n+2} = (n+1)\,I_n$.

On déduit de cette relation de récurrence que :

$(n+2)\,I_{n+2}\cdot I_{n+1} = (n+1)\,I_{n+1}\cdot I_n = \cdots = I_1\cdot I_0 = \dfrac{\pi}{2}$,

$I_{2p} = \dfrac{1\cdot 3\cdots(2p-1)}{2\cdot 4\cdots(2p)}\cdot\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(2p)!}{(p!)^2}\cdot\dfrac{\pi}{2^{2p+1}}$

et $I_{2p+1} = \dfrac{2\cdot 4\cdots(2p)}{1\cdot 3\cdots(2p+1)} = \dfrac{2^{2p}\,(p!)^2}{(2p+1)!}$.

Par ailleurs, on a $I_{n+2} \leqslant I_{n+1}$ pour tout entier $n \geqslant 0$, par suite :

$$\frac{n+1}{n+2} \quad = \quad \frac{I_{n+2}}{I_n} \;\leqslant\; \frac{I_{n+1}}{I_n} \;\leqslant\; 1$$

ce qui prouve que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}$ existe et vaut 1, et donc que $(n+1)\,I_{n+1}\cdot I_n \sim n\,I_n^2$ quand n tend vers $+\infty$.
Avec l'égalité $(n+1)\,I_{n+1}\cdot I_n = \dfrac{\pi}{2}$, on obtient que $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Une application importante de ce corollaire 3 est la formule de Taylor avec reste intégral :

Corollaire 4 (Formule de Taylor avec reste intégral)
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle I. Alors, pour tous $a\,,\,b \in I$, on a :

$$f(b) \quad = \quad f(a) + \frac{b-a}{1!}\,f'(a) \,+\, \ldots \,+\, \frac{(b-a)^n}{n!}\,f^{(n)}(a) + \frac{1}{n!}\int_a^b (b-t)^n\,f^{(n+1)}(t)\,dt\,.$$

Preuve
On raisonne par récurrence sur l'entier n.

Pour $n = 0$, c'est la formule (corollaire 1) : $f(b) = f(a) + \displaystyle\int_a^b f'(t)\,dt$.
Supposons la formule établie à l'ordre $n-1$, $n \geqslant 1$. Le reste à l'ordre $n-1$ est :

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_a^b (b-t)^{n-1}\, f^{(n)}(t)\,dt\,.$$

$f^{(n)}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$, on obtient donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n-1)!} \int_a^b (b-t)^{n-1}\, f^{(n)}(t)\,dt &= \frac{1}{(n-1)!} \left[-\frac{(b-t)^n}{n}\, f^{(n)}(t)\right] \Big|_a^b + \frac{1}{n!} \int_a^b (b-t)^n\, f^{(n+1)}(t)\,dt \\ &= \frac{(b-a)^n}{n!}\, f^{(n)}(a) + \frac{1}{n!} \int_a^b (b-t)^n\, f^{(n+1)}(t)\,dt\,. \end{aligned}$$

□

Remarque
Lorsque f est à valeurs réelles, on peut déduire de cette formule de Taylor avec reste intégral, avec f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, la formule de Taylor-Lagrange classique :

$$f(b) \;=\; f(a) + \frac{b-a}{1!}\, f'(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!}\, f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\xi) \quad , \quad \xi \in [a\,,\,b]\,.$$

En effet, désignons par m et M les bornes inférieure et supérieure de $f^{(n+1)}$ sur le segment $[a\,,\,b]$. On a :

$$m \cdot \int_a^b (b-t)^n\,dt \quad\leqslant\quad \int_a^b (b-t)^n\, f^{(n+1)}(t)\,dt \quad\leqslant\quad M \cdot \int_a^b (b-t)^n\,dt$$

et comme $\displaystyle\int_a^b (b-t)^n\,dt = \frac{(b-a)^{n+1}}{n+1}$, et $f^{(n+1)}$ continue sur $[a\,,\,b]$, $f^{(n+1)}$ prend toute valeur comprise entre m et M, i.e. : $\exists \xi \in [a\,,\,b]$ tel que :

$$\frac{1}{n!} \int_a^b (b-t)^n\, f^{(n+1)}(t)\,dt \quad=\quad \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\xi)\,.$$

Application
Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit $a \in I$.
Alors la primitive F d'ordre $n \geqslant 1$ de f sur I qui s'annule, ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ en a, est la fonction :

$$F(t) \;=\; \int_a^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\, f(s)\,ds$$

Ceci résulte immédiatement de la formule de Taylor avec reste intégral.
Ceci résulte aussi de la formule de dérivation du corollaire 2.

Exercice 4.4.9 *(Intégrales de Wallis)*
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\, t)^n\ dt$.

1) Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2} .

2) En déduire $I_{2\,p}$ et $I_{2\,p+1}$.

3) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et strictement positive.

4) En déduire que les suites $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(I_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes.

5) Calculer $n\,I_n\,I_{n+1}$ et montrer que les suites $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\sqrt{\frac{\pi}{2\,n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes.

Exercice 4.4.10 *Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n := \int_0^1 (1-t^2)^n \, dt$.*

1) Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} .

2) Calculer I_n.

3) En déduire la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \, C_n^k$.

Un autre outil pour le calcul d'intégrales est celui du changement de variable.

Corollaire 5
Soient $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue et $\varphi : J \to I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de l'intervalle J à valeurs dans l'intervalle I. Alors, pour tout $\alpha\,,\, \beta \in J$, on a :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\, dt \;=\; \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(s))\, \varphi'(s)\, ds\,.$$

Preuve
Soit F une primitive de f sur I. On a :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\, dt \;=\; F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$$

et, d'après le corollaire 1 :

$$\begin{aligned} F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) &= \int_{\alpha}^{\beta} (F \circ \varphi)'(s)\, ds \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} F'(\varphi(s)\; \varphi'(s)\, ds \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(s))\; \varphi'(s)\, ds\,. \end{aligned}$$

□

Exemple

$$\int_1^e \ell n\, t\, dt = 1$$

En effet, soient $t = \varphi(s) = e^s : \mathbb{R} \to]0\,,+\infty[$, et $\alpha = 0\,,\, \beta = 1$.
On a donc : $\varphi'(s) = e^s$:

$$\int_1^e \ell n\, t\, dt \;=\; \int_0^1 \ell n(e^s) \cdot e^s\, ds \;=\; \int_0^1 s\, e^s\, ds\,.$$

Et, en intégrant par parties : $f(s) = s\,,\, g(s) = e^s$:

$$\int_0^1 s \cdot e^s\, ds \;=\; [s \cdot e^s]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot e^s\, ds \;=\; e - e + 1 \;=\; 1\,.$$

Exercice 4.4.11
1) Montrer que l'application $\psi : [\ell n2, \ell n5] \longrightarrow [1,2]$ qui à x associe $\sqrt{e^x - 1}$ est de classe C^1 et qu'elle admet une application réciproque (notée φ) qui elle aussi est de classe C^1.

2) A l'aide du changement de variable (défini par φ), calculer la valeur de l'intégrale $I = \int_{\ell n2}^{\ell n5} \sqrt{e^x - 1}\, dx$.

Exercice 4.4.12 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une foncion strictement croissante et de classe C^1. On considère les deux intégrales $I_1 = \int_a^b f(t)\,dt$ et $I_2 = \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\,dt$.*

1) Rappeler pourquoi f admet une fonction réciproque f^{-1}. Quelle est la régularité de f^{-1} ?

2) Effectuer le changement de variable $t = f(u)$ dans l'intégrales I_2.

3) Calculer I_2 en fonction de I_1.

4) Faire un dessin figurant f et f^{-1} puis interpréter ce résultat géométriquement.

Exercice 4.4.13

1) A l'aide du changement de variables $\theta = arcsin\,\frac{x}{R}$, trouver une primitive de $f : x \longmapsto (R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ et en déduire l'aire dun disque de rayon R.

2) A l'aide du changement de variables $t = (2+x)^{\frac{1}{6}}$, trouver une primitive de $f : x \longmapsto \left(\sqrt{2+x} + \sqrt[3]{2+x}\right)^{-1}$.

3) A l'aide du changement de variables $x = 1 + 2\,th\,u$, trouver une primitive de $f : x \longmapsto \left((x-1)^2 - 4\right)^{-2}$.

4.5 Calcul approché d'une intégrale.

La connaissance d'une formule explicite pour la primitive F de f permet de calculer la valeur **exacte** de l'intégrale de f sur $[a,b]$ suivant la formule :

$$\int_a^b f(t)\,dt \;=\; F(b) - F(a)\,.$$

Exercice 4.5.1 *Calculer les intégrales suivantes.*

i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{arctg\,x}{1+x^2}\,dx$; *ii)* $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1+\frac{1}{x^2}\right) arctg\,x\;dx$; *iii)* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\;\sin x\;dx$;

iv) $\displaystyle\int_{-1}^1 (arccos\,x)^2\;dx$; *v)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$; *vi)* $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$;

vii) $\displaystyle\int_1^2 x^2\;\ell n\,x\;dx$; *viii)* $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+4x+7}\,dx$; *ix)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2}\,dx$.

Toutefois, la primitive F de f est presque toujours une fonction pour laquelle on ne connait pas de formule explicite. Par exemple, il n'existe pas de fonction usuelle qui soit une primitive de la fonction $f : t \longmapsto \sqrt{t^3+t}$ sur $(0\,,+\infty)$. Ni changement de variables, ni calcul par intégration par parties, ni d'autres techniques ne permettent, comme dans l'exercice ci-dessus, de calculer l'intégrale $\int_1^2 \sqrt{t^3+t}\;dt$. Il faut alors avoir recours à un calcul **approché** de la valeur de l'intégrale $\int_1^2 \sqrt{t^3+t}\;dt$.

L'objectif de ce paragraphe est de décrire différentes méthodes qui permettent d'effectuer un tel calcul. D'une manière générale, on procède de la façon suivante :

a) On découpe l'intervalle $[a\,,\,b]$ en n sous-intervalles $[a_k\,,\,a_{k+1}]$ de même longueur, soit $a_k = a + k\,\dfrac{b-a}{n}$ avec $k \in \{0\,,\,1\,,\,\ldots\,,\,n-1\}$.

b) Sur chaque "petit" segment $[a_k\,,\,a_{k+1}]$, on compare f à une fonction φ_k plus simple et dont l'intégrale se calcule facilement. Puis, on compare les intégrales $\displaystyle\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_{a_k}^{a_{k+1}} \varphi_k(t)\,dt\,.$

c) On estime l'erreur globale $e_n := \left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} \varphi_k(t)\,dt\right|\,.$

Le choix de la fonction φ_k dépend de la méthode utilisée, et la performance de la méthode se mesure selon les critères suivants :

- le peu de régularité (nombre de dérivées) consommé sur f,
- la petitesse de l'erreur e_n et, en particulier, la vitesse avec laquelle e_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

On va se limiter à trois méthodes d'approximation de l'intégrale $\displaystyle\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,dt$ par une intégrale $\displaystyle\int_{a_k}^{a_{k+1}} \varphi_k(t)\,dt$.
Par commodité, on notera $a_k = a$, $a_{k+1} = b$ et $\varphi_k = \varphi$.

1. **Méthode des points médians**
Soit $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On approche f sur $[a\,,\,b]$ par la fonction constante $\varphi : [a\,,\,b] \to \mathbb{R} : t \longmapsto f(m)$, où $m = \dfrac{1}{2}(a+b)$ (point médian).
On doit évaluer l'erreur $e = \left|\displaystyle\int_a^b f(s)\,ds - \int_a^b \varphi(s)\,ds\right| = \left|\displaystyle\int_a^b f(s)\,ds - (b-a)\,f(m)\right|$.
$(b-a)\,f(m)$ correspond à l'aire du rectangle de base le segment $[a\,,\,b]$ et de hauteur $f(m)$.
Considérons la fonction auxiliaire $\phi : \left[0\,,\,\dfrac{b-a}{2}\right] \to \mathbb{R} : t \longmapsto \phi(t) = \displaystyle\int_{m-t}^{m+t} f(s)\,ds - 2t\,f(m)$.
Ainsi, $e = \left|\phi\left(\dfrac{b-a}{2}\right)\right|$.
On a : $\phi(0) = 0$, $\phi'(t) = f(m+t) + f(m-t) - 2f(m)$, $\phi'(0) = 0$ et $\phi''(t) = f'(m+t) - f'(m-t)$.
Et, si on pose $M_2 := \underset{s\in[a\,,\,b]}{Max}|f''(s)|$, d'après la formule des accroissements finis, il vient : $|\phi''(t)| \leqslant 2t\,M_2$.
Par suite, ϕ'' étant continue on a : $\phi'(t) = \displaystyle\int_0^t \phi''(s)\,ds$ et donc : $|\phi'(t)| \leqslant 2M_2 \displaystyle\int_0^t s\,ds = M_2\,t^2$.
De même, $\phi(t) = \displaystyle\int_0^t \phi'(s)\,ds$ et donc : $|\phi(t)| \leqslant M_2 \displaystyle\int_0^t s^2\,ds = M_2\,\dfrac{t^3}{3}$.
D'où : $e = \left|\phi\left(\dfrac{b-a}{2}\right)\right| \leqslant M_2\,\dfrac{(b-a)^3}{24}$.
Par suite, l'erreur

$$\begin{aligned} e_n &= \left|\int_a^b f(s)\,ds - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \varphi_k(s)\,ds\right| \\ &= \left|\sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(s)\,ds - \int_{a_k}^{a_{k+1}} \varphi_k(s)\,ds\right)\right| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(a_{k+1}-a_k)^3}{24}\,M_k \quad , \quad M_k = \underset{s\in[a_k\,,\,a_{k+1}]}{Max}|f''(s)| \,. \end{aligned}$$

Finalement, en prenant pour valeur approchée de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(s)\,ds$ l'expression

$$I_n = \frac{b-a}{n}\,[f(m_0) \,+\, \ldots \,+\, f(m_{n-1})] \text{ où } m_k = a + \left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n} \,,$$

l'erreur $e_n = \left|\displaystyle\int_a^b f(s)\,ds - I_n\right|$ vérifie : $e_n \leqslant \dfrac{(b-a)^3}{24n^2}\,\underset{s\in[a\,,\,b]}{Max}|f''(s)|$.

2. **Méthode du trapèze**
Soit $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On approche f sur $[a\,,\,b]$ par la fonction affine $\varphi : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ qui vérifie $\varphi(a) = f(a)$ et $\varphi(b) = f(b)$, i.e. : $\varphi(s) = f(a) + (s-a)\,\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Alors $\displaystyle\int_a^b \varphi(s)\,ds = \dfrac{b-a}{2}\,[f(a)+f(b)]$.

Considérons, comme précédemment, la fonction auxiliaire :

$$\phi : \left[0\,,\ \frac{b-a}{2}\right] \to \mathbb{R} : t \longmapsto \phi(t) = \int_{m-t}^{m+t} f(s)\,ds - t[f(m+t)+f(m-t)] \ \text{ où } m = \frac{1}{2}\,(a+b)\,.$$

On a : $\phi(0)=0\,,\ \phi'(t) = f(m+t)+f(m-t)-[f(m+t)+f(m-t)] - t[f'(m+t)-f'(m-t)]$
i.e. : $\phi'(t) = -\,t[f'(m+t)-f'(m-t)]$.
De nouveau, en utilisant la formule des accroissements finis et en posant $M_2 = \underset{s\in[a\,,\,b]}{Max}|f''(s)|$, on obtient : $|\phi'(t)| \leqslant 2t^2\,M_2\,.$
Ecrivant $\phi(t) = \displaystyle\int_0^t \phi'(s)\,ds$ (puisque $\phi(0)=0$), on obtient :

$$|\phi(t)| \ \leqslant\ \int_0^t 2s^2\,M_2\,ds \ =\ 2M_2\,\frac{t^3}{3}$$

et $e = \left|\phi\left(\dfrac{b-a}{2}\right)\right| \ \leqslant\ M_2\,\dfrac{(b-a)^3}{12}\,.$
Et finalement, en prenant pour valeur approchée de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(s)\,ds$ l'expression

$$I_n \ =\ \frac{b-a}{2n}\,[f(a_0)+2f(a_1)\ +\ \ldots\ +\ 2f(a_{n-1})+f(a_n)]$$

où $a_k = a + k\,\dfrac{b-a}{n}$, l'erreur $e_n = \left|\displaystyle\int_a^b f(s)\,ds - I_n\right|$ vérifie :

$$e_n \ \leqslant\ \frac{(b-a)^3}{12n^2}\ \cdot\ \underset{s\in[a\,,\,b]}{Max}|f''(s)|\ .$$

Remarque : cette méthode n'est pas meilleure que la méthode des points médians.

3. **Méthode de Simpson**
Soit $f\ :\ [a\,,\,b]\ \to\ \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^4$. On approche f sur $[a\,,\,b]$ par la fonction polynomiale de degré 2 $\varphi : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ qui vérifie $\varphi(a) = f(a)\,,\ \varphi\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\,,\ \varphi(b) = f(b)$.
Alors $\displaystyle\int_a^b \varphi(s)\,ds = \frac{b-a}{6}\,\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$.
Considérons la fonction auxiliaire :

$$\phi : \left[0\,,\ \frac{b-a}{2}\right] \to \mathbb{R} : t \longmapsto \phi(t) = \int_{m-t}^{m+t} f(s)\,ds - \frac{2t}{6}\,[f(m-t)+4f(m)+f(m+t)]$$

où $m = \dfrac{1}{2}\,(a+b)$.
On a : $\phi(0)=0\,,\ \phi'(t) = f(m+t)+f(m-t)-\dfrac{1}{3}\,[f(m-t)+4f(m)+f(m+t)] - \dfrac{t}{3}\,[-\,f'(m-t)+f'(m+t)]$.
Alors $\phi'(0)=0$ et

$$\begin{aligned}
\phi''(t) \ &=\ f'(m+t)-f'(m-t)-\frac{1}{3}\,[f'(m+t)-f'(m-t)] - \frac{1}{3}\,[f'(m+t)-f'(m-t)]\\
&\quad -\ \frac{t}{3}\,[f''(m+t)+f''(m-t)]\\
\phi''(t) \ &=\ \frac{1}{3}\,[f'(m+t)-f'(m-t)] - \frac{t}{3}\,[f''(m+t)+f''(m-t)]\,.
\end{aligned}$$

De nouveau, $\phi''(0) = 0$ et

$$\begin{aligned}
\phi'''(t) &= \frac{1}{3}\left[f''(m+t) + f''(m-t)\right] - \frac{1}{3}\left[f''(m+t) + f''(m-t)\right] \\
&\quad - \frac{t}{3}\left[f'''(m+t) - f'''(m-t)\right] \\
\phi'''(t) &= -\frac{t}{3}\left[f'''(m+t) - f'''(m-t)\right].
\end{aligned}$$

Utilisant à nouveau la formule des accroissements finis, il vient :

$$|\phi'''(t)| \leqslant \frac{2}{3}\, t^2\, M_4 \qquad \text{avec } M_4 = \underset{s\in[a\,,\,b]}{Max}|f^{(4)}(s)|\ .$$

D'où $|\phi''(t)| \leqslant \displaystyle\int_0^t \frac{2}{3}\, M_4\, s^2\, ds = \frac{2}{9}\, M_4\, t^3$ et, puisque $\phi'(0) = 0$, on obtient de même :
$|\phi'(t)| \leqslant \displaystyle\int_0^t \frac{2}{9}\, M_4\, s^3\, ds = \frac{1}{18}\, M_4\, t^4$.
A nouveau, puisque $\phi(0) = 0$, il vient :

$$|\phi(t)| \leqslant \int_0^t \frac{1}{18}\, M_4\, s^4\, ds = \frac{M_4}{90}\, t^5 \quad \text{et} \quad e = \left|\phi\left(\frac{b-a}{2}\right)\right| \leqslant \frac{M_4}{2880}\,(b-a)^5\,.$$

Et finalement, en prenant pour valeur approchée de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(s)\,ds$, l'expression

$$I_n = \frac{b-a}{6n}\left[f(a_0) + 4f(m_0) + 2f(a_1) + 4f(m_2) + \ldots + 2f(a_{n-1}) + 4f(m_{n-1}) + f(a_n)\right]$$

où $a_k = a + k\,\dfrac{b-a}{n}$, $m_k = a + \left(k + \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{(b-a)}{n}$, l'erreur $e_n = \left|\displaystyle\int_a^b f(s)\,ds - I_n\right|$ vérifie :

$$e_n \leqslant \frac{(b-a)^5}{2880\cdot n^4}\ \underset{s\in[a\,,\,b]}{Max}|f^{(4)}(s)|\ .$$

Remarque
Si f est une fonction polynomiale de degré 2 sur $[a\,,\,b]$, l'approximation $\dfrac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$ est en fait la valeur exacte de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(s)\,ds$.

QCM. *Dire (on demande de justifier la réponse) si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.*

1) Toute fonction intégrable sur $[a,b]$ est continue.

2) Si f est intégrable sur $[a,b]$, on a $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$ pour tout $x \in [a,b]$.

3) Soit f une fonction sur $[a,b]$ vérifiant la propriété : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe g_ε intégrable sur $[a,b]$ telle que $|f(x) - g_\varepsilon(x)| \le \varepsilon$ pour tout $x \in [a,b]$. Alors f est intégrable sur $[a,b]$.

4) Si f est intégrable sur $[a,b]$, alors $|f|$ est intégrable sur $[a,b]$.

5) Si $|f|$ est intégrable sur $[a,b]$, alors f est intégrable sur $[a,b]$.

6) Si f et g sont intégrables sur $[a,b]$, alors le produit $f\,g$ est intégrable sur $[a,b]$.

7) Si f et g sont des fonctions continues sur $[a,b]$, alors la fonction $f\,g$ est encore continue sur $[a,b]$ et on a $\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt = \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)\left(\int_a^b g(t)\,dt\right)$.

8) Soit μ un nombre réel et $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres réels. On considère la fonction $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie via $f(0) = \mu$ et, pour tout $n \geq 1$, $f(t) = \lambda_n$ sur $]\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$. Alors f est intégrable sur $[0,1]$.

9) Soit f une fonction bornée sur $[0,1]$, continue sauf au point $\frac{1}{2}$. Alors f est intégrable sur $[0,1]$.

10) Il existe $f \geq 0$ continue sur $[0,1]$ vérifiant $f(\frac{1}{2}) > 0$ et $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$.

11) Soit f intégrable sur $[a,b]$. Si $\int_0^1 f(t)\,dt > 0$, alors $f \geq 0$ sur $[a,b]$.

12) Si f est croissante sur $[a,b]$, elle est intégrable sur $[a,b]$ et de plus $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ est croissante.

13) Si $f \leq 0$ est continue sur $[a,b]$, alors $G(x) = \int_x^b f(t)\,dt$ est croissante sur $[a,b]$.

14) Si f est continue sur $[0,1]$, la fonction $H(x) = \int_0^{x^2} f(t)\,dt$ est dérivable sur $[0,1]$ et on a $H'(x) = f(x^2)$.

Exercice 4.5.2 *On désigne par E l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$. Pour tout $f \in E$, on note :*

$$I(f) := \left(\int_0^1 f(t)\ dt\right)\left(\int_0^1 \frac{1}{f(t)}\ dt\right)$$

et on pose $\Gamma = I(E) = \{I(f)\,;\, f \in E\} \subset \mathbb{R}_*^+$.

1) Déterminer $m := \inf \Gamma$. Cette valeur inférieure est-elle atteinte ? Si c'est oui, pour quelles fonctions de E a t'on $I(f) = m$?

2) Que vaut le nombre $\sup \Gamma$ *?*

5 Intégrales généralisées.

5.1 Introduction.

Pour l'intégrale de Riemann, on s'est limité à considérer des fonctions définies sur un *segment* $[a\,,\,b]$ de $\mathbb{R}$ et *bornées sur ce segment.* Soit maintenant une fonction f définie sur un intervalle borné $[a\,,\,b[$, bornée sur $[a\,,\,b[$ et telle que la restriction à tout segment $[a\,,\,x]$ de $[a\,,\,b[$ soit Riemann-intégrable.
On peut considérer la fonction $F : [a\,,\,b[\to \mathbb{K} : x \longmapsto F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$.
On va montrer que $\displaystyle\lim_{x\to b} F(x)$ existe et que si $\tilde{f}$ est un prolongement quelconque de f à l'intervalle $[a\,,\,b]$ (i.e. $\tilde{f}(x) = f(x)$ pour $x \in [a\,,\,b[$ et $\tilde{f}(b) = \gamma \in \mathbb{K}$ arbitraire), alors $\tilde{f}$ est Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$ et son intégrale $\displaystyle\int_a^b \tilde{f}(t)\,dt$ ne dépend pas du prolongement $\tilde{f}$ choisi.
De plus, on a $\displaystyle\lim_{x\to b} F(x) = \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)dt = \int_a^b \tilde{f}(t)dt$.

Preuve
Soit M une constante telle que $\forall t \in [a\,,\,b[\,,\ |f(t)| \leqslant M$ et $M_\gamma = \max(M\,,\,|\gamma|)$.
Soit $\varepsilon > 0$ et b_ε tel que $a < b_\varepsilon < b$ et $M_\gamma(b - b_\varepsilon) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. La restriction de f au segment $[a\,,\,b_\varepsilon]$ étant Riemann-intégrable, il existe des fonctions en escalier $u_\varepsilon\,,\ v_\varepsilon$ sur $[a\,,\,b_\varepsilon]$ telles que :

$$u_\varepsilon \leqslant f \leqslant v_\varepsilon \quad \text{et} \quad \int_a^{b_\varepsilon} (v_\varepsilon - u_\varepsilon)(t)dt \leqslant \varepsilon\,.$$

Considérons les fonctions en escalier sur $[a\,,\,b]$ définies par :
$\tilde{u}_\varepsilon(t) = u_\varepsilon(t)$ et $\tilde{v}_\varepsilon(t) = v_\varepsilon(t)$ si $t \in [a\,,\,b_\varepsilon]$
$\tilde{u}_\varepsilon(t) = -\,M_\gamma$ et $\tilde{v}_\varepsilon(t) = M_\gamma$ si $t \in [b_\varepsilon\,,\,b]\,.$
On a alors sur $[a\,,\,b]$:

$$\tilde{u}_\varepsilon \leqslant \tilde{f} \leqslant \tilde{v}_\varepsilon \quad \text{et} \quad \int_a^b (\tilde{v}_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon)(t)\,dt \leqslant \varepsilon + 2\cdot\frac{\varepsilon}{2} = 2\varepsilon\,.$$

La fonction $\tilde{f}$ est donc Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$.

En utilisant la relation de Chasles, pour tout $x \in [a\,,\,b[\,$, on a :

$$\left|\int_a^b \tilde{f}(t)\,dt - F(x)\right| = \left|\int_x^b \tilde{f}(t)\,dt\right| \leqslant \int_x^b |\tilde{f}(t)|\,dt \leqslant M_\gamma(b-x)\,.$$

On en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to b} F(x)$ existe et vaut $\displaystyle\int_a^b \tilde{f}(t)\,dt$.
De plus, il résulte des propriétés de l'intégrale de Riemann que $\displaystyle\int_a^b \tilde{f}(t)\,dt$ ne dépend pas du prolongement $\tilde{f}$ choisi de f au segment $[a\,,\,b]$: on ne change pas la valeur d'une intégrale en modifiant la fonction en un nombre fini de points. □

Exemple
La fonction $f(t) = \sin\dfrac{1}{t}\,,\ t \in]0\,,\,1]\,,\ f(0) = \gamma$ est Riemann-intégrable sur $[0\,,\,1]$ et $\displaystyle\int_0^1 \sin\frac{1}{t}\,dt$ existe au sens de Riemann.

5.2 Intégrale généralisée.

On va exploiter l'introduction pour étendre la notion d'intégrale à des fonctions non bornées sur un intervalle $[a\,,\,b[$ (resp. $]a\,,\,b]$) avec a et b bornés. On va prendre aussi en compte le cas de fonctions (bornées ou pas) définies sur $[a, b[$ avec b pouvant égaler $+\infty$ (resp. a pouvant égaler $-\infty$).

Définition 1 - *Fonction localement intégrable.*
Soit I un intervalle (quelconque) de $\mathbb{R}$. Une application $f : I \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est dite *localement intégrable sur* I si sa restriction à tout intervalle fermé borné (du type $[c, d]$ avec $-\infty < c \leq d < +\infty$) contenu dans I (on a $[c, d] \subset I$) est intégrable au sens de Riemann. △

Exemple
Toute fonction f continue par morceaux sur I est localement intégrable sur I.

Définition 2 - *Intégrale généralisée sur* $[a, b[$.
Soit f une fonction localement intégrable sur $[a\,,\,b[\,, a \in \mathbb{R}$ et $a \leqslant b$ avec $b \in \mathbb{R}$, ou $b = +\infty$ (resp. sur $]a\,,\,b]\,, a \leqslant b$, avec $a \in \mathbb{R}$, ou $a = -\infty$).
Pour $x \in [a\,,\,b[$ on pose : $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ (resp. $F(x) = \displaystyle\int_x^b f(t)\,dt$ avec $x \in]a\,,\,b]$).
Alors, si la fonction $x \longmapsto F(x)$ admet une limite quand x tend vers b par valeurs inférieures (resp. x tend vers a par valeurs supérieures), on dit que f admet une intégrale généralisée sur $[a\,,\,b[$ (resp. $]a\,,\,b]$), notée :

$$\int_a^b f(t)\,dt := \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\,dt \ \ (\text{resp. } \lim_{x\to a} \int_x^b f(t)\,dt)\,.$$

On dit aussi que l'intégrale $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ (resp. $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$) est convergente en $x = b$ (resp. $x = a$.).

Si, par contre, cette limite n'existe pas, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ (resp. $\displaystyle\int_x^b f(t)\,dt$) est divergente en $x = b$ (resp. $x = a$). △

Ainsi, toute intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est soit convergente, soit divergente.

Etude de quelques exemples

Ex.1 $f(t) = e^{-t}\,,\ t \in [0\,,\,+\infty[$

$F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t}dt = 1 - e^{-x}$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$

Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ est convergente et vaut 1.

Ex.2 $f(t) = \dfrac{1}{t^\alpha}\ ,\ \alpha \in \mathbb{R}\,,\ t \in]0\,,\,1]$

$$F(x) = \int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{-\alpha+1}\,(1 - x^{-\alpha+1}) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ -\ell n\, x & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.

Ex.3 $f(t) = \dfrac{1}{t^\alpha}\ ,\ \alpha \in \mathbb{R}\,,\ t \in [1\,,\,+\infty[$

$$F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{-\alpha+1}\,(x^{-\alpha+1} - 1) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ell n\, x & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Ex.4 $f(t) = \dfrac{1}{(t-a)^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $t \in]a\,,\,b]$

Comme pour l'exemple 2, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.

Ex.5 $f(t) = \ell n\, t$, $t \in]0\,,\,1]$

$F(x) = \displaystyle\int_x^1 \ell n\, t\, dt = t(\ell n\, t - 1)\,|_x^1 = -1 - x(\ell n\, x - 1)$ tend vers -1 quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.

Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ell n\, t\, dt$ est convergente et vaut -1.

Ex.6 $f(t) = \dfrac{1}{t(\ell n\, t)^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $t \in [2\,,\,+\infty[$

$$F(x) = \int_2^x \frac{dt}{t(\ell n\, t)^\alpha} = \int_{\ell n\, 2}^{\ell n\, x} \frac{ds}{s^\alpha}$$

i.e. $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{-\alpha+1}\,(\ell n\, x)^{-\alpha+1} - (\ell n\, 2)^{-\alpha+1} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ell n(\ell n\, x) - \ell n(\ell n\, 2) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$

Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ell n\, t)^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 5.2.1 *Soient a, b et r trois nombres réels avec $a < b$ et $r < 1$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^r}\, dt$ est-elle convergente ? Et si $r \geq 1$?*

Exercice 5.2.2 *On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.*

1) En utilisant l'inégalité $\ell n\,(1+x) \leq x$ (qui est valable pour $x > -1$), montrer que :

$$\Big(1 - \frac{x}{n}\Big)^n \leq e^{-x} \leq \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^{-n}, \qquad \forall x \in [0, n]\,.$$

2) En déduire que :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \Big(1 - \frac{t^2}{n}\Big)^n\, dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\, dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} 1/\Big(1 + \frac{t^2}{n}\Big)^n\, dt\,.$$

3) On pose $I_n := \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^n\, d\theta$. On rappelle (voir l'exercice 4.4.7) que la suite $(I_n)_n$ est équivalente à la suite $\big(\sqrt{\pi/2\,n}\big)_n$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(1+u^2)^n}\, du$ est convergente et vaut I_{2n-2}.

4) Montrer que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$ est convergente et vaut $\sqrt{\pi}/2$.

Exercice 5.2.3 *On considère $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$.*

1) On suppose que f est une application continue par morceaux possédant une limite l en $+\infty$ et que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ est convergente. Montrer que $l = 0$.

2) On suppose que f est une application uniformément continue et que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ est convergente. Montrer que $f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

3) On suppose que f est une application uniformément continue. Montrer que $\int_0^\infty e^{i\, f(t)}\, dt$ est divergente.

Exercice 5.2.4 *Soit* $f : \mathbb{R}^+ \longmapsto \mathbb{R}$ *une fonction positive, continue et telle que l'intégrale* $\int_0^{+\infty} f(t)^2\,dt$ *converge. Etablir le comportement asymptotique :*

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x f(t)\ dt \;=\; 0\,.$$

Exercice 5.2.5 *Soit* $f : \mathbb{R}^+ \longmapsto \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^1 *telle que les deux intégrales* $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ *et* $\int_0^{+\infty} f'(t)^2\,dt$ *convergent. Montrer que* f *est bornée sur* $\mathbb{R}^+$.

Exercice 5.2.6 *On pose :*

$$I_n^x := \int_0^x \frac{dx}{(x+1)\cdots(x+n)}\,, \qquad n \geq 2\,, \qquad x \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}\,.$$

1) Montrer que l'intégrale généralisée $I_n^{+\infty}$ *est convergente.*

2) Réduire la fraction rationnelle en éléments simples et calculer I_n^x *pour* $x \in \mathbb{R}^+$.

3) Pourquoi a t'on :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!\,(n-k)!} \;=\; 0\ ?$$

4) Calculer $I_n^{+\infty}$ *sous la forme d'une somme finie.*

Exercice 5.2.7 *Etude d'une fonction définie par une intégrale*

1) Calculer l'intégrale :

$$I \;:=\; \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\ dx.$$

2) Soit $a \in \mathbb{R}^+$ *fixé. On considère l'intégrale :*

$$J_a(t) \;:=\; \int_0^t \frac{x\ Arctg\,(a\,x)}{1+x^4}\ dx, \qquad t \in \mathbb{R}^+.$$

Montrer que :

a) La fonction $t \longmapsto J_a(t)$ *est positive sur* $\mathbb{R}^+$.
b) La fonction $t \longmapsto J_a(t)$ *est croissante sur* $\mathbb{R}^+$.
c) La fonction $t \longmapsto J_a(t)$ *admet une limite finie* $f(a) > 0$ *lorsque* t *tend vers* $+\infty$.

3) Montrer que, a *et* x *étant positifs,* $Arctg\,(a\,x)$ *est inférieur à* $a\,x$. *En déduire un majorant pour* $J_a(t)$. *Comparer* $f(a)$ *à* $a\,I$. *Quelle est la limite de* $f(a)$ *lorsque* a *tend vers* $0+$ *?*

4) Montrer que l'intégrale généralisée :

$$\varphi(a) \;=\; \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^4)\,(1+a^2\,x^2)}\ dx$$

est convergente, de valeur strictement positive.

5) Etudier suivant les valeurs de $b \in \mathbb{R}$ *la nature de l'intégrale généralisée :*

$$\psi(b) \;=\; \int_0^{+\infty} \frac{x^4}{(1+x^4)\,(1+b^2\,x^2)^2}\ dx.$$

6) En appliquant la formule de Taylor :

$$\forall\, f \in C^2([a,b];\mathbb{R}), \quad \exists\, c \in]a,b[; \quad f(a+h) = f(a) + h\,f'(a) + h^2\,f''(c)/2$$

à la fonction $y \longmapsto Arctg\,(y\,x)$*, montrer l'existence d'un* c *qui s'écrit* $a+\theta\,h$ *pour un certain* $\theta\in]0,1[$ *tel que l'on ait :*

$$Arctg\,(a+h)\,x \;-\; Arctg\,(a\,x) \;=\; \frac{h\,x}{1+a^2\,x^2} \;-\; \frac{h^2\,c\,x^3}{(1+c^2\,x^2)^2}.$$

Pour $|h|<a/2$*, montrer l'encadrement :*

$$-\,\frac{3\,a}{2}\;h^2\;\psi\big(\frac{a}{2}\big)\;\leq f(a+h)-f(a)-h\,\varphi(a)\;\leq\;-\,\frac{a}{2}\;h^2\;\psi\big(\frac{3\,a}{2}\big).$$

En conclure que $f(a)$ *est continue et dérivable quel que soit* $a>0$ *et que sa dérivée vaut* $\varphi(a)$*.*

7) Calculer $\varphi(a)$ *avec* $a>0$*.*

8) En déduire $f(a)$ *avec* $a>0$*.*

9) Vérifier le résultat en calculant $f(1)$ *à l'aide du changement de variable défini par* $x=1/u$*.*

5.3 Cas des fonctions définies sur un intervalle ouvert $]a\,,\,b[\,,\,-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$.

Définition - *Intégrable généralisée sur* $]a,b[$*.*
Soit f une fonction localement intégrable sur $]a\,,\,b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On dit que l'intégrale de f sur $]a\,,\,b[$ est convergente si, pour un élément $c\in]a\,,\,b[$, chacune des intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,dt$ est convergente. On pose alors :

$$\int_a^b f(t)\,dt := \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt\,.$$

Si l'une au moins des intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,dt$ est divergente, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est divergente. $\triangle$

On remarque immédiatement, grâce à la relation de Chasles pour les fonctions intégrables au sens de Riemann, que cette définition ne dépend pas du point $c\in]a\,,\,b[$.

Préciser la *nature* d'une intégrale généralisée, c'est dire si cette intégrale est convergente ou divergente.

Ex.7 $f(t)=\dfrac{1}{1+t^2}\,,\; t\in]-\infty\,,\,+\infty[$

Alors $F(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}=Arctg\,x$ a une limite quand x tend vers $+\infty$.

Et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}$ est convergente et vaut $\dfrac{\pi}{2}$.

De même, $G(x)=\displaystyle\int_x^0 \frac{dt}{1+t^2}=-\,Arctg\,x$ a une limite quand x tend vers $-\infty$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^0\frac{dt}{1+t^2}$ est convergente et vaut $-\left(\dfrac{-\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}$ est convergente et vaut π.

Ex.8 $f(t)=\dfrac{1}{t^\alpha}\,,\;\alpha\in\mathbb{R}\,,\; t\in]0\,,\,+\infty[$

Il résulte des exemples 2 et 3 précédents que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha}$ est divergente pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$.

Exercice 5.3.1 *Quelle est la nature (convergente ou divergente) des intégrales généralisées suivantes.*

i) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin t\;\sin\Big(\frac{1}{t}\Big)\;dt$; *ii)* $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{\sin t}}{t}\;dt$; *iii)* $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}+\sin t}\;dt\,.$

5.4 Propriétés de l'intégrale généralisée.

Proposition 1 (Linéarité)
Si f et g ont des intégrales convergentes sur $[a\,,\,b[$ (resp. $]a\,,\,b]$ ou $]a\,,\,b[$) et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $f+g$ et $\lambda \cdot f$ ont aussi une intégrale convergente sur $[a\,,\,b[$ (resp. $]a\,,\,b]$ ou $]a\,,\,b[$) et on a :

$$\int_a^b (f+g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$$

$$\int_a^b \lambda \cdot f(t)\,dt = \lambda \cdot \int_a^b f(t)\,dt\,.$$

Remarque
Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente et si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ est divergente, alors $\displaystyle\int_a^b (f+g)(t)\,dt$ est divergente.

Preuve
Il suffit de voir que, pour $x \in [a\,,\,b[$ on a :

$$\int_a^x (f+g)(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_a^x g(t)\,dt \quad \text{et} \quad \int_a^x \lambda \cdot f(t)\,dt = \lambda \cdot \int_a^x f(t)\,dt$$

et de faire tendre x vers b par valeurs inférieures.

Proposition 2 (Relation d'ordre)
Si f et g ont des intégrales convergentes sur $[a\,,\,b[$ (resp. $]a\,,\,b]$ ou $]a\,,\,b[$), et si pour tout $t \in [a\,,\,b[$ (resp. $]a\,,\,b]$ ou $]a\,,\,b[$), $f(t) \leqslant g(t)$ alors :

$$\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt\,.$$

La preuve est immédiate puisque, pour $x \in [a\,,\,b[$, $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \leqslant \int_a^x g(t)\,dt$.

Proposition 3 (Intégration par parties)
Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a\,,\,b[$. Pour tout $x \in [a\,,\,b[$ on a :

$$\int_a^x f(t)\,g'(t) = f(x)\,g(x) - f(a)\,g(a) - \int_a^x f'(t)\,g(t)\,dt\,.$$

Alors, si $\displaystyle\lim_{x\to b} f(x)\,g(x)$ existe <u>et</u> si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt$ est convergente, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f'(t)\,g(t)\,dt$ est convergente et on a :

$$\int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt = \lim_{x\to b} f(x)\,g(x) - f(a)\,g(a) - \int_a^b f'(t)\,g(t)\,dt\,.$$

Et, bien entendu, on a des énoncés analogues pour des fonctions f et g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a\,,\,b]$ ou $]a\,,\,b[$.

Exemple
L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\,\cos\frac{1}{t}\,dt$ est convergente car, si $x \in]0\,,\,1]$ on a :

$$\int_x^1 \frac{1}{t}\,\cos\frac{1}{t}\,dt = -\int_x^1 t\cdot\left(\sin\frac{1}{t}\right)'\,dt = x\sin\frac{1}{x} - \sin 1 + \int_x^1 \sin\frac{1}{t}\,dt$$

et, comme $\lim_{x\to 0} x \cdot \sin\frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x\to 0}\int_x^1 \sin\frac{1}{t}\,dt = \int_0^1 \sin\frac{1}{t}\,dt$ existe, on obtient que $\int_0^1 \frac{1}{t}\cos\frac{1}{t}\,dt$ est convergente et vaut $-\sin 1 + \int_0^1 \sin\frac{1}{t}\,dt$.

Proposition 4 (Changement de variable)
Soient f une fonction continue sur $[a\,,\,b[$ et φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha\,,\,\beta[$ à valeurs dans $[a\,,\,b[$.
Pour tout $x \in [\alpha\,,\,\beta[$ on a :

$$\int_\alpha^x f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(x)} f(s)\,ds\,.$$

Alors, si l'un des deux membres de cette égalité a une limite quand x tend vers β, l'autre membre aussi et ces limites sont égales :

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \lim_{x\to\beta}\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(x)} f(s)\,ds\,.$$

Exemple
L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\cos t\,dt$ est convergente car, si $x \in]0\,,\,1]$, on a :

$$\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\cos t\,dt = 2\int_{\sqrt{x}}^1 \cos(x^2)\,dx$$

et, comme $x \longmapsto \cos x^2 : [0\,,\,1] \to \mathbb{R}$ est continue, on obtient que l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\cos t\,dt$ est convergente et que :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\cos t\,dt = 2\int_0^1 \cos(x^2)\,dx\,.$$

Exercice 5.4.1 *Quelle est la nature (convergente ou divergente) des intégrales généralisées suivantes.*

i) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt$; *ii)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos\left(e^t\right)\,dt$; *iii)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos^2 t}{t}\,dt$.

5.5 Intégrale généralisée d'une fonction positive ou nulle : fonctions intégrables.

Proposition
Soit f une fonction localement intégrable sur $[a\,,\,b[$ (resp. $]a\,,\,b]$) et positive ou nulle. Pour que l'intégrale de f sur $[a\,,\,b[$ (resp. $]a\,,\,b]$) converge, il faut (et il suffit) qu'il existe une constante M positive telle que :

$$\forall x \in [a\,,\,b[\ \ (\text{resp.}]a\,,\,b])\quad ,\quad \int_a^x f(t)\,dt \leqslant M\ \ (\text{resp.}\int_x^b f(t)\,dt \leqslant M)\,.$$

Preuve
En effet, la fonction $x \longmapsto F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ (resp. $\int_x^b f(t)\,dt$) est monotone croissante et donc a une limite quand x tend vers b (resp. x tend vers a) si et seulement si F est majorée.

□

Corollaire 1
Si f et g sont localement intégrables et positives ou nulles sur $[a\,,\,b[$ (resp. $]a\,,\,b]$) et si, pour tout $t \in]a\,,\,b[$, $f(t) \leqslant g(t)$, alors :

(i) Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ existe, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ existe et on a : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt$.

(ii) Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ n'existe pas, il en est de même de $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$.

Ex.1 $[a\,,\,b[=[1\,,\,+\infty[\,,\ f(t) := e^{-t^2}\,,\ g(t) := e^{-t}$

Comme, pour tout $t \in [1\,,\,+\infty[\,,\ 0 \leqslant e^{-t^2} \leqslant e^{-t}$, et que $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$ existe (et vaut $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} -e^{-t}|_1^X = 1$), $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ existe.

On en déduit que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ existe (écrire que $\displaystyle\int_a^X e^{-t^2}\,dt = \int_a^1 e^{-t^2}\,dt + \int_1^X e^{-t^2}\,dt$).

Ex.2 L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sin t}$ est divergente car, pour $t \in \left]0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$, $\dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{\sin t}$ et $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{t}$ est divergente.

Ex.3 L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t-1}}$ est convergente car chacune des intégrales $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t\sqrt{t-1}}$ et $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t-1}}$ est convergente.

Corollaire 2
Soient f et g deux fonctions localement intégrables et positives ou nulles sur $[a\,,\,b[$ (resp. $]a\,,\,b]$).
S'il existe deux constantes strictement positives k_1, k_2 telles que, pour tout $t \in]a\,,\,b[$ on ait :

$$k_1\,f(t) \leqslant g(t) \leqslant k_2\,f(t)\,.$$

Alors, pour que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ existe, il faut et il suffit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ existe.

Corollaire 3
Soient f et g deux fonctions localement intégrables et positives ou nulles sur $[a\,,\,b[$ (resp. $]a\,,\,b]$).
Si $f(t) \sim g(t)$ lorsque t tend vers b (resp. tend vers a), alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ est convergente.

Ex.1 $[a\,,\,b[=[1\,,\,+\infty[\,,\ f(t) := \dfrac{1}{t^\gamma}\,,\ g(t) := \dfrac{1}{\ell n\,t + t^\gamma}\,,\ \gamma > 0$

Alors $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$ et donc, puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\gamma}$ est convergente si et seulement si $\gamma > 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\ell n\,t + t^\gamma}$ est convergente si et seulement si $\gamma > 1$.

Ex.2 L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$ est convergente car $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^3}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{3(1-t)}}$ quand t tend vers 1.

Ex.3 L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t\,\ell n\,t}{t}\,dt$ est divergente car $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ell n\,t}{t}\,dt$ l'est.

En effet, pour $0 < x < 1$, on a $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ell n\,t}{t}\,dt = \int_{\ell n\,x}^0 s\,ds = -\frac{(\ell n\,x)^2}{2} \to \infty$ quand $x \to 0$.

5.6 Condition nécessaire et suffisante de convergence d'une intégrale généralisée : le critère de Cauchy.

Théorème
Soit f une fonction localement intégrable sur $[a\,,\,b[$ (resp. $]a\,,\,b]$).
Alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ (resp. $\displaystyle\int_x^b f(t)\,dt$) est convergente lorsque x tend vers b (resp. vers a) si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in [a\,,\,b[$ (resp. $]a\,,\,b]$) tel que :

$$(\star) \qquad \begin{matrix} x_\varepsilon < x' < x'' < b \\ (\text{resp.} a < x' < x'' < x_\varepsilon \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad \left| \int_{x'}^{x''} f(t)\,dt \right| \leqslant \varepsilon\,.$$

Preuve
Soit $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$, F admettra une limite quand x tend vers b, par valeurs inférieures, si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ de points de $[a\,,\,b[$ convergente vers b, la suite $(F(x_n))_n$ est convergente (cf. cours de première année), ce qui est équivalent à dire que la suite $(F(x_n))_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$.
Or $F(x_q) - F(x_p) = \displaystyle\int_{x_p}^{x_q} f(t)\,dt$.

Par suite, si $(x_n)_n$ est une suite de points de $[a\,,\,b[$ convergente vers b, la condition $(\star)$ implique que la suite $(F(x_n))_n$ est de Cauchy, et donc qu'elle est convergente.
Réciproquement, si $\displaystyle\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} F(x)$ existe, et vaut $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in [a\,,\,b[$ tel que, pour tout $y \in [x_\varepsilon\,,\,b[$ on ait :

$$\left| F(y) - \int_a^b f(t)\,dt \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Ainsi, si on a $x_\varepsilon < x' < x'' < b$, on aura :

$$|F(x'') - F(x')| = \left| \int_{x'}^{x''} f(t)\,dt \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

c'est-à-dire $(\star)$.

□

Exemple
L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt$ est divergente pour tout $\alpha \leqslant 0$.
En effet, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\left| \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt \right| \geqslant (2n\pi)^{-\,\alpha} \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin t\,dt = 2 \cdot (2n\pi)^{-\,\alpha}$$

ce qui contredit le critère de Cauchy.

Définition - *Intégrale absolument convergente.*
Soit f une fonction localement intégrable sur $[a\,,\,b[$ (resp. sur $]a\,,\,b]$).
On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ (resp. $\displaystyle\int_x^b f(t)\,dt$) converge absolument en $x = b$ (resp. en $x = a$) si l'intégrale $\displaystyle\int_a^x |f(t)|\,dt$ (resp. $\displaystyle\int_x^b |f(t)|\,dt$) est convergente en $x = b$ (resp. en $x = a$).
De même, si f est localement intégrable sur $]a\,,\,b[$, on dit que l'intégrale de f sur $]a\,,\,b[$ est absolument

convergente si l'intégrale de $|f|$ sur $]a\,,\,b[$ est convergente (i.e. si pour un élément $c \in]a\,,\,b[$ chacune des intégrales $\displaystyle\int_a^c |f(t)|\,dt$ et $\displaystyle\int_c^b |f(t)|\,dt$ est convergente). △

Il résulte de cette définition et du théorème précédent que :

Corollaire
Avec les hypothèses du théorème, si l'intégrale $\displaystyle\int_a^x |f(t)|\,dt$ (resp. $\displaystyle\int_x^b |f(t)|\,dt$) est convergente en $x = b$ (resp. $x = a$), l'intégrale $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ (resp. $\displaystyle\int_x^b f(t)\,dt$) est convergente en $x = b$ (resp. $x = a$) et on a :

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt\,.$$

En d'autres termes, si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est absolument convergente, elle est convergente.

Preuve
Cela résulte de l'inégalité :

$$a < x' < x'' < b \quad , \quad \left|\int_{x'}^{x''} f(t)\,dt\right| \leqslant \int_{x'}^{x''} |f(t)|\,dt$$

et de l'inégalité :

$$a < x < b \quad , \quad \left|\int_a^x f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^x |f(t)|\,dt$$

(resp. $\displaystyle\left|\int_x^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_x^b |f(t)|\,dt$).

□

5.7 Fonctions intégrables.

Définition - *Fonction intégrale sur I.*
Soient $I = (a\,,\,b)$ un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction localement intégrable sur I. On dit que f est intégrable sur I si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est absolument convergente. △

En particulier, si I est un segment $[a\,,\,b]$ de $\mathbb{R}$ et f Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$, f est intégrable sur I car alors $|f|$ est aussi Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$.

La proposition suivante donne un critère pratique commode pour reconnaître si $f : I \to \mathbb{K}$ est intégrable.

Proposition
Soient $I = (a\,,\,b)$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction localement intégrable sur I.
Alors f est intégrable sur I si et seulement si il existe une fonction $g : I \to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que :

$$(\star) \qquad \forall t \in I \quad , \quad |f(t)| \leqslant g(t)\,.$$

Preuve
Soit $f : I \to \mathbb{K}$ intégrable sur I. Posons, pour tout $t \in I$, $g(t) := |f(t)|$.
La fonction g est localement intégrable sur I et, par définition, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ est convergente.

Réciproquement, supposons que $f : I \to \mathbb{K}$ soit localement intégrable sur I et satisfasse à la condition de domination $(\star)$. La fonction g étant intégrable sur I, elle satisfait donc au critère de Cauchy aux extrémités a et, ou b de l'intervalle I.
Dans tous les cas, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des nombres réels A_ε, B_ε $(a < A_\varepsilon < B_\varepsilon < b)$ tels que :

$$0 \leqslant \int_0^{A_\varepsilon} g(t)\,dt \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant \int_{B_\varepsilon}^b g(t)\,dt\,.$$

On en déduit immédiatement que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt|$ satisfait le critère de Cauchy en a et b, et qu'elle est donc convergente : la fonction f est intégrable sur I.

□

5.8 Etude de quelques exemples.

Ex.1 L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ell n\, t \cdot \sin\frac{1}{t}\,dt$ est convergente.

En effet, $\forall t \in]0\,,\,1]$, $\left|\ell n\, t \cdot \sin\frac{1}{t}\right| \leqslant |\ell n\, t|$, et comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 |\ell n\, t|\,dt$ est convergente $\displaystyle(\int_x^1 (-\ell n\, t)\,dt = t(1-\ell n\, t)\,|_x^1 = 1 + x(\ell n\, x - 1))$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ell n\, t \cdot \sin\frac{1}{t}\,dt$ est absolument convergente, donc convergente.

Ex.2 L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ell n\, t \cdot \cos t}{t^{3/2}}\,dt$ est convergente car, pour tout $t \geqslant 1$:

$$\left|\frac{\ell n\, t \cdot \cos t}{t^{3/2}}\right| \leqslant \frac{\ell n\, t}{t^{3/2}} = \frac{\ell n\, t}{t^\varepsilon} \cdot \frac{1}{t^{3/2-\varepsilon}} \leqslant M_\varepsilon \cdot \frac{1}{t^{3/2-\varepsilon}} \quad , \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$$

où $M_\varepsilon = \sup\limits_{t \geqslant 1} \dfrac{\ell n\, t}{t^\varepsilon} < +\infty$ (remarquer que $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ell n\, t}{t^\varepsilon} = 0$).
Et comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2-\varepsilon}}$ est convergente puisque $\dfrac{3}{2} - \varepsilon > 1$, il en résulte que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ell n\, t \cdot \cos t}{t^{3/2}}\,dt$ est absolument convergente, donc convergente.

Ex.3 Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\, e^{-t}\,dt$ existe et vaut $n!$ car $t \longmapsto t^n\, e^{-t} : [0\,,+\infty[\to \mathbb{R}$ est continue et, en écrivant $t^n\, e^{-t} = t^n\, e^{-t/2} \cdot e^{-t/2}$, et en remarquant que $\lim\limits_{t \to +\infty} t^n\, e^{-t} = 0$, il vient que :

$$\forall t \geqslant 0 \quad , \quad t^n\, e^{-t} \leqslant c_n\, e^{-t/2} \quad \text{avec}\, c_n = \sup_{t \geqslant 0} t^n\, e^{-t/2} < +\infty\,.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t/2}$ étant convergente, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\, e^{-t}\,dt$ est aussi convergente.

Soit alors $X > 0$, et calculons $\displaystyle\int_0^X t^n\, e^{-t}\,dt$. En intégrant par parties, il vient que :

$$\int_0^X t^n\, e^{-t}\,dt = -X^n\, e^{-X} + n\int_0^X t^{n-1}\, e^{-t}\,dt\,.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\, e^{-t}\,dt = n\int_0^{+\infty} t^{n-1}\, e^{-t}\,dt$, $n \geqslant 1$.

Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1$, on obtient que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\, e^{-t}\,dt = n!\,.$

Application : Développement asymptotique de la transformée de Laplace.

Proposition
Soit $f : [0\,,+\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^m$, dont la dérivée d'ordre $m \geqslant 1$ est bornée sur $[0\,,+\infty[$. Alors, pour tout $\lambda > 0$, la transformée de Laplace de f, $F(\lambda) := \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \cdot f(t)\,dt$ est convergente. De plus, lorsque λ tend vers $+\infty$, on a :

$$F(\lambda) \;=\; \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0) \cdot \lambda^{-(k+1)} + 0\,(\lambda^{-(m+1)})\,.$$

Preuve
La formule de Taylor à l'ordre m pour f donne, pour tout $t \in [0\,,+\infty[$:

$$f(t) \;=\; \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot t^k + \frac{t^m}{m!} \cdot f^{(m)}(\theta) \quad , \quad \theta \in [0\,,t]\,.$$

Si C désigne une borne de $|f^{(m)}|$ sur $[0\,,+\infty[$, on obtient :

$$|f(t)| \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} \frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} \cdot t^k + C \cdot \frac{t^m}{m!}$$

ce qui prouve que l'intégrale $F(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t)\,dt$ est (absolument) convergente et, comme pour tout entier $k \geqslant 0$, $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \cdot t^k\,dt = k! \cdot \lambda^{-(k+1)}$ (poser $s = \lambda \cdot t$), on déduit le développement asymptotique de $F(\lambda)$ annoncé.

Ex.4 Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_n := \int_0^{+\infty} t^n \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ est convergente et on a :

$$I_{2n+1} = 2^n \cdot n! \quad , \quad I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} \cdot I_0$$

avec $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$. On verra au dernier chapitre que $I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. En effet, $f(t) := t^n \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$ est continue, positive sur $[0\,,+\infty[$ et vérifie pour $t \geqslant 2$, $f(t) \leqslant t^n \cdot e^{-t}$: I_n est donc convergente. De plus, en intégrant par parties, pour tout $X > 0$, on a :

$$\int_0^X t^n \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \;=\; -\,t^{n-1} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\,\Big|_0^X + (n-1) \int_0^X t^{n-2} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\,.$$

En faisant tendre X vers $+\infty$, on obtient la formule de récurrence $I_n = (n-1)\,I_{n-2}$ de laquelle on déduit les expressions de I_{2n+1} (puisque $I_1 = \int_0^{+\infty} t \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = 1$) et I_{2n} en fonction de I_0.

Comme pour l'application précédente, on obtient la :

Proposition
Soit $f : [0\,,+\infty[\to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^m$, dont la dérivée d'ordre $m \geqslant 1$ est bornée sur $[0\,,+\infty[$. Alors, pour tout $\lambda > 0$, l'intégrale $I(\lambda) := \int_0^{+\infty} e^{-\lambda\frac{t^2}{2}} f(t)\,dt$ est convergente. De plus, lorsque λ tend vers $+\infty$, on a :

$$I(\lambda) \;=\; \sum_{k=0}^{m-1} \frac{I_k}{k!}\, f^{(k)}(0) \cdot \lambda^{-\frac{k+1}{2}} + 0(\lambda^{-\frac{m+1}{2}})\,.$$

Ex.5 L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\, dt$ est convergente si et seulement si $\alpha > 0$.

En effet, on sait déjà que cette intégrale est divergente pour $\alpha \leqslant 0$ (critère de Cauchy non satisfait).

Pour $\alpha > 1$, on a : $\forall t \geqslant 1\,,\ \left|\dfrac{\sin t}{t^\alpha}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^\alpha}$ et, comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente pour $\alpha > 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\, dt$ est absolument convergente, donc convergente : la fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1\,,\,+\infty[$ pour $\alpha > 1$.

Pour $0 < \alpha \leqslant 1$, considérons pour tout $X > 1$ l'intégrale $\displaystyle\int_1^{X} \frac{\sin t}{t^\alpha}\, dt$. En intégrant par parties on a :

$$\int_1^{X} \frac{\sin t}{t^\alpha}\, dt \;=\; \cos 1 - \frac{\cos X}{X^\alpha} - \alpha \int_1^{X} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\, dt\,.$$

Comme précédemment, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\, dt$ est absolument convergente puisque $\alpha + 1 > 1$, et donc comme $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{\cos X}{X^\alpha}$ existe, et vaut 0, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\, dt$ est convergente et que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\, dt = \cos 1 - \alpha \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\, dt$.

Remarque

Pour $\alpha > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\, dt$ est convergente si et seulement si $\alpha < 2$ car l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin t}{t^\alpha}\, dt$ est convergente si et seulement si $\alpha < 2$.

Ex.6 L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\, dt$ est absolument convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Compte tenu de l'exemple 4, il nous suffit de vérifier que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^\alpha}\, dt$ est divergente pour $\alpha \leqslant 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et considérons $F(n\pi) = \displaystyle\int_1^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t^\alpha}\, dt$. On a :

$$F(n\pi) = \int_1^{\pi} \frac{|\sin t|}{t^\alpha}\, dt + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t^\alpha}\, dt\,.$$

Or $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t^\alpha}\, dt \geqslant \int_{k\pi+\pi/4}^{(k+1)\pi-\pi/4} \frac{|\sin t|}{t^\alpha}\, dt \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{k\pi+\pi/4}^{(k+1)\pi-\pi/4} \frac{dt}{t^\alpha} \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{((k+1)\pi)^\alpha}\,.$

La série $\displaystyle\left[\frac{1}{k^\alpha}\right]_{k\geqslant 1}$ étant divergente (puisque $\alpha \leqslant 1$), on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F(n\pi) = +\infty$ et donc :

$$\lim_{X\to+\infty} F(X) = \lim_{X\to+\infty} \int_1^{X} \frac{|\sin t|}{t^\alpha}\, dt = +\infty\,.$$

Remarques

(1) On déduit de ce calcul que la fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1\,,\,+\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$, et cependant l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\, dt$ existe pour tout $\alpha > 0$.

(2) De même, la fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[0\,,\,+\infty[$ si et seulement si $1 < \alpha < 2$, et cependant l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\, dt$ existe pour tout $0 < \alpha < 2$.

Ex.7 L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^\alpha \sin\frac{1}{t}\,dt$ est convergente si et seulement si $\alpha > -2$.

En effet, pour $0 < x < 1$, on a :

$$\int_x^1 t^\alpha \sin\frac{1}{t}\,dt = \int_1^{1/x} \frac{\sin s}{s^{\alpha+2}}\,ds$$

et cette expression a une limite quand $x \to 0^+$ si et seulement si $\alpha + 2 > 0$, i.e. $\alpha > -2$ (cf. exemple 4).

Ex.8 (Inégalité de Hardy)

Proposition

Soient $f : [0\,,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et g la fonction définie sur $[0\,,+\infty[$ par :

$$\begin{aligned} g(t) &:= \frac{1}{t}\int_0^t f(s)\,ds \quad \text{si } t \neq 0 \\ g(0) &:= f(0) \end{aligned}$$

Alors g est continue sur $[0\,,+\infty[$, dérivable sur $]0\,,+\infty[$.

De plus, si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|^2\,dt$ est convergente, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |g(t)|^2\,dt$ est aussi convergente et on a :

$$\int_0^{+\infty} |g(t)|^2\,dt = \int_0^{+\infty} \left|\frac{1}{t}\int_0^t f(s)\,ds\right|^2 dt \leqslant 4\int_0^{+\infty} |f(t)|^2\,dt$$

Preuve

Que g soit continue et dérivable sur $]0\,,+\infty[$ résulte des propriétés de l'intégrale. En particulier, on a :

$$\forall t \in]0\,,+\infty[\quad , \quad (tg)'(t) = f(t)$$

i.e. $g'(t) = \dfrac{1}{t}\,f(t) - \dfrac{1}{t}\,g(t)$.

Par ailleurs, puisque $g(t) - g(0) = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t (f(s) - f(0))\,ds$, et que f est continue en 0, on obtient que $\lim\limits_{t\to 0^+} (g(t) - g(0)) = 0$ (cf. Chapitre IV - §4).

Soient ε et X tels que $0 < \varepsilon < X$. En effectuant une intégration par parties, on obtient :

$$\int_\varepsilon^X |g(t)|^2\,dt = \varepsilon[g(\varepsilon)]^2 - X[g(X)]^2 + 2\int_\varepsilon^X f(t)\cdot g(t)\,dt\,.$$

En faisant tendre ε vers 0, cela donne :

$$\int_0^X |g(t)|^2\,dt = 2\int_\varepsilon^X f(t)\cdot g(t)\,dt - X[g(X)]^2 \leqslant 2\int_\varepsilon^X f(t)\cdot g(t)\,dt\,.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\int_0^X |g(t)|^2\,dt \leqslant 2\left(\int_0^X |f(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_0^X |g(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

i.e. $\displaystyle\int_0^X |g(t)|^2\,dt \leqslant 4\int_\varepsilon^X |f(t)|^2\,dt \leqslant 4\int_0^{+\infty} |f(t)|^2\,dt\,.$

Par suite, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |g(t)|^2\,dt$ est convergente et vérifie :

$$\int_0^{+\infty} |g(t)|^2\,dt \leqslant 4\int_0^{+\infty} |f(t)|^2\,dt\,.$$

□

Exercice 5.8.1 *On considère la fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :*

$$f(x) \,=\, (2+x)^{-1}\ |\ell n\,(1+x)|^{-3/2}\ \sin x\,, \qquad x \in I =]-1, +\infty[\,.$$

1) Soit $J = (\alpha, \beta)$ avec $-1 \leq \alpha < \beta \leq +\infty$. Rappeler ce que signifie "f est localement intégrable sur l'intervalle J".

2) On partage l'intervalle I selon :

$$I \,=]-1, -1/2] \cup [-1/2, 0[\cup]0, 2] \cup [2, +\infty[\,.$$

Expliquer pourquoi f est localement intégrable sur chacun des quatre sous-intervalles ainsi mis à jour.

3) Déterminer la limite de f lorsque $x \in I$ tend vers -1. Quelle est la nature de l'intégrale généralisée $\int_{-1}^{-1/2} f(x)\ dx$? Justifier.

4) Donner un équivalent de f lorsque x tend vers 0. Quelles sont les natures des intégrales généralisées $\int_{-1/2}^{0} f(x)\ dx$ et $\int_0^2 f(x)\ dx$? Justifier.

5) Montrer que :

$$|f(x)| \,\leq\, x^{-1}\ (\ell n\, x)^{-3/2}\,, \qquad \forall\, x \in [2, +\infty[\,.$$

6) Calculer $\int_2^{+\infty} x^{-1}\ (\ell n\, x)^{-3/2}\ dx$.

7) Expliquer pourquoi f est intégrable (c'est à dire absolument convergente) sur l'intervalle $[2, +\infty[$.

8) Quelle est la nature de l'intégrale généralisée $\int_{-1}^{+\infty} f(x)\ dx$? Justifier.

9) Quelle est la nature de l'intégrale généralisée $\int_{-1}^{+\infty} (2+x)^{-1}\ \sin x\ dx$? Justifier.

Exercice 5.8.2 *Soit $f : [0\,, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ continue telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ soit convergente.*
Montrer que, pour $\lambda > 0$, la transformée de Laplace de f $\quad F(\lambda) := \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t)\, dt$ est convergente.
(Indication : Effectuer une intégration par parties en introduisant la primitive $\phi(t) = \int_0^t f(s)\, ds$ de f sur $[0\,, +\infty[$ qui s'annule en $t = 0$).

6 Séries et Intégrales.

Ce chapitre est consacré à la comparaison d'une série de terme général $[u_k = f(k)]_{k\in\mathbb{N}}$ où f est une application $f : [0\,, +\infty[\to \mathbb{R}$ et de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.

6.1 Séries.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de termes réels ou complexes.
On appelle série de terme général $[u_n]_{n\in\mathbb{N}}$ la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $S_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.
On dit que la série $[u_n]_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente (resp. divergente) si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente (resp. divergente) ; S_n est appelée somme partielle d'ordre n de la série $[u_n]_{n\in\mathbb{N}}$.
Si la série $[u_n]_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, c'est-à-dire si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et si $S = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$, on note $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$, et S est appelée somme de la série $[u_n]$.
Dans ces conditions, on note $R_n = S - S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$, et on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$; R_n est appelé reste de la série convergente $[u_n]_{n\in\mathbb{N}}$.

Dans ce qui suite, on va s'intéresser à des séries de terme général u_n de la forme : $u_n = f(n)$ où f est une fonction $f : [0\,, +\infty[\to \mathbb{R}$ localement intégrable sur $[0\,, +\infty[$.

6.2 Séries et intégrales.

Le résultat essentiel de ce paragraphe est le

Théorème 1
Soit $f : [0\,, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ une application continue par morceaux, <u>positive</u> et <u>décroissante</u>. Alors :

(i) Les séries $\displaystyle\left[\int_{n-1}^{n} f(t)\,dt - f(n)\right]_{n\geqslant 1}$ et $\displaystyle\left[f(n) - \int_{n}^{n+1} f(t)\,dt\right]_{n\geqslant 0}$ sont convergentes.

(ii) La série $[f(n)]_{n\geqslant 0}$ est convergente si et seulement si f est intégrable sur $[0\,, +\infty[$ (i.e. : l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente).

(iii) De plus, si $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$, les deux suites $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^{n} f(t)\,dt$ et $b_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^{n+1} f(t)\,dt$ sont adjacentes.

Preuve

(i) La fonction f étant décroissante, on a : $\forall n \geqslant 1$,

$$(\star) \qquad f(n) \;\leqslant\; \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt \;\leqslant\; f(n-1)$$

et donc $\quad 0 \leqslant \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\,dt - f(n) \leqslant f(n-1) - f(n)$.

La suite $(f(n))_n$ étant positive décroissante est convergente ; il en résulte que la série $\left[\int_{n-1}^{n} f(t)\,dt - f(n)\right]_{n\geqslant 1}$ est convergente.
De même, de $(\star)$ on déduit que :

$$0 \;\leqslant\; f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\,dt \;\leqslant\; f(n) - f(n+1)$$

et donc que la série $\left[f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\,dt\right]_{n\geqslant 0}$ est convergente.

(ii) Il résulte de $(\star)$ que l'on a, pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$(\star\star) \qquad \int_0^{n+1} f(t)\,dt \;\leqslant\; \sum_{k=0}^{n} f(k) \;\leqslant\; f(0) + \int_0^n f(t)\,dt\,.$$

On en déduit que la série $[f(n)]_{n\geqslant 0}$ est convergente si et seulement si l'intégrale $\int_0^n f(t)\,dt$ a une limite quand n tend vers $+\infty$, ce qui est équivalent à dire, puisque f est positive, que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente, i.e. : f est intégrable sur $[0\,,+\infty[$ (ce dernier point est une conséquence directe du critère de Cauchy pour les intégrales généralisées).

Remarque
Il résulte de $(\star\star)$ que, si la série $[f(n)]_{n\geqslant 0}$ est convergente, on a :

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt \;\leqslant\; S = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) \;\leqslant\; f(0) + \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$$

et que $\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,dt \leqslant R_n \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\,dt$, où R_n désigne le reste d'ordre n de la série $[f(n)]_{n\geqslant 0}$.

Cet encadrement permet en général de mesurer la vitesse de convergence vers 0 du reste R_n, ou encore la rapidité de convergence de la suite $(S_n)_n$ vers S.

(iii) On a : $a_{n-1} - a_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leqslant 0$ d'après $(\star)$, et donc la suite $(a_n)_n$ est décroissante.
De même, $b_{n+1} - b_n = f(n+1) - \int_{n+1}^{n+2} f(t)\,dt \geqslant 0$ d'après $(\star)$, et la suite $(b_n)_n$ est croissante.
De plus, comme $0 \leqslant a_n - b_n \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leqslant f(n)$, et que $\lim_{n\to+\infty} f(n) = 0$, les deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes, et convergent vers un même nombre réel.

Applications

1) Soit $f(t) = \dfrac{1}{(1+t)^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $t \in [0\,,+\infty[$.
Comme on a $\displaystyle\int_0^X \frac{dt}{(1+t)^\alpha} = \frac{1}{-\alpha+1}\left[\frac{1}{(X+1)^{\alpha-1}} - 1\right]$ pour $\alpha \neq 1$
et $\displaystyle\int_0^X \frac{dt}{(1+t)^\alpha} = \ell n(1+X)$ pour $\alpha = 1$
on en déduit que la série de Riemann $\left[\dfrac{1}{n^\alpha}\right]_{n\geqslant 1}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

2) Soit $f(t) := \dfrac{1}{t^{\delta+1}}$ avec $\delta > 0$. D'après ce qui précède, la série $[u_n]_n$ de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^{\delta+1}}$ est convergente et donc son reste $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\delta+1}}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Reprenant les

inégalités ($\star$) :

$$\int_{n+1}^{n+2} f(t)\,dt \quad \leqslant \quad f(n+1) \quad \leqslant \quad \int_{n}^{n+1} f(t)\,dt$$

et donc, en sommant ces inégalités, on obtient pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\delta+1}} \;\leqslant\; R_n \;\leqslant\; \int_{n}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\delta+1}} \;=\; \frac{1}{\delta\, n^{\delta}}\,.$$

Il en résulte que $R_n \sim \dfrac{1}{\delta\, n^{\delta}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3) Constante d'Euler : soit $f(t) := \dfrac{1}{1+t}$, $t \in [0\,,+\infty[$.
Il résulte du point (iii) du théorème que les deux suites :

$$a_n \;:\; 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}-\ell n(n+1) \qquad \text{et} \qquad b_n \;:\; 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}-\ell n(n+2)$$

convergent vers une même limite, notée γ , et appelée constante d'Euler.
On a donc : $1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n} = \ell n(n)+\gamma+\varepsilon_n$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.
En particulier, $1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n} \sim \ell n(n)$ quand n tend vers $+\infty$.
De plus, il résulte des inégalités précédentes que, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}-\ell n(n+2) \;<\; \gamma \;<\; 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}-\ell n(n+1)\,.$$

Pour $n=0$, on déduit que $\gamma \in]0\,,1[$.

L'ingrédient essentiel de ce théorème 1 est la comparaison de la série de terme général $f(n)$ à la série de terme général $\displaystyle\int_{n}^{n+1} f(t)\,dt$.
Or, si $f : [0\,,+\infty[\to \mathbb{K}\,(\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ est de classe C^1, on a, pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$(\star\star\star) \qquad \int_{n}^{n+1} f(t)\,dt \;=\; f(n+1) - \int_{n}^{n+1} (t-n)\, f'(t)\,dt\,.$$

Remarque 1
Cette relation ($\star\star\star$) n'est autre que la formule générale pour f de classe C^1 sur $[a\,,b]$:

$$\int_a^b f(t)\,dt = (b-a)\,f(b) - \int_a^b (t-a)\,f'(t)\,dt\,.$$

Il en résulte que, pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$(\star\mathrm{v}) \qquad \int_0^n f(t)\,dt \;=\; \sum_{k=1}^{n} f(k) \;-\; \int_0^n \mu(t)\,f'(t)\,dt$$

où $\mu(t) = t-k$ pour $t \in [k\,,k+1[$.
En d'autres termes, $\mu(t) = t-E(t)$, $t \in [0\,,+\infty[$ est la "partie fractionnaire" de t. En particulier, μ est continue par morceaux et vérifie : $\forall t \in [0\,,+\infty[\,,\ |\mu(t)| \leqslant 1$.

On a alors le

Théorème 2
Soit $f : [0\,,+\infty[\to \mathbb{K}\,(\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ une fonction de classe C^1.

Alors, si $|f'|$ est intégrable sur $[0\,,\,+\infty[$, i.e. : si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f'|(t)\,dt$ est convergente, la série $[f(n)]_{n\geqslant 0}$ est de même nature que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.

Preuve

Puisque $|\mu(t)| \leqslant 1$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f'(t)|\,dt$ convergente, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mu(t)\,f'(t)\,dt$ est convergente.

Il résulte de la relation $(\star\star\star)$ que la série $[f(n)]_{n\geqslant 0}$ est convergente si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{n} f(t)\,dt$ a une limite quand n tend vers $+\infty$.

Si la série $[f(n)]_{n\geqslant 0}$ est convergente, on a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(n) = 0$ et, la suite $\displaystyle\left(\int_0^{n} f(t)\,dt\right)_n$ étant convergente, vérifie le critère de Cauchy :

$$\forall\varepsilon > 0\ \ ,\ \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \ \text{tel que :}\ \ N_\varepsilon \leqslant n \leqslant m \Longleftrightarrow \left|\int_n^{m} f(t)\,dt\right| \leqslant \varepsilon\,.$$

Ainsi, si $X\,,\,Y \geqslant N_\varepsilon\,,\ n = E(X)\,,\ m = E(Y)\,,$ on aura : $\displaystyle\left|\int_n^{m} f(t)\,dt\right| \leqslant \varepsilon$ et (cf. remarque 1) :

$$\int_n^{X} f(t)\,dt \ \ = \ \ f(n)\,(X-n) - \int_n^{X} (t-X)\,f'(t)\,dt$$

$$\left|\int_n^{X} f(t)\,dt\right| \ \ \leqslant\ \ |f(n)| + \int_n^{X} |f'(t)|\,dt \ \ \leqslant\ \ \varepsilon$$

pour $n \geqslant N'_\varepsilon\ (\geqslant N_\varepsilon)$, puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f'(t)|\,dt$ est convergente.

De même, pour $m \geqslant n \geqslant N'_\varepsilon$, on aura :

$$\left|\int_m^{Y} f(t)\,dt\right| \ \ \leqslant\ \ |f(m)| + \int_m^{Y} |f'(t)|\,dt \ \ \leqslant\ \ \varepsilon\,.$$

Par suite :

$$\left|\int_X^{Y} f(t)\,dt\right| \ \ \leqslant\ \ \left|\int_X^{n} f(t)\,dt\right| + \left|\int_n^{m} f(t)\,dt\right| + \left|\int_m^{Y} f(t)\,dt\right| \ \ \leqslant\ \ 3\varepsilon$$

ce qui prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente.

Réciproquement, si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente, en particulier, la suite $\displaystyle\left(\int_0^{n} f(t)\,dt\right)_n$ a une limite et donc la série $[f(n)]_{n\geqslant 0}$ est convergente.

Ex.1 : La série $\displaystyle\left[\frac{\sin\sqrt{n}}{n}\right]_{n\geqslant 1}$ est convergente.

Ici $f(t) = \dfrac{\sin\sqrt{t}}{t}$, $t \in [1\,,\,+\infty[$, est de classe C^1 sur $[1\,,\,+\infty[$, et $f'(t) = -\dfrac{1}{t^2}\,\sin\sqrt{t} + \dfrac{\cos\sqrt{t}}{2t^{3/2}}$.

On a donc $|f'(t)| \leqslant \dfrac{1}{t^2} + \dfrac{1}{2t^{3/2}}$: l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} |f'(t)|\,dt$ est donc convergente.

Par ailleurs : $\displaystyle\int_1^{n} \frac{\sin\sqrt{t}}{t}\,dt \ = \ 2\int_1^{\sqrt{n}} \frac{\sin u}{u}\,du$ (poser $u = \sqrt{t}$).

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du$ étant convergente, l'intégrale $\displaystyle\int_1^n \frac{\sin\sqrt{t}}{t}\, dt$ a une limite quand n tend vers $+\infty$: la série de terme général $\dfrac{\sin\sqrt{n}}{n}$ est convergente.

Ex.2 : La série $\left[\dfrac{\sin[\ell n(n)]}{n}\right]_{n\geqslant 1}$ est divergente.

Ici $f(t) = \dfrac{1}{t}\, \sin[\ell n(t)]\,,\ t \in [1\,, +\infty[\,,$ est de classe C^1 sur $[1\,, +\infty[$ avec :

$$f'(t) = -\,\frac{1}{t^2}\, \sin[\ell n(t)] + \frac{1}{t^2}\, \cos[\ell n(t)] \quad , \quad |f'(t)| \leqslant \frac{2}{t^2}\,.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} |f'(t)|\, dt$ est convergente.

Par suite, la série $\left[\dfrac{\sin[\ell n(n)]}{n}\right]_{n\geqslant 1}$ est de même nature que l'intégrale $\displaystyle\int_1^n \frac{\sin[\ell n(t)]}{t}\, dt$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Or $\displaystyle\int_1^n \frac{\sin[\ell n(t)]}{t}\, dt = -\,\cos[\ell n(t)]\,|_1^n = 1 - \cos[\ell n(n)]$. On doit donc étudier la nature de la suite $(\cos[\ell n(n)])_{n\geqslant 1}$.

Posons $u_n = \cos[\ell n(n)]$. Si cette suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ était convergente, la suite extraite $(u_{2^n})_{n\geqslant 1}$ serait aussi convergente. Or $u_{2^n} = \cos(n\,\ell n\, 2)$ qui est le terme général d'une suite divergente en vertu du lemme :

Lemme

La suite $(\cos n\,\theta)_{n\geqslant 0}\,,\ \theta \in \mathbb{R}\,,$ est convergente si et seulement si $\theta \equiv 0\,(2\pi)$.

Preuve

Si $\cos(n\,\theta)$ tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$, on déduirait de la formule :

$$\cos(n+1)\theta \;=\; \cos n\,\theta \cdot \cos\theta - \sin n\theta \cdot \sin\theta$$

que, si $\sin\theta \neq 0$, i.e. : $\theta \neq 0\,(\pi)$, $\sin(n\,\theta)$ aurait aussi une limite, et donc $e^{in\theta} = \cos n\,\theta + i \sin n\,\theta$ aurait une limite L quand n tend vers $+\infty$. Mais alors $|L| = 1$ nécessairement et, comme $e^{i(n+1)\theta} = e^{in\theta} \cdot e^{i\theta}$, on obtiendrait que : $L = L \cdot e^{i\theta}$, i.e. : puisque $L \neq 0$ car $|L| = 1$, que $e^{i\theta} = 1$, et nécessairement $\theta = 0\,(2\pi)$ ce qui impliquerait $\sin\theta = 0$, contrairement à notre hypothèse.

Maintenant, si $\theta = 0\,(\pi)$, i.e. : $\theta = k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\,,$ on aura : $\cos(n\,\theta) = \cos n\,k\,\pi = (-1)^{nk}$, suite qui ne peut converger que si k est pair, i.e. : $\theta = 0\,(2\pi)$.

Finalement, la série $\left[\dfrac{\sin[\ell n(n)]}{n}\right]_{n\geqslant 1}$ est divergente puisque l'intégrale $\displaystyle\int_1^n \frac{\sin[\ell n(t)]}{t}\, dt$ est divergente.

La technique d'intégration par parties utilisée au théorème 1 peut être itérée lorsque f est de classe C^k avec $k \geqslant 2$:

Théorème 2'

Soit $f : [0\,, +\infty[\to \mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) une fonction de classe C^2.

Alors, si $|f''|$ est intégrable sur $[0\,, +\infty[$ et si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(n)$ existe, la série $[f(n)]_{n\geqslant 0}$ est de même nature que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$.

Preuve

On part de la relation :

$$\text{(v)} \qquad \int_n^{n+1} f(t)\, dt \;=\; f(n+1) \;-\; \int_n^{n+1} (t-n)\, f'(t)\, dt$$

où f est de classe C^1 sur $[0\,, +\infty[$.

Soit maintenant f de classe C^2 sur $[0\,, +\infty[$ et appliquons cette relation à la fonction $g(t) := (n+1-t)\, f'(t)$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\int_n^{n+1} (n+1-t)\, f'(t)\, dt &= 0 - \int_n^{n+1} (t-n)\,[-f'(t) + (n+1-t)\, f''(t)]\, dt \\ &= \int_n^{n+1} (t-n)\, f'(t)\, dt - \int_n^{n+1} (n+1-t)\,(t-n)\, f''(t)\, dt\end{aligned}$$

d'où :

$$2\int_n^{n+1} (n-t)\, f'(t)\, dt + f(n+1) - f(n) \;=\; -\int_n^{n+1} (n+1-t)\,(t-n)\, f''(t)\, dt\,.$$

Appliquant à nouveau la relation (v) à la fonction f, on obtient :

$$\begin{aligned}2\int_n^{n+1} f(t)\, dt &= 2\, f(n+1) - 2\int_n^{n+1} (t-n)\, f'(t)\, dt \\ &= 2\, f(n+1) - [f(n+1) - f(n)] - \int_n^{n+1} (n+1-t)\,(t-n)\, f''(t)\, dt\,.\end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$(\mathrm{v}\star) \qquad \int_n^{n+1} f(t)\, dt \;=\; \frac{1}{2}\,[f(n) + f(n+1)] \;-\; \frac{1}{2}\int_n^{n+1} (n+1-t)\,(t-n)\, f''(t)\, dt\,.$$

Remarque 2

Cette relation (v$\star$) n'est autre que la formule générale pour f de classe C^2 sur $[a\,,\,b]$:

$$\int_a^b f(t)\, dt \;=\; \frac{b-a}{2}\,[f(b) + f(a)] - \frac{1}{2}\int_a^b (b-t)\,(t-a)\, f''(t)\, dt\,.$$

Posons $\nu(t) := \dfrac{1}{2}\,(k+1-t)\,(t-k)$ pour $t \in [k\,,\,k+1[\,, k \in \mathbb{N}$. La fonction ν est continue par morceaux sur $[0\,,+\infty[$ et vérifie : $|\nu(t)| \leqslant \dfrac{1}{8}$ pour $t \in [0\,,+\infty[$.

Par suite, en sommant de 0 à n, on obtient :

$$\int_0^n f(t)\, dt \;=\; \sum_{k=0}^{n} f(k) - \frac{1}{2}\,[f(n) + f(0)] - \frac{1}{2}\int_0^n \nu(t)\, f''(t)\, dt$$

et, si $|f''|$ est intégrable sur $[0\,,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \nu(t)\, f''(t)\, dt$ est convergente.

Ainsi, si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(n)$ existe, la série $[f(n)]_{n\geqslant 0}$ est convergente (ce qui impliquera $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(n) = 0$) si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^n f(t)\, dt$ est convergente lorsque n tend vers $+\infty$. Comme pour le théorème 2, en utilisant la remarque 2, on montre que $\displaystyle\int_0^n f(t)\, dt$ a une limite quand n tend vers $+\infty$ si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ est convergente. C.Q.F.D.

Ex.3 : La série $\left[\dfrac{\sin\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right]_{n\geqslant 1}$ est divergente.

La fonction $f(t) := \dfrac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$: $[1\,,+\infty[\to \mathbb{R}$ est de classe C^2, $|f''|$ est intégrable sur $[1\,,+\infty[$, et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\, dt$ est divergente (effectuer le changement de variable $s = \sqrt{t}$).

Le théorème 2 ne s'applique pas à cet exemple : $|f'|$ n'est pas intégrable sur $[1\,,\,+\infty[$ puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} f'(t)\,dt$ est divergente.

Ex.4 : Formule de Stirling.
Soit la fonction $f(t) := \ell n\,(t+1)\,,\; t \in [0\,,\,+\infty[$. Sa dérivée seconde $f''(t) = -\dfrac{1}{(1+t)^2}$ est intégrable sur $[0\,,\,+\infty[$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\int_0^{n-1} \ell n\,(t+1)\,dt \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} \ell n\,(k+1) - \frac{1}{2}\,[\ell n\,(n) + \ell n\,(1)] + \frac{1}{2}\int_0^{n-1} \frac{\nu(t)}{(1+t)^2}\,dt$$

c'est-à-dire :

$$n\,\ell n\,(n) - n + 1 \;=\; \ell n\,(n!) - \frac{1}{2}\,\ell n\,(n) + c - \frac{1}{2}\int_{n-1}^{+\infty} \frac{\nu(t)}{(1+t)^2}\,dt$$

où $c = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\nu(t)}{(1+t)^2}\,dt\,.$
Finalement, on obtient, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\ell n\,(n!) \;=\; n\,\ell n\,(n) - n + \frac{1}{2}\,\ell n\,(n) + (1-c) + 0\left(\frac{1}{n}\right)$$

et, par suite :

$$n! \;=\; \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{n} \cdot \lambda \cdot \exp\left(0\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad , \quad \lambda = \exp\,(1-c)\,.$$

En d'autres termes : $n! \sim \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{n} \cdot \lambda$ lorsque n tend vers $+\infty$.
On peut préciser la constante λ en utilisant le résultat du chapitre 4 sur les intégrales de Wallis :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\, t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\, t\,dt\,.$$

On a vu que : $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{(p!)^2} \cdot \dfrac{\pi}{2^{2p+1}}$, $I_{2p+1} = \dfrac{2^{2p} \cdot (p!)^2}{(2p+1)!}$ et $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ lorsque n tend vers $+\infty$. Il en résulte que $\lambda = \sqrt{2\pi}$ et on obtient la formule de Stirling : $n! \sim \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

6.3 Formule d'Euler - Mac Laurin.

La méthode d'intégration par parties utilisée pour les formules $(\star\star\star)$ et $(\mathrm{v}\,\star)$ du paragraphe 2 peut être itérée à tout ordre.
Pour l'exprimer, introduisons les polynômes de Bernouilli $(B_p)_{p\geqslant 0}$ définis par récurrence par les relations :

$$B_0 = 1 \quad , \quad B'_p = p\,B_{p-1} \quad \text{avec} \int_0^1 B_p(t)\,dt = 0 \quad \text{pour } p = 1\,,\,2\,,\,\cdots$$

La condition $\displaystyle\int_0^1 B_p(t)\,dt = 0$ pour $p \geqslant 1$ détermine la constante d'intégration qui définit B_p à l'aide de $B'_p = p\,B_{p-1}\,.$
En particulier, $B_1(t) = t - \dfrac{1}{2}$ et $B_2(t) = t^2 - t + \dfrac{1}{6}\,.$
Par ailleurs, de la relation $\displaystyle\int_0^1 B_p(t)\,dt = 0$ pour $p \geqslant 1$, on déduit que $B_p(1) - B_p(0) = \displaystyle\int_0^1 p\,B_{p-1}(t)\,dt = 0$ pour $p \geqslant 2$.
De plus, ces polynômes possèdent la propriété suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad , \quad B_p\,(1-t) = (-1)^p\,B_p(t)\,.$$

En effet, cette relation est vraie pour $p = 0$ et $p = 1$. En l'admettant vraie au rang p, par dérivation, on obtient que :

$$B_{p+1}\,(1-t) = (-1)^{p+1}\, B_p(t) + \lambda$$

avec $\lambda = B_{p+1}(0)\,[1-(-1)^{p+1}]$.

Si $p+1$ est pair, $\lambda = 0$.
Et si $p+1$ est impair, comme $\displaystyle\int_0^1 B_{p+1}(1-t)\,dt = \int_0^1 B_{p+1}(t)\,dt = 0$, on obtient encore $\lambda = 0$.
Finalement, les nombres de Bernouilli $b_p := B_p(0)$ vérifient :

(i) $b_p = B_p(0) = B_p(1)$ pour $p \geqslant 2$

(ii) $b_p = 0$ pour p impair, $p \geqslant 3$.

On a alors :

Proposition (Euler - Mac Laurin)
Soit $f : [0\,,\,1] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Pour tout entier $q \geqslant 2$, on a :

$$\int_0^1 f(t)\,dt \;=\; \frac{1}{2}\,[f(1)+f(0)] + \sum_{p=2}^{q} (-1)^{p-1}\,\frac{b_p}{p!}\,[f^{(p-1)}(1) - f^{(p-1)}(0)] + \frac{(-1)^q}{q!}\int_0^1 B_q(t)\,f^{(q)}(t)\,dt\,.$$

Preuve
On part de la relation (cf $(\star\star\star)$ du paragraphe 2) :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(t)\,dt \;&=\; f(1) - \int_0^1 t\,f'(t)\,dt \\
&=\; f(1) - \int_0^1 \left(t-\frac{1}{2}\right) f'(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^1 f'(t)\,dt \\
&=\; \frac{1}{2}\,[f(1)+f(0)] - \int_0^1 B_1(t)\,f'(t)\,dt\,.
\end{aligned}$$

On utilise ensuite de manière itérative l'intégration par parties suivante : pour tout $p \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 B_p(t)\,f^{(p)}(t)\,dt \;&=\; \frac{1}{p+1}\int_0^1 B'_{p+1}(t)\,f^{(p)}(t)\,dt \\
&=\; \frac{1}{p+1}\left\{ b_{p+1}\,[f^{(p+1)}(1) - f^{(p+1)}(0)] - \int_0^1 B_{p+1}(t)\,f^{(p+1)}(t)\,dt \right\}\,.
\end{aligned}$$

Remarque 1
Compte-tenu de l'expression de $B_2(t)$, la formule d'Euler - Mac Laurin pour $q = 2$ coïncide avec la formule $(\mathrm{v}\,\star)$ du paragraphe 2.

Remarque 2
En considérant une primitive F de f sur $[0\,,\,1]$, la formule d'Euler - Mac Laurin s'écrit sous la forme :

$$F(1) - F(0) = \frac{1}{2}\,[F'(1)+F'(0)] + \sum_{p=2}^{q} (-1)^{p-1}\,\frac{b_p}{p!}\,[F^{(p)}(1) - F^{(p)}(0)] + \frac{(-1)^q}{q!}\int_0^1 B_q(t)\,F^{(q+1)}(t)\,dt\,.$$

Et si $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{C}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, ces expressions deviennent (poser $\varphi(t) := f\,((b-a)\,t + a)$) :

$$(\mathrm{v}\star\star)\quad \int_a^b f(t)dt \;=\; \frac{b-a}{2}\,[f(b)+f(a)] + \sum_{p=2}^{q} (-1)^{p-1}\,\frac{b_p}{p!}\,(b-a)^p\,[f^{(p-1)}(b) - f^{(p-1)}(a)] + \frac{(-1)^q}{q!}\,(b-a)^q\int_a^b B_q\left(\frac{t-a}{b-a}\right) f^{(q)}(t)$$

$$F(b)-F(a) \;=\; \frac{b-a}{2}\,[F'(b)+F'(a)]+\sum_{p=2}^{q}(-1)^{p-1}\,\frac{b_p}{p!}\,(b-a)^p\,[F^{(p)}(b)-F^{(p)}(a)]+\frac{(-1)^q}{q!}\,(b-a)^q\int_a^b B_q\left(\frac{t-a}{b-a}\right)\,F^{(q+1)}(t)\,dt$$

cette dernière formule s'apparentant à une formule de Taylor dans laquelle les dérivées d'ordre supérieur sont considérées en deux points.
En particulier, si $a = m$ et $b = n$ sont deux entiers avec $m < n$, la formule (v$\star\star$) devient :

$$\text{(v}\star\star\star\text{)}\quad \int_m^n f(t)dt \;=\; \sum_{k=m+1}^{n} f(k)+\frac{1}{2}\,[f(m)-f(n)]+\sum_{p=2}^{q}(-1)^{p-1}\,\frac{b_p}{p!}\,[f^{(p-1)}(n)-f^{(p-1)}(m)]+\frac{(-1)^q}{q!}\int_m^n \nu_q(t)\,f^{(q)}(t)\,dt$$

avec $\nu_q(t) := B_q\,(t-k)$ si $t \in [k\,,\,k+1[\;,\;k \in \mathbb{N}^*$.
On va en déduire le théorème de Hardy qui est une extension des théorèmes 1, 2 et 2' du paragraphe précédent.

Théorème (Hardy)
Soit $f : [0\,,+\infty[\,\to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^q$ avec $q \geqslant 2$. On suppose que :

(i) $f(t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

(ii) $f^{(q)}$ est intégrable sur $[0\,,+\infty[$, i.e. : l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f^{(q)}(t)|\,dt$ est convergente.

Alors, la suite $a_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^n f(t)\,dt$ est convergente, i.e. : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n$ existe. En particulier, sous les hypothèses (i) et (ii), la série $[f(n)]_{n\in\mathbb{N}}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature.

Preuve
Elle s'appuie sur la formule d'Euler - Mac Laurin précédente et sur deux lemmes élémentaires :

Lemme 1
Soit $f : [0\,,+\infty[\,\to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t)$ existe si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)\,dt$ est convergente.

Cela résulte de la formule : $f(t) - f(0) = \displaystyle\int_0^t f'(s)\,ds$.

Lemme 2 (Dérivées intermédiaires)
Soit $f : [0\,,+\infty[\,\to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^q$, avec $q \geqslant 2$, telle que :

(i) $f(t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$, i.e. : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

(ii) $f^{(q)}$ est bornée sur $[0\,,+\infty[$, i.e. : $\displaystyle\sup_{t\in[0\,,+\infty[} |f(t)| < +\infty$.

Alors, pour tout entier $k \in [\![1\,,\cdots,\,q-1]\!]$, $f^{(k)}(t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

Preuve
On remarque d'abord qu'il suffit de considérer le cas où f est à valeurs réelles.
On démontre ensuite qu'il existe une constante $c \geqslant 0$ telle que, pour tout polynôme P de degré $\leqslant q-1$, i.e. : $P \in \mathbb{R}_{q-1}[X]$, on ait :

$$\sum_{k=0}^{q-1} |P^{(k)}(0)| \;\leqslant\; c\cdot \sup_{t\in[0\,,\,1]} |P(t)|\,.$$

Pour cela, on remarque que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}\,, P(\lambda) = \displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} \frac{\lambda^k}{k!}\cdot P^{(k)}(0)$.

Ainsi, si $\lambda_1\,,\cdots,\,\lambda_q$ sont q réels distincts de $[0\,,\,1]$, le système linéaire

$$P(\lambda_i) \;=\; \sum_{k=0}^{q-1} \frac{\lambda_i^k}{k!}\cdot P^{(k)}(0) \quad , \quad i = 1\,,\cdots,\,q$$

détermine les $P^{(k)}(0)$ à l'aide des q valeurs $P(\lambda_i)$ de P (le déterminant de ce système est un déterminant de Van der Monde associé aux λ_i) et, en particulier, il existe des constantes c' et c positives telles que, pour tout $P \in \mathbb{R}_{q-1}[X]$, on ait :

$$\sum_{k=0}^{q-1} |P^{(k)}(0)| \ \leqslant\ c' \sum_{i=1}^{q} |P(\lambda_i)| \ \leqslant\ c \cdot \sup_{t\in[0\,,\,1]} |P(t)|\,.$$

En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, et tout $P \in \mathbb{R}_{q-1}[X]$, on a :

$$\sum_{k=0}^{q-1} |P^{(k)}(0)| \cdot \varepsilon^k \ \leqslant\ c \cdot \sup_{t\in[0\,,\,\varepsilon]} |P(t)|\,.$$

(Appliquer la relation précédente à $P_\varepsilon(t) := P(\varepsilon \cdot t)$.)
On applique maintenant cette inégalité au polynôme de Taylor d'ordre $q-1$ de f en un point $t \in [0\,,+\infty[$, $P_f(\lambda) := \sum_{k=0}^{q-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} \cdot \lambda^k$ et, de la formule de Taylor à l'ordre k pour f :

$$f(t+\varepsilon) \ =\ P_f(\varepsilon) + \frac{\varepsilon^q}{q!}\, f^{(q)}(\theta) \quad , \quad \theta \in [t\,,\,t+\varepsilon]$$

on déduit que, pour tout $t \in [0\,,+\infty[$:

$$\sum_{k=0}^{q-1} \frac{|f^{(k)}(t)|}{k!} \cdot \varepsilon^k \ \leqslant\ 2c \cdot \left[\sup_{s\in[t\,,+\infty[} |f(s)| + \frac{\varepsilon^q}{q!} \sup_{s\in[0\,,+\infty[} |f(s)|\right].$$

En particulier, pour tout entier $k \in [\![1\,,\,\cdots\,,\,q-1]\!]$, et pour tout $t \in [0\,,+\infty[$, on a :

$$\frac{|f^{(k)}(t)|}{k!} \ \leqslant\ 2c \cdot \left[\varepsilon^{-k} \sup_{s\in[t\,,+\infty[} |f(s)| + \frac{\varepsilon^{q-k}}{q!} \sup_{s\in[0\,,+\infty[} |f(s)|\right].$$

On en déduit immédiatement de (i) et (ii) que, pour tout entier $k \leqslant q-1$, $f^{(k)}(t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

Fin de la preuve du théorème Hardy : Il (faut et il) suffit de montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
De la formule (v$\star\star\star$), on déduit que, pour tous entiers m et n, avec $m < n$, on a :

$$a_n - a_m \ =\ \frac{1}{2}\,[f(n) - f(m)] + \sum_{p=2}^{q} (-1)^p \,\frac{b_p}{p!}\,[f^{(p-1)}(n) - f^{(p-1)}(m)] + \frac{(-1)^{q+1}}{q!} \int_m^n \nu_q(t)\, f^{(q)}(t)\, dt\,.$$

La fonction ν_q étant bornée sur $[0\,,+\infty[$, on déduit des hypothèses (i) et (ii) que la suite $(a_n)_n$ est de Cauchy, donc convergente.

Exemple
Lorsque $\alpha > 0$, la série $\left[\frac{\sin\sqrt{n}}{n^\alpha}\right]_{n\geqslant 1}$ est convergente si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.

On donne maintenant quelques applications de la formule d'Euler - Mac Laurin aux restes de séries convergentes et de sommes partielles de séries divergentes.

Application 1 : Développement asymptotique du reste de séries convergentes
Soient $\delta > 0$ et $f(t) := \frac{1}{t^{\delta+1}}$. En appliquant la formule (v$\star\star$) avec $a = k$ et $b = k+1$, k entier $\geqslant 1$, puis en sommant par rapport à k, on obtient, pour tout entier $n \geqslant 1$ et $q \geqslant 2$:

$$\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^{\delta+1}} = \frac{1}{2}\sum_{k=n}^{+\infty} [f(k+1)+f(k)] + \sum_{p=2}^{q} (-1)^{p-1}\,\frac{b_p}{p!} \sum_{k=n}^{+\infty} [f^{(p-1)}(k+1) - f^{(p-1)}(k)] + \frac{(-1)^q}{q!} \int_n^{+\infty} \nu_q(t)\, f^{(q)}(t)\, dt$$

avec $\nu_q(t) := B_q(t-k)$ si $t \in [k\,,\,k+1[\,,k \in \mathbb{N}^*$.

Comme pour ℓ entier $\geqslant 1$, $f^{(\ell)}(t) = (-1)^{\ell}\,(\delta+1)\,(\delta+2)\cdots(\delta+\ell)\,\dfrac{1}{t^{\delta+\ell+1}}$ et, puisque $\delta > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{+\infty}[f(k+1)+f(k)] &= \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^{\delta+1}} - \frac{1}{2n^{\delta+1}}\\
\sum_{k=n}^{+\infty}[f^{(p-1)}(k+1)-f^{(p-1)}(k)] &= -\,f^{(p-1)}(n)\\
\int_n^{+\infty}\nu_q(t)\,f^{(q)}(t)\,dt &= 0\left(\frac{1}{n^{\delta+q}}\right), \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty
\end{aligned}$$

puisque ν_q est bornée sur $[0\,,+\infty[$.

Finalement, en tenant compte de l'annulation des nombres de Bernouilli b_p pour p impair $\geqslant 3$, on obtient le développement asymptotique lorsque n tend vers $+\infty$, avec $q = 2s+1$:

$$\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^{\delta+1}} = \frac{1}{\delta n^{\delta}} + \frac{1}{2n^{\delta+1}} + \sum_{\ell=1}^{s}\frac{(\delta+1)\,(\delta+2)\cdots(\delta+2\ell-1)}{(2\ell)!}\cdot\frac{b_{2\ell}}{n^{\delta+2\ell}} + 0\left(\frac{1}{n^{\delta+2s+1}}\right).$$

De manière analogue, la formule d'Euler - Mac Laurin permet d'obtenir des développements asymptotiques de sommes de séries divergentes. On en donne deux exemples significatifs.

Application 2 : Estimation de la constante d'Euler

Si $f : [0\,,+\infty[\to \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$, en appliquant à nouveau la formule (v⋆⋆) avec $a = k$ et $b = k+1$, $k \in \mathbb{N}$, puis en sommant par rapport à l'entier k, on obtient pour tous entiers $n \geqslant 1$ et $q \geqslant 2$:

$$\int_0^n f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} f(k) - \frac{1}{2}[f(n)+f(0)] + \sum_{p=2}^{q}(-1)^{p-1}\frac{b_p}{p!}[f^{(p-1)}(n)-f^{(p-1)}(0)] + \frac{(-1)^q}{q!}\int_0^n \nu_q(t)\,f^{(q)}(t)\,dt$$

où ν_q a été définie lors de l'application 1 précédente.

Appliquons cette relation à la fonction $f(t) := \dfrac{1}{1+t}$, $t \in [0\,,+\infty[$ et n := n-1. On obtient :

$$\ell n\,(n) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + \sum_{p=2}^{q}\frac{b_p}{p}\cdot\frac{1}{n^p} + c_q + 0\left(\frac{1}{n^q}\right) \quad , \quad n \to +\infty$$

où $c_q = -\dfrac{1}{2} - \displaystyle\sum_{p=2}^{q}\frac{b_p}{p} + \frac{(-1)^q}{q!}\int_0^{+\infty}\nu_q(t)\,f^{(q)}(t)\,dt$, et $\displaystyle\int_{n-1}^{+\infty}\nu_q(t)\,f^{(q)}(t)\,dt = 0\left(\frac{1}{n^q}\right)$ puisque $f^{(q)}(t) = (-1)^q\,\dfrac{q!}{(t+1)^{q+1}}$.

On a déjà vu au paragraphe 2 précédent que :

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ell n\,(n) + \gamma + \varepsilon_n \quad , \quad \lim_{n\to+\infty}\varepsilon_n = 0\,.$$

On en déduit que $c_q = -\,\gamma$ pour tout entier $q \geqslant 2$. Par suite, avec $q = 2s+1$ lorsque n tend vers $+\infty$, il vient :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ell n\,(n) + \gamma + \frac{1}{2^n} - \sum_{\ell=1}^{s}\frac{b_{2\ell}}{2\ell}\cdot\frac{1}{n^{2\ell}} + 0\left(\frac{1}{n^{2s+1}}\right),$$

expression qui permet une bonne approximation de la constante d'Euler γ .

Application 3 : Développement asymptotique de $n!$

On applique la formule précédente à la fonction $f(t) := \ell n\,(t+1)$, $t \in [0\,,+\infty[$. Pour tous entiers $n \geqslant 1$ et $q \geqslant 2$, on obtient :

$$\int_0^{n-1}\ell n\,(t+1)\,dt = \sum_{k=0}^{n-1}\ell n\,(k+1) - \frac{1}{2}[\ell n\,(n) + \ell n\,(1)] - \sum_{p=2}^{q}\frac{b_p}{p(p-1)}\cdot\frac{1}{n^{p-1}} + c'_q + 0\left(\frac{1}{n^{q-1}}\right)$$

où $c'_q = \displaystyle\sum_{p=2}^{q} \frac{b_p}{p(p-1)} + \frac{(-1)^q}{q} \int_0^{+\infty} \nu_q(t)\, f^{(q)}(t)\, dt$, et $\displaystyle\int_{n-1}^{+\infty} \nu_q(t)\, f^{(q)}(t)\, dt = 0\left(\frac{1}{n^{q-1}}\right)$ puisque $f^{(q)}(t) = (-1)^{q-1}\,\dfrac{(q-1)!}{(t+1)^q}$.

Compte-tenu de la formule de Stirling vue au paragraphe précédent, on déduit que $1 - c'_q = \ell n\,(\sqrt{2\pi})$ pour tout entier $q \geqslant 2$.

Finalement, avec $q = 2s+1$, on a :

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \cdot \exp\left(\sum_{\ell=1}^{s} \frac{b_{2\ell}}{2\ell\,(2\ell-1)} \cdot \frac{1}{n^{2\ell-1}} + 0\left(\frac{1}{n^{2s}}\right)\right) \quad , \quad n \to +\infty\,.$$

7 Intégrales dépendant d'un paramètre.

Soient $I = (a\,,\,b)$ un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, D une partie de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $D \times I : (x\,,\,t) \longmapsto f(x\,,\,t) \in \mathbb{K}$ et x_0 un point de $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\,,\,+\infty\}$. On se propose d'étudier le problème d'interversion des opérations d'intégration par rapport à t et de limite par rapport à $x \in D$ du type :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} \int_a^b f(x\,,\,t)\,dt = \int_a^b \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} f(x\,,\,t)\,dt\,.$$

7.1 Intégrale et convergence de suites de fonctions.

On rappelle tout d'abord les notions de convergence simple et de convergence uniforme sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions.

Définition
Soient f et $f_n(n \in \mathbb{N})$, des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>converge simplement vers f sur I</u> si :

   pour tout $t \in I$, la suite $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(t)$ dans $\mathbb{K}$.
2. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>converge uniformément vers f sur I</u> si :

   $\forall \varepsilon > 0\,,\, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N \Longrightarrow \forall t \in I\,,\, |f_n(t) - f(t)| \leqslant \varepsilon$.

Il est clair que la convergence *uniforme* de $(f_n)_n$ vers f sur I implique la convergence *simple* de $(f_n)_n$ vers f sur I. On a alors les résultats suivants :

Théorème 1
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues $f_n : [a\,,\,b] \to \mathbb{K}$.
On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur le segment $I = [a\,,\,b]$. Alors :

(i) $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{K}$ est continue.

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt \left(= \int_a^b f(t)\,dt \right)$.

Théorème 2
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues $f_n : I = (a\,,\,b) \to \mathbb{K}$.
On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout segment $[a'\,,\,b']$ de l'intervalle $I = (a\,,\,b)$.
On suppose de plus qu'il existe une <u>fonction intégrable</u> $g : I \to \mathbb{R}$ telle que :

$$(\star) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \;\;,\;\; \forall t \in I \;\;,\;\; |f_n(t)| \leqslant g(t)\,.$$

Alors :

(i) $f : I \to \mathbb{K}$ est continue.

(ii) Les fonctions $f_n\,, n \in \mathbb{N}$, et f sont intégrables sur I et :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt \left(= \int_a^b f(t)\,dt \right).$$

Preuve
Le point (i) des théorèmes 1 et 2 résulte de la proposition générale suivante :

Proposition
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues $f_n : I = (a\,,\,b) \to \mathbb{K}$ uniformément convergente vers f sur l'intervalle I. Alors f est continue sur I.

Preuve de la Proposition
Par hypothèse, on a :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ , \ \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \ n \geqslant N_\varepsilon = N \ \ , \ \ \forall t \in I \ \ , \ \ |f_n(t) - f(t)| \leqslant \varepsilon\,.$$

Soit maintenant $t_0 \in I$ et montrons la continuité de f en t_0.
La fonction f_N étant continue en t_0, il existe $\eta_\varepsilon > 0$ tel que si $|t - t_0| \leqslant \eta_\varepsilon$ et $t \in I$, on a : $|f_N(t) - f_N(t_0)| \leqslant \varepsilon$.
Ainsi, si $|t - t_0| \leqslant \eta_\varepsilon$ et $t \in I$, on a :

$$|f(t) - f(t_0| \leqslant |f(t) - f_N(t)| + |f_N(t) - f_N(t_0)| + |f_N(t_0) - f(t_0)| \leqslant 3\varepsilon\,.$$

□

Preuve du Théorème 1
Reprenant les notations de la preuve de la proposition précédente, on déduit, en intégrant sur le segment $I = [a\,,\,b]$, que, pour $n \geqslant N_\epsilon$:

$$\left| \int_a^b \ f_n(t)\,dt - \int_a^b \ f(t)\,dt \right| \ \leqslant \ \int_a^b \ |f_n(t) - f(t)|\,dt \leqslant \varepsilon(b-a)\,.$$

D'où (i). □

Ex.1 Soit $f_n : t \longmapsto \sin^n t : [0\,,\,a] \to \mathbb{R}$ avec $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ et $n \in \mathbb{N}$. Cette suite (f_n) converge uniformément vers la fonction identiquement nulle sur $[0\,,\,a]$ car : $\forall t \in [0\,,\,a]\,,\, |f_n(t) - 0| \leqslant \sin^n a$ et $\lim\limits_{a \to +\infty} \sin^n a = 0$.
Par suite : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^a \sin^n t\;dt = \int_0^a 0\;dt = 0.$

Ex.2 Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions $f_n : [0\,,\,1] \to \mathbb{R}$ définies par :

$$f_n(t) = \begin{cases} n^2\,t & , \quad 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{n}\,, \\[2ex] 2n - n^2\,t & , \quad \dfrac{1}{n} \leqslant t \leqslant \dfrac{2}{n}\,, \\[2ex] 0 & , \quad \dfrac{2}{n} \leqslant t \leqslant 1\,. \end{cases}$$

Cette suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers $f \equiv 0$ sur $[0\,,\,1]$ et on a :

$$\int_0^1 f_n(t)\,dt = 1\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\,dt = 1\,, \qquad \int_0^1 f(t)\;dt = \int_0^1 0\;dt = 0\,.$$

On a $1 \neq 0$. Ce n'est pas contradictoire avec le théorème 1 car ici la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas uniformément vers f sur $[0\,,\,1]$.

Preuve du théorème 2
Tout d'abord, il résulte de l'hypothèse $(\star)$ que les fonctions $f_n\,, n \in \mathbb{N}$, sont intégrables sur I. De plus, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans $(\star)$, on obtient que, pour tout $t \in I\,,\ |f(t)| \leqslant g(t)$.
La fonction $f : I \to \mathbb{K}$, étant continue d'après (i), est donc localement intégrable sur I et vérifie la relation de domination $(\star)$, elle est donc intégrable sur I.
Soit maintenant $\varepsilon > 0$. La fonction g étant intégrable sur I, il existe A_ε et B_ε réels tels que : $a < A_\varepsilon < B_\varepsilon < b$,

$$\int_a^{A_\varepsilon} g(t)\,dt \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \int_{B_\varepsilon}^b g(t)\,dt \leqslant \varepsilon\,.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant uniformément sur l'intervalle $[A_\varepsilon\,,\,B_\varepsilon]$, il existe $N_\varepsilon = N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant N$ et pour tout $t \in [A_\varepsilon\,,\,B_\varepsilon]$:

$$|f_n(t) - f(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{B_\varepsilon - A_\varepsilon}\,.$$

Il en résulte que, pour $n \geqslant N_\varepsilon$, on a :

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f_n(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt\right| = \left|\int_a^b (f_n(t) - f(t))\,dt\right| &\leqslant \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\,dt \\
&\leqslant \left(\int_a^{A_\varepsilon} + \int_{A_\varepsilon}^{B_\varepsilon} + \int_{B_\varepsilon}^b\right) |f_n(t) - f(t)|\,dt \\
&\leqslant 2\varepsilon + \varepsilon + 2\varepsilon = 5\varepsilon\,.
\end{aligned}$$

D'où (ii). □

Remarque
En fait, le théorème 2 implique le théorème 1, il suffit de prendre $g(t) := |f_{N_\varepsilon}(t)| + 2\varepsilon$. La différence essentielle entre le théorème 1 et le théorème 2 est que, pour le théorème 2, l'intervalle $I = (a\,,\,b)$ n'est pas nécessairement un segment fermé borné $[a, b] \subset \mathbb{R}$. L'hypothèse supplémentaire introduite dans ce théorème 2 est la condition de domination uniforme $(\star)$ par une fonction intégrable g sur $I = (a\,,\,b)$. En fait, ces deux théorèmes admettent une généralisation qui est dûe à H. Lebesgue et qui est appelée *théorème de la convergence dominée* :

Théorème 3 (Convergence dominée)
Soient $I = (a\,,\,b)$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $f_n : I \to \mathbb{K}$ localement intégrables sur I. On suppose que la suite $(f_n)_n$ converge simplement sur I vers une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ localement intégrable sur I. On suppose de plus qu'il existe une fonction intégrable $g : I \to \mathbb{R}$ telle que :

$$(\star) \qquad \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \ \forall t \in I\ ,\ \ |f_n(t)| \leqslant g(t)\,.$$

Alors les fonctions f et f_n $(n \in \mathbb{N})$, sont intégrables sur I et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt \quad \left(= \int_a^b f(t)\,dt\right).$$

Preuve
La démonstration de ce théorème est délicate et sera admise.

Remarque
L'hypothèse "f localement intégrable" (au sens de Riemann) est essentielle dans l'énoncé de ce théorème 3.
Par exemple, si on désigne par $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'ensemble des rationnels de $[0\,,\,1]$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, par $f_n : [0\,,\,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(q_k) = 1$ pour $k = 0\,,\,\dots\,,\,n$ et $f(t) = 0$ sinon.
Alors, $\forall t \in [0\,,\,1]\,,\ |f_n(t)| \leqslant 1$ et f_n est intégrable au sens de Riemann sur $[0\,,\,1]$ et vérifie $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt = 0$.

De plus, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0\,,\,1]$ vers la fonction $f:[0\,,\,1]\to\mathbb{R}$ définie par $f(t)=1$ si $t\in\mathbb{Q}\cap[0\,,\,1]$ et $f(t)=0$ sinon.
Cette fonction n'est pas intégrable au sens de Riemann sur $[0\,,\,1]$. Toutefois, cette fonction est intégrable au sens de Lebesgue, d'intégrale nulle. En fait, ce théorème 3 est un cas particulier du théorème de convergence dominée de H. Lebesgue : une fonction intégrable au sens de Riemann étant intégrable au sens de Lebesgue.

Ex.3 Soient $f_n : t\longmapsto \sin^n t : \left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$. Cette suite ne converge pas uniformément sur $\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$. En effet, si $(f_n)_n$ convergeait uniformément vers f sur $\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$, comme, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue sur $\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$, la fonction $f:\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ serait continue. Or, ce n'est pas le cas car :

$$\forall t\in\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right[\quad,\quad f(t)=\lim_{n\to+\infty}\sin^n t=0\,,$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\sin^n\frac{\pi}{2}=1\,.$$

On ne peut pas appliquer le théorème 2. Cependant, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, et pour tout $t\in\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$, on a la relation de domination : $|f_n(t)|\leqslant 1$. On peut donc appliquer le théorème 3 qui conduit à :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,dt\;=\;\int_0^{\frac{\pi}{2}}0\,dt\;=\;0\,.$$

La condition de domination $(\star)$ par une fonction intégrable g est importante comme le montre l'exemple suivant :
Ex.4 Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions $f_n:[0\,,+\infty[\to\mathbb{R}$ définies par :

$$f_n(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{n} & ,\quad 0\leqslant t<n\,,\\[2ex] 0 & ,\quad t>n\,.\end{cases}$$

Toute fonction g vérifiant $(\star)$ est telle que :

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}|f_n(t)|\;=\;\tilde{g}(t)\;\leq g(t)\,,\qquad \tilde{g}(t)=(1+E(t))^{-1}\,.$$

La fonction $\tilde{g}$ n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$ car :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n\tilde{g}(t)\;dt\;=\;\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^n\frac{1}{j}\;=\;+\infty\,.$$

Par conséquent, la fonction g ne peut pas être intégrable sur $[0,+\infty[$. Les hypoth'eses du théorème 3 ne sont pas vérifiées. Ici, la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur $[0\,,+\infty[$ vers la fonction $f=0$. Cependant :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}f_n(t)\,dt\;=\;1\;\neq\;\int_0^{+\infty}0\cdot dt\;=\;0\,.$$

7.2 Intégrale et continuité.

On commencera par quelques rappels sur les fonctions continues de deux variables.

Définition
Soient $I=(a\,,\,b)$ et $J=(\alpha\,,\,\beta)$ deux intervalles de $\mathbb{R}$, et $f:J\times I\longrightarrow\mathbb{K}:(x\,,\,t)\longmapsto f(x\,,\,t)$ une fonction.

On dit que la fonction f est continue au point $(x_0\,,\,t_0)\in J\times I$ si :
$\forall\varepsilon>0\,,\ \exists\eta_\varepsilon>0$ tel que : $\forall(x\,,\,t)\in J\times I\,,\ |x-x_0|\leqslant\eta_\varepsilon$ et $|t-t_0|\leqslant\eta_\varepsilon\Longrightarrow|f(x\,,\,t)-f(x_0\,,\,t_0)|\leqslant\varepsilon\,.$
Et on dit que la fonction $f:J\times I\to\mathbb{K}$ est continue si elle est continue en tout point $(x_0\,,\,t_0)\in J\times I$.

En particulier, si $f:J\times I\to\mathbb{K}$ est continue, pour tout $x_0\in J$ (resp. $t_0\in I$), la fonction $f_{x_0,}:t\longmapsto f(x_0\,,\,t)$ (resp. $f_{,t_0}:x\longmapsto f(x\,,\,t_0)$) est continue sur I (resp. J).
Le théorème de Heine affirmant que toute fonction $g:[a\,,\,b]\to\mathbb{K}$ continue sur le segment $[a\,,\,b]$ est uniformément continue sur $[a\,,\,b]$ s'étend aux fonctions continues de deux variables :

Théorème
Soit $f:[\alpha\,,\,\beta]\times[a\,,\,b]\to\mathbb{K}$ une fonction continue.
Alors f est bornée et uniformément continue sur $[\alpha\,,\,\beta]\times[a\,,\,b]$, c'est-à-dire satisfait à la propriété :
$\forall\varepsilon>0\ ,\ \exists\eta_\varepsilon>0$ tel que $\forall(x\,,\,t)\,,\,(x'\,,\,t')\in[\alpha\,,\,\beta]\times[a\,,\,b]$ vérifiant : $|x-x'|\leqslant\eta_\varepsilon$ et $|t-t'|\leqslant\eta_\varepsilon$
alors $|f(x\,,\,t)-f(x'\,,\,t')|\leqslant\varepsilon\,.$

On peut maintenant énoncer les théorèmes de continuité.

Théorème 1 (Continuité)
Soient $I=[a\,,\,b]$ un segment, $J=(\alpha\,,\,\beta)$ un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f:J\times I\to\mathbb{K}:(x\,,\,t)\longmapsto f(x\,,\,t)$ une fonction continue.
Alors la fonction $F:J=(\alpha\,,\,\beta)\to\mathbb{K}$ définie par :

$$\forall x\in J\ \ ,\ \ F(x)=\int_a^b\ f(x\,,\,t)\,dt$$

est continue sur J.

Preuve
Soient $x_0\in J$ et $[\alpha_1\,,\,\beta_1]$ un segment tel que $x_0\in[\alpha_1\,,\,\beta_1]\subset J$, avec $x_0\in]\alpha_1\,,\,\beta_1[$ si $x_0\neq\alpha$ ou $x_0\neq\beta$. La fonction f étant continue sur $[\alpha_1\,,\,\beta_1]\times[a\,,\,b]$ y est uniformément continue. Par suite :

$$\forall\varepsilon>0\ \ ,\ \ \exists\eta_\varepsilon>0\ \text{ tel que }\ \forall(x\,,\,t)\,,\,(x'\,,\,t')\in[\alpha_1\,,\,\beta_1]\times[a\,,\,b]\ \text{ avec }\ |x-x'|\leqslant\eta_\varepsilon\ \text{ et }\ |t-t'|\leqslant\eta_\varepsilon$$

implique $|f(x\,,\,t)-f(x'\,,\,t')|\leqslant\varepsilon\,.$
En particulier, pour tout $x\in[\alpha_1\,,\,\beta_1]$ vérifiant $|x-x_0|\leqslant\eta_\varepsilon$, on a :

$$\forall t\in[a\,,\,b]\ \ ,\ \ |f(x\,,\,t)-f(x_0\,,\,t)|\leqslant\varepsilon\,.$$

Quitte à diminuer η_ε , il en résulte que, pour tout $x\in J$ vérifiant $|x-x_0|\leqslant\eta_\varepsilon$, on a :

$$|F(x)-F(x_0)|\leqslant\int_a^b\ |f(x\,,\,t)-f(x_0\,,\,t)|\,dt\leqslant\varepsilon(b-a)$$

ce qui prouve la continuité de F au point $x_0\in J$. □

Ex.5 Soit $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,,\,x\longmapsto F(x):=\displaystyle\int_0^1\ \sin(tx)\,dt$. Alors F est continue sur $\mathbb{R}$.
En effet, $f(x\,,\,t):=\sin tx$ est continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Remarque : En effectuant le changement de variable $s=tx\,,\ x\neq0\,,$ dans l'expression de F, on obtient que :

$$\forall x\neq0\ \ \ ,\ \ \ F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x\ \sin s\,ds$$

et, par ailleurs $F(0)=0$.

Ex.6 Soit $f : [0\,,+\infty[\to \mathbb{K}$ une fonction continue. Alors la fonction F définie sur $[0\,,+\infty[$ par :
$F(x) := \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt \quad$ si $x \neq 0$
$F(0) := f(0)$
est continue sur $[0\,,+\infty[$.

En effet, en posant $t = s\cdot x$, on obtient que, pour tout $x \in\,]0\,,\infty[\,, F(x) = \displaystyle\int_0^1 f(t\cdot x)\,dt$; expression encore valable pour $x = 0$.
Le théorème 1 de continuité conclut alors à la continuité de F sur $[0\,,+\infty[$.

Corollaire
Soient $I = (a\,,b)\,,\ J = (\alpha\,,\beta)$ deux intervalles de $\mathbb{R}\,, f : J\times I \to \mathbb{K}$ une fonction continue, et $u\,,v : J \to I$ deux fonctions continues.
Pour tout $x \in J$, on pose : $F(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(x\,,t)\,dt$.
Alors la fonction $F : J \to \mathbb{K} : x \longmapsto F(x)$ est continue.

Preuve
Soit $x_0 \in J$, et considérons comme précédemment un segment $[\alpha_1\,,\beta_1]$ tel que $x_0 \in [\alpha_1\,,\beta_1] \subset J$, avec $x_0 \in]\alpha_1\,,\beta_1[$ si $x_0 \neq \alpha$ ou $x_0 \neq \beta$.
Les fonctions u et v étant continues sur $[\alpha_1\,,\beta_1]$, il existe $a_1\,,b_1$ tels que :

$$[a_1\,,b_1] \subset I = (a\,,b) \text{ avec } u([\alpha_1\,,\beta_1]) \subset [a_1\,,b_1] \text{ et } v([\alpha_1\,,\beta_1]) \subset [a_1\,,b_1].$$

La fonction f étant continue sur $[\alpha_1\,,\beta_1]\times[a_1\,,b_1]$ est bornée. Il existe donc $M_1 \geqslant 0$ tel que :

$$\forall (x\,,t) \in [\alpha_1\,,\beta_1]\times[a_1\,,b_1]\,,\ |f(x\,,t)| \leqslant M_1\,.$$

On a alors, pour tout $x \in [\alpha_1\,,\beta_1]$:

$$\begin{aligned} |F(x)-F(x_0)| &= \left|\int_{u(x)}^{u(x_0)} f(x\,,t)\,dt + \int_{u(x_0)}^{v(x_0)} (f(x\,,t)-f(x_0\,,t))\,dt + \int_{v(x_0)}^{v(x)} f(x\,,t)\,dt\right| \\ &\leqslant M_1[|u(x)-u(x_0)| + |v(x)-v(x_0)|] + \left|\int_{u(x_0)}^{v(x_0)} f(x\,,t)\,dt - \int_{u(x_0)}^{v(x_0)} f(x_0\,,t)\,dt\right|. \end{aligned}$$

La continuité des fonctions $x \longmapsto u(x)\,,\ x \longmapsto v(x)$ et $x \longmapsto \displaystyle\int_{u(x_0)}^{v(x_0)} f(x\,,t)\,dt$ sur J donne qu'il existe $\eta_\varepsilon > 0$ tel que $x \in J$ avec $|x-x_0| \leqslant \eta_\varepsilon$ implique que :
$|F(x)-F(x_0)| \leqslant 3\varepsilon\,.$ □

Comme dans le paragraphe précédent, relatif aux suites de fonctions, ce théorème 1 se généralise sous la forme :

Théorème 2 (Continuité)
Soient $I = (a\,,b)\,,\ J = (\alpha\,,\beta)$ deux intervalles de $\mathbb{R}$, et $f : J\times I \to \mathbb{K}$ une fonction continue.
On suppose de plus qu'il existe une fonction intégrable $g : I \to \mathbb{R}$ telle que :

$$(\star) \qquad \forall (x\,,t) \in J\times I \quad,\quad |f(x\,,t)| \leqslant g(t).$$

Alors :
(i) $\forall x \in J$, la fonction $t \longmapsto f(x\,,t) : I \to \mathbb{K}$ est intégrable
et si on pose : $\forall x \in J\,,\ F(x) = \displaystyle\int_a^b f(x\,,t)\,dt$,
(ii) La fonction $F : J \to \mathbb{K} : x \longmapsto F(x)$ est continue.

Preuve
Tout d'abord, puisque $f : J \times I \to \mathbb{K}$ est continue, pour tout $x \in J$, la fonction $t \longmapsto f(x\,,\,t) : I \to \mathbb{K}$ est continue, donc localement intégrable sur I et, de la relation de domination $(\star)$, on déduit que cette fonction est intégrable sur I.
Ainsi, $F(x) = \displaystyle\int_a^b f(x\,,\,t)\,dt$ a un sens pour tout $x \in J$.
On reprend alors la démonstration du théorème 3 de convergence dominée pour les suites de fonctions.
Soit $\varepsilon > 0$. g étant intégrable sur I, il existe A_ε , B_ε réels tels que : $a < A_\varepsilon < B_\varepsilon < b$,

$$\int_a^{A_\varepsilon} g(t)\,dt \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \int_{B_\varepsilon}^b g(t)\,dt \leqslant \varepsilon\,.$$

On a donc, pour tout $x \in J$:

$$\left|\int_a^{A_\varepsilon} f(x\,,\,t)\,dt\right| \leqslant \int_a^{A_\varepsilon} |f(x\,,\,t)\,dt \leqslant \varepsilon$$
$$\left|\int_{B_\varepsilon}^b f(x\,,\,t)\,dt\right| \leqslant \int_{B_\varepsilon}^b |f(x\,,\,t)\,dt \leqslant \varepsilon\,.$$

Désignons par F_ε la fonction définie sur J par :

$$\forall x \in J \quad , \quad F_\varepsilon(x) := \int_{A_\varepsilon}^{B_\varepsilon} f(x\,,\,t)\,dt.$$

D'après le théorème 1 de continuité, F_ε est continue sur J. En particulier, si $x_0 \in J$, pour ce même $\varepsilon > 0$, il existe $\eta_\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall x \in J \quad , \quad |x - x_0| \leqslant \eta_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |F_\varepsilon(x) - F_\varepsilon(x_0)| \leqslant \varepsilon.$$

Finalement, pour $x \in J\,, |x - x_0| \leqslant \eta_\varepsilon$ on a :

$$\begin{aligned}|F(x) - F(x_0)| \leqslant & \left|\int_a^{A_\varepsilon} f(x\,,\,t)\,dt - \int_a^{A_\varepsilon} f(x_0\,,\,t)\,dt\right| + \left|\int_{A_\varepsilon}^{B_\varepsilon} (f(x\,,\,t) - f(x_0\,,\,t))\,dt\right| \\ & + \left|\int_{B_\varepsilon}^b f(x\,,\,t)\,dt - \int_{B_\varepsilon}^b f(x_0\,,\,t)\,dt\right|\end{aligned}$$

i.e. : $|F(x) - F(x_0)| \leqslant 2\varepsilon + \varepsilon + 2\varepsilon = 5\varepsilon$,
ce qui prouve la continuité de la fonction F en x_0 . □

Remarque
Ce théorème 2 de continuité peut se déduire directement du théorème 3 de convergence dominée pour les suites de fonctions. En effet, pour montrer que la fonction $F : x \longmapsto F(x) = \displaystyle\int_a^b f(x\,,\,t)\,dt$ est continue en $x_0 \in J$, il faut (et il suffit de) montrer que, pour toute suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ de points de J convergente vers x_0, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F(x_n) = F(x_0)$.
Soit alors $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de points de J, convergente vers x_0 et posons, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$f_n : I \to \mathbb{K} : t \longmapsto f_n(t) := f(x_n\,,\,t).$$

La fonction $f : J \times I \to \mathbb{K}$ étant continue, on en déduit que la suite $(f_n)_n$ converge simplement sur I vers la fonction continue $t \longmapsto f(x_0\,,\,t)$.
De plus, pour tout entier $n \geqslant 1$, la condition de domination $\forall t \in I\,, |f_n(t)| \leqslant g(t)$ est satisfaite grâce à l'hypothèse $(\star)$.
Le théorème 3 de convergence dominée pour les suites de fonctions permet de déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} F(x_n) = \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt = \int_a^b f(x_0\,,\,t)\,dt = F(x_0)\,.$$

De nouveau, la condition de domination $(\star)$ dans ce théorème 2 est importante comme le montre l'exemple suivant :

Ex.6 Soit $F : [0\,,\,1] \to \mathbb{R} : x \longmapsto F(x) := \displaystyle\int_0^{+\infty} x\, e^{-\,tx}\, dt.$

La fonction $f : [0\,,\,1] \times [0\,,\,+\infty[\to \mathbb{R} : (x\,,\,t) \longmapsto f(x\,,\,t) = x\, e^{-\,tx}$ est continue. Cependant, on a immédiatement que :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ 1 & \text{si} \quad x \in \,]0\,,\,1] \end{cases} .$$

$F : [0\,,\,1] \to \mathbb{R}$ n'est donc pas continue. En fait, la condition de domination :

$$\forall x \in [0\,,\,1] \;\;,\;\; \forall t \in [0\,,\,+\infty[\;\;,\;\; |f(x\,,\,t)| \leqslant g(t) \;\;,\;\; \text{avec } g \text{ intégrable sur } [0\,,\,+\infty[$$

n'est pas satisfaite (remarquer que $\displaystyle\sup_{x \in [0\,,\,1]} |f(x\,,\,t)| = \frac{1}{et}$ pour $t \geqslant 1$).

Compte tenu de cette remarque, on a aussi le

Théorème 2' (Continuité)
Soient $I = (a\,,\,b)\,,\, J = (\alpha\,,\,\beta)$ deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : J \times I \to \mathbb{K}$ une fonction. On suppose que :

(i) $\forall x \in J$, l'application $t \longmapsto f(x\,,\,t) : I \to \mathbb{K}$ est localement intégrable sur I.

(ii) $\forall t \in I$, l'application $x \longmapsto f(x\,,\,t) : J \to \mathbb{K}$ est continue.

(iii) Il existe une fonction intégrable $g : I \to \mathbb{R}$ telle que :

$$(\star) \qquad \forall (x\,,\,t) \in J \times I \quad , \quad |f(x\,,\,t)| \leqslant g(t)$$

Alors :
- Pour tout $x \in J$, la fonction $t \longmapsto f(x\,,\,t) : I \to \mathbb{K}$ est intégrable

et, si on pose : $\forall x \in J\,,\; F(x) = \displaystyle\int_a^b f(x\,,\,t)\, dt$
- la fonction $F : J \to \mathbb{K} : x \longmapsto F(x)$ est continue.

Preuve
Que $t \longmapsto f(x\,,\,t) : I \to \mathbb{K}$ soit intégrable résulte de l'hypothèse (i) et de la condition de domination $(\star)$. Ainsi, F est bien définie sur J. La continuité de F sur J se traite comme dans la remarque précédente à l'aide du théorème de convergence dominée pour les suites de fonctions.

7.3 Intégrale et dérivabilité.

On rappelle tout d'abord la définition de dérivée partielle pour une fonction de deux variables.

Définition
Soient $I = (a\,,\,b)\,,\, J = (\alpha\,,\,\beta)$ deux intervalles de $\mathbb{R}$, et $f : J \times I \to \mathbb{K} : (x\,,\,t) \longmapsto f(x\,,\,t)$ une fonction.
Soit $(x_0\,,\,t_0) \in J \times I$. On dit que la fonction f admet une dérivée partielle par rapport à x en $(x_0\,,\,t_0)$ si la fonction $f_{,t_0} : x \longmapsto f(x\,,\,t_0) : J \to \mathbb{K}$ est dérivable en x_0 et on note :

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,(x_0\,,\,t_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0 \\ x_0 + h \in J}} \frac{f(x_0 + h\,,\,t_0) - f(x_0\,,\,t_0)}{h} = f'_{,t_0}(x_0).$$

De même, on définit la notion de dérivée partielle par rapport à t en $(x_0\,,\,t_0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial t}\,(x_0\,,\,t_0) = \lim_{\substack{k\to 0\\ k\neq 0\\ t_0+k\in I}} \frac{f(x_0\,,\,t_0+k)-f(x_0\,,\,t_0)}{k} = f'_{x_0,}(t_0).$$

Remarque
L'existence des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ en $(x_0\,,\,t_0)$ n'implique pas nécessairement la continuité de f en $(x_0\,,\,t_0)$. Par contre, si les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ existent dans un voisinage de $(x_0\,,\,t_0)$ et si elles sont continues en $(x_0\,,\,t_0)$, alors f est continue en $(x_0\,,\,t_0)$.

On peut maintenant énoncer le premier théorème de dérivabilité.

Théorème 1 (Dérivabilité)
Soient $I=[a\,,\,b]$ un segment, $J=(\alpha\,,\,\beta)$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: J\times I\to\mathbb{K}$ une fonction continue.
On suppose que f admet en tout point $(x\,,\,t)\in J\times I$ une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}\,(x\,,\,t)$ et que $\dfrac{\partial f}{\partial x}: J\times I\to\mathbb{K}$ est continue.
Alors, la fonction $F: J\to\mathbb{K}: x\longmapsto F(x)=\displaystyle\int_a^b f(x\,,\,t)\,dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et, pour tout $x\in J$, on a :

$$F'(x)=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}\,(x\,,\,t)\,dt.$$

Preuve
D'après le théorème 1 de continuité, on a déjà que les fonctions $x\longmapsto F(x)=\displaystyle\int_a^b f(x\,,\,t)\,dt$ et $x\longmapsto G(x)=\displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}\,(x\,,\,t)\,dt$ sont continues sur J.
Il reste à établir que la fonction F est dérivable sur J et que $F'=G$. Par ailleurs, en traitant séparément les parties réelle et imaginaire, on peut toujours supposer que f est à valeurs réelles.
Soit $x_0\in J$. Considérons comme précédemment un segment $[\alpha_1\,,\,\beta_1]$ tel que $x_0\in[\alpha_1\,,\,\beta_1]\subset J$, avec $x_0\in]\alpha_1\,,\,\beta_1[$ si $x_0\neq\alpha$ ou $x_0\neq\beta$. Soit maintenant $h\neq 0$ tel que $x_0+h\in[\alpha_1\,,\,\beta_1]$. On a :

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}\,(x_0\,,\,t)\,dt=\int_a^b\left[\frac{f(x_0+h\,,\,t)-f(x_0\,,\,t)}{h}-\frac{\partial f}{\partial x}\,(x_0\,,\,t)\right]dt.$$

Appliquant la formule des accroissements finis à la fonction réelle f, pour tout $t\in[a\,,\,b]$, il existe $\theta_t\in\mathbb{R}$, avec $0<\theta_t<1$ tel que :

$$\frac{f(x_0+h\,,\,t)-f(x_0\,,\,t)}{h}=\frac{\partial f}{\partial x}\,(x_0+\theta_t\cdot h\,,\,t).$$

La fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ étant continue sur $[\alpha_1\,,\,\beta_1]\times[a\,,\,b]$ y est uniformément continue. Donc :
$\forall\varepsilon>0\,,\,\exists\eta_\varepsilon>0$ tel que : $\forall(x\,,\,t)\;\;,\;\;\forall(x'\,,\,t')\in[\alpha_1\,,\,\beta_1]\times[a\,,\,b]$ avec $|x-x'|\leqslant\eta_\varepsilon$ et $|t-t'|\leqslant\eta_\varepsilon$ implique $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\,(x\,,\,t)-\dfrac{\partial f}{\partial x}\,(x'\,,\,t')\right|\leqslant\varepsilon\,.$
En particulier, pour tout $x\in[\alpha_1\,,\,\beta_1]$ vérifiant $|x-x_0|\leqslant\eta_\varepsilon$, on a :

$$\forall t\in[a\,,\,b]\;\;,\;\;\left|\frac{\partial f}{\partial x}\,(x\,,\,t)-\frac{\partial f}{\partial x}\,(x_0\,,\,t)\right|\leqslant\varepsilon\,.$$

Quitte à diminuer η_ε , il en résulte que, pour tout $h\neq 0$ vérifiant $x_0+h\in J$ et $|h|\leqslant\eta_\varepsilon$ on a :

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-\int_a^b\frac{\partial f}{\partial x}\,(x_0\,,\,t)\,dt\right|\leqslant\varepsilon\cdot(b-a)$$

ce qui prouve que F est dérivable en x_0 et que $F'(x_0)=G(x_0)$. □

Ex.7 Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \longmapsto F(x) := \displaystyle\int_1^2 \frac{\sin(tx)}{t}\, dt$.

Alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, $F'(x) = \displaystyle\int_1^2 \cos(tx)dt = \frac{1}{x}\,(\sin 2x - \sin x)$ pour $x \neq 0$ et $F'(0) = \displaystyle\int_1^2 1 \cdot dt = 1$.

Remarque : En effectuant le changement de variable $s = tx$ dans l'expression de F, on obtient pour $x \neq 0$: $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\sin s}{s}\, ds$ et, on retrouve ainsi que $F'(x) = \dfrac{1}{x}\,(\sin 2x - \sin x)$ pour $x \neq 0$ par dérivation de cette intégrale, fonction de ses bornes.

Ex.8 Soit $f : [0\,, +\infty[\to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Alors la fonction F définie sur $]0\,, +\infty[$ par $F(x) := \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt\,,\; x > 0\,,$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0\,, +\infty[$ et, pour tout entier $k \geqslant 0$, et pour tout $x \in [0\,, +\infty[$, on a : $F^{(k)}(x) = \displaystyle\int_0^1 t^k\, f^{(k)}(tx)\,dt$.

On a déjà vu, dans l'exemple 6, que F se prolonge par continuité en $x = 0$ par $F(0) = f(0)$, et que pour tout $x \geqslant 0\,,\; F(x) = \displaystyle\int_0^1 f(tx)\,dt$.

D'après le théorème 1 de dérivabilité, l'application $F : x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 f(tx)\,dt : [0\,, +\infty[\to \mathbb{K}$ est dérivable et, pour tout $x \geqslant 0 : F'(x) = \displaystyle\int_0^1 t\,f'(tx)\,dt$.

Appliquant de manière récurrente ce théorème 1 de dérivabilité, on obtient que F est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[0\,, +\infty[$ et que, pour tout $x \geqslant 0 : F^{(k)}(x) = \displaystyle\int_0^1 t^k\, f^{(k)}(tx)\,dt$.

Corollaire

Soient $I = (a\,, b)\,,\; J = (\alpha\,, \beta)$ deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : J \times I$ une fonction continue et $u\,, v : J \to I$ deux fonctions continuement dérivables.

On suppose de plus que f admet en tout point $(x\,, t) \in J \times I$ une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}\,(x\,, t)$, et que $\dfrac{\partial f}{\partial x} : J \times I \to \mathbb{K}$ est continue.

Alors, la fonction $F : J \to \mathbb{K} : x \longmapsto F(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(x\,, t)\,dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et, pour tout $x \in J$, on a :

$$F'(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}\,(x\,, t)\,dt + v'(x)\cdot f(x\,, v(x)) - u'(x)\cdot f(x\,, u(x)).$$

Preuve

Il suffit de montrer que F est dérivable sur J de dérivée l'expression indiquée (utiliser le corollaire du théorème de continuité pour la continuité de F').

De même que précédemment en traitant séparément les parties réelle et imaginaire, on peut supposer que la fonction f est à valeurs réelles.

Soit $x_0 \in J\,,\; h \neq 0$ tel que $x_0 + h \in J$, on a :

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\int_{u(x_0+h)}^{u(x_0)} f(x_0{+}h\,, t)\,dt + \int_{u(x_0)}^{v(x_0)} \frac{f(x_0+h\,, t) - f(x_0\,, t)}{h}\,dt + \frac{1}{h}\int_{v(x_0)}^{v(x_0+h)} f(x_0{+}h\,, t)\,dt.$$

D'après le théorème précédent, $\displaystyle\int_{u(x_0)}^{v(x_0)} \frac{f(x_0+h\,, t) - f(x_0\,, t)}{h}\,dt$ tend vers $\displaystyle\int_{u(x_0)}^{v(x_0)} \frac{\partial f}{\partial x}\,(x_0\,, t)\,dt$ quand h tend vers 0.

Par ailleurs, la formule de la moyenne permet d'écrire :

$$\frac{1}{h}\int_{u(x_0+h)}^{u(x_0)} f(x_0+h\,,\,t)\,dt = \frac{u(x_0)-u(x_0+h)}{h}\cdot f(x_0+h\,,\,\theta_1(h))$$

$$\frac{1}{h}\int_{v(x_0)}^{v(x_0+h)} f(x_0+h\,,\,t)\,dt = \frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}\cdot f(x_0+h\,,\,\theta_2(h))$$

où $\theta_1(h)$ est compris entre $u(x_0)$ et $u(x_0+h)$, $\theta_2(h)$ entre $v(x_0)$ et $v(x_0+h)$.
Ainsi, puisque u , v sont dérivables en x_0 et f continue sur $J\times I$, les expressions $\frac{1}{h}\int_{u(x_0+h)}^{u(x_0)} f(x_0+h\,,\,t)\,dt$ et $\frac{1}{h}\int_{v(x_0)}^{v(x_0+h)} f(x_0+h\,,\,t)\,dt$ tendent respectivement vers $-\,u'(x_0)\cdot f(x_0\,,\,u(x_0))$ et $v'(x_0)\cdot f(x_0\,,\,v(x_0))$. □

Ex.9 Soit $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\longmapsto F(x):=\int_0^x \sin(x-t)\cdot f(t)\,dt$, où f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
Alors F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et par ailleurs $F+F''=f$.
En effet, on peut appliquer le corollaire et ainsi on a F de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad,\quad F'(x)=\int_0^x \cos(x-t)\cdot f(t)\,dt\,.$$

En appliquant à nouveau le corollaire, il vient que F' est de classe $\mathcal{C}^1$ et que :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad,\quad F''(x)=f(x)-\int_0^x \sin(x-t)\cdot f(t)\,dt\,.$$

Comme dans le paragraphe pour la continuité, ce théorème 1 peut être généralisé sous la forme :

Théorème 2 (Dérivabilité)
Soient $I=(a\,,\,b)$, $J=(\alpha\,,\,\beta)$ deux intervalles de $\mathbb{R}$, et $f:J\times I\to\mathbb{K}$ une fonction continue.
On suppose que f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $J\times I$.
On suppose de plus que :
(i) $\forall x\in J$, la fonction $t\longmapsto f(x\,,\,t):I\to\mathbb{K}$ est intégrable.
(ii) Il existe une fonction intégrable $g:I\to\mathbb{K}$ telle que : $\forall (x\,,\,t)\in J\times I$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\,(x\,,\,t)\right|\leqslant g(t)$.

Alors, la fonction $F:J\to\mathbb{K}:x\longmapsto F(x)=\int_a^b f(x\,,\,t)\,dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et, pour tout $x\in J$, $F'(x)=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}\,(x\,,\,t)\,dt$.

Preuve
Comme précédemment, en traitant séparément les parties réelle et imaginaire, on peut supposer que f est à valeurs réelles.
Soient $x_0\in J$ et $h:J\times I\to\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x\,,\,t)\in J\times I\quad,\quad h(x\,,\,t)=\frac{f(x\,,\,t)-f(x_0\,,\,t)}{x-x_0}\quad\text{si } x\neq x_0$$
$$h(x_0\,,\,t)=\frac{\partial f}{\partial x}\,(x_0\,,\,t).$$

La fonction h est continue sur $(J\setminus\{x_0\})\times I$ puisque f est continue sur $J\times I$. Elle est aussi continue en tout point $(x_0\,,\,t_0)$, $t_0\in I$ puisque, grâce à la formule des accroissements finis, on a $h(x\,,\,t)=\frac{\partial f}{\partial x}\,(\theta(t\,,\,x\,,\,x_0)\,,\,t)$

avec $\theta(t\,,\,x\,,\,x_0)$ compris entre x et x_0 et, puisque la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $J\times I$, il en résulte que $h(x\,,\,t)$ tend vers $h(x_0\,,\,t_0)=\dfrac{\partial f}{\partial x}\,(x_0\,,\,t_0)$ lorsque $(x\,,\,t)$ tend vers $(x_0\,,\,t_0)$ dans $J\times I$.
Par ailleurs, la condition de domination sur $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ implique que la fonction h vérifie aussi :

$$\forall (x\,,\,t)\in J\times I\,,\ |h(x\,,\,t)|\leqslant g(t).$$

On peut donc appliquer le théorème 2 de continuité à la fonction $H:J\to\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x\in J\quad,\quad H(x)=\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\int_a^b h(x\,,\,t)\,dt \text{ si } x\neq x_0\quad\text{et}\quad H(x_0)=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}\,(x_0\,,\,t)\,dt.$$

La fonction H est continue sur J, et en particulier au point $x_0\in J$, ce qui prouve que la fonction F est dérivable en x_0 et que $F'(x_0)=\displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}\,(x_0\,,\,t)\,dt$.
La continuité de $F':J\to\mathbb{K}$ résulte encore du théorème 2 de continuité. □

Ex.10 Soit $\Gamma:]0\,,+\infty[\to\mathbb{R}:x\longmapsto\Gamma(x):=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\cdot t^{x-1}\,dt$.
Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0\,,+\infty[$. De plus, on a :

$$\forall x>0\quad,\quad \Gamma(x+1)=x\cdot\Gamma(x)$$

et, en particulier, pour tout entier $n\geqslant 0$: $\Gamma(n+1)=n!$.
En effet, pour x et t strictement positifs, posons :

$$f(x\,,\,t)\ :=\ e^{-t}\cdot t^{x-1}.$$

On a déjà vu que $\Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x\,,\,t)\,dt$ existe.
Soient $0<\alpha<\beta<+\infty$ et définissons la fonction $g:]0\,,+\infty[\to\mathbb{R}$ par :

$$\forall t>0\quad,\quad g(t)=\begin{cases} e^{-t}\,t^{\beta-1} & \text{si}\quad t\geqslant 1\\ t^{\alpha-1} & \text{si}\quad 0<t<1\end{cases}.$$

La fonction g est intégrable sur $]0\,,+\infty[$ et on a :

$$\forall x\in]\alpha\,,\,\beta[\quad,\quad\forall t\in]0\,,+\infty[\quad,\quad |f(x\,,\,t)|\leqslant g(t).$$

La fonction $f:]0\,,+\infty[\times]0\,,+\infty[$ étant continue, on en déduit que $\Gamma:]0\,,+\infty[\to\mathbb{R}$ est continue.
Par ailleurs, f admet des dérivées partielles $\dfrac{\partial^p f}{\partial x^p}$, $p\in\mathbb{N}^*$, continues sur $]0\,,+\infty[\times]0\,,+\infty[$ avec :

$$\frac{\partial^p f}{\partial x^p}\,(x\,,\,t)\quad=\quad(\ell n\,t)^p\cdot e^{-t}\cdot t^{x-1}$$

et,

$$\forall x\in]\alpha\,,\,\beta[\quad,\quad\forall t\in]0\,,+\infty[\quad,\quad\left|\frac{\partial^p f}{\partial x^p}\,(x\,,\,t)\right|\ \leqslant\ g_p(t)$$

où $g_p(t)=|\ell n\,t|^p\,g(t)$ est encore intégrable sur $]0\,,+\infty[$.
La fonction Γ est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ et, pour tout entier $p\geqslant 1$, on a :

$$\forall x\in]0\,,+\infty[\quad,\quad\Gamma^{(p)}(x)=\int_0^{+\infty}(\ell n\,t)^p\,e^{-t}\,t^{x-1}\,dt.$$

D'autre part, comme $\Gamma(x+1)=\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{n} e^{-t}\cdot t^x\,dt$, en effectuant une intégration par parties, on obtient immédiatement que : $\forall x\in]0\,,+\infty[$, $\Gamma(x+1)=x\cdot\Gamma(x)$.
En particulier, puisque $\Gamma(1)=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt=1$, on a : $\Gamma(n+1)=n!$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Ex.11 Calcul de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$

Soit, pour $x \in [0\,,+\infty[\,,\ F(x) := \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt$ avec $f(x,t) = \frac{e^{-(t^2+1)\,x^2}}{2\,(1+t^2)}$.

La fonction F est bien définie pour tout $x \in [0\,,+\infty[$ puisque $|f(x\,,\,t)| = \left|\dfrac{e^{-(t^2+1)\,x^2}}{2\,(1+t^2)}\right| \leqslant \dfrac{1}{2\,(1+t^2)}$ et que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ est convergente.

De plus, $(x\,,\,t) \longmapsto f(x\,,\,t) : [0\,,+\infty[\,\times[0\,,+\infty[\,\to \mathbb{R}$ étant continue, il résulte du théorème 2 de continuité que $F : [0\,,+\infty[\,\to \mathbb{R}$ est continue. En particulier : $F(0) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\,Arctg\,t\,\big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}$.

Par ailleurs, f admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}\,(x\,,\,t) = -\,x\,e^{-(t^2+1)\,x^2}$ continue sur $[0\,,+\infty[\,\times[0\,,+\infty[$ et, pour tout $x \in [\alpha\,,\,\beta] \subset\,]0\,,+\infty[$ vérifie :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\,(x\,,\,t)\right| \leqslant \beta \cdot e^{-(t^2+1)\,\alpha^2}$$

La fonction $g(t) := \beta \cdot e^{-(t^2+1)\,\alpha^2}$ étant intégrable sur $[0\,,+\infty[$, le théorème 2 de dérivabilité permet de dire que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha\,,\,\beta]$, et ceci quels que soient $\alpha\,,\,\beta$ vérifiant $0<\alpha<\beta<+\infty$: F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,,+\infty[$ avec : $\forall x \in\,]0\,,+\infty[\ ,F'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,e^{-(t^2+1)\,x^2}\,dt$.

En particulier, pour $0<\varepsilon<X<+\infty$, on aura :

$$\begin{aligned}
F(X)-F(\varepsilon) &= \int_\varepsilon^X F'(x)\,dx = -\int_\varepsilon^X \left[x\int_0^{+\infty} e^{-(t^2+1)\,x^2}\,dt\right]dx \\
&= -\int_\varepsilon^X \left[x\,e^{-x^2}\cdot\int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2}\,dt\right]dx \\
&= -\left(\int_\varepsilon^X e^{-x^2}\,dx\right)\cdot\left(\int_0^{+\infty} e^{-s^2}\,ds\right) = -\,I\int_\varepsilon^X e^{-x^2}\,dx
\end{aligned}$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ étant convergente, on obtient que :

$$\lim_{\substack{X\to+\infty\\ \varepsilon\to 0}} (F(X)-F(\varepsilon)) = -\,I^2$$

Par ailleurs, F étant continue sur $[0\,,+\infty[$, on a $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} F(\varepsilon) = F(0) = \frac{\pi}{4}$ et comme :

$$0 \leqslant F(X) \leqslant \frac{1}{2}\,e^{-X^2}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2X^2}}{1+t^2}\,dt \leqslant \frac{1}{2}\,e^{-X^2}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{8}\,e^{-X^2}$$

on a aussi : $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} F(X) = 0$.

Finalement, $I^2 = \dfrac{\pi}{4}$ et $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Ex.12 Calcul de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$

Pour $x \in [0\,,+\infty[$, soit $F(x) := \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\cdot e^{-tx}\,dt$.

Puisque $|\sin t| \leqslant t$ pour tout $t \geqslant 0$, on a : $|f(x\,,\,t)| = \left|\dfrac{\sin t}{t}\cdot e^{-tx}\right| \leqslant e^{-tx}$ et, comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dt$ est convergente et vaut $\dfrac{1}{x}$, on en déduit que $F(x)$ est bien définie pour $x \in\,]0\,,+\infty[$ et vérifie $|F(x)| \leqslant \dfrac{1}{x}$.

La fonction f admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x\,,\,t) = -\sin t \cdot e^{-\,tx}$ continue sur $]0\,,\,+\infty[\times]0\,,\,+\infty[$. De plus, pour tout $a > 0$, on a :

$$\forall x \in [a\,,\,+\infty[\quad , \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,\,t)\right| \leqslant e^{-\,ta}$$

La fonction $g(t) := e^{-\,ta}$ étant intégrable sur $[0\,,\,+\infty[$, on déduit du théorème 2 de dérivabilité que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a\,,\,+\infty[$ pour tout $a > 0$: la fonction F est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,,\,+\infty[$ avec :

$$\forall x > 0 \quad , \quad F'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin t \cdot e^{-\,tx}\,dt$$

En intégrant deux fois par parties l'intégrale $I(x) := \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin t \cdot e^{-\,tx}\,dt$, on obtient que :

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{1}{x}\,J(x) = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \cos t \cdot e^{-\,tx}\,dt \\ J(x) &= \frac{1}{x}\,(1 - I(x)) \end{aligned}$$

i.e. : $I(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Par suite, $F'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$, et $F(x) = -\,Arctg\,x + \lambda$, où λ est une constante réelle. De la majoration, $|F(x)| \leqslant \dfrac{1}{x}$, on déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$ et donc que $F(x) = \dfrac{\pi}{2} - Arctg\,x$.

On montre maintenant que F est continue en $x = 0$ et, comme $F(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$, on obtiendra que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$.

On a déjà vu que $F(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ est convergente (cf. chapitre V).

Posons, pour $t \geqslant 0$, $H(t) := \displaystyle\int_t^{+\infty} \frac{\sin s}{s}\,ds = \int_0^{+\infty} \frac{\sin s}{s}\,ds - \int_0^{t} \frac{\sin s}{s}\,ds.$

Cette fonction H est continue sur $[0\,,\,+\infty[$, dérivable sur $[0\,,\,+\infty[$ avec $H'(t) = -\dfrac{\sin t}{t}$. De plus, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} H(t) = 0$, H est donc bornée sur $[0\,,\,+\infty[$ et, en intégrant par parties dans l'expression de $F(x)$, on obtient :

$$F(x) - F(0) \;=\; -x\int_0^{+\infty} H(t)\cdot e^{-\,tx}\,dt$$

l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} H(t)\cdot e^{-\,tx}\,dt$ étant, pour tout $x > 0$, absolument convergente.

Comme $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} H(t) = 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A = A_\varepsilon > 0$ tel que :

$$\left|\int_A^{+\infty} H(t)\cdot e^{-\,tx}\,dt\right| \;\leqslant\; \varepsilon\cdot\int_A^{+\infty} e^{-\,tx}\,dt \;\leqslant\; \frac{\varepsilon}{x}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} |F(x) - F(0)| &\leqslant x\left|\int_0^{A} H(t)\,e^{-\,tx}\,dt\right| + \varepsilon \\ &\leqslant x\int_0^{A} |H(t)|\,dt + \varepsilon \end{aligned}$$

et donc, il existe $\eta_\varepsilon > 0$ tel que : $0 < x \leqslant \eta_\varepsilon \Longrightarrow |F(x) - F(0)| \leqslant 2\varepsilon$.

Finalement, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\,[F(x) - F(0)] = 0$, et F est continue en $x = 0$.

Ex.13 Transformée de Fourier de la gaussienne $G : t \longmapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$

Proposition

La transformée de Fourier $\widehat{G} : \xi \longmapsto \widehat{G}(\xi) := \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi t} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ de G est égale à :

$\forall \xi \in \mathbb{R}\,,\ \widehat{G}(\xi) = \sqrt{2\pi} \cdot e^{-\frac{\xi^2}{2}}$.

Preuve

Pour tous $(\xi\,,\,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, posons $f(\xi\,,\,t) := e^{-i\xi t} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, et pour $\xi \in \mathbb{R}$, $t \longmapsto f(\xi\,,\,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ puisque $|f(\xi\,,\,t)| = e^{-\frac{t^2}{2}}$. Par suite, $\widehat{G}(\xi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi t} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ a un sens pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

De plus, f admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial \xi}(\xi\,,\,t) = -\,itf\,(\xi\,,\,t)$ continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $\left|\dfrac{\partial f}{\partial \xi}(\xi\,,\,t)\right| = t\,e^{-\frac{t^2}{2}}$ est indépendante de ξ et intégrable sur $\mathbb{R}$. Le théorème de dérivabilité implique que $\widehat{G}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \quad , \quad \frac{d\widehat{G}}{d\xi}(\xi) \;=\; -\,i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi t} \cdot t\,e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\,.$$

En intégrant par parties, pour tous $X\,,\,Y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_X^Y e^{-i\xi t} \cdot t\,e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \;=\; -\,e^{-i\xi t} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\,\Big|_X^Y \;-\; i\xi \int_X^Y e^{-i\xi t} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

et, en faisant tendre X vers $-\infty$, et Y vers $+\infty$, on obtient que $\widehat{G}$ est solution de l'équation différentielle :

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \quad , \quad \frac{d\widehat{G}}{d\xi}(\xi) \;=\; -\,\xi\,\widehat{G}(\xi)\,.$$

Par suite, $\widehat{G}(\xi) = \lambda \cdot e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ avec $\lambda = \widehat{G}(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \;=\; \sqrt{2\pi}$ (Ex. 11).

Exercice 7.3.1 *Soit $f\,:\,[0\,,\,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue strictement positive. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose :*

$F(\alpha) := \left(\int_0^1 |f(t)|^\alpha\,dt\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

1) Montrer que $lim_{\alpha \to +\infty} F(\alpha) = \sup_{t \in [0\,,\,1]} |f(t)|$.

2) Montrer que $lim_{\alpha \to 0} F(\alpha) = \exp\left(\int_0^1 \ell n\,[f(t)]\,dt\right)$.

(On pourra montrer que la fonction H définie par : $H(\alpha) := \int_0^1 [f(t)]^\alpha\,dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa dérivée.)

3) Que se passe-t-il pour $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ continue strictement positive ?