UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Théorie des nombres

Feuille n°4 : Entiers algébriques

TEST DE COMPRÉHENSION

Test 1.

1. Expliciter les deux plongements complexes du corps quadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{13})$.
2. Calculer la norme et la trace de l'élément $a + b\sqrt{13}$ de $\mathbb{Q}(\sqrt{13})$.
3. Calculer le discriminant de la $\mathbb{Q}$-base $(1, \sqrt{13})$ de $\mathbb{Q}(\sqrt{13})$.
4. Déterminer une $\mathbb{Q}$-base de $\mathbb{Q}(\sqrt{13})$ formée d'entiers algébriques et de discriminant strictement plus petit que l'entier obtenu dans la question précédente.

Test 2.

Quels sont les entiers n tels que l'anneau des entiers du corps quadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ admette un plongement complexe dont l'image est un réseau de $\mathbb{C}$? Calculer le volume de ce réseau quand n est sans facteur carré.

Test 3.

1. Déterminer le degré sur $\mathbb{Q}$ de l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$.
2. Le nombre réel $\sqrt{5}$ est-il dans $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{5})$? et dans $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$?
3. Le nombre complexe $\theta = j\sqrt[3]{5}$ est-il dans l'image de tous les plongements complexes de $\mathbb{Q}(\theta)$?
4. Existe-t-il un plongement de $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$ dans $\mathbb{C}$ qui envoie $\sqrt[3]{5}$ sur 5 ?

EXERCICES

Exercice 4.

a. Soit $\omega = \frac{1+i\sqrt{7}}{2}$. Montrer que $\mathbb{Z}[\omega] = \mathbb{Z} \oplus \omega\mathbb{Z}$ et que $\mathbb{Z}[\omega]$ est euclidien.

b. Meme question pour $\mathbb{Z}[\frac{1+i\sqrt{11}}{2}]$.

Exercice 5.

On considère l'anneau $A = \mathbb{Z}[i]$. Montrer que $(1 - i)$ est irréductible dans A. Vérifier que l'on a dans A

$$5 = (2 + i)(2 - i) = (1 + 2i)(1 - 2i),$$

et que ceci ne contredit pas le fait que A est factoriel.

Exercice 6.

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ et $d \in \mathbb{Z}$ leur pgcd dans $\mathbb{Z}$. Montrer que d est aussi leur pgcd dans $\mathbb{Z}[i]$.

Exercice 7.

Quels sont les entiers n tels que l'anneau des entiers du corps quadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ admet un plongement complexe dont l'image est un réseau de $\mathbb{C}$? Calculer le volume de ce réseau quand n est sans facteur carré.

Exercice 8.

Considérons l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{13}]$. À tout élément $x = a + b\sqrt{13}$ de $\mathbf{Z}[\sqrt{13}]$ on associe son conjugué $\overline{x} = a - b\sqrt{13}$, et sa norme $N(x) = x\bar{x}$.

1. Caractériser le groupe U des éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{13}]$ en termes de leur norme. Vérifier que ± 1, $\pm 18 \pm 5\sqrt{13}$ sont dans U.
2. Montrer que les éléments 2, $3 + \sqrt{13}$, $-3 + \sqrt{13}$ sont irréductibles dans $\mathbb{Z}[\sqrt{13}]$.
3. Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{13}]$ n'est pas factoriel.

Exercice 9.

1. Montrer toute racine rationnelle du polynôme $X^3 + 3X + 7$ est entiere. En deduire que ce polynôme n'a pas de racine rationnelle.
2. Montrer que le polynôme $2X^3 - 2X + 5$ n'a pas de racine rationnelle.
3. Soit ζ une solution complexe de l'équation $2X^3 - 2X + 5 = 0$. Est-ce un entier algébrique ? Déterminer un entier naturel c tel que $c\zeta$ soit un entier algébrique.

Exercice 10.

Le but de l'exercice est de montrer que si $P = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_0$ est un polynome *unitaire* dont les coefficients $a_0, \ldots, a_{d-1}$ sont des entiers algébriques, alors toute racine α de P est aussi un entier algébrique.

1. Montrer par récurrence que si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont des entiers algébriques, alors $\mathbb{Z}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ est un $\mathbb{Z}$-module de type fini.
2. Soit $R = \mathbb{Z}[a_1, \ldots, a_{d-1}]$. Montrer que $R[\alpha] = R + R\alpha + \cdots + R\alpha^{d-1}$ et en déduire que α est entier algébrique.
3. Les solutions complexes de l'équation
$$X^2 + \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) X - 1 = 0$$
sont-elles des nombres algébriques ? sont-elles des entiers algébriques ? Déterminer pour elles, un polynôme annulateur sur $\mathbb{Z}$.

Exercice 11.

1. Soit K un corps de nombres. Soit a un élément primitif de K. Rappeler le lien entre le polynôme minimal de a sur $\mathbb{Q}$ et la trace ou la norme de a.

2. Calculer la norme de $a+1$ et celle de a^2+a dans $\mathbb{Q}[X]/(X^3-X-2)$ où a est la classe de X.

Exercice 12.

1. Rappeler l'anneau des entiers de l'extension quadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ et celui de $\mathbb{Q}(\sqrt{14})$.
2. Montrer que $\alpha = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{14}}{2}$ est un entier de l'extension biquadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{6}, \sqrt{14})$.

Exercice 13.

Montrer que le polynôme $P = X^3 - X - 1$ de $\mathbb{Q}[X]$ est irréductible.
Soit $K = \mathbb{Q}[X]/P$, et α l'image de X.
Determiner α^i et sa trace pour $0 \leq i \leq 4$.
Determiner le discriminant de la base $1, \alpha, \alpha^2$ de K.
Déterminer l'anneau des entiers du corps $\mathbb{Q}[X]/(X^3 - X - 1)$.

Exercice 14.

Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Notons $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de K.

1. Calculer la trace et la norme de $x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4} \in K$
2. Calculer le discriminant de la $\mathbb{Q}$-base $\left(1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\right)$ de K.
3. En déduire que $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}\left[\sqrt[3]{2}\right]$.
4. Montrer que l'équation diophantienne $x^3 + 2y^3 + 4z^3 - 6xyz = 1$ a une infinité de solutions $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$.