

N° d'ordre : 2902

# THESE

présentée devant  
L'UNIVERSITE PAUL SABATIER DE TOULOUSE (SCIENCES)

pour obtenir le titre de  
DOCTEUR  
Spécialité : Mathématiques pures

par

Vincent GUIARDEL

## **Actions de groupes sur des arbres réels, et dynamique dans la frontière de l'outre-espace**

soutenue le vendredi 16 janvier 1998 devant le jury composé de

Thomas DELZANT	Université de Strasbourg	examineur
Martin DUNWOODY	Université de Southampton	examineur
Damien GABORIAU	Ecole Normale Supérieure de Lyon	examineur
Etienne GHYS	Ecole Normale Supérieure de Lyon	examineur
Gilbert LEVITT	Université Paul Sabatier, Toulouse	directeur de thèse
Martin LUSTIG	Université de Bochum, Allemagne	examineur
Frédéric PAULIN	Université Paris-Sud, Orsay	rapporteur
Léonid POTYAGAILO	Université de Lille	examineur

au vu des rapports de

Mark FEIGHN	Rutgers University, USA
Frédéric PAULIN	Université Paris-Sud, Orsay



## *Merci.*

*Je tiens d'abord à remercier chaleureusement Gilbert Levitt qui a encadré ce travail de thèse. J'ai profité de sa grande disponibilité tout au long de cette thèse. Ses réponses synthétiques et géométriques à mes questions ont toujours su stimuler mon intuition. Sa rigueur légendaire et la profondeur de sa compréhension m'ont aidé à préciser et à conceptualiser beaucoup de mes idées.*

*Frédéric Paulin m'a offert beaucoup de son temps pour m'initier à de la belle géométrie. Il a toujours manifesté beaucoup d'intérêt pour mon travail. Il a aussi accepté le travail de rapporteur et m'a généreusement fait part de ses remarques et critiques. Un grand merci pour la motivation et l'enrichissement qu'il m'a transmis.*

*Je tiens aussi à remercier vivement Mark Feighn. Ses travaux ont été pour moi une source d'inspiration, et nos discussions ont été fructueuses et encourageantes. J'ai donc été très honoré qu'il ait consenti à examiner mon travail en tant que rapporteur.*

*Je dois à Damien Gaboriau une gratitude particulière. Sa sympathie et ses encouragements m'ont aidé à ne pas baisser les bras dans certains moments difficiles. Et je lui suis redevable de la généralisation aux actions stables du théorème d'approximation qui n'était à l'origine valable que pour les petites actions des groupes hyperboliques.*

*Je souhaite aussi sincèrement remercier Thomas Delzant, Martin Dunwoody, Etienne Ghys et Léonid Potyagailo qui ont bien voulu prendre part à ce jury et particulièrement Martin Lustig avec qui j'ai eu de nombreuses discussions constructives.*

*Merci aussi à Frédéric Le Roux pour toute son amitié, et pour son intérêt et ses remarques à propos du manuscrit malgré sa militarisation coercitive.*

*Merci encore aux collocataires du goulag pour leur sympathie et l'ambiance dans laquelle ils m'ont permis de travailler (ou pas!).*

*Enfin, merci à toi, Fabienne.*



# Table des matières

<b>Merci</b>	<b>3</b>
<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>17</b>
1.1 Les arbres réels . . . . .	17
– Les arbres réels . . . . .	17
– Exemple simplicial et non simplicial . . . . .	18
– Germes et points de branchement . . . . .	18
– Les actions de groupes sur des arbres réels . . . . .	19
– Isométries d’un arbre réel . . . . .	19
– Action de $\text{Out}(\Gamma)$ sur l’ensemble des actions de $\Gamma$ . . . . .	20
– Actions minimales et sous-arbre minimal . . . . .	20
1.2 La théorie des actions simpliciales de Bass-Serre. . . . .	22
– L’exemple des actions libres . . . . .	22
– Le graphe de groupes quotient . . . . .	23
– Groupe fondamental et revêtement universel d’un graphe de groupes	23
– Le théorème de structure des actions simpliciales . . . . .	25
1.3 Topologies sur les espaces d’actions . . . . .	26
– Longueurs de translation . . . . .	26
– La topologie de Gromov équivariante . . . . .	28
– Compacité du projectifié et actions petites . . . . .	30
– Le cas de $F_n$ et l’outre-espace . . . . .	30
1.4 Arbres, systèmes d’isométries et résolutions . . . . .	31
– Des arbres réels aux systèmes d’isométries . . . . .	31
– La suspension d’un système d’isométries . . . . .	32
– Résolution d’une action . . . . .	32
– L’arbre réel associé à une résolution . . . . .	34

–	Convergence forte et actions géométriques . . . . .	34
–	Mouvements de Rips d'une résolution . . . . .	35
1.5	Les systèmes d'isométries pour eux-mêmes . . . . .	37
–	Théorème d'Imanishi et décomposition dynamique . . . . .	37
–	Les composantes minimales homogènes . . . . .	38
–	L'élargissement uniforme $\Phi_t$ . . . . .	39
–	Les composantes minimales de type surface et exotiques . . . . .	40
<b>2</b>	<b>Approximation of stable actions on <math>\mathbb{R}</math>-trees</b>	<b>41</b>
2.1	Definitions and preliminaries . . . . .	43
2.2	Approximation by a geometric action . . . . .	46
2.3	Pure components of $\Sigma$ . . . . .	48
2.4	Stability and minimal components. . . . .	54
2.5	Approximation of homogeneous components . . . . .	59
2.5.1	The tree $T'_v$ is a line. . . . .	59
2.5.2	Approximation of $(T'_v, \Gamma'_v)$ . . . . .	61
2.6	Independant generators . . . . .	62
2.7	Approximation of exotic components . . . . .	63
2.7.1	The pruning process and the limit lamination . . . . .	64
2.7.2	Narrowing a band . . . . .	66
2.7.3	Ends of singular leaves: how to make leaves compact . . . . .	68
2.8	The surface components . . . . .	70
2.9	Bounded Backtracking . . . . .	71
<b>3</b>	<b>Les minimaux sont presque maximaux</b>	<b>77</b>
3.1	Invariants des pseudo-groupes d'isométries . . . . .	79
–	L'invariant algébrique $c$ . . . . .	79
–	L'invariant métrique $e$ . . . . .	82
3.2	Les minimaux sont presque maximaux . . . . .	82
3.3	Application à une suite emboîtée de résolutions. . . . .	85
<b>4</b>	<b>Aiguillages dans l'outre-espace</b>	<b>91</b>
4.1	Aiguillage d'une action de $F_n$ . . . . .	93
–	Du système d'isométries $X$ à l'action $T_X$ et système d'aiguillages	93
–	Comment aiguiller une action simpliciale libre . . . . .	94
–	Topologie sur l'ensemble des systèmes d'isométries $\mathcal{S}'$ , $X \mapsto T_X$ est continue . . . . .	95

- Les stabilisateurs . . . . . 96
- Le semi-flot  $\Phi_t$  et la minimalité . . . . . 96
- Comment varie le domaine d'un  $X$ -mot lorsqu'on perturbe  $X$  . . . . . 98
- 4.2 Segment légaux et injectivité du semi-flot  $\Phi_t$  . . . . . 100
  - Segments légaux et pliages bornés . . . . . 100
  - Semi-flot et injectivité . . . . . 103
- 4.3 Le temps d'accès au bord . . . . . 108
- 4.4 Le temps d'accès au bord est continu . . . . . 110
  - La première semi-continuité . . . . . 111
  - L'autre semi-continuité de  $\tau$  . . . . . 113
- 5 Dynamique de  $\text{Out}(F_n)$  sur  $\partial CV_n$  . . . . . 119**
  - 5.1 Un fermé invariant dans  $\partial CV_n$  . . . . . 119
    - 5.1.1 Pourquoi cet ensemble  $\mathcal{O}_n$  — Des candidats malheureux au statut d'ouvert invariant dans  $\overline{CV_n}$  . . . . . 121
      - Premier candidat . . . . . 121
      - Second candidat . . . . . 122
      - $\mathcal{O}_n$  n'est pas ouvert dans l'ensemble de toutes les actions de  $F_n$  . . . . . 123
    - 5.1.2  $\mathcal{O}_n$  est ouvert dans  $\overline{CV_n}$  . . . . . 124
      - Domaine fondamental et base de  $F_n$  adaptée pour une action dans  $\mathcal{O}_n$  . . . . . 124
      - Construire un domaine fondamental pour  $(T', F_n)$  à partir de  $D'$  . . . . . 125
    - 5.1.3 L'action de  $\text{Out}(F_n)$  sur  $\mathcal{O}_n$  est proprement discontinue. . . . . 132
  - 5.2 Plier pour approximer . . . . . 138
    - 5.2.1 Le lemme de pliage . . . . . 143
      - Les pliages . . . . . 143
      - Quelques exemples de pliages. . . . . 144
      - Image réciproque d'une arête et lemme de pliage. . . . . 147
    - 5.2.2 Le théorème d'approximation M. Cohen et M. Lustig . . . . . 150
    - 5.2.3 Démonstration du théorème 5.2.1 . . . . . 155
      - Première étape : approximer pour se débarrasser des composantes de  $Q \setminus \text{triv}(Q)$  dont le groupe fondamental n'est pas cyclique . . . . . 155
      - Deuxième étape : approximer  $T$  par une action dont le graphe quotient est un arbre . . . . . 157

	– Troisième étape : Approximer $T$ par une action sans stabilisateur d'arête trivial . . . . .	162
	– Dernière étape : conclusion . . . . .	165
5.3	A-t-on $\mathcal{M}_n = \mathcal{F}_n$ ? . . . . .	168
5.3.1	Mesures sur les arbres réels . . . . .	169
	– Mesures de longueurs et actions uniquement ergodiques . . . . .	169
	– Mesures et applications préservant l'alignement . . . . .	170
	– Mesures ergodiques . . . . .	171
	– Mesures et simplexes . . . . .	173
5.3.2	Limites et applications préservant l'alignement . . . . .	175
5.3.3	Approximation des actions ayant peu de mesures ergodiques . . . . .	178
<b>6</b>	<b>Actions d'un groupe hyperbolique à un bout</b> . . . . .	<b>183</b>
6.1	Le scindement JSJ . . . . .	185
	– Le scindement JSJ . . . . .	185
	– Comment lire toute action petite de $\Gamma$ dans son scindement JSJ . . . . .	186
	– Unicité du scindement JSJ . . . . .	187
	– Construction du scindement JSJ . . . . .	190
6.2	Petites actions de $\Gamma$ sur des arbres réels . . . . .	194
	– Les stabilisateurs d'arête de $S$ sont elliptiques dans $T$ . . . . .	194
	– Actions des groupes de type surface . . . . .	196
	– Les groupes de type rigide . . . . .	198
	– Associer des parties de $T$ aux sommets et arêtes de $S$ . . . . .	198
	– Construction du graphe d'actions . . . . .	200
	– Les petites actions minimales d'un groupe hyperbolique à un bout sont géométriques . . . . .	201
	<b>Bibliographie</b> . . . . .	<b>205</b>



# Introduction

Ce travail s'intéresse principalement aux actions de groupes sur des arbres réels. Un arbre réel est un espace métrique connexe par arc unique, les arcs étant isométriques à des intervalles de  $\mathbb{R}$  ([Mor, Sha1, Sha2]). Les actions considérées sont toutes des actions par isométries de groupes de type fini.

**Pourquoi étudier les arbres réels ?** Un beau panorama des applications des arbres réels peut être trouvé dans [Be]. La quantité de résultats obtenue à l'aide des actions de groupes sur des arbres réels montre l'importance de ces objets. En effet, c'est grâce aux arbres réels que Z. Sela a pu démontrer la propriété de Hopf pour les groupes hyperboliques ([Sel1]), et que F. Paulin a démontré que tout groupe hyperbolique dont le groupe des automorphismes extérieurs est infini se scinde sur un groupe virtuellement cyclique ([Pau5]). C'est aussi grâce aux arbres réels que Z. Sela a défini le scindement JSJ des groupes de présentation finie avec comme conséquence que le groupe des automorphismes extérieurs d'un groupe hyperbolique à un bout est virtuellement un produit direct de groupes modulaires de surfaces ([Sel2]).

Le plus souvent, les actions de groupes sur des arbres réels apparaissent comme limites d'actions de groupes sur d'autres espaces. Elles sont en particulier utiles dans la compactification de certains espaces d'actions comme l'ensemble des structures hyperboliques d'un groupe ([MS1, MS2, Pau1]), ou l'outre-espace de M. Culler et K. Vogtmann ([CV1]). Elles sont aussi un instrument clé pour étudier les automorphismes d'un groupe, comme dans [Pau5], [Lus1], [Sel1], et [GLL, GJLL].

**Que sait-on dire sur les arbres réels ?** Les résultats les plus importants à propos des arbres réels sont les théorèmes de E. Rips qui permettent d'extraire des informations sur un groupe à partir d'une action isométrique de ce groupe sur un arbre réel. Le premier théorème de Rips montre que tout groupe de type fini qui

agit librement (par isométries) sur un arbre réel est un produit libre de groupes abéliens libres et de groupes fondamentaux de surfaces. Le théorème de scindement de Rips est plus général. Une action d'un groupe sur un arbre réel est dite *stable* si pour tout segment  $I$  non dégénéré (i. e. non réduit à un point), il existe un sous-segment non dégénéré  $J$  de  $I$  qui a le même stabilisateur que tous les sous-arcs non dégénérés de  $J$ . Cette condition est souvent vérifiée dans la pratique : les actions sur des arbres simpliciaux, les actions à stabilisateurs d'arcs triviaux (en particulier les actions libres), les petites actions des groupes hyperboliques, et les actions issues de la dégénérescence de structures hyperboliques sont stables. Le théorème de scindement de Rips affirme que si un groupe  $\Gamma$  de présentation finie a une action stable sur un arbre réel, alors  $\Gamma$  se scinde au dessus d'une extension d'un groupe  $\mathbb{Z}^k$  par un sous-groupe de  $\Gamma$  qui fixe un arc dans  $T$ .

### Approximation des actions stables.

Le théorème que nous prouvons dans le chapitre 2 est un raffinement du théorème de scindement de Rips. Il donne comme ce dernier un scindement du groupe agissant sur l'arbre réel, mais nous en donne un bien meilleur contrôle.

**Théorème 2.0.1.** *Soit  $(T, \Gamma)$  une action stable minimale d'un groupe de présentation finie  $\Gamma$  sur un arbre réel  $T$ . On peut approximer  $(T, \Gamma)$  par une action simpliciale  $(T', \Gamma)$  de sorte que le stabilisateur d'une arête de  $T'$  soit une extension d'un groupe  $\mathbb{Z}^k$  par un sous-groupe de  $\Gamma$  qui fixe un arc dans  $T'$ .*

*De plus, si on se donne un nombre fini de sous-groupes de type fini de  $\Gamma$  qui ont un point fixe dans  $T$ , on peut supposer que ces groupes fixent un point dans l'action approximante  $(T', \Gamma)$ .*

On en déduit le corollaire suivant qui sera utilisé à plusieurs reprises dans le chapitre 6.

**Corollaire 2.0.1.** *Toute petite action minimale d'un groupe hyperbolique  $\Gamma$  peut être approximée par une petite action minimale de  $\Gamma$  sur un arbre simplicial.*

Ce théorème est à mettre en relation avec le théorème de M. Bestvina et M. Feighn ([BF3]) qui permet d'approximer toute action très petite du groupe libre  $F_n$  par une action très petite et simpliciale de  $F_n$ . On peut aussi démontrer que toute action très petite d'un groupe hyperbolique  $\Gamma$  peut-être approximée par une très petite action simpliciale de  $\Gamma$  si et seulement si ce résultat est vrai lorsque  $\Gamma$  est

le groupe fondamental d'une surface non orientable.

Comme corollaire, nous montrons que toute petite action de  $F_n$  possède la propriété BBT (*bounded back-tracking*). Cette propriété généralise les *simplifications bornées* de [Coo]. Ce résultat a été démontré dans [BFH] par M. Bestvina, M. Feighn et M. Handel pour les actions très petites de  $F_n$ . La propriété BBT leur sert à montrer un lien entre des laminations sur des graphes et des actions de  $F_n$  sur des arbres réels. On trouve une autre utilisation de la propriété BBT dans [GJLL] où les auteurs étudient les points fixes d'un automorphisme  $\alpha$  de  $F_n$  dans  $F_n \cup \partial F_n$ . En effet, la propriété BBT permet de définir une injection naturelle du bord à l'infini d'un arbre réel muni d'une action de  $F_n$  dans le bord de  $F_n$ . Lorsque l'action est obtenue par itération d'un automorphisme  $\alpha$  de  $F_n$ , on en tire des informations sur l'ensemble des points fixes de  $\alpha$ .

### **Les systèmes d'isométries minimaux sont presque maximaux.**

Une des notions clé qui permet de comprendre les actions de groupes sur les arbres réels est la notion de système d'isométries. C'est en effet à travers ces objets plus simples qu'on arrive à avoir prise sur les actions sur les arbres réels. On est ainsi conduit à étudier des pseudo-groupes d'isométries de dimension 1. G. Levitt a profondément étudié les pseudo-groupes d'isométries orientables du cercle dans [Lev2]. En particulier, il a découvert un grand nombre de pseudo-groupes « exotiques » d'un type nouveau, distinct des échanges d'intervalles et des pseudo-groupes homogènes. Leur dynamique se révèle être très intéressante, elle a été étudiée par D. Gaboriau dans [Gab1]. L'un des résultats de [Lev2] affirme que « les minimaux sont presque maximaux ». Cela signifie qu'il existe au plus un nombre fini de pseudo-groupes d'isométries non homogènes qui contiennent un pseudo-groupe minimal donné. Dans le chapitre 3 nous généralisons ce théorème dans le cadre des pseudo-groupes d'isométries (ne préservant pas l'orientation) sur un multi-intervalle (th. 3.2.1).

Voici une possibilité d'application de ce résultat. Le théorème de scindement de Rips et le théorème d'approximation 2.0.1 ne s'appliquent qu'aux groupes de présentation finie. Z. Sela a généralisé le théorème de scindement à tous les groupes de type fini ayant une action stable à stabilisateurs de tripodes triviaux ([Sel3]). Pour étudier une action stable d'un groupe  $\Gamma$  de type fini (mais pas de présentation finie), on est amené à considérer une suite croissante de pseudo-groupes d'isométries. Le fait que les minimaux soient presque maximaux implique alors qu'une composante

minimale dans une suite emboîtée de résolutions se stabilise ou devient homogène. Dans le cas où elle se stabilise, les composantes minimales correspondantes dans les résolutions successives se déduisent les unes des autres par une opération simple (voir th. 3.3.1) ce qui devrait permettre de trouver un scindement de  $\Gamma$ .

### L'outre-espace.

L'outre-espace  $CV_n$  de M. Culler et K. Vogtmann est un autre exemple d'utilisation des arbres réels. Cet espace a été construit comme un analogue de l'espace de Teichmüller pour le groupe  $\text{Out}(F_n)$  des automorphismes extérieurs du groupe libre. Il a permis en particulier à M. Culler et K. Vogtmann de calculer la dimension cohomologique virtuelle de  $\text{Out}(F_n)$  ([CV1]). L'outre-espace est un espace formé d'actions libres et minimales de  $F_n$  sur des arbres simpliciaux. Il admet une compactification naturelle dans l'espace  $\overline{CV}_n$  des actions minimales de  $F_n$  sur des arbres réels, et le groupe  $\text{Out}(F_n)$  agit naturellement sur  $\overline{CV}_n$ . Tout automorphisme de  $F_n$  fixe un point de  $\overline{CV}_n$  (voir par exemple [Lus1]) et il en est de même pour tout sous-groupe virtuellement nilpotent de  $\text{Out}(F_n)$  ([Pau5]).

L'ensemble des *petites* actions d'un groupe (i. e. dont les stabilisateurs d'arcs ne contiennent pas le groupe libre  $F_2$ ) est un fermé dans l'ensemble de toutes ses actions sur des arbres réels. En particulier,  $\overline{CV}_n$  est constitué de petites actions de  $F_n$ . M. Cohen et M. Lustig ont introduit l'ensemble des actions *très petites* : une action est très petite si elle est petite, n'a pas de stabilisateur de tripode et satisfait  $\text{Fix } g = \text{Fix } g^k$  pour tout  $k \neq 1$  ([CL]). M. Cohen et M. Lustig ont démontré que cet ensemble est un fermé strictement inclus dans l'ensemble des petites actions de  $F_n$ , et que toute action très petite de  $F_n$  sur un arbre *simplicial* appartient à  $\overline{CV}_n$ . M. Bestvina et M. Feighn ont alors prouvé que toute action très petite de  $F_n$  sur un arbre réel peut être approximée par une action simpliciale très petite, concluant ainsi que  $\overline{CV}_n$  est exactement l'ensemble des actions très petites de  $F_n$  sur des arbres réels ([BF3]).

**Systèmes d'aiguillages et simplexes dans l'outre-espace.** Dans [BH], M. Bestvina et M. Handel montrent un résultat essentiel dans la compréhension des automorphismes d'un groupe libre. Le théorème affirme que tout automorphisme d'un groupe libre peut être représenté géométriquement comme un automorphisme de graphe aiguillé. La notion de système d'aiguillages tire son origine de l'étude des

automorphismes des surfaces par W. Thurston. Elle a été adaptée aux graphes par M. Bestvina et M. Handel. Cette notion leur a permis de démontrer la conjecture de Scott : le groupe des éléments fixés par un automorphisme de  $F_n$  a un rang inférieur ou égal à  $n$ . D'un autre côté, M. Lustig a utilisé une autre notion de système d'aiguillages (dite *combinatoire*) qui lui a permis de démontrer que tout automorphisme de  $F_n$  admet un point fixe dans l'adhérence de l'outre-espace.

Dans le chapitre 4, nous définissons une notion de système d'aiguillages sur des arbres réels en termes de systèmes d'isométries sur des multi-intervalles. Pour une action libre de  $F_n$  sur un arbre simplicial  $T$ , cela correspond pour chaque sommet du graphe quotient  $T/F_n$  à partitionner les arêtes incidentes en deux parties non vides. On peut s'imaginer que deux arêtes de la même partie de la partition sont tangentes. En recollant sur une longueur  $t$  les arêtes appartenant à une même classe de la partition, on a ainsi un chemin d'actions dans l'outre-espace. Si on fait varier les longueurs des arêtes de l'action initiale, on obtient aussi de tels chemins pour les actions dans le simplexe de  $CV_n$  correspondant. On dit que ces chemins sont obtenus en suivant le semi-flot  $\Phi_t$ . On appelle *temps d'accès au bord* le dernier instant  $\tau(T)$  pour lequel  $\Phi_\tau(T)$  appartient à  $\overline{CV_n}$ . Dans le chapitre 4, on montre que  $\tau$  est continu et le théorème suivant permet de définir de nouveaux simplexes dans la frontière de l'outre-espace :

**Théorème 4.0.1.** *Soit  $\sigma$  un simplexe ouvert d'actions aiguillées de dimension maximale dans  $CV_n$ . L'application de  $\sigma$  dans  $\partial CV_n$  définie par  $T \mapsto \Phi_{\tau(T)}(T)$  est continue et injective sur toute transversale aux orbites du semi-flot dans  $\sigma$ . Elle définit donc des simplexes de dimension maximale dans le bord de l'outre-espace.*

### Dynamique de $\text{Out}(F_n)$ sur la frontière de l'outre-espace.

Le chapitre 5 étudie la dynamique du groupe  $\text{Out}(F_n)$  des automorphismes extérieurs de  $F_n$  sur  $\partial CV_n = \overline{CV_n} \setminus CV_n$ , la frontière de l'outre-espace. Il est bien connu que  $CV_n$  est un ouvert  $\text{Out}(F_n)$ -invariant dans  $\overline{CV_n}$  et que l'action de  $\text{Out}(F_n)$  sur  $CV_n$  est proprement discontinue. Considérons l'ensemble  $\mathcal{O}_n$  des actions simpliciales  $(T, F_n)$  telles que

- les stabilisateurs d'arête de  $(T, F_n)$  sont triviaux
- les stabilisateurs des sommets de  $(T, F_n)$  sont cycliques
- dès que  $\text{Stab } x \neq \{1\}$ ,  $\text{Stab } x$  agit transitivement sur l'ensemble des arêtes issues de  $x$ .

On peut aussi caractériser  $\mathcal{O}_n$  comme l'ensemble des actions simpliciales de  $F_n$  dont le stabilisateur dans  $\text{Out}(F_n)$  est fini. On a alors le résultat suivant :

**Théorème 5.1.1.** *L'ensemble  $\mathcal{O}_n$  est ouvert et invariant dans  $\overline{CV}_n$ , et  $\text{Out}(F_n)$  agit proprement discontinûment sur  $\mathcal{O}_n$ .*

Comme  $CV_n \subsetneq \mathcal{O}_n$ , le fermé complémentaire  $\mathcal{F}_n = \overline{CV}_n \setminus \mathcal{O}_n$  est un compact invariant strictement inclus dans  $\partial CV_n$ .

**Théorème 5.2.1.** *Soit  $n \geq 3$  et  $(T, F_n)$  une action simpliciale appartenant au fermé  $\mathcal{F}_n$ . Alors, l' $\text{Out}(F_n)$ -orbite de toute petite action  $(T', F_n)$  s'accumule sur  $(T, F_n)$ .*

En particulier, il y a un unique fermé invariant non vide minimal  $\mathcal{M}_n$  dans la frontière de l'outre-espace :  $\mathcal{M}_n$  est l'adhérence de l'orbite de toute action simpliciale appartenant à  $\mathcal{F}_n$ . Nous ne savons pas pour l'instant si  $\mathcal{F}_n = \mathcal{M}_n$ . Cependant,  $\mathcal{F}_n \setminus \mathcal{M}_n$  est composé d'actions non simpliciales, et un argument de [BF3] montre que si  $(T, F_n)$  a un stabilisateur d'arc non trivial,  $(T, F_n)$  appartient à  $\mathcal{M}_n$ . Puisqu'on peut décomposer une action très petite non simpliciale en un graphe d'actions transitives ([Lev4, GL]), pour démontrer que  $\mathcal{F}_n = \mathcal{M}_n$  il suffit de démontrer que toute action à orbites denses appartient à  $\mathcal{M}_n$ .

**Théorème 5.3.1** *Soit  $n \geq 3$  et  $(T, F_n)$  une action très petite à orbites denses telle que la mesure de Lebesgue soit combinaison linéaire d'au plus  $n - 1$  mesures ergodiques. Alors  $(T, F_n)$  appartient à  $\mathcal{M}_n$ .*

Lorsque  $\alpha$  est un automorphisme irréductible à puissances irréductibles de  $F_n$ , M. Lustig démontre que  $\alpha$  et les puissances de  $\alpha$  ont exactement 2 points fixes dans  $\overline{CV}_n$  ([Lus2]). On en déduit que ces points fixes sont uniquement ergodiques et appartiennent donc à  $\mathcal{M}_n$ . D. Gaboriau et G. Levitt ont démontré dans [GL] que la dimension topologique de  $\partial CV_n$  est égale à  $3n - 5$ . On en déduit que toute action de  $\partial CV_n$  à orbites denses admet au plus  $3n - 4$  mesures ergodiques sans atome, et en particulier que la mesure de Lebesgue est combinaison linéaire d'au plus  $3n - 4$  mesures ergodiques (voir section 5.3).

Comme corollaires de cette étude, on peut en particulier montrer que la dimension topologique de tout ouvert de  $\mathcal{M}_n$  est égale à  $3n - 5$  (qui est la dimension de  $\partial CV_n$ ) et que l'ensemble des points de  $\mathcal{M}_n$  dont le stabilisateur est trivial est un  $G_\delta$  dense dans  $\mathcal{M}_n$ .

## Scindement JSJ et petites actions d'un groupe hyperbolique à un bout.

Dans [Sel2], Z. Sela a démontré que les groupes hyperboliques (sans torsion) possèdent un scindement JSJ. Ce scindement tire son origine des travaux de W. H. Jaco, P. B. Shalen et K. Johannson sur la sous-variété caractéristique d'une variété irréductible de dimension 3 ([JaSh, Jo]). Il s'agit d'un scindement d'un groupe  $\Gamma$  sur des groupes cycliques tel que tout scindement élémentaire de  $\Gamma$  sur un groupe cyclique « se lit » dans le scindement JSJ. Depuis, ce scindement JSJ a été généralisé par E. Rips et Z. Sela aux groupes de présentation finie à un bout ([RiSe]), par M. J. Dunwoody et M. E. Sageev pour des scindements des groupes de présentation finie sur des groupes sveltes (*slender* en anglais), avec une condition similaire au fait que  $\Gamma$  a un seul bout ([DuSa]), puis par K. Fujiwara et P. Papasoglu en enlevant cette condition ([FuPa]).

Une approche topologique de ce scindement JSJ a été donnée par B. Bowditch dans [Bo2]. Elle s'applique aux scindements des groupes hyperboliques à un bout sur les groupes virtuellement cycliques. Ce scindement se lit dans la topologie du bord de  $\Gamma$ , et en particulier à travers les points de coupure locale. Nous privilégions cette approche car le scindement obtenu a l'avantage d'être fortement canonique.

Le scindement JSJ est une petite action minimale de  $\Gamma$  sur un arbre simplicial avec des sommets de trois types différents en fonction de leur stabilisateur :

- les sommets de type élémentaire dont le stabilisateur est virtuellement cyclique
- les sommets de type surface dont le stabilisateur est un groupe fuchsien convexe-cocompact non élémentaire
- les sommets de type rigide.

Nous montrons que toute petite action minimale de  $\Gamma$  sur un arbre réel peut être obtenue à partir de son scindement JSJ de la façon suivante (voir th. 6.1.2 pour un énoncé précis) :

- en substituant à chaque sommet  $v$  de type surface une petite action minimale  $(T_v, \Gamma(v))$  de son stabilisateur  $\Gamma(v)$  telle que pour toute arête  $e$  adjacente à  $v$ , le stabilisateur de  $e$  fixe un point  $p_e$  dans  $T_v$
- en éclatant les sommets de type élémentaire en un arbre fini
- et en donnant une longueur (éventuellement nulle) aux arêtes de  $S$ .

En particulier, les groupes d'arêtes et les groupes rigides du scindement JSJ ont un point fixe dans toute petite action de  $\Gamma$  sur un arbre réel.

En utilisant le théorème de Skora affirmant que toute petite action d'un groupe

de surface est géométrique, on obtient une généralisation de ce théorème :

**Corollaire 6.0.1.** *Toute petite action d'un groupe hyperbolique à un bout est géométrique.*

Ce théorème montre aussi en un sens que ce scindement JSJ est très canonique :

**Corollaire 6.0.2.** *Soit  $\Gamma$  hyperbolique à un bout. Le scindement JSJ est l'unique action simpliciale minimale  $(S, \Gamma)$  modulo isomorphisme équivariant vérifiant les conditions suivantes :*

- *les sommets de  $S$  sont de trois types, élémentaire, surface et rigide de sorte que toute petite action minimale puisse être lue dans  $S$  au sens du théorème 6.1.2*
- *aucune arête de  $S$  n'est adjacente à deux sommets ayant le même type*
- *les deux sommets voisins d'un sommet élémentaire de valence 2 dans  $S$  sont du même type.*



# Chapitre 1

## Préliminaires

### 1.1 Les arbres réels

Une bonne introduction aux arbres réels peut être trouvée dans [Sha2] ou [Sha1]. Pour avoir un panorama des applications des arbres réels on pourra se référer à [Be].

#### Les arbres réels

**Définition.** *Un arbre réel est un espace métrique  $T$  avec la propriété qu'entre deux points  $x$  et  $y$  de  $T$  il existe un unique arc topologique qu'on note  $[x, y]$ , et cet arc est isométrique à un intervalle de  $\mathbb{R}$ .*

En particulier, la métrique de  $T$  est une métrique de chemins au sens où la distance entre deux points est réalisée par la longueur d'un chemin les reliant.

Une propriété essentielle des arbres réels est la 0-hyperbolicité : pour tous points  $x, y, z \in T$ ,  $[x, y] \subset [x, z] \cup [z, y]$ . En outre, dans un arbre réel, un connexe est convexe, c'est à dire qu'il contient tous les segments reliant deux de ses points. On appelle aussi un tel ensemble un sous-arbre de  $T$ .

Si  $K$  est un sous-arbre fermé de  $T$ , pour tout point  $x \in T$  il existe un unique point  $p(x) \in K$  qui réalise le minimum de la distance à  $x$ . On appelle ce point le projeté de  $x$  sur  $K$ . Ce point est caractérisé par le fait que  $[x, p(x)] \cap K = \{p(x)\}$ .

Plus généralement, si  $K$  et  $K'$  sont deux sous-arbres fermés disjoints, il existe un unique segment  $[x, x']$  reliant  $K$  et  $K'$  dans le sens suivant :  $[x, x'] \cap K = \{x\}$ ,  $[x, x'] \cap K' = \{x'\}$ . Un tel segment est contenu dans tout segment reliant un point de  $K$  à un point de  $K'$ , on l'appelle aussi parfois le *pont* entre  $K$  et  $K'$ .

### Exemple simplicial et non simplicial

Les premiers exemples d'arbres réels sont les arbres réels simpliciaux. Considérons un complexe simplicial de dimension 1 (autrement dit, un graphe) connexe et simplement connexe. On assigne à chaque arête  $e$  une longueur  $l(e) > 0$ , telle qu'on ait une borne inférieure strictement positive sur les longueurs des arêtes et on met sur la réalisation géométrique de ce complexe une métrique de chemins qui rend chaque arête  $e$  isométrique à un intervalle de longueur  $l(e)$ . On obtient ainsi un arbre réel. On dit alors qu'un arbre réel est *simplicial* s'il est isométrique à un arbre obtenu de cette manière. Dans les exemples usuels, on a un nombre fini d'orbites d'arêtes ce qui rend la condition «  $l(e)$  minorée » automatique.

*Remarque.* La topologie induite par cette métrique ne coïncide pas avec la topologie faible du graphe dès qu'il n'est pas localement fini. En effet, un point ayant un nombre infini d'arêtes incidentes n'a pas de base de voisinages dénombrable pour la topologie faible. Cet exemple montre aussi qu'un arbre réel n'est pas en général localement compact, même dans le cas simplicial.

Un exemple simple d'arbre réel qui n'est pas simplicial est l'ensemble  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  muni de la métrique  $d(a, b) = y_a + y_b + |x_b - x_a|$  si  $x_b \neq x_a$  et  $d(a, b) = |y_b - y_a|$  sinon. Plus géométriquement, cet arbre peut être vu comme un peigne dont les dents sont les demi-droites  $(x = x_0, y \geq 0)$  et sont attachées à la droite  $y = 0$ . L'unique arc allant d'un point  $a$  à un point  $b$  consiste, lorsque  $a$  et  $b$  sont sur des dents différentes, à suivre la dent contenant  $a$  vers le bas jusqu'à rencontrer la droite  $y = 0$ , à suivre cette droite jusqu'à la dent contenant  $b$ , et à remonter le long de cette dent jusqu'à atteindre  $b$ .

On peut aussi sur le même modèle construire un peigne où on ne branche des dents qu'aux points rationnels. On obtient ainsi un arbre réel séparable, comme la plupart des arbres réels qui apparaissent naturellement.

### Germes et points de branchement

On voit que les points sur lesquels sont *branchées* les dents du peigne sont particuliers puisqu'il y a trois façons de quitter ces points : vers la droite, vers la gauche ou vers le haut. Voici comment on formalise cette notion dans les arbres réels.

**Définition.** On appelle germe en un point  $x$  d'un arbre réel  $T$  une classe d'équivalence de chemins isométriques  $p : [0, l(p)] \rightarrow T$  avec  $l(p) > 0$  et  $p(0) = x$  où deux chemins  $p$  et  $p'$  sont équivalents s'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $p(t) = p'(t)$  pour tout  $t \leq \varepsilon$ .

Si  $p$  est un chemin isométrique issu de  $x$  on notera  $\text{germe}_x(p)$  le germe qui lui correspond.

Il est facile de vérifier que les germes en un point  $x$  de  $T$  sont en correspondance biunivoque avec les composantes connexes de  $T \setminus \{x\}$ . Il sera parfois utile de considérer les germes sous ce point de vue.

**Définition.** Un point de branchement d'un arbre réel  $T$  est un point  $x$  tel qu'il y a au moins trois germes distincts issus de  $x$ .

## Les actions de groupes sur des arbres réels

En fait, on ne s'intéresse que rarement aux arbres réels *tous nus*. Le plus souvent, on a un groupe qui agit sur cet arbre réel. C'est parfois une action par homéomorphismes comme dans [Pau5], G. Levitt a étudié les actions non-emboîtantes (*non nesting*) dans [Lev5], mais le plus souvent, et ce sera le cas dans toute cette thèse, ce sont des actions par isométries. On notera  $(T, \Gamma)$  (voire  $T$ ) une action par isométries d'un groupe  $\Gamma$  sur un arbre réel  $T$ . Dans toute la suite, on sous-entend par *action*, une action par isométries d'un groupe sur un arbre réel. Les groupes considérés seront toujours de type fini.

Deux actions d'un même groupe  $(T, \Gamma)$  et  $(T', \Gamma)$  sont considérées comme étant identiques s'il existe une isométrie  $\Gamma$ -équivariante  $\varphi : T \rightarrow T'$ , c'est à dire telle que  $\varphi(g.x) = g.\varphi(x)$  pour tout  $x \in T$  et tout  $g \in \Gamma$ .

## Isométries d'un arbre réel

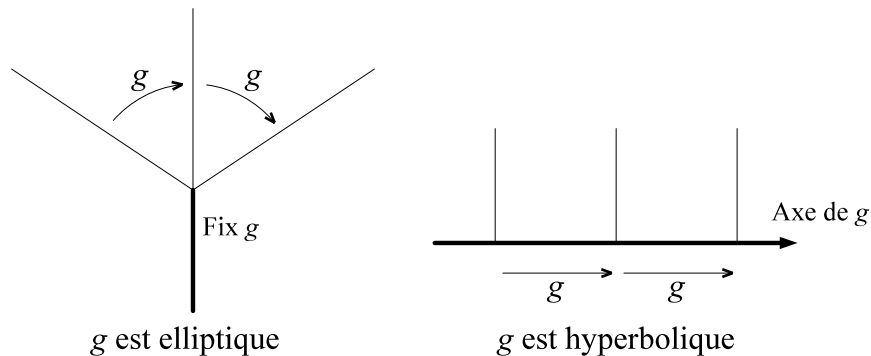


FIG. 1.1 – Les deux types d'isométries d'un arbre réel

La dynamique d'une isométrie  $g$  d'un arbre réel est très simple. Soit  $g$  a un point fixe. Dans ce cas, l'ensemble de ses points fixes est un sous-arbre fermé, et pour tout point  $x$ , le milieu de  $[x, g.x]$  est fixé par  $g$ . Dans ce cas, on dit que  $g$  est *elliptique*. On note alors  $\text{Fix } g$  l'ensemble des points fixes de  $g$ .

Si  $g$  n'a pas de point fixe, alors il existe une unique droite isométrique à  $\mathbb{R}$  qu'on appelle l'axe de  $g$  sur laquelle  $g$  agit par translation. Dans ce cas, on dit que  $g$  est *hyperbolique*. En particulier, si  $g$  est hyperbolique, alors  $g^k$  est aussi hyperbolique pour  $k \neq 0$ . L'axe de  $g$  est caractérisé par le fait qu'un point  $x$  lui appartient si et seulement si  $g^{-1}.x$ ,  $x$  et  $g.x$  sont alignés dans cet ordre. Dans la pratique, on peut ainsi vérifier qu'un point  $x$  appartient à l'axe de  $g$  en montrant que  $g.(\text{germe}_x[x, g.x])$  est différent de  $\text{germe}_{g.x}[g.x, x]$ . On notera parfois  $\text{Axe}(g)$  l'axe de  $g$ . (Voir figure 1.1).

Si  $g$  est une isométrie de  $T$ , son *ensemble caractéristique* noté  $\text{Car}(g)$  est par définition son axe ou l'ensemble de ses points fixes selon que  $g$  est elliptique ou hyperbolique. En particulier, pour tout point  $x$ , le milieu de  $[x, g.x]$  est dans l'ensemble caractéristique de  $g$ .

Si on se donne une action  $(T, \Gamma)$ , et si  $E$  est une partie de  $T$ , le *stabilisateur* de  $E$ , qu'on note  $\text{Stab } E$  ou  $\text{Stab}_\Gamma E$  s'il y a des risques de confusion, est le sous-groupe de  $\Gamma$  composé des éléments qui fixent tous les points de  $E$ .

### Action de $\text{Out}(\Gamma)$ sur l'ensemble des actions de $\Gamma$

On a une action à droite du groupe  $\text{Aut}(\Gamma)$  des automorphismes de  $\Gamma$  sur l'ensemble des actions de  $\Gamma$ . Une action  $(T, \Gamma)$  peut être vue comme un morphisme de groupes  $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Isom}(T)$ . Si  $\alpha \in \text{Aut}(\Gamma)$ , on note  $(T, \Gamma).\alpha$  l'action de  $\Gamma$  sur  $T$  définie par le morphisme  $\rho' = \rho \circ \alpha$ . Considérons maintenant un automorphisme intérieur  $I : \Gamma \rightarrow \Gamma$  c'est à dire défini par une conjugaison  $I : h \mapsto g^{-1}hg$  pour un élément  $g$  de  $\Gamma$ . Alors, l'action  $(T, \Gamma)$  est identique à l'action  $(T, \Gamma).I$  modulo isométrie équivariante. En effet, l'isométrie  $g : (T, \Gamma) \rightarrow (T, \Gamma).I$  est équivariante. Par conséquent, l'action de  $\text{Aut}(\Gamma)$  passe au quotient en une action du groupe des automorphismes extérieurs de  $\Gamma$  qu'on note  $\text{Out}(\Gamma) = \text{Aut}(\Gamma)/\text{Int}(\Gamma)$ .

### Actions minimales et sous-arbre minimal

**Définition.** On dit qu'une action  $(T, \Gamma)$  est minimale si  $T$  n'a pas de sous-arbre  $\Gamma$ -invariant non vide. Une action  $(T, \Gamma)$  est dite triviale s'il existe un point de  $T$  fixé par tous les éléments de  $\Gamma$ . On dit aussi dans ce cas que  $(T, \Gamma)$  a un point fixe global.

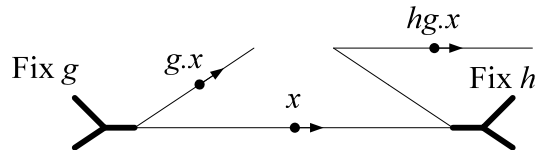


FIG. 1.2 – Le produit de deux isométries elliptiques sans point fixe commun

Toute action  $(T, \Gamma)$  sans point fixe global admet un unique sous-arbre minimal invariant non vide. Il est la réunion des axes de translations des éléments hyperboliques de  $\Gamma$  ([CuMo]).

Pour le démontrer on prouve d'abord le lemme de Serre : si tous les éléments de  $\Gamma$  sont elliptiques,  $(T, \Gamma)$  admet un point fixe global à condition que  $\Gamma$  soit de type fini. En effet, si  $g$  et  $h$  sont deux isométries elliptiques d'un arbre réel  $T$  n'ayant pas de point fixe commun,  $gh$  est hyperbolique (voir figure 1.2). On en déduit que les sous-arbres fixés par des générateurs de  $\Gamma$  s'intersectent deux à deux et qu'ils ont donc un point fixe commun. Ce point est alors fixé par  $\Gamma$ , ce qui démontre le lemme de Serre.

Maintenant, les axes de translation des éléments hyperboliques de  $\Gamma$  sont clairement inclus dans tout connexe invariant non vide. Or la réunion des axes de translation est invariante et connexe car si  $g$  et  $h$  ont des axes disjoints,  $gh$  est hyperbolique et son axe passe par le pont reliant l'axe de  $g$  et l'axe de  $h$ . On en déduit que la réunion des axes de translation des éléments hyperboliques de  $\Gamma$  est le plus petit sous-arbre invariant de  $T$ .

Souvent, on sous-entendra que les actions considérées sont minimales et sans point fixe global.

*Remarque.* On appelle arbre fini un arbre réel qui est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points. Si  $(T, \Gamma)$  est une action minimale d'un groupe de type fini, alors il existe un sous-arbre fini  $K$  tel que tout segment  $I$  de  $T$  est recouvert par un nombre fini de translatés de  $K$ . On dit dans ce cas que  $(T, \Gamma)$  est *finiment supportée*. Pour démontrer ce fait, considérons un point  $x \in T$ , et soit  $K$  l'enveloppe convexe de  $x$  et de ses images par un ensemble fini de générateurs. La réunion  $K_k$  des translatés de  $K$  par les mots de longueur inférieure à  $k$  en les générateurs est alors connexe. La réunion croissante des  $K_k$  est alors un sous-arbre invariant de  $(T, \Gamma)$  et est donc égale à  $T$ . On en déduit que tout intervalle  $I$  de  $T$  est inclus dans un  $K_k$ . En particulier, si  $(T, \Gamma)$  est une action simpliciale et minimale d'un groupe de type fini, le quotient

$T/\Gamma$  est un graphe fini.

## 1.2 La théorie des actions simpliciales de Bass-Serre.

La théorie de Bass-Serre traite des actions de groupes sur des arbres simpliciaux (voir [Ser]). Rappelons d'abord, pour fixer les notations, la définition d'un graphe. C'est la donnée d'un ensemble de sommets  $V$  et d'un ensemble d'arêtes orientées  $E$  avec deux applications  $t$  et  $o$  de  $E$  dans  $V$ . L'application  $t$  associe à une arête orientée le sommet *terminal* de cette arête, et  $o$  lui associe son sommet *origine*. On a aussi une involution de  $E$ , qui à une arête orientée  $e$  associe l'arête  $\bar{e}$  d'orientation opposée. On suppose donc que  $t(\bar{e}) = o(e)$  pour toute arête orientée  $e$ . Une arête (non orientée) est alors une paire  $\{e, \bar{e}\}$ . Le graphe est métrique lorsqu'on associe une longueur  $l(e) = l(\bar{e})$  à chaque arête.

Toutes les actions simpliciales qu'on considère sont *sans inversion*. Cela signifie qu'aucun élément du groupe n'envoie une arête orientée  $e$  sur l'arête  $\bar{e}$ . Ce n'est pas une condition contraignante puisqu'elle sera automatiquement vérifiée si l'on effectue une subdivision barycentrique.

### L'exemple des actions libres

Illustrons d'abord cette théorie par un exemple simple. Supposons que  $\Gamma$  agisse *librement* sur un arbre simplicial  $T$ , c'est à dire qu'aucun élément de  $\Gamma$  n'a de point fixe. On peut considérer le graphe quotient  $Q = T/\Gamma$ . Si  $T$  était muni d'une métrique d'arbre réel,  $Q$  est un graphe métrique. Puisque l'action de  $\Gamma$  est libre, l'application quotient est un revêtement, et puisque  $T$  est simplement connexe,  $T$  est isomorphe au revêtement universel de  $Q$  et  $\Gamma$  est isomorphe au groupe fondamental de  $Q$ .

*Remarque.* Ceci donne une manière élégante de montrer qu'un sous-groupe d'un groupe libre est libre. En effet, un groupe libre  $F$  agit librement sur son graphe de Cayley  $T$  qui est un arbre simplicial. Un sous-groupe  $\Gamma$  de  $F$  agit donc lui aussi librement sur cet arbre, donc  $\Gamma$  est isomorphe au groupe fondamental du graphe  $T/\Gamma$ . On en déduit que  $\Gamma$  est un groupe libre.

On a besoin d'extraire une donnée supplémentaire pour avoir toutes les informations sur l'action. Choisissons un point base  $*$  dans  $T$ , et notons  $*$  sa projection dans  $Q$ . Alors, à un élément  $g \in \Gamma$ , on peut associer le lacet de  $Q$  obtenu en projetant

le chemin reliant  $*$  à  $g.*$ . Cette application induit un isomorphisme bien déterminé entre  $\Gamma$  et  $\pi_1(Q, *)$ . On appelle *marquage du graphe* un tel isomorphisme. A partir de ce graphe marqué, on peut alors retrouver l'action initiale :  $\pi_1(Q, *)$  agit sur son revêtement universel d'où on déduit une action de  $\Gamma$  grâce au marquage du graphe.

## Le graphe de groupes quotient

C'est la généralisation de cet exemple aux actions simpliciales sans inversion que décrit la théorie de Bass-Serre. Considérons donc une action de  $\Gamma$  sans inversion sur un arbre simplicial  $T$ . On peut alors considérer le graphe quotient  $Q = T/\Gamma$ . C'est un graphe métrique si  $T$  était muni d'une métrique d'arbre réel. On va ajouter au graphe  $Q$  des informations sur les stabilisateurs des points grâce à la notion de graphe de groupes.

**Définition 1.2.1.** *Un graphe de groupes est un graphe  $G$  connexe avec la structure suivante :*

- pour chaque sommet  $v$  et chaque arête orientée  $e$  de  $G$ , on a des groupes  $\Gamma_v$  et  $\Gamma_e$  tels que  $\Gamma_e = \Gamma_{\bar{e}}$
- pour chaque arête orientée  $e$ , on a un morphisme injectif  $i_e : \Gamma_e \rightarrow \Gamma_{t(e)}$ .

Considérons un sous-arbre maximal  $\tau$  de  $Q$ , c'est à dire un sous-arbre de  $Q$  passant par tous les sommets. On peut relever  $\tau$  en un sous-arbre  $\tilde{\tau}$  de  $T$ . On choisit ensuite un relevé  $\tilde{e}$  de chaque arête orientée de  $Q \setminus \tau$  qui soit adjacent à  $\tilde{\tau}$  de sorte que  $\bar{\tilde{e}} = \tilde{e}$ . Pour tout sommet  $v$  et toute arête  $e$  de  $Q$ , on prend comme groupes  $\Gamma_v$  et  $\Gamma_e$  les stabilisateurs des relevés dans  $T$  de  $v$  et  $e$  précédemment choisis. Si  $t(\tilde{e}) \in \tilde{\tau}$ , on prend comme morphisme  $i_e$  l'injection de  $\text{Stab}(\tilde{e})$  dans  $\text{Stab}(t(\tilde{e}))$ . Dans le cas contraire, on choisit un élément  $g_e$  de  $\Gamma$  qui envoie  $t(\tilde{e})$  sur le relevé  $\tilde{v}$  de  $t(e)$  dans  $\tilde{\tau}$ , et on prend comme morphisme  $i_e$  l'application de  $\text{Stab} \tilde{e}$  dans  $\text{Stab} \tilde{v}$  définie par  $h \mapsto g_e h g_e^{-1}$ . On obtient ainsi le *graphe de groupes quotient* de  $(T, \Gamma)$ .

## Groupe fondamental et revêtement universel d'un graphe de groupes

**Vision géométrique.** Etant donné un graphe de groupes  $G$ , on peut définir le *groupe fondamental* et le *revêtement universel* de  $G$ . Voici une façon géométrique de les définir. Supposons qu'on ait pour chaque arête  $e$  un espace pointé  $(X_e, *_e)$  dont  $\Gamma_e$  est le groupe fondamental. Supposons aussi qu'on ait pour chaque sommet  $v$  un espace pointé  $(X_v, *_v)$  dont  $\Gamma_v$  est le groupe fondamental et tel que pour chaque

arête orientée  $e$  incidente sur  $v$ ,  $X_v$  contienne une copie de  $(X_e, *_e)$  et tel qu'il existe un chemin  $p_e$  reliant  $*_e$  à  $*_v$  telle que l'inclusion de  $X_e$  dans  $X_v$  induise via  $p_e$  le morphisme injectif  $i_e$  au niveau des groupes fondamentaux. Pour chaque arête  $e$ , on considère l'ensemble  $[0, 1] \times X_e$  et on recolle  $\{0\} \times X_e$  et  $\{1\} \times X_e$  sur la copie de  $X_e$  dans l'espace  $X_v$  correspondant. On obtient ainsi un espace  $X_G$ . On définit alors  $\pi_1(G, v) = \pi_1(X_G, *_v)$ . Pour obtenir le revêtement universel de  $G$ , on part du revêtement universel de  $X_G$ , on écrase les relevés de  $X_e \times [0, 1]$  sur un segment  $[0, 1]$ , et on écrase les relevés de  $X_v$  en un point. On obtient ainsi un arbre simplicial muni d'une action du groupe fondamental de  $G$ . Il est métrique si  $Q$  était métrique.

Etant donné un arbre maximal  $\tau$  de  $G$ , on a aussi un groupe  $\pi_1(G, \tau)$ . Etant donnés deux sommets  $v$  et  $v'$  de  $G$ , le chemin dans  $\tau$  les reliant correspond naturellement à un chemin  $p_{v \rightarrow v'}$  dans  $X_G$  qui relie  $*_v$  à  $*_{v'}$ . On peut alors voir  $\pi_1(G, \tau)$  comme la collection des groupes  $\pi_1(G, v)$  pour  $v$  dans  $G$ , où on identifie  $\pi_1(G, v)$  avec  $\pi_1(G, v')$  grâce au chemin  $p_{v \rightarrow v'}$ .

Le groupe  $\pi_1(G, \tau)$  est bien sûr isomorphe à  $\pi_1(G, v)$ , mais pas canoniquement. Un des avantages de  $\pi_1(G, \tau)$ , c'est qu'on a un morphisme naturel de *tous* les groupes  $\Gamma_v$  dans  $\pi_1(G, \tau)$  via le morphisme naturel de  $\Gamma_v$  dans  $\pi_1(G, v)$ . Etant donnée une arête  $e$  de  $\tau$ , on a aussi un morphisme naturel de  $\Gamma_e$  dans  $\pi_1(G, \tau)$ ; il suffit de choisir une orientation pour  $e$ , et de prendre la composition de  $i_e$  avec le morphisme naturel de  $\Gamma_{t(e)}$  dans  $\pi_1(G, \tau)$  et ce morphisme est indépendant de l'orientation de  $e$  quand  $e$  est dans  $\tau$ .

**Vision algébrique.** On considère le *groupe de Bass*  $F_G$  de  $G$ . C'est le produit libre des groupes de sommet de  $G$  et du groupe libre sur les arêtes orientées de  $G$ , quotienté par les relations  $\bar{e} = e^{-1}$  et  $e.i_e(g_e).e^{-1} = i_{\bar{e}}(g_e)$  pour tout  $g_e \in \Gamma_e$ . Par exemple, lorsque les groupes d'arêtes sont triviaux, on obtient le produit libre des groupes de sommets et du groupe libre sur les arêtes non orientées de  $G$ .

Si  $\tau$  est un arbre maximal dans  $G$ ,  $\pi_1(G, \tau)$  est le quotient de  $F_G$  par le groupe normal engendré par les arêtes appartenant à  $\tau$ . Un chemin  $c$  dans un graphe de groupe est une suite finie

$$c = (g_0, e_1, g_1, e_2 \dots e_p, g_p)$$

où la suite des arêtes  $e_1 \dots e_p$  forme un chemin dans le graphe  $G$  et où  $g_i \in \Gamma_{o(e_{i+1})} = \Gamma_{t(e_i)}$ . On dit aussi que  $c$  est un mot du graphe de groupes. On lui associe naturellement l'élément  $g_0 e_1 \dots e_p g_p$  du groupe de Bass de  $G$ . Si  $v$  est un sommet de  $G$ ,



$\pi_1(G, v)$  est alors le sous-groupe du groupe de Bass de  $G$  formé par les lacets basés en  $v$ .

**Théorème 1.2.2 ([Ser]).** *La composition de l'injection de  $\pi_1(G, v) \subset F_G$  et de la projection  $F_G \rightarrow \pi_1(G, \tau)$  induit un isomorphisme entre  $\pi_1(G, v)$  et  $\pi_1(G, \tau)$ .*

Une notion essentielle de cette théorie est la notion de mot réduit : Un mot  $c = (g_0, e_1, g_1, e_2 \dots e_p, g_p)$  est réduit si

- soit  $p = 0$  et  $g_0 \neq 1$
- soit  $p \geq 1$ , et dès que  $e_{i+1} = \bar{e}_i$ ,  $g_i \notin i_{e_i}(\Gamma_{e_i})$ .

En particulier, dès que le chemin  $e_1, \dots, e_p$  est sans aller-retour, le mot  $c$  est réduit. Tout mot  $c$  dont l'image dans  $\pi_1(G, v)$  est non triviale peut être représenté par un mot réduit. Le théorème suivant est fondamental :

**Théorème 1.2.3 ([Ser]).** *Si  $c$  est un mot réduit, son image dans  $F_G$  est différente de 1.*

Ce théorème implique en particulier que le morphisme naturel de  $\pi_1(\Gamma_v)$  dans  $\pi_1(G, v)$  est injectif.

### Le théorème de structure des actions simpliciales

**Théorème ([Ser]).** *Si  $Q$  est le graphe de groupes quotient de  $(T, \Gamma)$ , il existe un isomorphisme entre  $\pi_1(Q, *)$  et  $\Gamma$  tel que l'action de  $\Gamma$  sur le revêtement universel de  $Q$  (via le marquage donné par cet isomorphisme) soit isomorphe à  $(T, \Gamma)$ .*

*Remarque.* Si on effectue des changements de points base pour calculer  $\pi_1(Q, *)$ , il se peut qu'on change l'action de  $\Gamma$  par un automorphisme intérieur de  $\Gamma$ , mais c'est sans conséquence puisque les automorphismes intérieurs fixent toutes les actions. On s'autorisera donc parfois à oublier les points bases dans les notations.

On dit qu'un groupe  $\Gamma$  se scinde sur un groupe d'une classe de groupes donnée (par exemple, la classe des groupes finis, triviaux, abéliens etc.) si  $\Gamma$  agit sans point fixe global sur un arbre simplicial avec des stabilisateurs d'arête appartenant à cette classe. Ceci revient alors à dire que  $\Gamma$  est le groupe fondamental d'un graphe de groupes  $G$  dont les groupes d'arête appartiennent à cette classe, et qui est non trivial au sens où l'action de  $\pi_1(G)$  sur son revêtement universel n'a pas de point fixe global. Par exemple, lorsque  $\Gamma$  est le groupe fondamental du graphe de groupes formé par une arête  $e$  reliant deux sommets distincts  $v_1$  et  $v_2$ , on note  $\Gamma \simeq \Gamma_{v_1} *_{\Gamma_e} \Gamma_{v_2}$  et on

dit que  $\Gamma$  est le produit amalgamé de  $\Gamma_{v_1}$  et de  $\Gamma_{v_2}$  au dessus de  $\Gamma_e$ . Il est trivial lorsque  $\Gamma_e$  est égal (via le morphisme injectif) à  $\Gamma_{v_1}$  ou  $\Gamma_{v_2}$ . On parle de même de HNN-extension lorsque le graphe de groupes n'a qu'une arête  $e$  et qu'un sommet  $v$ , on note alors  $\Gamma \simeq \Gamma_v *_{\Gamma_e}$ ; une HNN extension n'est jamais triviale.

### 1.3 Topologies sur les espaces d'actions

#### Longueurs de translation

Soit  $(T, \Gamma)$  une action de  $\Gamma$  sur un arbre réel. Pour tout  $g \in \Gamma$ , on appelle *longueur de translation* de  $g$  le nombre

$$l_T(g) = \inf_{x \in T} d(x, g.x).$$

Si  $g$  est elliptique,  $l_T(g) = 0$ , et si  $g$  est hyperbolique, la borne inférieure est atteinte sur l'axe de  $g$ .

On a vu plus haut que si  $l_T$  est la fonction nulle, alors  $T$  est triviale. Dans le cas contraire, l'action de  $\Gamma$  sur le sous-arbre minimal de  $T$  a même fonction longueur.

**Définition.** Une action  $(T, \Gamma)$  est dite abélienne si  $l_T$  est la valeur absolue d'un morphisme de groupes de  $\Gamma$  dans  $\mathbb{R}$ . De manière équivalente,  $(T, \Gamma)$  est abélienne si  $l_T(ghg^{-1}h^{-1}) = 0$  pour tous  $g, h \in \Gamma$ .

Pour avoir une caractérisation géométrique, on a besoin de la notion de *rayon* d'un arbre réel. C'est une classe d'équivalence d'applications isométriques  $r : [0, +\infty[ \rightarrow T$  où  $r \sim r'$  si  $r([0, \infty[) \cap r'([0, \infty[)$  est non compact. Une action est alors abélienne si et seulement si  $T$  possède un rayon invariant sous l'action de  $\Gamma$ .

**Théorème ([AlBa],[CuMo]).** Si deux actions minimales et non abéliennes d'un même groupe  $\Gamma$  ont les mêmes fonctions longueurs, alors il existe une isométrie équivariante entre elles.

Ceci permet alors de voir l'ensemble des actions non abéliennes d'un groupe  $\Gamma$  comme un sous-ensemble de  $(\mathbb{R}_+)^{\Gamma}$ , et donc de mettre la topologie induite sur cet ensemble :  $(T_i, \Gamma)$  converge vers  $(T, \Gamma)$  si pour tout  $g \in \Gamma$ ,  $l_{T_i}(g)$  tend vers  $l_T(g)$ . On l'appelle *topologie des longueurs de translations*, ou *topologie des fonctions longueur*.

Les actions minimales non abéliennes ont une propriété très utile.

**Proposition 1.3.1.** ([CuMo], [Pau2, lemme 4.3]). *Soit  $(T, \Gamma)$  une action minimale non abélienne non triviale. Alors, tout segment  $I$  de  $T$  est contenu dans l'axe d'un élément hyperbolique de  $\Gamma$ .*

*Preuve.* On peut bien sûr supposer que  $T$  n'est pas une droite car dans ce cas, la proposition est claire. Comme l'action est minimale, on sait que tout point de  $T$  appartient à l'axe d'un élément hyperbolique de  $\Gamma$  ([CuMo]). Soit  $I = [a, b]$  et considérons des éléments  $\gamma_a$  et  $\gamma_b$  hyperboliques dont les axes passent par  $a$  et par  $b$  respectivement.

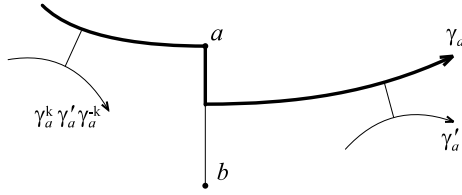


FIG. 1.3 – Démonstration de la proposition 1.3.1

Montrons d'abord qu'il existe un élément  $\gamma'_a$  hyperbolique dont l'axe est disjoint de celui de  $\gamma_a$ , en utilisant le fait que  $T$  n'est pas une droite et n'est pas abélienne. Comme  $T$  n'est pas une droite, on peut trouver un élément  $\delta$  de  $\Gamma$  hyperbolique dont l'axe est distinct de celui de  $\gamma_a$ . Si l'axe de  $\delta$  rencontre l'axe de  $\gamma_a$  selon un compact, l'axe de  $\delta^k \gamma_a \delta^{-k}$  est disjoint de l'axe de  $\gamma_a$  pour  $k$  suffisamment grand. On utilise alors le lemme suivant pour conclure qu'il existe un élément  $\gamma'_a$  dont l'axe est disjoint de l'axe de  $\gamma_a$ .

**Lemme 1.3.2** ([CuMo],[Pau2]). *Si  $T$  n'est pas une droite et si l'intersection de l'axe de tout élément hyperbolique avec l'axe de  $\gamma_a$  n'est jamais compacte, alors  $(T, \Gamma)$  est abélienne.*

Maintenant, quitte à conjuguer  $\gamma'_a$  par une grande puissance positive ou négative de  $\gamma_a$ , on peut supposer que  $a$  appartient au pont reliant  $b$  à l'axe de  $\gamma'_a$ . Un raisonnement similaire montre alors qu'il existe un élément hyperbolique  $\gamma'_b$  tel que  $b$  appartient au pont reliant  $a$  à l'axe de  $\gamma'_b$ . Ceci signifie que  $[a, b]$  est inclus dans le pont reliant l'axe de  $\gamma'_a$  à l'axe de  $\gamma'_b$ . Il suffit pour conclure de remarquer que si  $\gamma$  et  $\delta$  sont hyperboliques et d'axes disjoints, alors  $\gamma\delta$  est hyperbolique et le pont entre les axes de  $\gamma$  et  $\delta$  est contenu dans l'axe de  $\gamma\delta$ .  $\square$

## La topologie de Gromov équivariante

La topologie de Gromov équivariante est plus géométrique, mais moins facile à définir. Elle est basée sur la notion d'approximation entre deux espaces métriques.

**Définition.** Une  $\varepsilon$ -approximation entre deux espaces métriques  $K$  et  $K'$  est une relation binaire  $R \subset K \times K'$  avec les propriétés suivantes :

- pour tout point  $x$  de  $K$ , il existe un point  $x' \in K'$  tel que  $xRx'$
- pour tout point  $x'$  de  $K'$ , il existe un point  $x \in K$  tel que  $xRx'$ .
- si  $xRx'$  et si  $yRy'$ , alors  $d_K(x, y)$  est  $\varepsilon$ -proche de  $d_{K'}(x', y')$

Lorsque  $xRx'$ , on dit que  $x'$  est un *point approximant* de  $x$ . Une  $\varepsilon$ -approximation entre  $K$  et  $K'$  est une façon de dire que  $K$  et  $K'$  se ressemblent sans imposer de restriction sur la topologie. Par exemple supposons que  $K$  soit compact, et que  $\{x_i\}$  soit un sous-ensemble fini  $\varepsilon$ -dense de  $K$ . Alors il existe une  $2\varepsilon$ -approximation entre  $K$  et  $\{x_i\}$  : il suffit de prendre pour ensemble de points approximaants de  $x_i$  la boule de centre  $x_i$  et de rayon  $\varepsilon$ . Il est aussi intéressant de remarquer que les rôles de  $K$  et  $K'$  sont symétriques dans l'approximation.

Lorsque  $K$  et  $K'$  sont des sous-ensembles d'espaces métriques  $X$  et  $X'$  munis d'une action par isométries d'un même groupe  $\Gamma$ , on peut définir la notion d'approximation équivariante.

**Définition.** Soit  $F$  un sous-ensemble fini de  $\Gamma$ . Une  $\varepsilon$ -approximation  $F$ -équivariante entre  $K$  et  $K'$  est une  $\varepsilon$ -approximation  $R$  entre  $K$  et  $K'$  telle que pour tout  $g, h \in F$ , si  $xRx'$  et  $yRy'$  alors  $d_X(g.x, h.y)$  est  $\varepsilon$ -proche de  $d_{X'}(g.x', h.y')$

Ces  $\varepsilon$ -approximations se comportent bien avec la distance de Hausdorff : si on a une  $\varepsilon$ -approximation  $F$ -équivariante entre  $K$  et  $K'$ , et si  $K'_1 \subset X'$  est à distance de Hausdorff  $\delta$  de  $K'$ , alors on a une  $\varepsilon + 2\delta$ -approximation équivariante entre  $K$  et  $K'_1$ .

On peut maintenant définir la topologie de Gromov équivariante sur l'ensemble des actions de  $\Gamma$  sur des arbres réels. Etant donné un réel  $\varepsilon > 0$ ,  $K$  sous-arbre fini de  $T$ , et  $F$  une partie finie de  $\Gamma$ , on note  $V_T(\varepsilon, F, K)$  l'ensemble des actions  $(T', \Gamma)$  telles qu'il existe un sous-arbre fini  $K'$  de  $T'$  avec une  $\varepsilon$ -approximation  $F$ -équivariante entre  $K$  et  $K'$ . La topologie de Gromov équivariante est alors la topologie pour laquelle la famille des ensembles  $V_T(\varepsilon, F, K)$  forme une base de voisinages de  $(T, \Gamma)$ .

On rappelle qu'un sous-arbre fini de  $T$  est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de ses points. Etant donné le bon comportement des approximations vis à vis de la

distance de Hausdorff, on peut aussi définir la topologie de Gromov non pas avec des arbres finis mais avec des suites finies de points comme dans le chapitre 2.

**Théorème ([Pau2]).** *La topologie de Gromov équivariante coïncide avec la topologie des longueurs de translations sur l'ensemble des actions minimales non abéliennes de  $\Gamma$ . Elle est toujours plus fine que la topologie des longueurs de translations.*

En guise d'illustration, nous allons démontrer la partie facile de ce théorème, c'est à dire la seconde assertion. Supposons qu'on ait une suite d'actions  $(T_i, \Gamma)$  qui converge vers  $(T, \Gamma)$  pour la topologie de Gromov équivariante. On veut démontrer que pour tout  $g \in \Gamma$ ,  $l_{T_i}(g) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} l_T(g)$ .

Supposons d'abord que  $g$  soit elliptique dans  $T$ . Soit  $x \in T$  un point fixe de  $T$ , et considérons  $K = \{x\}$ ,  $F = \{1, g\}$  et  $\varepsilon > 0$ . Pour  $i$  assez grand, on a une  $\varepsilon$ -approximation  $F$ -équivariante entre  $K$  et un sous-arbre  $K_i$  de  $T_i$ . Soit  $x_i$  un point approximant de  $x$  dans  $K_i$ . Comme  $d(x, g.x) = 0$ ,  $d(x_i, g.x_i) \leq \varepsilon$  donc  $l_{T_i}(g) \leq \varepsilon$ . On a donc bien  $l_{T_i}(g) \rightarrow 0$ .

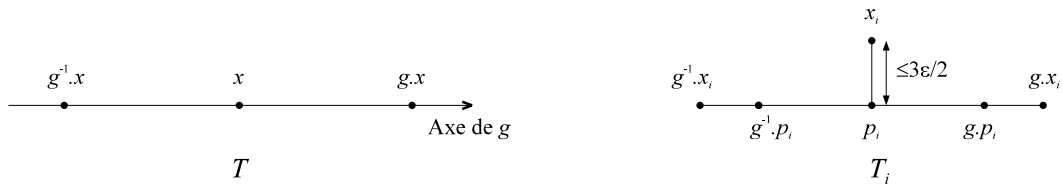


FIG. 1.4 – La topologie de Gromov est plus fine que la topologie des longueurs de translations

Supposons maintenant que  $g$  soit hyperbolique dans  $T$ . Soit  $x$  un point de l'axe de  $g$ , et considérons  $K = \{x\}$ ,  $F = \{1, g, g^{-1}\}$  et  $\varepsilon > 0$ . Pour  $i$  assez grand, on a une  $\varepsilon$ -approximation  $F$ -équivariante entre  $K$  et un sous-arbre  $K_i$  de  $T_i$ . Soit  $x_i$  un point approximant de  $x$  dans  $K_i$ . Comme  $x$  est dans l'axe de  $g$ , les points  $g^{-1}.x$ ,  $x$  et  $g.x$  sont alignés dans cet ordre, i. e.  $x \in [g^{-1}.x, g.x]$ .

**Définition.** *Si  $x, y, z$  sont trois points d'un espace métrique, on appelle produit de Gromov la quantité*

$$(x|y)_z = \frac{1}{2}(d(x, z) + d(z, y) - d(x, y)).$$

*Dans un arbre réel,  $(x|y)_z$  est égal à la distance de  $z$  au segment  $[x, y]$ .*

Le fait que les trois points  $g^{-1}.x$ ,  $x$  et  $g.x$  soient alignés se traduit donc par  $(g^{-1}.x|g.x)_x = 0$ . Dans  $T_i$ , on a donc  $(g^{-1}.x_i|g.x_i)_{x_i} \leq 3\varepsilon/2$ . Cela signifie que la projection  $p_i$  de  $x_i$  sur  $[g^{-1}.x_i, g.x_i]$  est  $(3\varepsilon/2)$ -proche de  $x_i$ . Comme  $d(x_i, g.x_i)$  est  $\varepsilon$ -proche de  $l_T(g)$ , si  $\varepsilon$  est assez petit devant  $l_T(g)$ , les points  $g^{-1}.p_i$ ,  $p_i$  et  $g.p_i$  seront alignés dans cet ordre (voir figure 1.4). Ceci implique que  $g$  est hyperbolique dans  $T_i$  et que sa longueur de translation est égale à  $d(p_i, g.p_i)$  qui est  $4\varepsilon$ -proche de  $l_T(g)$ .

## Compacité du projectif et actions petites

Souvent, on projectivise ces espaces d'actions sur des arbres réels : on retire l'action triviale et on identifie deux actions s'il existe une *homothétie* équivariante entre les deux arbres. L'intérêt fondamental est alors que l'espace projectif des actions non abéliennes est compact ([CuMo], où on utilise de manière essentielle le fait que  $\Gamma$  est de type fini).

**Définition.** *Un groupe est dit petit s'il ne contient pas de groupe isomorphe au groupe libre à deux générateurs  $F_2$ . Soit  $\Gamma$  un groupe de type fini qui n'est pas petit. Une action  $(T, \Gamma)$  est alors dite petite si les stabilisateurs des arcs non dégénérés de  $T$  sont petits.*

Un arc est dit *non dégénéré* s'il contient au moins deux points. Lorsque  $\Gamma$  n'est pas petit, les actions petites sont non abéliennes. De plus, un argument utilisant la topologie de Gromov montre assez facilement que l'ensemble des actions petites est fermé dans l'ensemble des actions de  $\Gamma$  ([CuMo]).

## Le cas de $F_n$ et l'outre-espace

Le groupe libre à  $n$  générateurs  $F_n$  a la particularité d'agir librement sur des arbres simpliciaux. M. Culler et K. Vogtmann ont alors considéré l'espace projectif des actions libres (minimales) de  $F_n$  sur des arbres réels simpliciaux. On le note  $CV_n$ . Il est invariant par l'action de  $\text{Out}(F_n)$ .

Cet espace est un analogue pour  $\text{Out}(F_n)$  de l'espace de Teichmüller pour le groupe des homéomorphismes d'une surface fermée modulo isotopie. On l'appelle l'*outre-espace* (*outer-space* en anglais, ce qui signifie espace intersidéral) en raison de ses liens avec  $\text{Out}(F_n)$ .

Cet espace se compactifie naturellement dans l'ensemble projectif des actions de  $F_n$  : son adhérence  $\overline{CV}_n$  est compacte. M. Cohen, M. Lustig ([CL]), et M. Bestvina

et M. Feighn [BF3] ont démontré que  $\overline{CV}_n$  est exactement constitué des action très petites de  $F_n$ .

**Définition.** Une action de  $F_n$  sur un arbre réel  $T$  est dite très petite si

- elle est petite
- les stabilisateurs des tripodes sont triviaux (un tripode est l'enveloppe convexe de trois points non alignés)
- pour tout  $k \neq 0$  et tout  $g \in F_n$ ,  $\text{Fix } g^k = \text{Fix } g$ .

## 1.4 Arbres, systèmes d'isométries et résolutions

### Des arbres réels aux systèmes d'isométries

Une des approches les plus fécondes pour étudier une action d'un groupe de type fini sur un arbre réel est due à E. Rips. Elle consiste à utiliser des *systèmes d'isométries*.

Voici l'idée fondamentale. Soit  $S$  un système fini de générateurs de  $\Gamma$ , et soit  $D$  un *gros* sous-arbre fini de  $T$ . Pour  $g \in S$ , on regarde alors l'isométrie partielle  $\varphi_g$  de  $D$  obtenue par restriction de  $g$  à  $D : \varphi_g = g|_{D \cap g^{-1}(D)}$ . On suppose que  $D$  est assez gros pour que les domaines des générateurs soient non vides. On dit que  $\varphi$  est une *isométrie partielle* de  $D$ . On note  $\text{dom } \varphi$  domaine de définition et  $\text{Im } \varphi$  l'image d'une isométrie partielle  $\varphi$ . On dit que  $X = \{\varphi_g | g \in S\}$  est le système d'isométries obtenu par *restriction* de l'action de  $S$  à  $D$ .

**Définition.** Un système d'isométries  $X$  sur un arbre fini  $D$  est un ensemble fini d'isométries partielles entre des sous-arbres de  $D$  qu'on appelle les générateurs du système d'isométrie.

Cette définition, donnée dans le cadre d'un arbre fini s'adapte au cas où  $D$  est un multi-intervalle c'est à dire une réunion finie d'intervalles compacts, voire un cercle (et même dans des cadres beaucoup plus généraux que nous n'étudierons pas ici). Un système d'isométries est avant tout un système dynamique, et comme tout bon système dynamique, il possède une notion d'orbite :

**Définition 1.4.1.** Un  $X$ -mot  $w = \varphi_1 \dots \varphi_p$  est un mot sur l'alphabet  $X \cup X^{-1}$ . On note  $|w| = p$  sa longueur. Il lui correspond naturellement l'isométrie partielle  $\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_p$  de  $D$  (de domaine éventuellement vide). Par abus de langage, on confondra un  $X$ -mot et l'isométrie partielle associée.

Deux point  $x$  et  $y$  de  $D$  sont alors dans la même orbite si et seulement s'il existe un  $X$ -mot  $w$  qui envoie  $x$  sur  $y$ .

On appelle *bases* d'un générateur son domaine de définition et son image. On dit qu'un générateur est un *singleton* si ses bases sont réduites à un point.

**Définition.** Le graphe d'incidence  $\mathcal{I}$  d'un système d'isométries  $X$  est le graphe construit en prenant un sommet par composante de  $D$  et une arête par générateur de  $X$ , ses extrémités étant évidentes.

## La suspension d'un système d'isométries

Cette *suspension* est un 2-complexe noté  $\Sigma$  muni d'un feuilletage transversalement mesuré (voir [LP] pour une définition d'un 2-complexe feuilleté transversalement mesuré). Pour construire  $\Sigma$ , on part du domaine  $D$  du système d'isométries et pour chaque générateur  $\varphi$  de  $X$  on considère une bande  $(\text{dom } \varphi) \times [0, 1]$  qu'on colle sur  $D$  en identifiant  $(x, 0)$  et  $(x, 1)$  avec  $x$  et  $\varphi(x)$  respectivement. Chaque bande est feuilletée par  $\{*\} \times [0, 1]$  et on met sur  $\Sigma$  la mesure transverse qui donne à chaque arc de  $D$  une mesure égale à sa longueur.

Ainsi, l'intersection de la feuille de  $\Sigma$  passant par  $x$  est égale à la  $X$ -orbite de  $x$ . Cette feuille s'identifie au graphe de Cayley de l'orbite de  $x$ .

**Définition.** Le graphe de Cayley d'une orbite de  $X$  est le graphe dont les sommets sont les points de cette orbite et où on met une arête orientée étiquetée  $\varphi$  entre deux sommets  $u$  et  $v$  si  $\varphi$  envoie  $u$  sur  $v$ .

Etant donné un point  $x$  de  $D$  et un  $X$ -mot  $w$  dont le domaine contient  $x$ , on note  $[x; w]$  le chemin de inclus la feuille de  $\Sigma$  contenant  $x$ , qui part de  $x$ , qui suit successivement les bandes correspondant aux lettres de  $w$  et qui s'arrête au point  $w(x)$ . Ce chemin correspond dans le graphe de Cayley de l'orbite de  $x$  au chemin étiqueté  $w$  joignant  $x$  et  $w(x)$ . Il est clair que  $\Sigma$  a le même type d'homotopie que le graphe d'incidence  $\mathcal{I}$  de  $X$ .

## Résolution d'une action

La notion de *résolution* d'une action est une des notions clé qui a permis à E. Rips de démontrer son théorème de scindement des groupes agissant stablement sur des arbres réels (voir [BF2],[GLP1] et [Pau4]). Dans toute la suite on suppose que  $\Gamma$  est de présentation finie.



Soit  $(T, \Gamma)$  une action d'un groupe de présentation finie, et soit  $\langle S || \mathcal{R} \rangle$  une présentation finie de  $\Gamma$ . Partant d'un *gros* sous-arbre fini  $D$  de  $T$ , on considère le système d'isométries  $X$  obtenu par restriction de l'action de  $S$  à  $D$ , et on note  $\Sigma$  sa suspension. On suppose que  $D$  est assez gros pour que chaque relation de  $\mathcal{R}$  s'exprime dans  $X$ , c'est à dire que si  $r = g_1 \dots g_p$  appartient à  $\mathcal{R}$ , le  $X$ -mot correspondant (qu'on note encore  $r$  par abus) a un domaine non vide dans  $D$ . Puisque  $r$  est trivial dans  $\Gamma$ , le  $X$ -mot  $r$  est forcément une restriction de l'identité. Pour chaque relation  $r \in \mathcal{R}$ , on peut donc choisir un point  $x$  dans le domaine de  $r$  et considérer la courbe fermée  $[x; r]$  contenue dans une feuille de  $\Sigma$ . On note  $\mathcal{C}$  l'ensemble fini des courbes fermées contenues dans des feuilles ainsi choisies.

On a besoin dans la suite que  $\Sigma$  soit connexe (c'est bien sûr automatique dans notre cas puisque  $D$  est connexe). On dit dans ce cas que le système d'isométries  $X$  est connexe. Etant donné un point base  $*$  dans  $D$ , le groupe fondamental de  $\Sigma$  s'identifie naturellement avec le groupe libre de base  $S$  en envoyant l'élément  $g \in S$  sur un lacet obtenu en suivant l'arc de  $D$  reliant  $*$  à un point de  $x$  de  $\text{Im } \varphi_g$ , puis en parcourant le chemin  $[x; \varphi^{-1}]$  puis en retournant au point base dans  $D$ .<sup>1</sup> On a donc naturellement un morphisme surjectif  $\rho : \pi_1(\Sigma, *) \rightarrow \Gamma$  dont le noyau est normalement engendré par les classes d'homotopie libre des courbes de  $\mathcal{C}$ . Soit  $(\bar{\Sigma}, *)$  le revêtement galoisien de  $(\Sigma, *)$  associé à  $\rho$  de sorte que  $\bar{\Sigma}$  est muni d'une action de  $\Gamma$ . Soit  $\bar{D}_0$  le relevé de  $D$  contenant  $*$ . Il existe alors une unique application  $\Gamma$ -équivariante  $f_{\bar{\Sigma}} : \bar{\Sigma} \rightarrow T$  qui soit égale à la projection du revêtement en restriction à  $\bar{D}_0$  et qui soit constante sur les feuilles de  $\bar{\Sigma}_\rho$ .

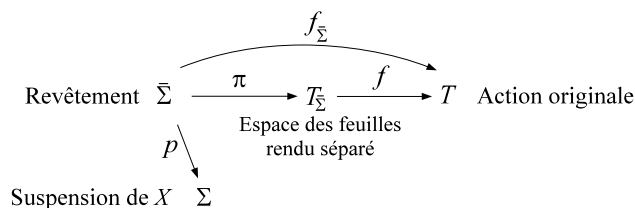
**Définition.** Une résolution de  $(T, \Gamma)$  est la donnée de tous ces ingrédients :

- un graphe métrique fini  $D$  dont les composantes sont simplement connexes
- un système d'isométries connexe  $X$  de domaine  $D$  et sa suspension  $\Sigma$
- un point base  $* \in \Sigma$
- un morphisme surjectif  $\rho : \pi_1(\Sigma, *) \rightarrow \Gamma$  et le revêtement galoisien correspondant  $p : \bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma$
- un ensemble de courbes  $\mathcal{C}$  contenues dans des feuilles qui engendrent normalement  $\ker \rho$
- une application  $\Gamma$ -équivariante  $f_{\bar{\Sigma}} : \bar{\Sigma} \rightarrow T$ , constante sur les feuilles de  $\bar{\Sigma}$ , et qui plonge isométriquement les composantes connexes de  $p^{-1}(D) \subset \bar{\Sigma}$  dans  $T$ .

---

<sup>1</sup>Attention, ce n'est pas l'identification la plus naturelle qui consisterait à suivre la bande correspondant à  $\varphi_g$  plutôt que  $\varphi_g^{-1}$ .

### L'arbre réel associé à une résolution



Une pseudo-métrique est une fonction qui vérifie tous les axiomes d'une distance sauf l'axiome de séparation. Considérons la pseudo-métrique sur  $\bar{\Sigma}$  obtenue prenant la borne inférieure des mesures transverses des arcs joignant deux points donnés. En rendant cette pseudo-métrique séparée, c'est à dire en identifiant les points de  $\bar{\Sigma}$  à pseudo-distance nulle, on obtient un arbre réel  $T_{\bar{\Sigma}}$  (voir [LP, Lev3, GL]). L'action de  $\Gamma$  sur  $\bar{\Sigma}$  induit une action de  $\Gamma$  sur  $T_{\bar{\Sigma}}$ . Puisque deux points de  $\bar{\Sigma}$  qui sont dans la même feuille sont identifiés, on dit que  $T_{\bar{\Sigma}}$  est obtenu en rendant l'espace des feuilles séparés.

*Remarque.* Par abus, on dit que *l'espace des feuilles est séparé* lorsque deux points de  $\bar{\Sigma}$  sont à pseudo-distance nulle si et seulement si ils sont dans la même feuille. Cette condition simplifie beaucoup les choses dans la pratique. On sait qu'elle est vérifiée dans le cas particulier où  $\mathcal{C}$  est vide ([GL]) auquel cas  $\Gamma$  est un groupe libre, dans le cas où  $(T_{\bar{\Sigma}}, \Gamma)$  a des stabilisateurs d'arcs triviaux ([LP]). D. Gaboriau a étendu la preuve de ce fait dans le cas où  $(T_{\bar{\Sigma}}, \Gamma)$  est stable (voir [BF2] ou le chapitre 2 pour la définition d'une action stable).

L'application  $f_{\bar{\Sigma}} : \bar{\Sigma} \rightarrow T$  passe au quotient en une application  $\Gamma$ -équivariante  $f : \bar{\Sigma} \rightarrow T$ . Comme  $f_{\bar{\Sigma}}$  plonge isométriquement dans  $T$  chaque composante de  $p^{-1}(D) \subset \bar{\Sigma}$ , on obtient que  $f$  est un morphisme d'arbres réels.

**Définition.** Un morphisme d'arbres réels  $f : T \rightarrow T'$  est une application continue telle que tout segment de  $T$  peut être subdivisé en un nombre fini de sous-intervalles qui sont plongés isométriquement par  $f$ .

*Remarque.* En particulier, un morphisme d'arbres réels diminue les longueurs.

### Convergence forte et actions géométriques

**Définition.** Supposons qu'on ait des actions  $(T_i, \Gamma)$  et  $(T, \Gamma)$  finiment supportées d'un groupe  $\Gamma$  de présentation finie. On suppose qu'il existe des morphismes d'arbre

réels surjectifs équivariants  $f_i : T_i \rightarrow T$  et  $f_{ij} : T_i \rightarrow T_j$  pour  $i \leq j$  tels que  $f_{jk} \circ f_{ij} = f_{ik}$  et  $f_j \circ f_{ij} = f_j$ .

Si pour tout sous-arbre fini  $K$  de  $T_i$ , il existe  $j$  assez grand tel que pour tout  $k > j$ ,  $f_{jk}$  et  $f_j$  soient des isométries en restriction à  $f_{ij}(K)$ , on dit que  $(T_i, \Gamma)$  converge fortement vers  $(T, \Gamma)$ . On dit que cette convergence est triviale si pour tous  $i, j$  assez grands,  $f_i$  et  $f_{ij}$  sont des isométries.

Pour des définitions quand  $\Gamma$  n'est pas de présentation finie, voir [LP]. En particulier, dans une limite forte, la longueur de translation chaque élément du groupe est décroissante et stationnaire.

*Remarque.* Si  $T_i$  converge fortement vers  $T$ , ceci permet de relever isométriquement tout sous-arbre fini  $K$  de  $T$  à  $T_i$  pour  $i$  assez grand. Il suffit en effet prendre l'enveloppe convexe  $K_1$  d'un choix d'antécédants dans  $T_1$  des points extrémaux de  $K$ , puis d'attendre un indice  $i$  assez grand de sorte que  $f_i$  soit une isométrie en restriction à  $f_{1i}(K_1)$ .

Soit  $(T, \Gamma)$  une action d'un groupe de présentation finie. Considérons maintenant une suite croissante exhaustive de sous-arbres finis  $D_i \subset T$ . On vient de construire pour une action  $T_i = T_{\Sigma_i}$  et un morphisme d'arbres réels  $f_i : T_i \rightarrow T$  qui plonge isométriquement  $D_i$ . Il est facile de vérifier grâce au fait que  $D_i$  est croissante qu'on a pour  $i \leq j$ , des morphismes d'arbres réels naturels  $f_{ij} : T_i \rightarrow T_j$  qui plongent isométriquement  $D_i$  et tels que  $f_{jk} \circ f_{ij} = f_{ik}$  et  $f_j \circ f_{ij} = f_j$ . Le fait que tout arbre fini  $K$  est contenu dans  $D_i$  pour  $i$  assez grand dit alors que  $T$  est la limite forte des actions  $T_i$ .

**Définition.** Une action d'un groupe de présentation finie  $\Gamma$  est dite géométrique si la limite forte ci-dessus est triviale.

En particulier, les actions  $T_i$  construites au dessus sont géométriques.

**Théorème ([LP]).** Une action  $(T, \Gamma)$  d'un groupe de présentation finie est géométrique si et seulement si chaque fois que  $(T, \Gamma)$  est limite forte d'une suite d'actions finiment supportées, cette limite est triviale.

## Mouvements de Rips d'une résolution

Les mouvements de Rips sont des opérations qu'on effectue sur des résolutions d'un arbre réel. Elles transforment une résolution d'une action  $(T, \Gamma)$  en une autre

résolution de cette action, et ne changent pas l'action  $T_{\mathcal{C}}$  associée. C'est un des moyens essentiels d'analyser une action d'un groupe sur un arbre réel.

Nous utiliserons plusieurs types de mouvements de Rips qu'on définira au moment où on en aura besoin. Cependant, à titre d'exemple et pour motiver l'étude des systèmes d'isométries sur des multi-intervalles de la section suivante, on montre comment transformer une résolution dont le domaine est un arbre fini pour faire en sorte que son domaine  $D$  devienne un multi-intervalle.

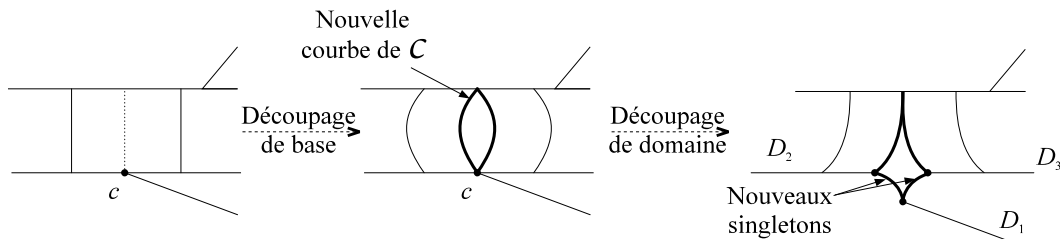


FIG. 1.5 – Découpage de domaine

Le premier mouvement de Rips est le *découpage de base*. Pour effectuer cette opération, on prend un générateur  $\varphi$  du système d'isométries, et on choisit un point  $c$  dans l'intérieur de l'une de ses bases. Si nécessaire, on change  $\varphi$  en  $\varphi^{-1}$  de sorte que  $c$  appartienne à  $\text{dom } \varphi$ . On remplace alors  $\varphi$  par ses restrictions  $\varphi_1, \dots, \varphi_p$  aux adhérences des composantes de  $(\text{dom } \varphi) - \{c\}$  et on rajoute à  $\mathcal{C}$  les courbes  $[c; \varphi_p^{-1}\varphi_1]$ . On ne change pas de point base et on prend pour nouveau morphisme  $\rho$  le morphisme induit par l'identification naturelle entre l'ancien 2-complexe et le nouveau 2-complexe où on écrase les courbes  $[c; \varphi_p^{-1}, \varphi_1]$ . L'ensemble de courbes  $\mathcal{C}$  engendre toujours normalement le noyau de  $\rho$ , et il est facile de vérifier que cette transformation est un mouvement de Rips.

On peut maintenant définir le *découpage de domaine*. Choisissons d'abord un point  $c$  dans l'intérieur du domaine  $D$  de  $X$ . Découpons ensuite toutes les bases des générateurs contenant  $c$  dans leur intérieur par l'opération de Rips décrite plus haut. Découpons le domaine  $D$  au point  $c$  et notons  $(D'_i)_{i=1}^p$  les composantes du nouveau domaine  $D'$  contenant une copie de  $c$ , et notons  $c_i$  la copie de  $c$  appartenant à  $D'_i$ . Ajoutons maintenant pour tout  $i \neq 1$  un nouveau singleton  $s_i$  qui envoie  $c_1$  sur  $c_i$  de sorte qu'on retrouve  $D$  en écrasant ces singletons. Chaque générateur dont aucune des bases n'est égal à  $\{c\}$  a un unique correspondant dans  $D'$ . On obtient donc un nouveau système d'isométries sur  $D'$  en déplaçant chaque base égale à  $\{c\}$  vers l'un des  $\{c_i\}$ . On remplace alors les courbes de  $\mathcal{C}$  par leur correspondant naturel dans le

nouveau 2-complexe  $\Sigma'$ . On ne change pas le point base  $*$  s'il est distinct de  $c$ , et sinon, on le change pour l'un des  $c_i$ . En écrasant les nouveaux singletons de  $\Sigma'$ , on obtient une identification entre les groupes fondamentaux de  $\Sigma'$  et  $\Sigma$  ce qui permet de définir le nouveau morphisme  $\rho$ . Il est alors facile de vérifier que le découpage de domaine est un mouvement de Rips.

Etant donné une résolution dont le domaine est un arbre fini, il suffit maintenant d'effectuer des découpages de domaines aux points de branchements de  $D$  pour obtenir une résolution dont le domaine est un multi-intervalle.

## 1.5 Les systèmes d'isométries pour eux-mêmes

On s'intéresse ici aux systèmes d'isométries sur des multi-intervalles.

### Théorème d'Imanishi et décomposition dynamique

Une excellente référence pour les systèmes d'isométries est [GLP1]. Soit  $X$  un système d'isométries sur un multi-intervalle  $D$ . On associe à  $X$  le *système d'isométries ouvert*  $\overset{\circ}{X}$  composé des restrictions  $\overset{\circ}{\varphi}$  des générateurs non singletons de  $X$  à l'intérieur de leur domaines. On pourra alors parler de  $\overset{\circ}{X}$ -mot et de  $\overset{\circ}{X}$ -orbite. On dit qu'une  $\overset{\circ}{X}$ -orbite est non orientable s'il existe un  $\overset{\circ}{X}$ -mot qui fixe un point de cette orbite en renversant l'orientation. Une orbite (pour  $X$  ou  $\overset{\circ}{X}$ ) est dite singulière si elle contient le bord d'un intervalle de  $D$  ou d'une base d'un générateur de  $X$ .

Soit  $E \subset D$  la réunion des  $\overset{\circ}{X}$ -orbites singulières finies. C'est un ensemble fini car il y a un nombre fini de bords de bases. Comme il contient les extrémités de  $D$ ,  $D \setminus E$  est une réunion finie d'intervalles ouverts.

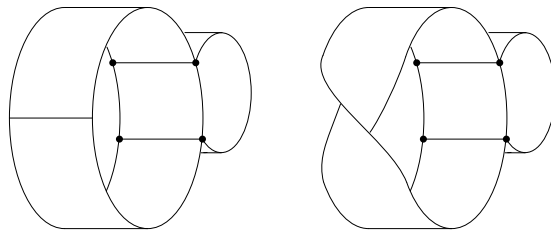


FIG. 1.6 – Familles d'orbites finies

**Théorème (Imanishi,[GLP1]).** *On a une partition de  $D \setminus E$  par des ensembles*

$U_1, \dots, U_p$  qui sont des réunions de composantes de  $D \setminus E$ . Ces ensembles sont  $\overset{\circ}{X}$ -saturés, et sont de l'un des deux types suivants :

- $U_i$  est une famille d'orbites finies. Les  $\overset{\circ}{X}$  orbites des points de  $U_i$  sont finies, et les intervalles composant  $U_i$  ont tous la même largeur, qu'on appelle épaisseur de la famille d'orbites finies. Cette famille d'orbites finies est soit orientable soit non orientable. Dans le premier cas, l'orbite d'un point de  $U_i$  rencontre chaque composante de  $U_i$  une fois et une seule ; le saturé de  $U_i$  dans la suspension  $\Sigma$  de  $X$  est un feuilletage produit. Dans le second cas, l'orbite du milieu des composantes de  $U_i$  est non orientable et coupe chaque composante de  $U_i$  une fois et une seule ; les autres orbites coupent chaque composante de  $U_i$  en deux points symétrique par rapport au milieu de cette composante ; le saturé de  $U_i$  dans  $\Sigma$  n'est pas transversalement orientable, et son revêtement d'orientation transverse est un feuilletage produit.
- $U_i$  est une composante minimale : toutes les  $\overset{\circ}{X}$ -orbites de  $U_i$  sont denses dans  $U_i$ .

Ce théorème affirme en particulier qu'aucune orbite n'a une adhérence homéomorphe à un Cantor. Autrement dit,  $\Sigma$  n'a pas d'ensemble minimal exceptionnel.

*Remarque.* Si on inclus dans  $E$  l'ensemble fini des points dont l'orbite est finie et non orientable, les familles d'orbites finies deviennent toutes orientables.

## Les composantes minimales homogènes

On s'intéresse maintenant à un système d'isométries  $X$  minimal, c'est à dire dont toutes les  $\overset{\circ}{X}$ -orbites sont denses dans  $D$ . On suppose en outre qu'il est *pur*, c'est à dire sans singleton, et tel que les seules  $\overset{\circ}{X}$ -orbites singulières finies sont les orbites de  $\partial D$ .

Choisissons un plongement de  $D$  dans  $\mathbb{R}$ . Considérons le groupe libre  $F_X$  librement engendré par les générateurs de  $X$ . On a un morphisme de  $p : F_X \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{R})$  qui à un générateur  $\varphi$  son prolongement à  $\mathbb{R}$ . Ce morphisme est bien défini dès que  $X$  n'a pas de singleton.

**Définition.** Soit  $X$  est un système d'isométries connexe sans singleton, et soit  $I_0$  une composante de son domaine  $D$ . Le morphisme des périodes  $P : \pi_1(\mathcal{I}, I_0)$  est la restriction de  $q$  à  $\pi_1(\mathcal{I}, I_0)$ . On appelle groupe des périodes de  $X$  (sur l'intervalle  $I_0$ ) et on note  $\text{Per}X$  l'image de  $P$  dans  $\text{Isom}(\mathbb{R})$ .

*Remarque.* Lorsqu'on change le plongement de  $D$  dans  $\mathbb{R}$  ou le point base  $I_0$  de  $\mathcal{I}$ , le groupe des périodes ne change que par une conjugaison.

Bien sûr, les  $\overset{\circ}{X}$ -orbites d'une composante  $I_0$  de  $D$  sont toujours incluses dans les  $\text{Per}(X)$ -orbites.

**Définition.** *Un système d'isométries pur et minimal est dit homogène si pour toute composante  $I_0$  de  $D$ , deux points quelconques de  $\overset{\circ}{I}_0$  sont dans la même  $\overset{\circ}{X}$ -orbite dès qu'ils sont dans la même  $\text{Per}(X)$ -orbite.*

Cette définition fait qu'on appelle parfois un tel système d'isométries *équivalent à un groupe*. On trouve aussi les dénominations de *composante axiale, torale, complète, voire faiblement complète*.

### L'élargissement uniforme $\Phi_t$

Soit  $X$  un système d'isométries sans singleton de domaine  $D$  et soit  $t \in \mathbb{R}$ . On peut supposer pour commencer que  $t \geq 0$ , mais la construction de  $\Phi_t(X)$  a un sens — elle est même très utile — pour  $t < 0$  si  $t$  n'est pas trop grand en valeur absolue. Choisissons un plongement de  $D$  dans  $\mathbb{R}$  de sorte que les intervalles séparant les composantes de  $D$  aient une taille strictement supérieure à  $2t$  (c'est une condition technique pour éviter toute collision).

**Définition.** *Si  $I = [a, b]$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , pour  $t > -\frac{b-a}{2}$ , on note  $\Phi_t(I) = [a-t, b+t]$  l'intervalle obtenu en élargissant  $I$  d'une largeur  $t$  de chaque côté. Si  $\varphi$  est une isométrie partielle de  $\mathbb{R}$  qui n'est pas un singleton, on note  $\Phi_t(\varphi)$  l'isométrie partielle de domaine  $\Phi_t(\text{dom } \varphi)$  et qui coïncide avec  $\varphi$  sur  $\text{dom } \varphi \cap \text{dom } \Phi_t(\varphi)$ .*

*Le système d'isométries  $\Phi_t(X)$  est alors le système d'isométries de domaine  $\Phi_t(D)$ , et dont l'ensemble des générateurs est  $\{\Phi_t(\varphi) | \varphi \in X\}$ . On dit que  $\Phi_t(X)$  est obtenu par élargissement uniforme de  $X$ .*

L'élargissement uniforme agrandit les orbites lorsque  $t$  est positif, et les diminue lorsque  $t$  est négatif. Il est de ce fait intéressant de se demander ce qu'il se passe lorsqu'on applique  $\Phi_{-t}$  à un système d'isométries pur minimal pour  $t > 0$  petit.

**Théorème (Levitt, voir [GLP1]).** *Soit  $X$  un système d'isométries pur minimal.  $X$  est homogène si et seulement si il existe  $t > 0$  petit tel que  $\Phi_{-t}(X)$  possède une orbite infinie.*

## Les composantes minimales de type surface et exotiques

Un autre type naturel de système d'isométries est constitué par les *échanges d'intervalles*. Les échanges d'intervalles qu'on considère ici sont plus généraux que les échanges d'intervalles usuels. En particulier, le feuilletage associé sur la suspension n'est pas forcément orientable, ni transversalement orientable.

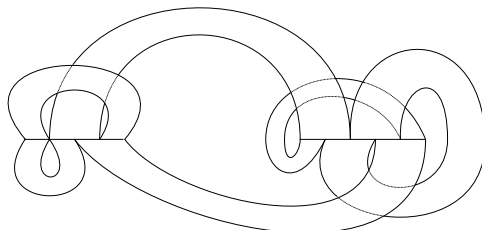


FIG. 1.7 – Un échange d'intervalles

**Définition.** *Un échange d'intervalles sur un multi-intervalle  $D$  est un système d'isométries sans singleton tel que tous les points de  $D$  sauf un nombre fini appartiennent exactement à deux bases.*

Si on se donne une surface munie d'un feuilletage mesuré minimal, et un multi-intervalle  $D$  transverse au feuilletage, la généralisation de l'application de premier retour dans  $D$  induit un système d'isométries sur  $D$  qui est un échange d'intervalles minimal. On peut démontrer qu'un échange d'intervalles n'est pas homogène (voir [GLP1]).

Si on suppose en outre que l'échange d'intervalles est pur, alors la suspension de  $X$  est une surface à bords munie d'un feuilletage mesuré. C'est pourquoi on appelle ce type d'exemples des *composantes de type surface*.

Il existe un troisième type de composantes minimales, qui ne sont ni homogènes ni de type surface. On les appelle *composantes exotiques*. Elles ont été découvertes par G. Levitt dans [Lev2], et certains auteurs les appellent *composantes de Levitt*. D'autres emploient le terme de *composantes fines* (thin components). Leur dynamique est la plus intéressante. Elle a été étudiée en particulier par D. Gaboriau dans [Gab1]. Une définition précise des composantes exotiques peut être trouvée entre autres dans [GLP1], [BF2] (on peut aussi se reporter à la section 2.7).



## Chapitre 2

# Approximation des actions stables sur des arbres réels

M. Bestvina and M. Feighn introduced the notion of *stable* action of a group on an  $\mathbb{R}$ -tree ([BF2]) by slightly weakening some conditions by E. Rips or by H. Gillet and P. Shalen. Roughly speaking, stable actions are such that the stabilizer of an arc must stabilize when this arc gets smaller and smaller (see section 2.1 for a formal definition). This condition is true in usual cases: any action with trivial arc stabilizer, the actions coming from iteration of automorphisms of free groups or from degeneracy of hyperbolic structures, and every small action of a hyperbolic group is stable (see section 2.1).

The main theorem about stable actions is Rips's theorem (see [BF2]): if a finitely presented group  $\Gamma$  has a non trivial stable action on an  $\mathbb{R}$ -tree, then  $\Gamma$  splits over a group  $C$  which is an extension of  $\mathbb{Z}^k$  by a subgroup of  $\Gamma$  fixing an arc in  $T$ .

On the other hand, M. Cohen and M. Lustig have introduced very small actions on  $\mathbb{R}$ -trees and have shown that the set of free actions of the free group  $F_n$  on simplicial  $\mathbb{R}$ -trees is dense in the space of very small actions of  $F_n$  on simplicial  $\mathbb{R}$ -trees ([CL]). Then, M. Bestvina and M. Feighn showed that every very small action of  $F_n$  on an  $\mathbb{R}$ -tree can be approximated by a very small action on a simplicial  $\mathbb{R}$ -tree ([BF3]). This showed that the closure of M. Culler and K. Vogtmann's outer space is the projectivised set of very small actions of  $F_n$  on  $\mathbb{R}$ -trees.

Our theorem is both a refinement of E. Rips' splitting theorem, and a generalisation of M. Bestvina and M. Feighn's approximation theorem:

**Theorem 2.0.1.** *Let  $\Gamma$  be a finitely presented group. Every minimal stable action*

of  $\Gamma$  on an  $\mathbb{R}$ -tree  $T$  can be approximated in the equivariant Gromov topology by an action of  $\Gamma$  on a simplicial tree, such that edge stabilizers are an extension of  $\mathbb{Z}^k$  by a subgroup of  $\Gamma$  fixing an arc in  $T$ .

Moreover, if  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k \subset \Gamma$  are finitely generated subgroups of  $\Gamma$  which fix a point in  $T$ , they may be asked to fix a point in the approximation.

Note that edge stabilizers in the approximation can't be shown to be extensions of  $\mathbb{Z}$  by a subgroup of  $\Gamma$  fixing an arc in  $T$  since there are free actions of  $\mathbb{Z}^3$  on  $\mathbb{R}$  and that  $\mathbb{Z}^3$  doesn't split over  $\mathbb{Z}$ .

**Corollary 2.0.1.** *Let  $\Gamma$  be a hyperbolic group. Every small action of  $\Gamma$  on an  $\mathbb{R}$ -tree can be approximated by a small action of  $\Gamma$  on a simplicial tree.*

This corollary is a straightforward consequence of the theorem (see section 2.1). One may ask if a similar fact is true for very small actions of hyperbolic groups. M. Bestvina and M. Feighn have shown that it is true in the case of the free group in [BF3] essentially using the fact that the group is free. Using techniques similar to [BF3], we could show that very small actions of hyperbolic groups can be approximated by very small simplicial actions if there was a positive answer to the following question in surface theory:

Consider a nonorientable surface. Then, there is a nowhere dense closed subset of the projective set of measured foliations consisting of those foliations containing no 1-sided compact regular leaf (see [DaNo]). Does the mapping class group of the surface act with dense orbits on this closed invariant subset?

Bounded backtracking property for an action  $(T, F)$  of a finitely generated free group ([GJLL]) is a notion that generalises bounded cancellation (see [Coo]). Namely,  $(T, F)$  has bounded backtracking if given  $Q \in T$ , there exists  $C > 0$  such that for any reduced words  $v, w$  such that the product  $vw$  has no cancellation, then  $d(v.Q, [Q, vw.Q]) \leq C$ .

Bounded backtracking property is used in [BFH] to link laminations on graphs and actions on  $\mathbb{R}$ -trees. In [GJLL], it allows to define an injective equivariant map from the boundary at infinity of an action  $(T, F)$  to the boundary at infinity of  $F$ . In [BFH] is proven the fact that every very small action of  $F$  has bounded backtracking (also see [DiVe, GJLL]). This generalizes to small actions using corollary 1:

**Corollary 2.0.2.** *Every small action of a finitely generated free group  $F$  has bounded backtracking.*

Here is a sketch of the proof of Theorem 2.0.1, given in sections 2.2 to 2.8: starting with a minimal stable action of a finitely presented group  $\Gamma$  on an  $\mathbb{R}$ -tree  $T$ , we approximate it without increasing arc stabilizers by a geometric action built from the “restriction” of the original action on a big finite subtree like in [GLP1] or [BF2]. This leads to a system of isometries, which has a canonical dynamical decomposition into minimal and simplicial components (see [GLP1, BF2]). This provides a graph of actions on  $\mathbb{R}$ -trees such that its non trivial vertex actions correspond to its minimal components. Using some results of [BF2] coming from the stability hypothesis, an idea of D. Gaboriau shows that there is a quotient of this geometric action with same underlying graph of groups such that the nontrivial vertex actions are given by a morphism from the vertex group  $\Gamma_v$  onto a group  $\Gamma'_v$  acting with trivial arc stabilizers on an  $\mathbb{R}$ -tree  $T'_v$ , the action  $(T'_v, \Gamma'_v)$  being a geometric action corresponding to a minimal system of isometries. So, there remains to approximate the actions  $(T'_v, \Gamma'_v)$ .

In the homogeneous case, the tree  $T'_v$  is a line (see [BF2, Pau4]) and  $(T'_v, \Gamma'_v)$  can be easily approximated. In the exotic and surface case, a theorem by D. Gaboriau allows to make generators independent. The surface case is then easy to approximate thanks to surface theory. In the exotic case, we perform the pruning process (or process I in [BF2]), and show that we can narrow some band so as to decrease the number of ends of singular leaves and so that the obtained action stays close to the original one. Therefore, after finitely many steps, we'll get a close simplicial action, approximating the original one.

I warmly thank Damien Gaboriau for many improvements and suggestions: the original statement applied only for small actions of hyperbolic groups and he is at the origin of the generalisation of the proof to the stable case. I also thank my advisor Gilbert Levitt for his rigour and his patience in finding out many errors, and Frédéric Paulin for many enriching conversations and helpful comments.

## 2.1 Definitions and preliminaries

The actions we consider are all isometric actions of finitely generated groups on  $\mathbb{R}$ -trees. An action on an  $\mathbb{R}$ -tree is termed *minimal* if it has no invariant subtree. Note that if an action on an  $\mathbb{R}$ -tree has no global fixed point, then there is a unique invariant minimal subtree which is the union of all translation axes (see [CuMo]). All the actions we consider are assumed to be minimal. If an action on an  $\mathbb{R}$ -tree

has a dense orbit, then it is termed *transitive*. Since the actions we consider are isometric actions, every orbit of a transitive action is dense. We say that the orbits of an action  $(T, \Gamma)$  are dense in the segments if for all  $x \in T$  and for all segment  $I$  not reduced to one point,  $\Gamma.x \cap I$  is dense in  $I$ . Of course, this property implies that  $(T, \Gamma)$  is transitive.

We will identify two actions on  $\mathbb{R}$ -trees if there exists an equivariant isometry between them. When no confusion is possible, we will simply talk about an *action* or a *tree* to mean a (minimal) action on an  $\mathbb{R}$ -tree. A simplicial  $\mathbb{R}$ -tree (or simply a simplicial tree) is a connected and simply connected simplicial 1-complex together with a path metric that makes it an  $\mathbb{R}$ -tree. We'll also say a *simplicial* action to mean a simplicial action on a simplicial  $\mathbb{R}$ -tree. Note that the stabilizer of a set should be understood in all this paper as its pointwise stabilizer unless explicitly mentioned.

Now, let's recall the definition of stability ([BF2]). Let  $(T, \Gamma)$  be an action. A subtree  $K$  of  $T$  is termed *non degenerate* if it contains more than one point. A non degenerate subtree  $K$  of  $T$  is termed *stable* if for any nondegenerate subtree  $K' \subset K$ ,  $\text{Stab } K = \text{Stab } K'$ .

**Definition 2.1.1.** *An action  $(T, \Gamma)$  is termed stable if any non degenerate segment contains a nondegenerate stable subsegment.*

For instance, any action with trivial arc stabilizers, any simplicial action is stable.

**Definition 2.1.2.** *An action of a group  $\Gamma$  on an  $\mathbb{R}$ -tree  $T$  is said to be small if for every non degenerate arc  $I \subset T$ , the pointwise stabilizer  $\text{Stab } I$  of  $I$  doesn't contain the nonabelian free group  $F_2$  on 2 generators.*

Note that a small action of a hyperbolic group  $\Gamma$  is stable. As a matter of fact, when a subgroup of a hyperbolic group doesn't contain  $F_2$ , it is finite or virtually cyclic. Moreover, there is a bound to the cardinal of finite subgroups of  $\Gamma$ ; and a virtually cyclic subgroup of  $\Gamma$  is contained in at most finitely many virtually cyclic subgroups of  $\Gamma$ . Now, given a non degenerate arc  $I$  in an  $\mathbb{R}$ -tree  $T$  endowed with a small action of  $\Gamma$ , we can assume either that the stabilizer of every nondegenerate subinterval of  $I$  is finite or that  $\text{Stab } I$  is virtually cyclic. In both cases, take a non degenerate  $J \subset I$  such that  $\text{Stab } J$  is maximal for inclusion in the finite set of stabilizers of non degenerate subintervals of  $I$ .

The sets of actions of  $\Gamma$  on  $\mathbb{R}$ -trees modulo equivariant isometry are endowed with the equivariant Gromov topology (see [Pau2]). This topology roughly says that two

actions are close if they look the same in restriction to a finite set while only considering the action of a finite subset of  $\Gamma$ . More precisely, for two actions  $(T, \Gamma)$  and  $(T', \Gamma)$ , given any  $\varepsilon > 0$ , any finite subset  $F$  of  $\Gamma$ , and two finite subsets  $\{x_1, \dots, x_p\} \subset T$ ,  $\{x'_1, \dots, x'_p\} \subset T'$ , we say that there is an  $F$ -equivariant  $\varepsilon$ -approximation between  $\{x_1, \dots, x_p\}$  and  $\{x'_1, \dots, x'_p\}$  if

$$\forall g, h \in F \quad \forall i, j \in \{1, \dots, p\} \quad |d_T(g.x_i, h.x_j) - d_{T'}(g.x'_i, h.x'_j)| < \varepsilon.$$

Sometimes, we'll term  $x'_i$  the approximation point of  $x_i$ .

Now, here is a neighbourhood basis for the equivariant Gromov topology: for any  $\varepsilon > 0$ , any finite subset  $F$  of  $\Gamma$ , and any finite subset  $\{x_1, \dots, x_p\}$  of  $T$ , take the set  $V_T(\varepsilon, F, \{x_1, \dots, x_p\})$  consisting of actions  $(T', \Gamma)$  such that there exists  $\{x'_1, \dots, x'_p\} \subset T'$  with an  $F$ -equivariant  $\varepsilon$ -approximation between  $\{x_1, \dots, x_p\}$  and  $\{x'_1, \dots, x'_p\}$ .

The usual topology for sets of actions of a given group on  $\mathbb{R}$ -trees is the *translation length topology*. This topology is based on the *length function* of an action  $(T, \Gamma)$ . It is the function  $l_T : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}_+$  defined by

$$l_T(\gamma) = \inf_{x \in T} d(x, \gamma.x).$$

The translation length topology is the smallest topology that makes continuous the functions  $T \mapsto l_T(\gamma)$  for  $\gamma \in \Gamma$ . For sets of nonabelian (or irreducible) actions of a finitely generated group, (an abelian action is an action whose length function is the absolute value of a morphism  $\Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ ), this topology is Hausdorff (see [CuMo]), and is equivalent to the equivariant Gromov topology (see [Pau2]). And the equivariant Gromov topology is always finer than the translation length topology. Moreover, the space of small actions of a finitely generated group containing  $F_2$  on  $\mathbb{R}$ -trees modulo equivariant isometries is closed in the set of all actions for both topologies. Furthermore, the projectivised space of its small actions on  $\mathbb{R}$ -trees is compact. (see [CuMo]).

In all this paper, we will only deal with approximations for the equivariant Gromov topology unless explicitly mentioned.

*Proof of corollary 2.* Let  $(T, \Gamma)$  be a small action of a hyperbolic group. As noticed above,  $(T, \Gamma)$  is stable. Hence, we can apply Theorem 2.0.1:  $(T, \Gamma)$  can be approximated by a small simplicial action  $(T', \Gamma)$  such that its arc stabilizers are extensions of  $\mathbb{Z}^k$  by a small subgroup of  $\Gamma$ . Therefore,  $(T', \Gamma)$  must be small.  $\square$

## 2.2 Approximation by a geometric action

In this section, we recall some results of [LP]:

**Proposition 2.2.1 ([LP]).** *Let  $(T, \Gamma)$  be a minimal action of a finitely presented group  $\Gamma$  on an  $\mathbb{R}$ -tree  $T$ . We can approximate  $(T, \Gamma)$  by a geometric action  $(T_{\bar{\Sigma}_\rho}, \Gamma)$  so that arc stabilizers of  $T_{\bar{\Sigma}_\rho}$  fix an arc in  $T$ .*

*Moreover, if  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k \subset \Gamma$  are finitely generated subgroups of  $\Gamma$  which fix a point in  $T$ , they may be asked to fix a point in  $T_{\bar{\Sigma}_\rho}$ .*

First, let's fix notations and terminology (see [LP, GLP1, Pau4]). Let  $\langle S | \mathcal{R} \rangle$  be a finite presentation of  $\Gamma$ . Let  $D$  be a big finite subtree of  $T$  (i. e. the convex hull of a finite number of points). For each generator  $g \in S$ , consider the partial isometry  $\varphi_g = g|_{D \cap g^{-1}(D)}$  which is the maximal restriction of  $g$  going from  $D$  to  $D$ , and denote  $X = (D, \{\varphi_g\})$  the system of isometries with domain  $D$  and generators  $\{\varphi_g\}$ . Two points of  $D$  are in the same orbit if there exists a word in the generators  $\{\varphi_g\}$  and their inverses that takes one to the other. We call  $\text{dom } \varphi$  and  $\text{Im } \varphi$  the *bases* of a generator  $\varphi$ . We say that a generator is a *singleton* if its bases are reduced to one point. We suppose that  $D$  is big enough so that every  $\varphi_g$  is not a singleton, and each relation in  $\mathcal{R}$  "expresses itself" in  $X$ , i. e. if  $r$  is the relation corresponding to the word  $g_1^{\varepsilon_1} \dots g_n^{\varepsilon_n}$ , then  $\text{dom}(\varphi_1^{\varepsilon_1} \dots \varphi_n^{\varepsilon_n}) \neq \emptyset$ . If the finitely generated subgroup  $\Gamma_i$  fixes a point  $x_i$  in  $T$ , we also choose  $D$  big enough so that the domains of the words corresponding to a finite generating set of  $\Gamma_i$  contain  $x_i$ .

We next build a 2-complex  $\Sigma$  by gluing on  $D$ , for each generator  $\varphi$  of  $X$ , a band  $(\text{dom } \varphi) \times [0, 1]$  where  $(x, 0)$  and  $(x, 1)$  are glued with  $x$  and  $\varphi(x)$  respectively. Each band is foliated by  $\{*\} \times [0, 1]$ , and we consider the transverse measure which gives to every arc of  $D$  a measure equal to its length. Given a point  $x \in D$  and a word  $w$  in the generators of the system of isometries containing  $x$  in its domain, one denotes  $[x; w]$  the path in  $\Sigma$  contained in a leaf starting from  $x$ , following successively the bands corresponding to the word  $w$  and stopping at the point  $w(x)$ .

Given any base point  $*$  in  $D$ , the fundamental group of  $\Sigma$  is canonically identified with the free group with free basis  $S$  by sending an element  $\varphi$  of  $S$  to a path starting at  $*$ , going inside  $D$  to a point  $x \in \text{Im } \varphi$ , then following  $[x; \varphi^{-1}]$  and going back to  $*$  inside  $D$ . So we naturally get a morphism  $\rho : \pi_1(\Sigma, *) \rightarrow \Gamma$ . When no ambiguity is feared, we will denote  $\pi_1(\Sigma)$  instead of  $\pi_1(\Sigma, *)$ . We consider  $\bar{\Sigma}_\rho$  the covering space of  $\Sigma$  corresponding to  $\rho$ . For every relation  $r \in \mathcal{R}$ , since it expresses itself in  $X$ , we can choose a curve  $[x; r]$  contained in a leaf whose free homotopy class

represents  $r$  in  $\pi_1(\Sigma)$ . Denote  $\mathcal{C}$  the (finite) set of chosen curves. Note that  $\ker \rho$  is normally generated by the free homotopy classes of the curves in  $\mathcal{C}$ . The measured foliation on  $\Sigma$  lifts to  $\bar{\Sigma}_\rho$ . Now, choose any lift  $\bar{D}$  of  $D$ . There is a unique  $\Gamma$ -equivariant map  $f_{\bar{\Sigma}_\rho} : \bar{\Sigma}_\rho \rightarrow T$ , which is equal to the covering map  $p$  in restriction to  $\bar{D}$  and is constant on the leaves of  $\bar{\Sigma}_\rho$ . Thus, every connected component of  $p^{-1}(D)$  isometrically embeds into  $T_{\bar{\Sigma}_\rho}$  through the quotient map  $\pi : \bar{\Sigma}_\rho \rightarrow T_{\bar{\Sigma}_\rho}$ .

To sum up, we say we have a resolution of the action  $(T, \Gamma)$ :

**Definition 2.2.2.** *A resolution of an action  $(T, \Gamma)$  is*

- i. a finite metric graph  $D$  whose components are 1-connected*
- ii. a system of isometries  $X$  with domain  $D$  providing a connected foliated finite 2-complex  $\Sigma$*
- iii. a base point  $* \in D \subset \Sigma$*
- iv. a morphism  $\rho$  from  $\pi_1(\Sigma, *)$  onto  $\Gamma$  with corresponding covering map  $p : \bar{\Sigma}_\rho \rightarrow \Sigma$*
- v. a set  $\mathcal{C}$  of curves contained in leaves that normally generate  $\ker \rho$  in  $\pi_1(\Sigma)$ .*
- vi. a  $\Gamma$ -equivariant map  $f_{\bar{\Sigma}_\rho} : \bar{\Sigma}_\rho \rightarrow T$ , constant on every leaf, which isometrically embeds any connected component of  $p^{-1}(D) \subset \bar{\Sigma}_\rho$  into  $T$ .*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & f_{\bar{\Sigma}_\rho} & & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 \bar{\Sigma}_\rho & \xrightarrow{\pi} & T_{\bar{\Sigma}_\rho} & \xrightarrow{f} & T \\
 & \searrow p & & & \\
 & & \Sigma & & 
 \end{array}$$

Note that unlike [BF2, Pau4], the set  $\mathcal{C}$  is not required to be finite.

Such a resolution provides an  $\mathbb{R}$ -tree in this way: there is a pseudo-metric on  $\bar{\Sigma}_\rho$  obtained by integration of the transverse measure. According to [Lev3] (also see [LP]), by making this pseudo-metric Hausdorff, we get an  $\mathbb{R}$ -tree  $T_{\bar{\Sigma}_\rho}$ . It is sometimes termed the *leaf space made Hausdorff* of  $\bar{\Sigma}_\rho$ . It is naturally endowed with an isometric action of  $\Gamma$ . Every connected component of  $p^{-1}(D)$  isometrically embeds into  $T_{\bar{\Sigma}_\rho}$  through the quotient map  $\pi : \bar{\Sigma}_\rho \rightarrow T_{\bar{\Sigma}_\rho}$ . This allows us to identify the finite tree  $D$  with the subtree of  $T_{\bar{\Sigma}_\rho}$  given by  $\pi(\bar{D})$ . Moreover, the map  $f_{\bar{\Sigma}_\rho} : \bar{\Sigma}_\rho \rightarrow T$

passes to the quotient into  $f : T_{\bar{\Sigma}_\rho} \rightarrow T$ . It is an isometric embedding in restriction to  $D$  thus it is a *morphism of  $\mathbb{R}$ -trees*, which means that every segment  $I$  of  $T_{\bar{\Sigma}_\rho}$  can be subdivided into a finite number of sub-segments which isometrically embed into  $T$  through  $f$  (see [LP]). Since  $\ker \rho$  is generated by free homotopy classes of loops that are contained in leaves, we can apply Lemma 3.4 of [LP] which says that the natural map from the set of leaves of  $\bar{\Sigma}_\rho$  to  $T_{\bar{\Sigma}_\rho}$  is one to one outside a countable set.

Now, [LP] shows that  $T_{\bar{\Sigma}_\rho}$  converges (strongly) to  $T$  when  $D$  gets bigger. Moreover, since  $f$  is a morphism of  $\mathbb{R}$ -trees if  $I$  is an arc in  $T_{\bar{\Sigma}_\rho}$ ,  $I$  contains a non degenerate sub-interval  $J$  which isometrically injects into  $T$  via  $f$ , so

$$\text{Stab } I \subset \text{Stab } J \subset \text{Stab } f(J).$$

Finally, it is clear by construction that the finitely generated subgroups  $\Gamma_i$  fix a point in  $T_{\bar{\Sigma}_\rho}$ . This shows the proposition.

### 2.3 Pure components of $\Sigma$ .

Like in [GLP1, BF2, Pau4], we are first going to perform some *Rips* moves on our resolution. These moves are transformations that preserve the action  $(T_{\bar{\Sigma}_\rho}, \Gamma)$  and the map  $f : T_{\bar{\Sigma}_\rho} \rightarrow T$ .

The first Rips move is *the base subdivision*. To carry out this operation, take a generator  $\varphi$  of the system of isometries, and choose a point  $c$  in the interior of one of its bases. If necessary, change  $\varphi$  to  $\varphi^{-1}$  so that  $c \in \text{dom } \varphi$ . Then replace  $\varphi$  by its restrictions  $\varphi_1, \dots, \varphi_p$  to the closure of the connected components of  $(\text{dom } \varphi) - \{c\}$  and add to  $\mathcal{C}$  the  $p - 1$  curves  $[c; \varphi_p^{-1}\varphi_1]$ . The base point  $*$  remains unchanged, and new morphism  $\rho$  is induced by the collapsing of  $[c; \varphi_p^{-1}\varphi_1]$ . This gives a new covering space we still denote  $\bar{\Sigma}_\rho$ . The subgroup  $\ker \rho$  is still normally generated by the curves in  $\mathcal{C}$ , and  $T_{\bar{\Sigma}_\rho}$  and  $f$  can be seen to be unchanged.

The second Rips move is the *domain cut*: first choose a point  $c$  in the interior of the domain  $D$  of the system of isometries. Then subdivide each base containing  $c$  in its interior (using the Rips move described above). Then cut the domain  $D$  at  $c$  and denote  $(D'_i)_{i=1}^p$  the connected components of the new domain  $D'$  containing a copy of  $c$ , and denote  $c_i$  the copy of  $c$  in  $D'_i$ . First add, for all  $i \neq 1$  a new singleton  $s_i$  sending  $c_1$  on  $c_i$  so that collapsing the  $s_i$  recovers  $D$ . Each generator for which none of its bases is reduced to  $\{c\}$  has a unique corresponding generator in  $D'$ ; and given a singleton having a base equal to  $\{c\}$ , change this base to any of  $\{c_i\}$ .



This provides a new system of isometries on  $D'$ . Finally, replace the curves in  $\mathcal{C}$  by the natural corresponding curves in the new 2-complex. We don't change the base point when  $c \neq *$ , and we take  $*$  to be any of the  $c_i$  otherwise. Collapsing the singletons  $s_i$  then gives an identification between the fundamental groups of  $\Sigma$  and  $\Sigma'$  so naturally provides a new morphism  $\rho' : \pi_1(\Sigma') \rightarrow \Gamma$ . This operation can easily be seen to be a Rips move.

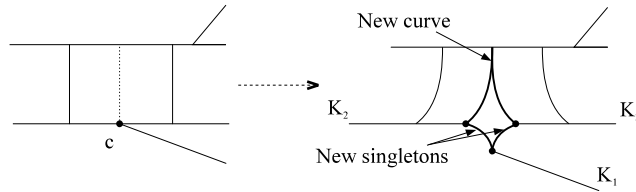


Figure 2.1: Domain cut

Recall that a *branch point* of an  $\mathbb{R}$ -tree  $T$  is a point  $b$  such that  $T - \{b\}$  has at least 3 connected components. For simplicial trees, a branch point is a vertex with valence at least 3. Now, by cutting the domain  $D$  of  $X$  at every branch point of  $D$ , we get a new resolution whose domain is a multi-interval we still denote  $D$ . Once we have a system  $X$  of isometries on a multi-interval, we can consider the corresponding *open* system of isometries  $\overset{\circ}{X}$ : it has same domain  $D$ , and its generators are the restrictions of the generators of  $X$  to the interior of their domains. We call an orbit *singular* if it contains a point in the boundary of some base, and we call an  $\overset{\circ}{X}$ -orbit *non orientable* if there is an  $\overset{\circ}{X}$ -word  $w$  fixing a point in this orbit and reversing orientation. Let  $\Sigma^*$  denote  $\Sigma$  minus its singletons. Now cut the domain at the points of every finite singular or non orientable  $\overset{\circ}{X}$ -orbit, so that each finite singular  $\overset{\circ}{X}$ -orbit is reduced to one point in  $\partial D$ . Thanks to an Imanishi theorem (see [GLP1]), the connected components of  $\Sigma^*$  are either an *orientable family of finite orbits* (each  $\overset{\circ}{X}$ -orbit intersects a component of  $D$  in at most one point), or a *minimal component* (each  $\overset{\circ}{X}$ -orbit which intersects a component  $I$  of  $D$  is dense in  $I$ ). When a system of isometries satisfies these conditions, we say that it has pure components. See [GLP1] for more details.

Starting with this dynamical decomposition of  $\Sigma$ , we aim to get the following proposition:

**Proposition 2.3.1.** *We can construct a finite graph of actions on  $\mathbb{R}$ -trees  $\mathcal{G}$  with fundamental group  $\Gamma$  such that the corresponding action  $(T(\mathcal{G}), \Gamma)$  is equivariantly*

isometric to  $(T_{\bar{\Sigma}_\rho}, \Gamma)$ . When a vertex tree  $T_v$  is not reduced to one point, the corresponding vertex group  $\Gamma_v$  is the image (by  $\rho$ ) in  $\Gamma$  of the fundamental group of a minimal component  $\Sigma_v$ ; there is a (maybe infinite) set of loops  $\mathcal{C}_v$  contained in leaves of  $\Sigma_v$  that normally generate the kernel of the morphism  $\rho_v = \rho|_{\pi_1(\Sigma_v)}$ ; and  $T_v$  is the leaf space made Hausdorff of the covering space  $\bar{\Sigma}_v$  of  $\Sigma_v$  corresponding to  $\rho_v$ ,  $(T_v, \Gamma_v)$  is minimal and the orbits of  $(T_v, \Gamma_v)$  are dense in the segments of  $T_v$ .

Recall (see [Lev4]) that a graph of actions on  $\mathbb{R}$ -trees consists of

- a metric graph of groups, with vertex groups  $\Gamma_v$ , edge groups  $\Gamma_e$ , and monomorphisms  $i_e : \Gamma_e \rightarrow \Gamma_{t(e)}$
- an action of each vertex group  $\Gamma_v$  on a (maybe degenerate)  $\mathbb{R}$ -tree  $T_v$
- a point  $p_e \in T_{t(e)}$  fixed by  $i_e(\Gamma_e) \subset \Gamma_{t(e)}$  for every oriented edge  $e$ .

We use the same notations for graphs as [Ser] section 2.1 p. 22: an edge has terminal vertex  $t(e)$ , has origin  $o(e)$ , and  $\bar{e}$  is the edge with opposite orientation. Unlike in [Lev4], we allow an edge of the graph of groups to have length 0. Here, the vertex actions we will consider either have dense orbits in the segments (and hence are transitive) or are degenerate (i. e.  $T_v$  is a single point).

*Proof.* Denote by  $Y$  the foliated complex obtained from  $\Sigma$  by gluing a disk along the curves of  $\mathcal{C}$ . These disks should be understood to be contained in a leaf. Recall that  $\Sigma^*$  denotes  $\Sigma$  minus its singletons. Let  $Y^*$  be the union of  $\Sigma^*$  and of all the disks  $D$  such that  $\partial D \subset \Sigma^*$ . Now, since  $\Sigma^*$  has pure components, we get a metric graph  $\mathcal{G}$  in the following way: take one vertex  $v$  for each minimal component  $Y_v$  of  $Y^*$ , one vertex for each connected component of the closure of  $Y - \Sigma^*$ , and, for every simplicial component  $Y_0$  of  $Y^*$ , add 2 vertices corresponding to the complement in  $Y_0$  of its boundary components. Add an edge between 2 vertices for each component of their intersection, its length being 0 if it is a subset of a leaf and  $l > 0$  for an edge corresponding to a simplicial component of width  $l$ .

To get the graph of groups  $\mathcal{G}$ , we want to take as edge and vertex groups the fundamental group of the corresponding subcomplex of  $Y$ . So, for each edge or vertex component  $Y_e, Y_v$ , choose a base point  $*_e \in D \cap Y_e$  and  $*_v \in D \cap Y_v$ , and take  $*_v = *$  (and  $*_e = *$ ) if  $* \in Y_v$  (resp. if  $* \in Y_e$ ). Whenever  $Y_e \subset Y_v$ , choose a path  $p_{e \rightarrow v}$  in  $Y_v \cap \Sigma$  joining  $*_e$  to  $*_v$  (take the constant path if  $*_e = *_v$ ). Thus, the inclusion gives edge morphisms  $i_e : \pi_1(Y_e, *_e) \rightarrow \pi_1(Y_v, *_v)$ . But we must ensure that the edge

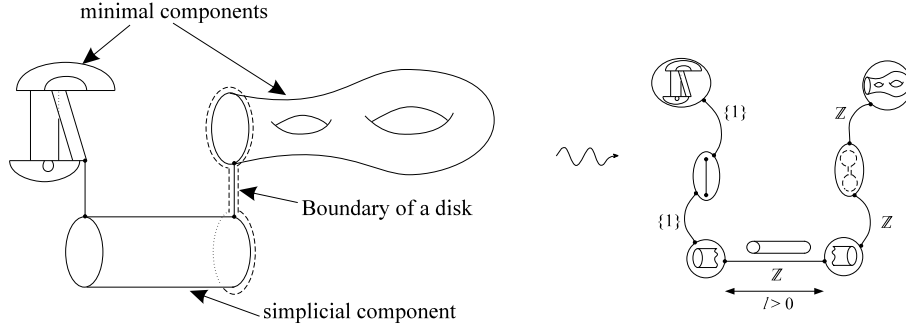


Figure 2.2: The graph of groups

morphisms are one-to-one. Thanks to Bass-Serre theory, this will imply that the fundamental group of  $Y_v$  injects into  $\pi_1(Y)$ . That's why we change  $\mathcal{C}$  and  $Y$ : we add to  $\mathcal{C}$  (maybe infinitely many) curves in the edge subcomplexes  $Y_e$  and we glue the corresponding disks to  $Y$  so as to kill any loop in  $Y_e$  which would be nullhomotopic in  $Y$  but not in  $Y_e$ . This doesn't change the graph we have constructed. Since an edge subcomplex  $Y_e$  is either contained in a leaf or is the interior of a simplicial component  $(0, l) \times L$  with product foliation, any set of loops in an edge subcomplex  $Y_e$  is homotopic to a set of loops contained in a leaf of  $Y_e$  so we can ensure that the loops in  $\mathcal{C}$  are contained in a leaf. Note that although there may be infinitely many loops in  $\mathcal{C}$ , they are contained in a compact graph whose connected components are contained in some leaves of  $\Sigma$ .

Then, choose a maximal subtree  $\tau$  in  $\mathcal{G}$ . Using the paths  $p_{e \rightarrow v}$  for  $e \in \tau$ , the inclusion provides monomorphisms  $\pi_1(Y_v, *_{v}) \rightarrow \pi_1(Y, *)$  and by applying Van Kampen theorem, we get an isomorphism between  $\pi_1(\mathcal{G}, \tau)$  and  $\pi_1(Y, *) \simeq \Gamma$ . Note that the edge groups are finitely generated and that if  $e$  is an edge with positive length,  $\Gamma_e$  fixes an arc in  $T$ .

For each vertex  $v$  and edge  $e$ , let  $\Sigma_v$  (resp.  $\Sigma_e$ ) be the intersection of  $Y_v$  (resp.  $Y_e$ ) with  $\Sigma$ . Now, the paths  $p_{e \rightarrow v}$  for  $e \in \tau$  also give an identification of  $\pi_1(\Sigma_v, *_{v})$  with a subgroup of  $\pi_1(\Sigma, *)$ . Let  $\rho_v : \pi_1(\Sigma_v, *_{v}) \rightarrow \Gamma_v$  be the restriction of  $\rho$  to  $\pi_1(\Sigma_v, *_{v})$  and where  $\Gamma_v = \rho(\pi_1(\Sigma_v, *_{v}))$ . The set  $\mathcal{C}_v$  of loops of  $\mathcal{C}$  contained in  $\Sigma_v$  normally generates  $\ker \rho_v$ .

Let's now explain how to get a graph of actions on  $\mathbb{R}$ -trees. Each vertex group  $\Gamma_v$  has a natural embedding into  $\pi_1(\mathcal{G}, \tau) \simeq \Gamma$ . Now choose an orientation  $A$  of the set of edges of  $\mathcal{G}$ . Denote  $V(\mathcal{G})$  the set of vertices and  $E(\mathcal{G})$  the set of oriented edges of  $\mathcal{G}$  whose orientation agree with  $A$ . Then each edge group is naturally identified

with  $i_e(\Gamma_e) \subset \Gamma_{t(e)}$  for each  $e \in E(\mathcal{G})$  oriented according to  $A$ . Now consider the unique  $\Gamma_v$ -invariant connected component of  $p^{-1}(\Sigma_v \setminus \Sigma_e)$  or of  $p^{-1}(\Sigma_v)$  depending whether  $v$  is or is not a boundary of a simplicial component  $e$ . It is isomorphic to the covering space  $\bar{\Sigma}_v$  of  $\Sigma_v$  associated to the morphism  $\rho_v : \pi_1(\Sigma_v) \rightarrow \Gamma_v$ . Let  $T_v$  be its leaf space made Hausdorff. The tree  $T_v$  is not a point if and only if  $v$  is a minimal component of  $\Sigma$ . Given an oriented edge  $e$  of length 0 (resp. of length  $l > 0$ ) incident on a vertex  $v = t(e)$ , we consider the unique lift  $\bar{\Sigma}_e$  of  $\Sigma_e$  (resp.  $\Sigma_v \setminus \Sigma_e$ ) in  $\bar{\Sigma}_v$  which is  $\Gamma_e$  invariant. Since  $\Sigma_e \cap \Sigma_v$  is a subset of a leaf,  $\bar{\Sigma}_e$  maps to a point  $p_e$  in  $T_v$  and it is fixed by  $i_e(\Gamma_e)$ . So we get a graph of actions on  $\mathbb{R}$ -trees we also denote  $\mathcal{G}$ .

Let's show that the natural map  $T_v \rightarrow T_{\bar{\Sigma}_\rho}$  induced by the inclusion  $\bar{\Sigma}_v \hookrightarrow \bar{\Sigma}_\rho$  is an isometry (this will allow to see  $T_v$  as a subtree of  $T_{\bar{\Sigma}_\rho}$ ). Let  $x, y \in \bar{\Sigma}_v$  and let  $p$  be a path joining them in  $\bar{\Sigma}_\rho$ . We aim to find a path in  $\bar{\Sigma}_v$  which is not longer than  $p$  relatively to the transverse measure. Consider the Bass-Serre tree for the graph of groups  $\mathcal{G}$ . The path  $p$  provides a loop in this tree starting at the point representing  $\bar{\Sigma}_v$ . It can be decomposed as a succession of loops based at the same point and which go forth and back through the same edge. Thus,  $p$  is the product of some paths in  $\bar{\Sigma}_v$  and of some path that leave  $\bar{\Sigma}_v$  and come back into  $\bar{\Sigma}_v$  through the same lift  $\bar{\Sigma}_e$  of an edge component  $\Sigma_e$ . Since every edge component incident on  $\bar{\Sigma}_v$  is contained in a leaf, we can replace the parts of  $p$  outside  $\bar{\Sigma}_v$  by a path contained in a leaf in  $\bar{\Sigma}_e \subset \bar{\Sigma}_v$  and thus get a shorter path which lies in  $\bar{\Sigma}_v$ .

Now, to show that  $(T_v, \Gamma_v)$  is minimal and has dense orbits in the segments, we prove the following lemma:

**Lemma 2.3.2.** *Let  $\bar{\Sigma}_\rho$  be a foliated 2-complex like in the Definition 2.2.2 of a resolution, coming from a system of isometries with domain  $D$ , let  $p^{-1}(D)$  be the preimage of  $D$  in  $\bar{\Sigma}_\rho$ , and let  $T_{\bar{\Sigma}_\rho}$  be the  $\mathbb{R}$ -tree obtained by making the leaf space of  $\bar{\Sigma}_\rho$  Hausdorff.*

*Then, any germ of segment at a point  $a$  in  $T_{\bar{\Sigma}_\rho}$  may be lifted to  $p^{-1}(D)$ . More precisely, if  $I = [a, b]$  is a non degenerate interval in  $T_{\bar{\Sigma}_\rho}$ , there exists an interval  $[\bar{a}, \bar{c}]$  in  $p^{-1}(D)$  such that the quotient map  $\pi : \bar{\Sigma}_\rho \rightarrow T_{\bar{\Sigma}_\rho}$  is an isometry from  $[\bar{a}, \bar{c}]$  to a non degenerate subsegment  $[a, c]$  of  $I$ .*

*Proof.* Let  $\bar{a}, \bar{b} \in p^{-1}(D)$  some lifts of  $a, b$ . Take  $\alpha$  a path in  $\bar{\Sigma}_\rho$  joining  $\bar{a}$  and  $\bar{b}$  such that  $\alpha$  is a product of subsegments of  $p^{-1}(D)$  and of paths contained in a leaf. Take the last instant  $t_0$  for which  $\pi \circ \alpha(t_0) = a$ . Because  $T_{\bar{\Sigma}_\rho}$  is an  $\mathbb{R}$ -tree, and since  $\pi \circ \alpha$  is a path joining  $a$  and  $b$ , there exists  $\eta > 0$  such that  $\pi \circ \alpha([t_0, t_0 + \eta]) \subset I$ . There only remains to take  $\eta$  small enough so that  $\alpha([t_0, t_0 + \eta]) \subset p^{-1}(D)$  because

$\pi$  isometrically embeds the connected components of  $p^{-1}(D)$ .  $\square$

This lemma implies that the orbits of  $(T_v, \Gamma_v)$  are dense in the segments for any  $v$  corresponding to a minimal component of  $\Sigma$ . As a matter of fact, the trace of the  $\Gamma_v$  orbit of a leaf of  $\bar{\Sigma}_v$  on a component of  $p^{-1}(D) \cap \bar{\Sigma}_v$  is dense in this component. This implies that  $(T_v, \Gamma_v)$  has no global fixed point and that any orbit intersects the minimal subtree. Hence  $(T_v, \Gamma_v)$  is minimal.

Now let's explicate the action  $(T(\mathcal{G}), \pi_1(\mathcal{G}, \tau))$  corresponding to the graph of actions  $\mathcal{G}$  with its maximal subtree  $\tau$ . We need an orientation  $A$  of the set of edges. Recall that for each oriented edge  $e$ , there is a corresponding element  $g_e \in \pi_1(\mathcal{G}, \tau)$  which is trivial if and only if  $e \subset \tau$ . Denote  $l(e)$  the length of an edge  $e$  and let  $s_v$  be any section from  $\Gamma/\Gamma_v$  to  $\Gamma$  such that  $s_v(1.\Gamma_v) = 1$ .  $T(\mathcal{G})$  is by definition the set

$$\left( \prod_{v \in V(\mathcal{G})} (\Gamma/\Gamma_v) \times T_v \right) \amalg \left( \prod_{e \in E(\mathcal{G})} (\Gamma/\Gamma_e) \times [0, l(e)] \right) / \sim$$

where  $\sim$  is the equivalence relation generated by

$$(g.\Gamma_e, 0) \sim (g.\Gamma_{o(e)}, [s_{o(e)}(g.\Gamma_{o(e)})]^{-1}g.p_{\bar{e}})$$

and

$$(g.\Gamma_e, l(e)) \sim (gg_e.\Gamma_{t(e)}, [s_{t(e)}(gg_e.\Gamma_{t(e)})]^{-1}gg_e.p_e)$$

for all edge  $e$  oriented according to  $A$ . The action of  $\Gamma$  on  $T(\mathcal{G}, \tau)$  is given by

$$h.(g.\Gamma_e, x) = (hg.\Gamma_e, x)$$

and

$$h.(g.\Gamma_v, g[s_v(g.\Gamma_v)]^{-1}.x) = (hg.\Gamma_v, [s_v(hg.\Gamma_v)]^{-1}hg.x)$$

which may be put as

$$h.(g.\Gamma_v, x) = (hg.\Gamma_v, [s_v(hg.\Gamma_v)]^{-1}hs_v(g.\Gamma_v).x).$$

This definition is clearly independent of choices modulo equivariant isometry. Since we have a decomposition of  $\bar{\Sigma}_\rho$  similar to this decomposition of  $T(\mathcal{G})$ , we see that  $(T(\mathcal{G}), \Gamma)$  is isometric to  $(T_{\bar{\Sigma}_\rho}, \Gamma)$ .  $\square$

## 2.4 Stability and minimal components.

In this section due to D. Gaboriau, we use one of the key facts in the proof of Rips theorem ([BF2, Pau4]) to show the following proposition:

**Proposition 2.4.1 (D. Gaboriau).** *There exists a graph of actions  $\mathcal{G}'$  with same underlying graph of groups as  $\mathcal{G}$  such that*

1. *There exists  $\Gamma$ -equivariant morphisms of  $\mathbb{R}$ -trees  $q$  and  $f'$ , making the following diagram commutative:*

$$\begin{array}{ccc} T_{\bar{\Sigma}_\rho} = T(\mathcal{G}) & \xrightarrow{f} & T \\ & q \searrow & \nearrow f' \\ & & T(\mathcal{G}') \end{array}$$

2.  *$q$  is induced by  $\Gamma_v$ -equivariant morphisms of  $\mathbb{R}$ -trees  $q_v : T_v \rightarrow T'_v$*
3. *The arc stabilizers of  $(T'_v, \Gamma_v)$  lie in the kernel  $N_v$  of  $(T'_v, \Gamma_v)$*
4.  *$N_v$  fixes an arc in  $T$*
5. *Consider  $\Gamma'_v = \Gamma_v/N_v$  and  $\rho'_v : \pi_1(\Sigma_v) \rightarrow \Gamma'_v$  the natural morphism. Then the action  $(T'_v, \Gamma'_v)$  is geometric,  $T'_v$  is the leaf space made Hausdorff of the covering space  $\bar{\Sigma}'_v$  of  $\Sigma_v$  corresponding to  $\rho'_v$*
6.  *$(T'_v, \Gamma'_v)$  has trivial arc stabilizers and its orbits are dense in the segments of  $T'_v$*
7. *The leaf space of  $\bar{\Sigma}'_v$  is actually Hausdorff.*

*Remark 2.4.2.* If  $(T, \Gamma)$  is a small action of a hyperbolic group, then for all vertex  $v$  corresponding to minimal component, the groups  $N_v$  must be finite. Indeed,  $N_v$  fixes an arc in  $T$ , and is normal in  $\Gamma_v$ . So if  $N_v$  was virtually cyclic,  $\Gamma_v$  should also be virtually cyclic, and  $\Gamma'_v$  would be finite, which is a contradiction since the orbits of  $(T'_v, \Gamma'_v)$  are dense in the segments.

*Remark 2.4.3.* Since  $T(\mathcal{G})$  strongly approximates  $T$ , given finite sets  $F \subset \Gamma$  and  $\{x_i\} \subset T$ , we can choose a big enough subtree  $K$  of  $T$  so that the resulting geometric approximation  $T(\mathcal{G})$  is an  $\varepsilon = 0$   $F$ -equivariant approximation with points  $\{y_i\} \in T(\mathcal{G})$  such that  $f(y_i) = x_i$ . Therefore, if  $d_T$ ,  $d_{\mathcal{G}}$ , and  $d_{\mathcal{G}'}$  denote the metrics for the corresponding actions, we get, for  $g, h \in F$ ,

$$\begin{aligned} d_T(g.x_i, h.x_j) &= d_T(f(g.y_i), f(h.y_j)) \\ &\leq d_{\mathcal{G}'}(q(g.y_i), q(h.y_j)) \leq d_{\mathcal{G}}(g.y_i, h.y_j) = d_T(g.x_i, h.x_j). \end{aligned}$$

The last equality results from the fact that we have a 0-approximation and implies that inequalities are in fact equalities (but we don't need this fact). Therefore,  $T_{\mathcal{G}'}$  is closer to  $T$  than  $T_{\mathcal{G}}$  for the Gromov equivariant topology.

Also note that if a subgroup  $\Gamma_i$  of  $\Gamma$  fixes a point in  $T_{\Sigma_\rho} = T(\mathcal{G})$ , it will automatically fix a point in  $T(\mathcal{G}')$ .

Therefore, the proof of the theorem will reduce to the approximation of actions with trivial arc stabilizers coming from pure foliated 2-complexes by simplicial actions with free abelian edge stabilizers thanks to the following reduction lemma.

**Reduction Lemma.** *(How to deduce Theorem 2.0.1 from Propositions 2.5.2, 2.7.2, and 2.8.1.) Let  $\mathcal{G}'$  be a graph of actions as in prop. 4.1 with vertex actions  $(T'_v, \Gamma_v)$ , edge morphisms  $i_e : \Gamma_e \rightarrow \Gamma_{t(e)}$  and edge points  $p'_e \in T'_{t(e)}$ . Denote  $j_e : \Gamma_e \rightarrow \Gamma'_{t(e)}$  the composition of  $i_e$  and of the quotient map  $\Gamma_{t(e)} \rightarrow \Gamma'_{t(e)}$ . Assume that we have approximations of  $(T'_v, \Gamma_v)$  for the Gromov topology by some simplicial action  $(T''_v, \Gamma'_v)$  with free abelian edge stabilizers such that the edge points  $p'_e$  can be approximated in  $T''_v$  by some points  $p''_e$  fixed by the image of the edge groups  $j_e(\Gamma_e) \subset \Gamma'_v$ .*

*Consider the simplicial tree given by the graph of actions  $\mathcal{G}''$  with same underlying metric graph of groups as  $\mathcal{G}'$ , with vertex actions  $(T''_v, \Gamma'_v)$  and edge points  $p''_e \in T''_{t(e)}$ .*

*Then  $T(\mathcal{G}'')$  is an approximation of  $(T(\mathcal{G}'), \Gamma)$  for the Gromov topology, and its arc stabilizers are extensions of free abelian groups by groups fixing an arc in  $T$ .*

*Moreover, assume that any subgroup  $\Gamma'_0 \subset \Gamma'_v$  fixing a point in  $T'_v$  fixes a point in  $T''_v$ , and assume that  $(g.p'_{e_1} = p'_{e_2}) \Rightarrow (g.p''_{e_1} = p''_{e_2})$  for  $g \in \Gamma'_v$  and edges  $e_1, e_2$  incident on  $v$ . Then any subgroup  $\Gamma_0 \subset \Gamma$  fixing a point in  $T(\mathcal{G}')$  fixes a point in  $T(\mathcal{G}')$ .*

*Proof of reduction lemma.* Let's first show that  $T(\mathcal{G}'')$  is an approximation of  $T(\mathcal{G}')$ . So, consider a neighbourhood of  $T(\mathcal{G}')$  defined by  $\varepsilon > 0$ , a finite subset  $F$  of  $\Gamma$ , and  $x'_1, \dots, x'_p \in T(\mathcal{G}')$ . We have to approximate the distances between two points  $g.x'_i$  and  $h.x'_j$  for  $g, h \in F$ . Using notations of the proof of Proposition 2.3.1, and assuming for simplicity that  $x'_i$  and  $x'_j$  lie in the orbit of a vertex tree, denote  $g.x'_i = (g_i.\Gamma_{v_i}, y_i)$  and  $h.x'_j = (g_j.\Gamma_{v_j}, y_j)$  for some  $y_i \in T_{v_i}$ ,  $y_j \in T_{v_j}$ , and some  $g_i, g_j \in \Gamma$ . Now recall that  $\tau$  is a maximal tree in  $\mathcal{G}'$  and write  $g = g_j g_i^{-1}$  as a reduced word of  $\pi_1(\mathcal{G}', \tau)$ :  $g = r_0 e_1 r_1 e_2 \dots e_q r_q$  for some path  $e_1 \dots e_q$  going from  $v_i$  to  $v_j$  and some  $r_i \in \Gamma_{v_i}$ . Then

$$d(g.x'_i, h.x'_j) = d(y_i, r_0.p_{\bar{e}_1}) + l(e_1) + d(p_{e_1}, r_1.p_{\bar{e}_2}) + \dots + l(e_q) + d(p_{e_q}, r_q.y_j).$$

Note that since  $\{x'_i\}$  and  $F$  are finite, there are finitely many chosen words that occur. Denote  $M$  the maximum of the lengths of the chosen words, and for each vertex  $v$ , denote  $F_v$  the set of elements  $r_p \in \Gamma_v$  that occur in the reduced words, and take as finite set  $\{x_{j,v}\}$  of points the set consisting of  $p_e$  for edges  $e$  incident on  $v$ , and of  $y_i$  that occur and lie in  $T_v$ . Now, for each vertex  $v$ , take an  $F_v$ -equivariant  $\varepsilon/M$ -approximation  $T''_v$  of  $T'_v$  on  $\{x_{j,v}\}$  such that  $j_e(\Gamma_e)$  fixes  $p''_e$  for all edge  $e$  incident on  $v$ . It is now clear that we get an  $F$ -equivariant  $\varepsilon$ -approximation of  $T(\mathcal{G}')$  on  $\{x'_i\}$ .

Now, let's check the *moreover* part of reduction lemma. Assume that  $\Gamma_0 \subset \Gamma$  fixes a point  $x \in T(\mathcal{G}')$ , say  $x = (h.\Gamma_v, y)$  (with notations of the proof of Proposition 2.3.1 p. 53). Up to conjugation of  $\Gamma_0$ , we may assume that  $h = 1$ . As above, write any  $g \in \Gamma_0$  as a reduced word of the graph of groups  $\mathcal{G}'$ :  $g = r_0 e_1 r_1 e_2 \dots e_q r_q$ . Then

$$d(x, gx) = d(y, r_0.p'_{e_1}) + l(e_1) + d(p'_{e_1}, r_1.p'_{e_2}) + \dots + l(e_q) + d(p'_{e_q}, r_q.y).$$

Since  $g$  fixes  $x$ , all those numbers must be 0. If  $y \in T'_v$  doesn't lie in the orbit of any  $p'_e$ , it implies that  $g$  is a one letter word  $g = r_0 \in \Gamma_v$ , and that  $r_0$  fixes  $y$ . Hence,  $\Gamma_0 \subset \Gamma_v$  and we are done. Otherwise, up to conjugation, we can assume that  $y = p_e$  for some edge  $e$ . The lengths of the edges  $e_i$  are 0 and  $p'_{e_i} = r_i.p'_{e_{i+1}}$ . Taking  $x' \in T''_v$  to be  $(1.\Gamma_v, p''_e)$  and using the *moreover* hypothesis, one easily checks that  $g$  fixes  $x'$ . This shows that  $\Gamma_0$  fixes a point in  $T(\mathcal{G}'')$ .  $\square$

*Proof of Proposition 2.4.1.* We are going to use a somewhat general construction:

**Construction lemma 2.4.4.** *Consider a graph of actions  $\mathcal{G}$  with corresponding action  $(T(\mathcal{G}), \Gamma)$  and for every vertex  $v$ , a normal subgroup  $N_v$  of  $\Gamma_v$  generated by elements fixing a point in  $T_v$ .*

*Then there is an action  $(T(\mathcal{G}'), \Gamma)$  given by a graph of actions  $\mathcal{G}'$  and an onto 1-lipschitz equivariant map  $q : T(\mathcal{G}) \rightarrow T(\mathcal{G}')$  induced by 1-lipschitz  $\Gamma_v$ -equivariant maps  $q_v : T_v \rightarrow T'_v$  such that  $N_v$  acts trivially in  $(T'_v, \Gamma'_v)$  and which is maximal in the following sense:*

*Given a 1-lipschitz equivariant map  $f : T(\mathcal{G}) \rightarrow T$  such that  $N_v$  is in the kernel of  $(f(T_v), \Gamma_v)$ , then there is an equivariant 1-lipschitz map  $f' : T(\mathcal{G}') \rightarrow T$  such that  $f = f' \circ q$ .*

*Moreover, if  $f$  is a morphism of  $\mathbb{R}$ -trees, then  $f'$  and  $q$  are also morphisms of  $\mathbb{R}$ -trees.*



*Proof.* Fix a vertex  $v$  and consider the pseudo-metric on  $T_v$  given by

$$\delta_v(N_v.x, N_v.y) = \inf_{g, g' \in N_v} d(g.x, g'.y).$$

Since  $N_v$  is generated by elements fixing a point in  $T_v$ , th. 1 of [Lev3] tells us that by making this pseudo-metric Hausdorff, we get an  $\mathbb{R}$ -tree  $T'_v = \widehat{T_v/N_v}$ . Denote  $q_v$  the quotient maps. The graph of actions  $\mathcal{G}$  provides some points  $p_e \in T_{t(e)}$  fixed by  $j_e(\Gamma_e)$  so there is a natural graph of actions  $\mathcal{G}'$  with same underlying graph of groups as  $\mathcal{G}$  defined by the edge points  $p'_e = q_{t(e)}(p_e)$ . The quotient maps  $q_v : T_v \rightarrow T'_v$  naturally induce an equivariant map  $q : T(\mathcal{G}) \rightarrow T(\mathcal{G}')$ . Note that  $T(\mathcal{G}')$  may be seen as the metric space obtained by making Hausdorff the following pseudo-metric on  $T(\mathcal{G})$ :

$$\delta(x, x') = \inf \{ d(x, x_1) + d(n_1.x_1, x_2) + \dots + d(n_p.x_p, x') \mid \\ x_i \in g_i.T_{v_i} \subset T(\mathcal{G}), g_i \in \Gamma, n_i \in g_i.N_{v_i}.g_i^{-1} \}$$

$\delta$  can also be seen to be the maximal equivariant pseudo-metric majorated by  $d$  which identifies two points in  $T_v$  that are in the same  $N_v$  orbit.

Now, given an equivariant map  $f : T(\mathcal{G}) \rightarrow T$  such that  $N_v$  is in the kernel of  $(f(T_v), \Gamma_v)$ ,  $f$  must be constant on the 0-balls of  $(T, \delta)$  so  $f$  factors through  $q$  into a map  $f'$ . This map  $f'$  must decrease distances since  $d(f(\cdot), f(\cdot))$  is a pseudo-metric which must be majorated by  $\delta$  thanks to the maximality of  $\delta$ .

Now assume that  $f = f' \circ q$  is a morphism of  $\mathbb{R}$ -trees. Then any arc in  $T(\mathcal{G})$  can be subdivided into sub-arcs that are isometrically embedded through  $f$ . Thus, since both  $f'$  and  $q$  decrease distances,  $q$  must isometrically embed those sub-arcs, which means that  $q$  is a morphism of  $\mathbb{R}$ -trees. Now, given an arc  $I' = [a', b']$  of  $T(\mathcal{G}')$ , choose some points  $a, b$  in  $q^{-1}(a')$ ,  $q^{-1}(b')$  respectively and take  $I = [a, b]$ . Since  $q(I)$  is connected, it must contain  $I'$ . Subdividing  $I$  into subsegments that are isometrically embedded through  $f$ , we see that  $q(I)$  is a finite tree containing  $I'$ . Therefore, by subdividing  $q(I)$  at its branch points and at the images by  $q$  of subdividing points of  $I$ , the remaining pieces are segments isometrically embedded through  $f'$ .  $\square$

Let  $v$  be a vertex in  $\mathcal{G}$  corresponding to a minimal component of  $\Sigma^*$  and let  $T_{\Gamma_v}$  be the minimal subtree of  $T$  invariant under the action of  $\Gamma_v$ . We are going to show that the orbits of  $(f(T_v), \Gamma_v)$  are dense in the segments. This will imply that  $\Gamma_v$  has no global fixed point in  $T$  and that  $f(T_v) = T_{\Gamma_v}$  since any orbit must then intersect the minimal subtree. Take a non degenerate segment  $J$  in  $f(T_v)$  and let  $x \in f(T_v)$ .

Consider  $a, b \in T_v$  some preimages of the endpoints of  $J$  and a preimage  $y$  of  $x$ . Now since  $f$  is a morphism of  $\mathbb{R}$ -trees,  $f([a, b])$  is a finite tree, and there is a finite number of non degenerate subintervals of  $[a, b]$  whose union  $E$  is such that  $f(E) = J$ . Now  $\Gamma_v \cdot y \cap E$  is dense in  $E$ , so  $\Gamma_v \cdot x \cap f(E)$  is dense in  $f(E) = J$ . Therefore,  $(f(T_v), \Gamma_v)$  has orbits dense in the segments. Hence it is minimal, and is equal to the minimal subtree  $T_{\Gamma_v}$ .

Now, take  $N_v$  the subgroup of  $\Gamma_v$  generated by its elements fixing an arc in  $T_v$ . Here is the key fact that requires stability that we use:

**Proposition 2.4.5 ([BF2], cor. 5.9, [Pau4], lem. 2.8).** *Under the hypothesis that  $(T, \Gamma)$  is stable, any element of  $\Gamma_v$  fixing (pointwise) an arc in  $T_{\Gamma_v}$  fixes (pointwise) the whole tree  $T_{\Gamma_v}$ .*

This proposition shows that  $N_v$  fixes  $T_{\Gamma_v}$  and therefore that  $N_v$  fixes an arc in  $T$  (which is required in the proposition we are proving). So, consider the graph of actions  $\mathcal{G}'$  given by the construction lemma 2.4.4.

This gives us the points 1, 2, and 4 of the proposition. Now recall that  $T'_v$  was defined to be  $\widehat{T_v/N_v}$ , and that  $T_v$  is itself the leaf space made Hausdorff of  $\bar{\Sigma}_v$ . Now, to obtain  $T'_v$ , starting from  $\bar{\Sigma}_v$ , we can kill the action of  $N_v$  before killing the leaves, which exactly means that  $(T'_v, \Gamma'_v)$  is the leaf space made Hausdorff of the covering space  $\bar{\Sigma}'_v$  of  $\Sigma_v$  corresponding to  $\rho'_v : \pi_1(\Sigma_v) \rightarrow \Gamma'_v = \Gamma_v/N_v$ . This shows point 5.

Now we want to show that  $(T'_v, \Gamma'_v)$  has trivial arc stabilisers. First recall that the natural map from the space of leaves of  $\bar{\Sigma}_v$  to  $T_v$  is one to one outside a countable set (see Lemma 3.4 in [LP]). Therefore, if  $g \in \Gamma_v$  fixes an arc in  $T_v$ , it fixes a leaf in  $\bar{\Sigma}_v$ , so the kernel of the morphism  $\pi_1(\Sigma_v) \rightarrow \Gamma'_v$  is normally generated by free homotopy classes of loops contained in leaves. Thus, like in the previous argument, we get that an element  $g' \in \Gamma'_v$  fixing an arc in  $T'_v$  would fix an uncountable number of leaves in the covering of  $\Sigma_v$  corresponding to  $\Gamma'_v$ . So there exists a word in the generators of the system of isometries  $X_v$  which is a restriction of the identity on a non degenerate interval such that the corresponding free homotopy class maps onto the conjugacy class of  $g'$  in  $\Gamma'_v$ . Therefore, any element  $g \in \Gamma_v$  mapped to  $g'$  must fix an arc in  $T_v$ , so  $g \in N_v$  and  $g' = 1$ . Therefore, the action of  $\Gamma'_v$  on  $T'_v$  has trivial arc stabilizers. The last affirmation is a consequence of Theorem 6.3 of [LP] which can be generalized to a group which is not finitely presented using the fact that  $\ker \rho$  is generated by free homotopy classes of loops contained in leaves.  $\square$

## 2.5 Approximation of homogeneous components

**Definition 2.5.1.** *A minimal system of isometries with domain  $D$  is termed homogeneous if there exists a non degenerate interval  $I \subset D$  and a finitely generated dense subgroup  $P$  of  $\text{Isom}(\mathbb{R})$  such that  $x, y \in I$  are in the same  $\overset{\circ}{X}$ -orbit if and only if there exists  $\varphi \in P$  mapping  $x$  to  $y$ .*

**Proposition 2.5.2.** *Let  $X_v$  be a pure minimal homogeneous system of isometries,  $\Sigma_v$  the corresponding 2-complex, and  $\rho'_v : \pi_1(\Sigma_v) \rightarrow \Gamma'_v$  be a morphism whose kernel is normally generated by loops contained in leaves of  $\Sigma_v$ . Assume that the corresponding action  $(T'_v, \Gamma'_v)$  has trivial arc stabilizer.*

*Then, given a finite set of points  $p'_e \in T'_v$  fixed by some subgroups  $\Gamma'_e \subset \Gamma'_v$ , there is a simplicial approximation  $(T''_v, \Gamma'_v)$  of  $(T'_v, \Gamma'_v)$  such that the approximation point  $p''_e$  of  $p'_e$  is fixed by  $\Gamma'_e$  in  $(T''_v, \Gamma'_v)$ .*

*Moreover, any subgroup  $\Gamma'_0 \subset \Gamma'_v$  fixing a point in  $T'_v$  fixes a point in  $T''_v$ , and for  $g \in \Gamma'_v$  ( $g \cdot p'_{e_1} = p'_{e_2}$ )  $\Rightarrow$  ( $g \cdot p''_{e_1} = p''_{e_2}$ ).*

*Proof.* The action of  $\Gamma'_v$  on  $T'_v$  is minimal and stable since its arc stabilizers are trivial. Therefore, we could apply prop. 2.9 in [BF2] (see also th. 2.9 in [Pau4]) saying that the tree  $T'_v$  must be a line. But we give a direct proof in our setting.

### 2.5.1 The tree $T'_v$ is a line.

Denote  $\bar{D}_m$  the connected components of  $p^{-1}(D) \subset \bar{\Sigma}'_v$  ordered so that  $I_m = \bar{D}_m \cap \text{Sat}(\bar{D}_1 \cup \dots \cup \bar{D}_{m-1})$  contains more than one point, where  $\text{Sat}(A)$  is the saturate of the set  $A$  for the foliation of  $\bar{\Sigma}'_v$ , i. e. the union of all leaves intersecting  $A$ . Since  $(T'_v, \Gamma'_v)$  has trivial arc stabilizers, lemma 3.5 and 3.4 of [LP] apply, so that  $I_m$  are closed intervals, and  $T'_v$  is obtained from  $\bar{D}_1$  by successively glueing  $\bar{D}_m$  isometrically along  $I_m$ . Denote  $K_m$  the finite trees thus obtained. Our aim is to recursively show that  $K_m$  is an interval.

So assume that  $K_{m-1}$  is an interval. Let  $\bar{\varphi}$  be the glueing isometry between  $K_{m-1}$  and  $I_m \subset \bar{D}_m$ . We want to show that  $\bar{\varphi}$  has a maximal domain since it will imply that  $K_m$  is a segment. So assume that  $\bar{\varphi}$  hasn't a maximal domain and argue towards a contradiction. This means that  $I_m$  has an endpoint  $\bar{q}$  which neither is an endpoint of  $\bar{D}_m$  nor is sent to an endpoint of  $K_m$  through  $\bar{\varphi}$ . Since every  $I_i$  is not reduced to a point,  $\bar{\varphi}(\bar{q})$  lies in the interior of some  $\bar{D}_i$  that we denote by  $\bar{D}_0$ . Now,  $\bar{\varphi}$  gives a partial isometry from a nondegenerate subinterval  $I'_m$  of  $I_m$  containing  $\bar{q}$  to

$\bar{D}_0$ . Since  $x$  and  $\bar{\varphi}(x)$  lie in the same leaf, we can choose (maybe not continuously) some path  $\bar{p}_x$  from  $x$  to  $\bar{\varphi}(x)$  contained in a leaf of  $\bar{\Sigma}'_v$ .

Downstairs, this situation means that we have a partial isometry  $\varphi$  between two closed intervals  $I$  and  $J$  of  $D$ , together with some paths  $p_x$  between  $x \in \text{dom } \varphi$  and  $\varphi(x)$  contained in a leaf such that the free homotopy class of the loop  $[x, x'] \cdot p_{x'} \cdot [\varphi(x'), \varphi(x)] \cdot p_x^{-1}$  is in the kernel of the morphism  $\rho'_v$  which defines the covering. Now apply the following lemma:

**Lemma 2.5.3.** *Let  $X$  be a pure minimal homogeneous system of isometries on a multi-interval  $D$ , and let  $\varphi$  be an isometry between two non degenerate intervals  $I$  and  $J$  of  $\mathring{D}$  such that for all  $x \in I$ ,  $x$  and  $\tau(x)$  are in the same  $X$ -orbit. Consider  $\Phi : U \rightarrow V$  the maximal extension of  $\varphi$  to  $\mathring{D}$ .*

*Then, for all  $x \in U$ ,  $x$  and  $\Phi(x)$  are in the same  $\mathring{X}$ -orbit, and there exists a finite set of  $\mathring{X}$ -words  $w_1, \dots, w_p$  which are restrictions of  $\Phi$  and whose (open) domains cover  $U$ .*

We keep the proof of this lemma for the end of this section. So consider such words  $w_i$  and take  $w_{i_0}$  containing  $q$  in its (open) domain. Now, take  $x \in \text{dom } w_{i_0} \cap I$ . Corresponding to the path  $p_x$ , there is a unique  $X$ -word  $u_x$  such that  $[x; u_x]$  is homotopic to  $p_x$  in the leaf of  $\Sigma_v$  containing  $x$ . Since there are only countably many words, there exists two points  $x \neq x' \in \text{dom } w_{i_0}$  such that  $u_x = u_{x'}$ . Therefore,  $u_x w_{i_0}^{-1}$  is a restriction of the identity to a nondegenerate interval, hence must fix an arc in  $T'_v$ . Since  $(T'_v, \Gamma'_v)$  is assumed to have trivial arc stabilizers,  $u_x w_{i_0}^{-1}$  lies in  $\ker \rho'_v$ . This means that  $w_{i_0}$  lifts to a band of leaves joining a neighbourhood of  $\bar{q} \in I_m$  to a sub-interval of  $\bar{D}_0$ . This contradicts the definition of  $\bar{q}$ . Thus, we have proved that  $T'_v$  is a line.

*Proof of lemma 2.5.3.* The fact that  $x$  and  $\Phi(x)$  are in the same  $\mathring{X}$ -orbit is a straightforward consequence of the homogeneousness of  $X$ . To prove the second statement, we use the so called segment-closed property (which applies even if  $X$  isn't homogeneous):

**Segment-closed property ([GLP2]).** *Assume that  $\tau$  is an isometry between two intervals  $I$  and  $J$  of  $D$  such that for all but countably many  $x \in I$ ,  $x$  and  $\tau(x)$  are in the same  $X$ -orbit. Then there exists a finite number of  $X$ -words  $w_1, \dots, w_p$  such that:*

- the domains of the  $w_i$  cover  $I$

– the  $w_i$  and  $\tau$  coincide on the intersection of their domains.

Applying segment-closed property to  $\Phi$  and forgetting the words with degenerate domain provides  $\overset{\circ}{X}$ -words  $w_i$  whose domains cover  $U$  but finitely many points. Now take a forgotten point  $x_0$ . We consider the uniform restriction  $X_{-\varepsilon}$  of  $X$  defined by restricting each generator  $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$  of  $X$  to  $\varphi_{-\varepsilon} : [a + \varepsilon, b - \varepsilon] \rightarrow [c + \varepsilon, d - \varepsilon]$ . According to [Lev1] or [GLP1] (see rk. p. 418) and thanks to homogeneousness, given any compact set  $K$  in  $\overset{\circ}{D}$ ,  $X_{-\varepsilon}$  has the same orbits in restriction to  $K$  for sufficiently small  $\varepsilon$ . Take a compact interval  $A$  in  $U$  containing  $x_0$  in its interior, and let  $K = A \cup \Phi(A) \subset \overset{\circ}{D}$ . Using segment-closed property for  $X_{-\varepsilon}$ , we get  $X_{-\varepsilon}$ -words  $v_i$  whose domains cover  $A$  and which agree with  $\Phi$ . We can assume that their domains are non degenerate. Consider an index  $i_0$  such that the  $X_{-\varepsilon}$ -word  $v_{i_0}$  is defined on  $x_0$ . Then the interior of the domain of the  $X$ -word  $v_{i_0}$  contains  $x_0$ . This allows us to fill the holes at forgotten points.  $\square$

### 2.5.2 Approximation of $(T'_v, \Gamma'_v)$ .

Now, we know that  $T'_v$  is a line. Since the arc stabilizers of this action are trivial, the action of  $\Gamma'_v$  is given by a one to one morphism  $\Gamma'_v \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{R})$ . Now, identify  $\Gamma'_v$  with its image in  $\text{Isom}(\mathbb{R})$ . Let  $g_1, \dots, g_n$  be a basis for the orientation preserving part of  $\Gamma'_v$  and  $s$  be an orientation reversing element of  $\Gamma'_v$  (if there is some) and take the origin of  $\mathbb{R}$  at the centre of  $s$ . Now, replacing  $g_i$  by close rational translations, we get a morphism  $\Gamma'_v \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{Q})$ . Its kernel is a subgroup of  $\langle g_1, \dots, g_n \rangle$  and therefore is isomorphic to some  $\mathbb{Z}^k$ . Moreover, since any finitely generated subgroup of  $\text{Isom}(\mathbb{Q})$  is discrete, we get a simplicial action of  $\Gamma'_v$  on  $\mathbb{R}$ .

If  $x'_i \in T'_v$  is fixed by a reflection  $\sigma \in \text{Isom}(\mathbb{R})$ , we approximate it by the centre  $x''_i$  of the image of  $\sigma$  in  $\text{Isom}(\mathbb{Q})$ . Now, among the  $x'_i$  with trivial stabilizer, say that two of them are equivalent if they are in the same  $\Gamma'_v$ -orbit. Now take a representant  $x'_{i_0}$  of every equivalence class, and take its approximation point to be  $x''_{i_0} = x'_{i_0}$ . And if  $x'_i = g.x'_{i_0}$ , take  $x''_i = g.x''_{i_0}$ . We thus get an approximation of  $(T'_v, \Gamma'_v)$ : as a matter of fact, since any  $g \in \Gamma'_v \subset \text{Isom}(\mathbb{R})$  can be written as the product of  $s$  and of the translations  $g_i$ ,  $g$  stays close to its image in  $\text{Isom}(\mathbb{Q})$ .

The *moreover* part of the proposition is clear by construction of the  $x''_i$ .  $\square$

*Remark 2.5.4.* If  $(T, \Gamma)$  is a small action of a hyperbolic group, this proposition shows there can't be homogeneous components. As a matter of fact,  $\Gamma'_v$  must contain  $\mathbb{Z}^2$

since the orbits of  $\Gamma'_v$  are dense in  $\mathbb{R}$ . Now, we have an exact sequence

$$1 \rightarrow N_v \rightarrow \Gamma_v \rightarrow \Gamma'_v \rightarrow 1.$$

So there is a subgroup of  $\Gamma_v$  which is an extension of  $\mathbb{Z}^2$  by a finite or virtually cyclic group. Hence, this subgroup can't contain  $F_2$ , so must be virtually cyclic or finite since it is a subgroup of the hyperbolic group  $\Gamma$ . This contradicts the fact that this subgroup maps onto  $\mathbb{Z}^2$ .

## 2.6 Getting independent generators in the non homogeneous minimal components

**Definition 2.6.1.** *In a system of isometries  $X$ , the generators are termed to be independent if no  $\overset{\circ}{X}$ -word has a fixed point.*

In this section, we start with a vertex  $v$  of  $\mathcal{G}'$  corresponding to a non homogeneous minimal component  $\Sigma_v$  given by the system of isometries  $X_v$ . Using the fact that arc stabilizers are trivial in  $T'_v$ , we aim to change the system of isometries by a finite sequence of Rips moves to get a new system of isometries with independent generators (see [Pau4]).

The heart of the argument is the following:

**Theorem 2.6.1 ([Gab2]).** *Let  $X$  be a system of isometries without homogeneous component on a multi-interval. We can restrict each generator to a (maybe empty) sub-interval of its domain so that the obtained system of isometries  $X'$  has the same orbits as  $X$  and has independent generators.*

Start with the system of isometries  $X = X_v$ , whose set of generators is  $S = \{\varphi_j\}_{j=1}^n$ , and consider thanks to Theorem 2.6.1 a system  $X'$  of isometries with independent generators, with domain  $D$ , whose set of generators is  $S' = \{\varphi'_j\}_{j=1}^n$  such that  $X'$  has the same orbits as  $X$ , and  $\varphi'_j$  is a restriction of  $\varphi_j$  to a sub-interval of  $\text{dom } \varphi_j$ . We next use the Rips base subdivision to cut each generator  $\varphi_j$  at the points of  $\partial(\text{dom } \varphi'_j)$  to get a system of isometries  $X_1$  whose set of generators is  $S' \cup S_1$ . Since  $X_1$  and  $X'$  have the same orbits, each generator  $\varphi$  of  $S_1$  is an isometry between two sub-intervals of  $D$  such that  $x$  and  $\varphi(x)$  are in the same  $X'$ -orbit for all  $x$  in  $\text{dom } \varphi$ . Now  $X'$  has segment closed property (see page 60). Hence, we can cut each  $\varphi \in S_1$  into finitely many restrictions  $\varphi_k$  to sub-intervals not reduced to one point such that on each of them, we have a  $S'$ -word  $w'_k$  which agrees with  $\varphi_k$  on  $\text{dom } \varphi_k$ .

We now introduce a new Rips move: the base sliding move (see Rips move 4 in [BF2]: the same definition works even if the set of curves of  $\mathcal{C}$  is infinite). We are given a generator  $\varphi$  whose range is a subset of the domain of a word  $w$  whose letters don't contain  $\varphi$  (or  $\varphi^{-1}$ ). We then change  $\varphi$  to  $\varphi' = w \circ \varphi$  (this corresponds to sliding the base of  $\varphi$  along  $w$ ) and we change the set  $\mathcal{C}$  of curves naturally.

Here, we slide the  $\varphi_k$  along  $w_k^{-1}$  using the sliding Rips move described above. We get a new system of isometries  $X_2$  whose set of generators is  $S' \cup S_2$  where the generators in  $S_2$  are restrictions of the identity to non trivial subintervals. Since  $\Gamma'_v$  acts with no arc stabilizer on  $T'_v$ , the generators in  $S_2$  must be trivial in  $\Gamma'_v$ , so forgetting them is a Rips move which leads us to a resolution with independent generators.

## 2.7 Approximation of exotic components

**Definition 2.7.1.** *Let  $X$  be a non homogeneous minimal system of isometries, with independent generators. Consider the pruning process described in section 2.7.1 (also see [Gab1] or process 1 in [BF2]).*

*The system of isometries  $X$  is called of surface type if the pruning process is finite, and exotic if it is infinite.*

**Proposition 2.7.2.** *Let  $X_v$  be a pure minimal exotic system of isometries with independent generators,  $\Sigma_v$  the corresponding 2-complex, and  $\rho'_v : \pi_1(\Sigma_v) \rightarrow \Gamma'_v$  be a morphism whose kernel is normally generated by loops contained in leaves of  $\Sigma_v$ . Consider the corresponding action  $(T'_v, \Gamma'_v)$ .*

*Then, given a finite set of points  $p'_e \in T'_v$  fixed by some subgroups  $\Gamma'_e \subset \Gamma'_v$ , there is a simplicial approximation  $(T''_v, \Gamma'_v)$  of  $(T'_v, \Gamma'_v)$  such that the approximation point  $p''_e$  of  $p'_e$  is fixed by  $\Gamma'_e$  in  $(T''_v, \Gamma'_v)$ .*

*Moreover, any subgroup  $\Gamma'_0 \subset \Gamma'_v$  fixing a point in  $T'_v$  fixes a point in  $T''_v$ , and for  $g \in \Gamma'_v$  ( $g.p'_{e_1} = p'_{e_2}$ )  $\Rightarrow$  ( $g.p''_{e_1} = p''_{e_2}$ ).*

The strategy is the following: because the generators are independent, the curves of  $\mathcal{C}_v$  are contained in a finite graph whose components are contained in a leaf. Now, perform the pruning process described for instance in [Gab1] (also see process I of the Rips machine in [BF2]) in order to be able to find a band which doesn't meet the curves in  $\mathcal{C}_v$ . Then, like in [BF3], we can narrow this band by a small amount and preserve the fact that the curves in  $\mathcal{C}_v$  are contained in leaves and normally

generate  $\ker \rho_v$ . This operation turns our exotic component into a finite union of simplicial or exotic components, and the (finite) number of ends of singular leaves has decreased. Since this operation doesn't increase the arc stabilizers, after a finite number of steps, we get a simplicial approximation of  $T'_v$  with trivial arc stabilizers.

### 2.7.1 The pruning process and the limit lamination

Let  $X^0 = X_v$ ,  $\Sigma^0 = \Sigma_v$  and  $D^0 = D_v$  denote the (pure) system of isometries, the foliated 2-complex, and the domain of the exotic component corresponding to our vertex  $v$ . Recall that the generators are independent in  $X^0$ . Also recall that the tree  $T'_v$  is the leaf space made Hausdorff of the covering of  $\Sigma^0$  corresponding to the morphism  $\rho'^0 : \pi_1(\Sigma^0) \rightarrow \Gamma'_v$  and that its kernel is normally generated the curves of  $\mathcal{C}_v$ . Now,  $\mathcal{C}_v$  may be infinite but since the generators are independent, the curves of  $\mathcal{C}_v$  are contained in the finite graph  $C$ , which is the union of all immersed closed curves contained in a leaf.

Denote  $L^0$  the set of points in  $D^0$  that belong to only one base in  $\Sigma^0$  (by minimality, every point in  $D^0$  belongs to at least one base).  $L^0$  is a finite union of intervals, it is open in  $D^0$ , and by purity, the closures of the components of  $L^0$  are disjoint.

**Lemma 2.7.3 ([GLP1]).** *If  $L^0 = \emptyset$ ,  $\Sigma$  is a surface component and every point of  $D^0$  but a finite number of them belong to exactly two bases.*

As a matter of fact since  $L^0 = \emptyset$ , the pruning process cannot be continued, and  $\Sigma$  is a surface component. Now, since the generators are independent, we have the following theorem:

**Theorem 2.7.1 ([Lev2, GLP1]).** *If  $X$  is a minimal system of isometries with independent generators, then the total length of its domain  $D$  equals the sum of the lengths of the domains of the generators.*

Therefore, if  $L^0$  is empty, it means that every point of  $D^0$  but a finite number of them belong to exactly two bases.  $\square$

Let's now describe the Rips pruning move in  $\Sigma$ : we change  $D^0$  to  $D^1 = D^0 - L^0$ , the new set of generators consists in the restrictions of the generators to  $D^1$ . Denote by  $X^1$  the system of isometries thus obtained. We don't change the base point if  $* \notin L^0$ , and we slide it along the pruned band otherwise. We thus get an isomorphism between  $\pi_1(\Sigma^1)$  and  $\pi_1(\Sigma^0)$ , so we have a well defined morphism  $\rho'^1 : \pi_1(\Sigma^1) \rightarrow \Gamma'_v$ . Note that the curves of  $\mathcal{C}_v$  and  $C$  have been preserved since an immersed curve



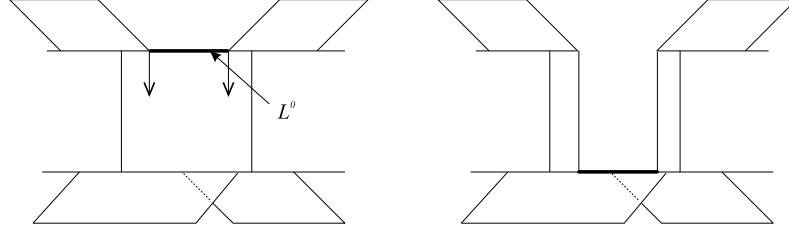


Figure 2.3: Interior pruning

contained in a leaf cannot go through a point belonging to only one base. Therefore, the kernel of  $\rho'^1 : \pi_1(\Sigma^1) \rightarrow \Gamma'_v$  is normally generated by free homotopy classes of loops contained in leaves. The corresponding action  $(T^1, \gamma'_v)$  is isomorphic to  $(T^0, \Gamma'_v) = (T'_v, \Gamma'_v)$ .

This pruning operation removes all the points in  $D^0$  which are terminal vertices of their leaf. Also note that the generators remain independent, that  $X$  is still pure, and that by Lemma 2.7.3,  $L^1$  can't be empty (see [Gab1]). So we can iterate this process as long as we like, and we'll denote with an exponent  $j$  the sets corresponding to the  $j$ th resolution.

For every component  $I$  of  $L^j$ , we distinguish three kinds of prunings:

1. *total* pruning if  $\bar{I}$  is a full component of  $D^j$
2. *boundary* pruning if  $\bar{I}$  contains a point in  $\partial D^j$
3. *interior* pruning if  $\bar{I} \subset \overset{\circ}{D}^j$ .

According to [BF2, Gab1], after a finite number of pruning operations on  $X^0$ , there will only be interior prunings. By changing  $X^0$  to some  $X^j$ , we can assume there are only interior prunings.

**Definition 2.7.4.**  $\mathcal{L}^\infty = \bigcap_j \Sigma^j$  is termed the *limit lamination* and  $D^\infty = \bigcap_j D^j$  the *limit set*.

From now on, we'll reserve the name *edge* of a band for its edges which are contained in a leaf (recall that its transverse edges are called bases). The fact that there are only interior prunings implies that an edge of a band in  $\Sigma^j$  never can be pruned, and must therefore remain in the limit lamination. There is a natural foliation on  $\mathcal{L}^\infty$  given by the trace of the foliation of  $\Sigma^j$ : a leaf of  $\mathcal{L}^\infty$  is the intersection of a leaf

of  $\Sigma^j$  with  $\mathcal{L}^\infty$  and this definition is independent of  $j$ . Every  $\mathcal{L}^\infty$ -leaf is connected and has a natural simplicial structure for which the vertices are the points of intersection of the leaf with  $D^\infty$  and the edges are defined in the natural way. A leaf of  $\mathcal{L}^\infty$  can be seen as the subset of a  $\Sigma^j$ -leaf corresponding to the union of simplicial immersions of  $\mathbb{R}$  in this leaf. We term *trunk* of a leaf  $L$  in  $\Sigma^j$  the  $\mathcal{L}^\infty$ -leaf  $L \cap \mathcal{L}^\infty$  (see [Gab1]).

### 2.7.2 Narrowing a band

The goal of this section is to find a band which doesn't meet the curves of  $\mathcal{C}_v$  and then to narrow it like in [BF3].

First, we want to find a  $j$  and a band in  $\Sigma^j$  which doesn't meet the curves in  $\mathcal{C}_v$ . Recall that these curves are contained in the finite graph  $C$  consisting of all immersed closed curves contained in a leaf. Now, the pruning process doesn't change  $C$ , but the number of bands in  $\Sigma^j$  keeps growing (since there are only interior prunings). Therefore, after a sufficient number of pruning operations, we can find a band  $B = [l, r] \times (0, 1)$  in some  $\Sigma^j$  which doesn't meet  $C$  and the curves in  $\mathcal{C}_v$ .

From now on, we won't do any more pruning so we forget the exponent  $j$  in our notations ( $D = D^j$ ,  $\Sigma = \Sigma^j$ ,  $\rho : \pi_1(\Sigma) \rightarrow \Gamma'_v$  etc.). We consider the new 2-complex  $\Sigma_\delta$  depending on a small  $\delta > 0$  obtained by narrowing the band  $B$  of a width  $\delta$  on the left (see figure 2.4: we change  $B = [l, r] \times (0, 1)$  to  $B_\delta = [l + \delta, r] \times (0, 1)$ ). The inclusion  $\Sigma_\delta \subset \Sigma$  being an homotopy equivalence,  $\rho$  provides an onto morphism  $\rho_\delta : \pi_1(\Sigma_\delta) \rightarrow \Gamma'_v$ . Denote  $\bar{\Sigma}$  and  $\bar{\Sigma}_\delta$  the covering spaces corresponding to  $\rho$  and  $\rho_\delta$  respectively. The kernel of  $\rho_\delta$  is normally generated by the free homotopy classes of the curves in  $\mathcal{C}_v$  which still are contained in leaves. Therefore, we can consider the action  $(T_\delta, \Gamma'_v)$  obtained by making Hausdorff the leaf space of  $\bar{\Sigma}_\delta$ . It has trivial arc stabilizers since there is a natural morphism of  $\mathbb{R}$ -trees from  $T_\delta$  to  $T'_v$  induced by the inclusion  $\bar{\Sigma}_\delta \subset \bar{\Sigma}$ .

We now want to prove that, if  $\delta$  is small enough,  $T_\delta$  is close to  $T'_v$  for the equivariant Gromov topology. So take an  $\varepsilon > 0$ , a finite set of points  $\{x'_i\} \subset T'_v$ , and a finite set  $F$  of elements in  $\Gamma'_v$ , and choose in  $\bar{\Sigma}$  a preimage  $\bar{x}_i$  of  $x'_i$  which lies in some lift of  $D$ .  $\bar{x}_i$  can also be seen as a point of  $\bar{\Sigma}_\delta$  and if necessary, we change  $\bar{x}_i$  to another point in the same  $\bar{\Sigma}$ -leaf so that the  $\bar{\Sigma}_\delta$ -leaf containing  $\bar{x}_i$  has the same setwise stabilizer as the  $\bar{\Sigma}$ -leaf containing  $\bar{x}_i$  (this is possible because the narrowed band  $B$  doesn't cut  $C$ ). We want to take as approximation of  $x'_i$  the image  $x''_i$  in  $T_\delta$  of  $\bar{x}_i$ . Now, given two points  $g.x'_i$  and  $h.x'_j$  with  $g, h \in F$ , we want to estimate

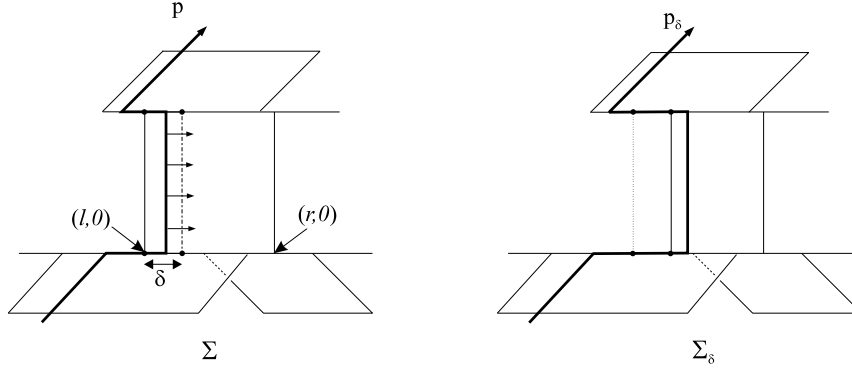


Figure 2.4: Narrowing a band

the difference between  $d_{T'_v}(g.x'_i, h.x'_j)$  and  $d_{T'_v}(g.x''_i, h.x''_j)$ . Choose a reference path joining  $g.\bar{x}_i$  and  $h.\bar{x}_j$  in  $\Sigma_\delta$  and denote  $p_0$  its projection in  $\Sigma_\delta$  or  $\Sigma$ . Given a path  $p$  in  $\Sigma$  (resp.  $\Sigma_\delta$ ), we denote  $\|p\|_\Sigma$  (resp.  $\|p\|_{\Sigma_\delta}$ ) the length of this path relative to the transverse measure of  $\Sigma$  (resp.  $\Sigma_\delta$ ). Denote  $p \sim p_0$  when  $p$  is homotopic to  $p_0$  (rel. endpoints) modulo  $\ker \rho$ . One has :

$$d_{T'_v}(g.x'_i, h.x'_j) = \inf_{\substack{p \sim p_0 \\ p \subset \Sigma}} \|p\|_\Sigma$$

and

$$d_{T'_v}(g.x''_i, h.x''_j) = \inf_{\substack{p \sim p_0 \\ p \subset \Sigma_\delta}} \|p\|_{\Sigma_\delta}$$

Since  $\Sigma_\delta \subset \Sigma$ , one clearly has

$$d_{T'_v}(g.x'_i, h.x'_j) \leq d_{T'_v}(g.x''_i, h.x''_j)$$

Now choose a path  $p \sim p_0$  in  $\Sigma$ , which is the composition of arcs contained in  $D$  and of arcs contained in leaves, and such that :

$$d_{T'_v}(g.x'_i, h.x'_j) \leq \|p\|_\Sigma \leq d_{T'_v}(g.x'_i, h.x'_j) + \varepsilon/2.$$

The path  $p$  intersect  $B$  in a finite number  $r$  of vertical segments (contained in leaves). By pushing the segments of  $p \cap B$  by at most  $\delta$  on the right in  $B$ , we get a path  $p_\delta \subset \Sigma_\delta$  such that :

$$\|p_\delta\|_{\Sigma_\delta} \leq \|p\|_\Sigma + 2r\delta$$

Taking  $\delta \leq \varepsilon/4r$ , we get

$$d_{T'_v}(g.x''_i, h.x''_j) \leq d_{T'_v}(g.x'_i, h.x'_j) + \varepsilon$$

Taking  $\delta$  sufficiently small so that this estimation holds for all pairs  $(g.x'_i, h.x'_j)$ , we get that  $T_\delta$  is close to  $T'_v$ .

Now, if  $\Gamma'_e \subset \Gamma'_v$  fixes a point in  $T'_v$ , it is in the setwise stabilizer of the corresponding leaf in  $\bar{\Sigma}$  because its leaf space is Hausdorff (see prop. 2.4.1 (7)). Hence, the approximation  $p''_e$  of a point  $p'_e$  fixed by  $\Gamma'_e$  is still fixed by this group because we have chosen  $\bar{p}_e$  so that its  $\bar{\Sigma}_\delta$ -leaf is setwise stabilized by  $\Gamma'_e$ . This also proves that any group  $\Gamma'_0 \subset \Gamma'_v$  fixing a point in  $T'_v$  must fix a point in  $T''_v$ , hence the *moreover* part of the proposition is clear.

Since we want to decrease the number of ends of singular leaves of  $\Sigma$ , we must first ensure not to increase it while narrowing the band. So we choose  $\delta$  so that the new left edge of the band is in a singular leaf of  $\Sigma$  (this can be done with  $\delta$  arbitrarily small since every leaf is dense in  $\Sigma$ ). Doing so, the number of singular leaves may have increased since some singular leaf could be split into several singular leaves in  $\Sigma_\delta$ , but to each end of a singular leaf of  $\Sigma_\delta$  injectively corresponds to an end of a singular leaf of  $\Sigma$ . Thus, the number of ends of singular leaves hasn't increased.

### 2.7.3 Ends of singular leaves: how to make leaves compact

Let's state the first theorem we'll use in this section:

**Theorem 2.7.2 ([BF2, Gab1]).** *Consider an exotic minimal system of isometries on a multi-interval  $D$ . Then, every leaf has a finite number of ends and is quasi-isometric to a tree. Moreover, the set of points whose leaf has only one end is a dense  $G_\delta$  in  $D$ , there are uncountably many leaves with 2 ends, and finitely many leaves with 3 ends or more.*

First, after the pruning process and the band narrowing described in sections 2.7.1 and 2.7.2, we have created no surface component. As a matter of fact, in a surface component, all but finitely many leaves are lines, and in an exotic component, leaves have generically one end. Since narrowing a band doesn't increase the number of ends of any leaf, and since every Rips move we used preserves the number of ends of leaves, we can't have created new surface components. What's more, we have created no homogeneous component since the generators are still independent which is impossible in a homogeneous component (see [Gab2]).

It may happen that  $\Sigma_\delta$  hasn't pure components. In this case, we perform finitely many domain cuts so that  $\Sigma_\delta$  has pure components. This gives a graph of actions  $\mathcal{H}$

as in section 2.3. The groups corresponding to edges with positive length are trivial and the vertex actions have trivial arc stabilizers since  $T_\delta$  has trivial arc stabilizers.

If some of the leaves of  $\Sigma_\delta$  are non-compact (i. e. if  $\Sigma_\delta$  has some exotic components), we can perform again the pruning and narrowing of sections 2.7.1 and 2.7.2 on a vertex action. To show that we can get rid of exotic component by a finite number of applications of sections 2.7.1 and 2.7.2, we consider the sum  $E(\Sigma)$  of the number of ends of all singular leaves in  $\Sigma$ . All the Rips moves we used preserve  $E(\Sigma)$  since they don't create new singular leaves (this is clear for pruning and sliding operations, and the base and domain subdivisions we use are done at points whose leaves are already singular). If  $V(\mathcal{H})$  denotes the set of vertices of  $\mathcal{H}$ , this means that  $E(\Sigma_\delta) \geq \sum_{w \in V(\mathcal{H})} E(\Sigma_w)$ .

So now, there remains to show that  $E(\Sigma_\delta) < E(\Sigma)$ . Since narrowing a band doesn't increase the number of ends of any leaf, we only have to find a singular leaf whose number of ends has strictly decreased during the narrowing of the band.

**Theorem 2.7.3 ([Gab1]).**  *$D^\infty$  has no isolated points (it is a Cantor set). Moreover, the union of the trunks of singular leaves of  $\Sigma$  is dense in  $\mathcal{L}^\infty$ .*

Since the generators are independent, every  $\Sigma$ -leaf is a tree with finitely many extra edges attached on it (i. e. its fundamental group is finitely generated): a loop in a leaf corresponds to a word having a fixed point, so one of the edges of the loop must be singular; and since there are finitely many generators, there are finitely many singular edges. Finally, since every leaf has a finite number of ends, its trunk is the union of a compact graph and of finitely many disjoint semi-lines. Since a pruning operation removes the terminal vertices of a leaf, it is clear that any leaf has the same set of ends as its trunk when its trunk is non-empty. Note that the trunk of a singular leaf must be non-empty if there are no interior prunings to be done.

Now, remember that the left edge of the band  $B$  lies in  $\mathcal{L}^\infty$  (since in the construction of  $\mathcal{L}^\infty$  by the pruning process, there were no more total and boundary prunings). Since  $D^\infty$  has no isolated points and empty interior, there will be infinitely many prunings near the left edge of  $B$ . So, some edges of bands will accumulate near  $B$ . Recall that they lie in the trunk of a singular leaf since only interior prunings occur any more. Since there are finitely many singular leaves and that this number doesn't increase during the pruning process, the trunk  $\mathcal{L}$  of a singular leaf must accumulate on the left edge of  $B$ . This means that one of the semi-lines in  $\mathcal{L}$  accumulates on the left edge of  $B$ , and so intersects  $[l, l + \delta[ \times (0, 1)$  an infinite number of times. This implies that the end corresponding to this semi-line doesn't subsist in  $\Sigma_\delta$ . So we

have shown:  $E(\Sigma_\delta) < E(\Sigma)$ . □

## 2.8 The surface components

**Proposition 2.8.1.** *Let  $X_v$  be a pure minimal system of isometries of surface type with independent generators,  $\Sigma_v$  the corresponding 2-complex, and  $\rho'_v : \pi_1(\Sigma_v) \rightarrow \Gamma'_v$  be a morphism whose kernel is normally generated by loops contained in leaves of  $\Sigma_v$ . Consider the corresponding action  $(T'_v, \Gamma'_v)$ .*

*Then, given a finite set of points  $p'_e \in T'_v$  fixed by some subgroups  $\Gamma'_e \subset \Gamma'_v$ , there is a simplicial approximation  $(T''_v, \Gamma'_v)$  of  $(T'_v, \Gamma'_v)$  such that the approximation point  $p''_e$  of  $p'_e$  is fixed by  $\Gamma'_e$  in  $(T''_v, \Gamma'_v)$ .*

*Moreover, any subgroup  $\Gamma'_0 \subset \Gamma'_v$  fixing a point in  $T'_v$  fixes a point in  $T''_v$ , and for  $g \in \Gamma'_v$  ( $g \cdot p'_{e_1} = p'_{e_2}$ )  $\Rightarrow$  ( $g \cdot p''_{e_1} = p''_{e_2}$ ).*

*Proof.* Let  $\Sigma_v$  be a such 2-complex. After performing finitely many prunings, all but finitely many points of the domain  $D$  lie in two bases (see Prop. 2.7.3). The purity of  $\Sigma_v$  (every  $\mathring{X}$ -orbit is dense) implies that  $\Sigma_v$  is a compact surface  $S$  with boundary endowed with a minimal measured foliation. Each boundary component is contained in a leaf and purity implies that the only non simply connected leaves are the boundary leaves and that they have cyclic fundamental group. Thus, the curves of  $\mathcal{C}_v$  only run in these boundary components.

Now, we approximate the foliation on  $S$  by a rational foliation (see [FLP]) with no leaf parallel to the boundary. The foliation thus obtained has compact leaves. We get in this way a simplicial action  $(T''_v, \Gamma'_v)$  close to  $(T'_v, \Gamma'_v)$  for the translation length topology. Its arc stabilizers are the image in  $\Gamma$  of the fundamental group of families of finite orbits. Since  $S$  is a surface, its regular leaves are circles, so families of finite orbits have cyclic fundamental group, so the arc stabilizers must be cyclic.

Now, since we have here small actions and since  $\Gamma'_v$  contains  $F_2$ , the translation length topology coincide with the equivariant Gromov topology ([Pau2]), so  $(T''_v, \Gamma'_v)$  is an approximation of  $(T'_v, \Gamma'_v)$  in the Gromov topology. So consider an approximation point  $p''_e \in T''_v$  of  $p'_e$ . If  $\text{Stab}_{T'_v}(p'_e) \neq \{1\}$ ,  $p'_e$  is the image in  $T'_v$  of a boundary component of  $\bar{\Sigma}'_v$  stabilized by  $\Gamma'_e$ . In place of  $p''_e$ , we want to take as approximation point of  $p'_e$  the image  $p'''_e$  in  $T''_v$  of this boundary component. Now, let  $g$  is a generator of the (cyclic) global stabilizer in  $\Gamma'_v$  of our boundary component of  $\bar{\Sigma}'_v$ .  $p'''_e$  is the only fixed point of  $g$  because the foliation we consider on  $S$  has no leaf parallel to

the boundary (and because the leaf space of its covering space is Hausdorff since the leaves of  $S$  are compact). Since  $g.p'_e = p'_e$ , the point  $g.p''_e$  must be close to  $p''_e$ . This implies that  $p''_e$  must be close to the unique fixed point of  $g$  in  $T''_v$  which is  $p'''_e$ , so we can take  $p'''_e$  in place of  $p''_e$  as approximation point of  $p'_e$ .

The *moreover* part of the proposition is now clear using  $p'''_e$  as approximation point of  $p'_e$ .  $\square$

## 2.9 Bounded Backtracking

**Definition 2.9.1 ([GJLL]).** *An action  $(T, F)$  of a finitely generated free group  $F$  has bounded backtracking if given  $Q \in T$ , there exists a constant  $C > 0$  such that, if  $v, w, vw$  have word length satisfying  $|vw| = |v| + |w|$ , then  $d(v.Q, [Q, vw.Q]) \leq C$ .*

In order to prove corollary 2.0.2 about bounded backtracking, we first prove the following Proposition:

**Proposition 2.9.2.** *Let  $F = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$  be a finitely generated free group. Let  $(T, F)$  be a small simplicial action of  $F$ , and  $Q \in T$ . Then  $(T, F)$  has bounded backtracking with constant  $C = \sum_{i=1}^n d(Q, g_i.Q)$ .*

*Proof.* Consider  $T_1$  the Cayley graph of  $F$  relative to its free basis  $\{g_1, \dots, g_n\}$ , and let  $f_Q$  be the equivariant map that linearly sends the edge  $[w, w.g_i]$  to  $[w.Q, w.g_i.Q] \subset T$ .

**Definition 2.9.3.** *A map between  $\mathbb{R}$ -trees  $f : T_1 \rightarrow T_2$  has backtracking bounded by  $C$  if for any injective path  $c : [0, 1] \rightarrow T_1$  such that  $f \circ c(0) = f \circ c(1)$ , the radius*

$$\sup_{t \in [0, 1]} d(f \circ c(0), f \circ c(t))$$

*of  $f \circ c([0, 1])$  is bounded by  $C$ .*

**Lemma 2.9.4.** *If the equivariant map  $f_Q$  from the Cayley graph  $T_1$  of  $F$  to  $T$  has backtracking bounded by  $C$ , then  $(T, F)$  has backtracking (rel.  $Q$ ) bounded by  $C$ .*

*Conversely, if  $(T, F)$  has backtracking bounded by  $C$  (rel.  $Q$ ), then  $f_Q$  has backtracking bounded by  $C + \sup_{i=1}^n d(Q, g_i.Q)$ .*

*Proof of Lemma 2.9.4.* If  $|vw| = |v| + |w|$ , it means that  $v \in [1, vw]$  in  $T_1$ . Hence there is a subsegment  $[A, B] \subset [1, vw]$  containing  $v$  such that  $f_Q(A) = f_Q(B) \in [Q, vw.Q]$  which implies that  $d(v.Q, [Q, vw.Q]) \leq C$  so  $(T, F)$  has backtracking bounded by  $C$ .

Conversely, the fact that  $(T, F)$  has backtracking bounded by  $C$  rel.  $Q$  means that every segment  $[A, B]$  between two vertices of  $T_1$  is mapped by  $f_Q$  in the  $C$ -neighbourhood of  $[f_Q(A), f_Q(B)]$ . Now, given an injective path  $c$  in  $T_1$  such that  $f_Q \circ c(0) = f_Q \circ c(1)$ , take the smallest segment  $[A, B]$  containing  $c$  with endpoints at vertices of  $T_1$ . Then,  $f_Q(A)$  and  $f_Q(B)$  are at distance from  $f_Q \circ c(0)$  bounded by  $\sup_i d(Q, g_i.Q)$ . And  $f_Q([A, B])$  is in the  $C$ -neighbourhood of  $[f_Q(A), f_Q(B)]$ . Since  $c([0, 1]) \subset [A, B]$ , this proves the lemma.  $\square$

Now, the proof of Proposition 2.9.2 reduces to show that  $f_Q$  has backtracking bounded by  $\sum_{i=1}^n d(Q, g_i.Q)$ . Note that Definition 2.9.3 doesn't depend on the metric on  $T_1$ . Now, if some  $d(Q, g_i.Q)$  are 0, consider  $T_2$  the tree obtained by collapsing the corresponding edges in  $T_1$ . The map  $f_Q$  factors through the quotient map  $q$  into  $f_1$ . Since  $q$  preserves alignment,  $f_Q$  and  $f_1$  have the same backtracking bounds, so the proof reduces to bound the backtracking of  $f_1$ . Consider the path length on  $T_2$  which makes  $f_1$  an isometry in restriction to every edge. Now subdivide  $T$  so that  $Q$  is a vertex of  $T$  and subdivide  $T_2$  so that  $f_1$  is simplicial. Note that  $(T_2, F)$  has trivial arc stabilizers. Therefore,  $f_1$  satisfy the  $(*)$  condition of prop. 2.9.6. Then, the proof reduces to Proposition 2.9.6 since  $\sum_{i=1}^n d(Q, g_i.Q) = \text{Vol}_f(T_1)$ .  $\square$

**Definition 2.9.5.** *Let  $(T, F)$  be a small simplicial action of the finitely generated free group  $F$ . The free volume  $\text{Vol}_f(T)$  of  $T$  is the sum of the lengths of edges of  $T/F$  with trivial stabilizer.*

*Remark.* The quotient graph  $T/F$  must be finite because of minimality: the convex hull of  $Q$  and  $\{g_i.Q\}$  meets every orbit. This means that  $\text{Vol}_f(T) \leq \sum_{i=1}^n d(Q, g_i.Q)$ .

**Proposition 2.9.6.** *Let  $(T', F)$  and  $(T, F)$  be small minimal simplicial actions and  $f : T' \rightarrow T$  a simplicial equivariant map which isometrically embeds every edge. Assume that*

*For all edges  $e \neq e'$  in  $T'$ ,*

$$f(e) = f(e') \Rightarrow \text{Stab}_{T'} e = \{1\} \text{ or } \text{Stab}_{T'} e' = \{1\} \quad (*)$$

*Then  $f$  has backtracking bounded by  $\text{Vol}_f(T') - \text{Vol}_f(T)$ .*



*Remark.* There are silly counterexamples to this proposition if (\*) doesn't hold: consider the lifts to the universal cover of the maps between graphs of groups shown on figure 2.5. They satisfy  $\text{Vol}_f(T') = \text{Vol}_f(T)$  and have bounded backtracking but with constant  $C \neq 0$ .

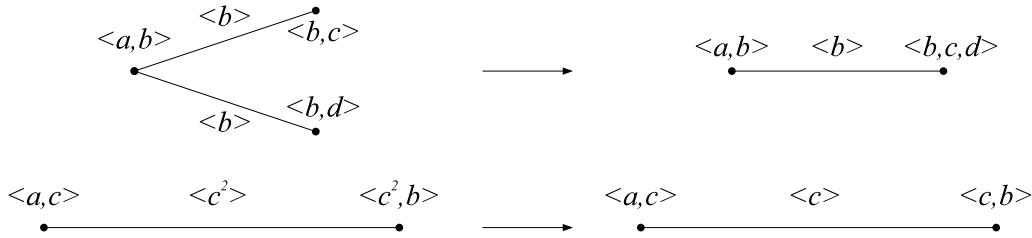


Figure 2.5: Silly folds which don't satisfy (\*)

*Proof.* First, it is easy to check that if  $f = f_1 \circ f_2$  for 1-lipschitz equivariant maps  $f_i$  with backtracking bound  $BBT(f_i)$ , then  $f$  has backtracking bound  $BBT(f) = BBT(f_1) + BBT(f_2)$ .

In light of this remark, we want to decompose  $f$  into a product of Stallings' folds satisfying (\*). First of all, a Stallings' fold (or fold for short) of a simplicial action is a map given by equivariantly identifying 2 adjacent edges with same length. [Sta, BF1] show that under general hypotheses, an equivariant simplicial map between two simplicial trees which isometrically embeds edges is a composition of Stallings' folds. Here, we need a little more precise statement:  $f$  is a composition of folds  $f_i : T_i \rightarrow T_{i+1}$  that satisfy (\*). Then the proof will reduce to the case of folds.

FIRST STEP: DECOMPOSITION INTO STALLINGS' FOLDS. By subdividing  $T$  (and  $T'$ ), we may assume that each edge of  $T$  embeds into  $T/F$  (this prevents inversions and means that the endpoints of an edge can't be in the same orbit). Then since  $T$  is minimal,  $f$  is onto. If  $f$  is one-to-one, there is nothing to prove since it would be isometric. We proceed by induction on the sum of the total number of edges and of the number of edges with trivial stabilizer in  $T'/F$ .

Take some vertices  $x \neq y$  of  $T'$  such that  $f(x) = f(y)$ . Thus,  $f_{|[x,y]}$  cannot be locally injective. This means that there are 2 adjacent edges  $e_1, e_{-1}$  in  $[x, y]$  with same length that are identified through  $f$ . We first assume that  $e_1$  and  $e_{-1}$  lie in distinct orbits. Then  $f$  factors through the fold  $q : T' \rightarrow T_1$  which equivariantly identifies  $e_1$  and  $e_{-1}$ . Denote  $f_1 : T_1 \rightarrow T$  the induced map. Note that  $f_1$  is

isometric in restriction to edges of  $T_1$ . Since  $(*)$  holds, so does  $q$ . Now take two edges  $E \neq E' \in T_1$  such that  $f_1(E) = f_1(E')$ . Since  $q$  is a fold between edges that lie in distinct orbits,  $E$  has a preimage in  $T'$  with same stabilizer as  $E$  and the same is true for  $E'$ . Thus, since  $f$  satisfies  $(*)$ , so does  $f_1$ . The total number of edges in  $T_1/F$  is smaller than in  $T'/F$ , and the number of edges with trivial stabilizers hasn't increased so the result follows by induction in this case.

Now assume that we cannot perform a fold between edges in distinct orbits. Then any two adjacent edges  $e_1$  and  $e_{-1}$  that are identified through  $f$  must lie in the same orbit. Since  $f$  satisfies  $(*)$ , we must have  $\text{Stab } e_1 = \text{Stab } e_{-1} = \{1\}$ . This means that any segment in  $T'$  with nontrivial stabilizer embeds into  $T$ . Let  $g$  be such that  $e_{-1} = g.e_1$  for  $g \in F$ . First,  $g$  fixes the common endpoint  $M$  of  $e_1$  and  $e_{-1}$  since edges embed into  $T/F$ . Now  $g \in \text{Stab}_T f(e_1)$ , so let  $h$  be a generator of  $\text{Stab}_T f(e)$ . Since  $g$  and  $h$  commute,  $g$  fixes  $M$  and  $h.M$ , so  $[M, h.M]$  must embed in  $T$  but since  $f(M) = f(h.M)$ ,  $h$  must fix  $M$ .

Now, consider the fold  $q$  that equivariantly identifies  $e_1$  and  $h.e_1$ . Denote  $T_1$  the quotient tree, and  $f_1 : T_1 \rightarrow T$  the induced map. The fold  $q$  satisfies  $(*)$  because  $f$  does. Note that  $\text{Stab}_{T_1} q(e_1) = \langle h \rangle$ . Assume now that  $f_1$  doesn't satisfy  $(*)$  and let  $E \neq E'$  be two edges of  $T_1$  with nontrivial stabilizers such that  $f_1(E) = f_1(E')$ . Since  $f$  satisfies  $(*)$ , we can assume without loss of generality that  $E = q(e_1)$  because an edge which is not in the orbit of  $q(e_1)$  has a unique preimage in  $T'$  and it has same stabilizer. Now,  $E'$  has a nontrivial stabilizer, and since  $f_1(E') = f(e_1)$ ,  $\text{Stab}_{T_1} E' \subset \text{Stab}_T f(e_1) = \langle h \rangle$  so some  $h^k$  fixes  $E'$  ( $k \neq 0$ ). Then  $E'$  can't be in the orbit of  $q(e_1)$  since an element of  $F$  sending  $q(e_1)$  to  $E'$  would be in  $\text{Stab}_T f(e_1)$  and thus would fix  $q(e_1)$ . So  $E'$  has a unique preimage  $e'$  in  $T'$ , and it is fixed by  $h^k$ . Since  $h^k$  fixes  $M$ , the minimal segment  $[M, e']$  in  $T'$  containing  $M$  and  $e'$  is fixed by  $h^k$  so must embed in  $T$ . Moreover,  $[M, e']$  doesn't contain  $e_1$  since  $e_1$  has trivial stabilizer. Now, if  $M \notin e'$ , we couldn't have  $f(e_1) = f(e')$  since  $f$  embeds  $[M, e']$ . This forces  $e'$  to be adjacent to  $e_1$ . Hence, we have a contradiction because  $e_1$  and  $e'$  are two adjacent edges that lie in distinct orbits and which are identified through  $f$ , and we could have performed a fold of the first case.

Finally, the number of edges with trivial stabilizer in  $T_1/F$  is smaller than in  $T'/F$ , and the total number of edges hasn't increased so we proved by induction that  $f$  is a product of folds verifying  $(*)$ .

SECOND STEP: BACKTRACKING BOUND FOR FOLDS.

**Lemma 2.9.7.** *Let  $q : T' \rightarrow T$  be a fold that equivariantly identifies  $e_1$  and  $e_{-1}$ . Denote  $l$  the common length of  $e_1$  and  $e_{-1}$ . Then that  $q$  has backtracking bounded by  $l$ .*

Note that this lemma doesn't use the  $(*)$  condition. The fact that  $q$  satisfies  $(*)$  just says that  $l = \text{Vol}_f(T') - \text{Vol}_f(T)$  which ends the proof of Proposition 2.9.6.  $\square$

We start with the following claim:

**Claim.** *Let  $q : T' \rightarrow T$  be the fold identifying  $e_1$  and  $e_{-1}$ . For any edge  $e$  in  $T$ , let  $q^{-1}(e)$  be the union of edges  $e'$  in  $T'$  such that  $q(e') = e$ . Then  $q^{-1}(e)$  is convex.*

*Proof of the claim.* By definition,  $q$  is the quotient map under the smallest equivariant equivalence relation on  $T$  which identifies  $e_1$  and  $e_{-1}$ . This exactly means that 2 edges  $E$  and  $E'$  are identified if one has a relation of the type

$$\begin{aligned} w^{-1}.E = e_{\varepsilon_1} \sim e_{-\varepsilon_1} = h_1.e_{\varepsilon_2} \sim h_1.e_{-\varepsilon_2} = h_1h_2e_{\varepsilon_3} \sim \dots \\ \dots \sim h_1h_2\dots h_{p-1}.e_{-\varepsilon_p} = w^{-1}.E' \end{aligned} \quad (2.1)$$

for  $h_i \in F$  sending  $e_{\varepsilon_{i+1}}$  on  $e_{-\varepsilon_i}$ . This shows that an edge which is not in the orbit of  $e_1$  or  $e_{-1}$  can't be identified with any other one. Moreover, the union of edges identified with  $e_1$  and  $e_{-1}$  is connected since two consecutive edges that appear in (2.1) have a common endpoint.  $\square$

*Proof of Lemma 2.9.7.* Consider an injective path  $c : [0, 1] \rightarrow T'$  such that  $q \circ c(0) = q \circ c(1)$ . Denote  $P = q \circ c(0) = q \circ c(1)$ . We want to prove that  $q \circ c([0, 1])$  is in the  $l$ -neighbourhood of  $P$  (recall that  $l$  is the length of  $e_1$ ). Consider  $H = (q \circ c)^{-1}(P) \subset [0, 1]$ , and consider a restriction of  $c$  to the closure  $[a, b]$  of a component of  $[0, 1] - H$ . We only need to prove that  $c|_{[a, b]}$  is in the  $l$ -neighbourhood of  $P$ . But since  $P \notin q \circ c([a, b])$ , the initial and terminal germs of  $q \circ c|_{[a, b]}$  lie in the same edge  $e$ . Thus  $c(a), c(b) \in q^{-1}(e)$ . The claim says that  $q^{-1}(e)$  is convex so  $c([a, b]) \subset q^{-1}(e)$ . If  $e$  is in the orbit of  $q(e_1)$ , then  $q \circ c([a, b]) \subset e$  has diameter at most  $l$ . And if it isn't in the orbit of  $q(e_1)$ , then  $q^{-1}(e)$  is a single edge which is embedded by  $q$ , thus  $q \circ c$  embeds  $[a, b]$  which contradicts  $q \circ c(a) = q \circ c(b) = P$ .  $\square$

**Corollary 2.0.2.** *Every small action of a finitely generated free group has bounded backtracking.*

*Proof.* Let  $(T, F)$  be a small action of a finitely generated free group and let  $Q \in T$ . Theorem 2.0.1 implies that  $(T, F)$  can be approximated by small simplicial actions for the equivariant Gromov topology. Considering approximations  $Q'$  of  $Q$ , we see like in [BFH, GJLL] that  $(T, F)$  has backtracking bounded by  $\sum_{i=1}^n d(Q, g_i \cdot Q)$  thanks to Proposition 2.9.2.  $\square$

## Chapitre 3

# Les minimaux sont presque maximaux

Les pseudo-groupes d'isométries orientables du cercle ont déjà été profondément étudiés par G. Levitt dans [Lev2]. Beaucoup des résultats obtenus ont été généralisés par P. Gusmão au cas non-orientable (voir [Gus]). Le but de ce chapitre est d'étudier la maximalité des pseudo-groupes d'isométries minimaux de type fini sur des multi-intervalles, et de voir ce que l'on peut en déduire pour des résolutions emboîtées d'une action d'un groupe de type fini.

Commençons par quelques définitions. Considérons  $\overset{\circ}{D}$  un multi-intervalle ouvert, c'est à dire une réunion finie d'intervalles ouverts bornés. Un pseudo-groupe d'isométries de domaine  $\overset{\circ}{D}$  est un ensemble  $\Lambda$  d'isométries entre des *ouverts* de  $\overset{\circ}{D}$  avec les propriétés suivantes :

- $\Lambda$  contient l'identité de  $\overset{\circ}{D}$
- $\Lambda$  est stable par restriction, par composition et par inverse
- $\Lambda$  est stable par juxtaposition : si  $\varphi : U \rightarrow V$  est une isométrie entre des ouverts  $U$  et  $V$  telle que tout  $x \in U$  possède un voisinage  $U_x \subset U$  pour lequel  $\varphi|_{U_x} \in \Lambda$ , alors  $\varphi \in \Lambda$ .

Etant donné un ensemble d'isométries partielles entre ouverts de  $\overset{\circ}{D}$  (l'ensemble des générateurs), le plus petit pseudo-groupe d'isométries contenant cet ensemble s'appelle le pseudo-groupe engendré par cet ensemble. Deux points  $x, y \in \overset{\circ}{D}$  sont dans la même orbite s'il existe un élément du pseudo-groupe qui envoie  $x$  sur  $y$ . Un pseudo-groupe est alors dit minimal si toutes ses orbites sont denses dans  $\overset{\circ}{D}$ .

Ces pseudo-groupes d'isométries apparaissent naturellement comme pseudo-groupes d'holonomie de feuilletages singuliers transversalement mesurés de codimension 1, ou dans l'étude des actions de groupes sur des arbres réels à travers les résolutions. Un pseudo-groupe est dit de type fini s'il est engendré par un ensemble fini  $S$  d'isométries entre des *intervalles* ouverts de  $\overset{\circ}{D}$ . On appelle alors  $S$  un ensemble de *générateurs* de  $\Lambda$ . Quand on ne supposera pas qu'un pseudo-groupe est de type fini on dira qu'il est *a priori de type infini*. Dans toute la suite, un pseudo-groupe sans autre mention sera supposé être de type fini.

L'inclusion définit naturellement un ordre partiel sur l'ensemble des pseudo-groupes d'isométries sur un multi-intervalle ouvert fixé  $\overset{\circ}{D}$ . La maximalité dont il s'agit ici est relative à cet ordre partiel. Etant donné un pseudo-groupe  $\Lambda$ , on a la notion d'*orbite orientée* : ce sont les orbites du pseudo-groupe sur l'espace unitaire tangent à  $\overset{\circ}{D}$ , isomorphe à  $\overset{\circ}{D} \times \{-1, 1\}$ . Il est clair qu'étant donnés deux pseudo-groupes d'isométries  $\Lambda$  et  $\Lambda'$ , on a  $\Lambda \subset \Lambda'$  si et seulement si toute orbite orientée de  $\Lambda$  est contenue dans une orbite orientée de  $\Lambda'$ . Deux pseudo-groupes sont donc égaux s'ils ont les mêmes orbites orientées.

Les définitions données pour les systèmes d'isométries ouverts ont un sens dans ce cadre. Lorsqu'une propriété ne dépend que du pseudo-groupe et pas du système de générateurs, elle sera dite *intrinsèque*. Un ingrédient important sera l'élargissement uniforme  $\Phi_t$ . Il est intrinsèque pour  $t \geq 0$  puisque deux vecteurs unitaires tangents  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont dans la même  $\Phi_t(\Lambda)$ -orbite orientée si et seulement si il existe  $|s| \leq t$  tel que  $\tau_{s\vec{u}}(\vec{u})$  et  $\tau_{s\vec{v}}(\vec{v})$  soient dans la même orbite, où  $\tau_{s\vec{u}}(\vec{u})$  note l'image du vecteur  $\vec{u}$  par la translation de vecteur  $s\vec{u}$ . On peut aussi montrer que le germe en 0 de  $\Phi_t(\Lambda)$  est aussi intrinsèque grâce à la propriété segment-closed des systèmes d'isométries fermés, mais nous n'en aurons pas besoin ici (voir [Lev2, corollaire VIII.5] pour une preuve, et [GLP2] pour la propriété segment-closed, voir aussi prop. 2.5.1 pour une définition de la propriété segment-closed). On a aussi les notions intrinsèques de pseudo-groupe connexe (si la suspension est connexe), minimal (lorsque toutes les orbites sont denses), de groupe et morphisme des périodes, de composante minimale, et de composante homogène (voir section 1.5).

**Définition.** Soit  $\Lambda$  un pseudo-groupe minimal de type fini. On note  $\mathcal{C}(\Lambda)$  l'ensemble des pseudo-groupes a priori de type infini  $\Lambda' \supsetneq \Lambda$  qui ne sont pas homogènes.

Dans le cadre des pseudo-groupes d'isométries orientables sur le cercle, G. Levitt a démontré que pour tout  $\Lambda$  minimal,  $\mathcal{C}(\Lambda)$  est fini et que son cardinal peut être borné uniquement en fonction du nombre de générateurs de  $\Lambda$  ([Lev2, Th. 6.]). Ce chapitre

s'intéresse à la généralisation de ce théorème au cas non orientable. La preuve suit ligne à ligne la preuve dans le cas orientable donnée dans [Lev2].

### 3.1 Des invariants métriques et algébriques des pseudo-groupes d'isométries

Nous rappelons dans cette partie les définitions et les propriétés des invariants  $c$  et  $e$  donnés par [Gus] ([Lev2] dans le cas orientable). Ce sont des invariants au sens où ils ne dépendent pas du système de générateurs du pseudo-groupe.

#### L'invariant algébrique $c$

Considérons  $\Lambda$  un pseudo-groupe d'isométries connexe sur un multi-intervalle ouvert  $\overset{\circ}{D}$  engendré par un ensemble fini  $S$ . Comme dans [Gus], (voir [Lev2] dans le cas orientable), on peut associer au pseudo-groupe  $\Lambda$  son espace classifiant de Haefliger  $B\Lambda$ , et donc son groupe fondamental  $\text{Gr}^+(\Lambda) = \pi_1(B\Lambda)$ . En particulier,  $\text{Gr}^+(\Lambda)$  ne dépend pas du système de générateurs.

On peut donner une définition plus simple de  $\text{Gr}^+(\Lambda)$  mais qui ne laisse pas voir que  $\text{Gr}^+(\Lambda)$  est intrinsèque : soit  $X$  le système d'isométries fermé sur le multi-intervalle fermé  $D$  associé à  $S$ , et soit  $\Sigma$  le 2-complexe obtenu par suspension de  $X$ . On dit qu'une courbe incluse dans une feuille de  $\Sigma$  est régulière si elle ne passe pas par le bord d'une bande. On considère alors le sous groupe normal  $\mathcal{L}^+$  de  $\pi_1(\Sigma)$  engendré par les classes d'homotopie libre de courbes régulières contenues dans des feuilles de  $\Sigma$  et dont l'holonomie est triviale. Le groupe  $\text{Gr}^+(\Lambda)$  est alors défini par  $\text{Gr}^+(\Lambda) = \pi_1(\Sigma)/\mathcal{L}^+$ . Naturellement, le morphisme des périodes  $P$  de  $\pi_1(\Sigma)$  dans le groupe des périodes  $\text{Per}(\Lambda)$  passe au quotient en un morphisme surjectif de  $\text{Gr}^+(\Lambda)$  dans  $\text{Per}(\Lambda)$  qu'on note encore  $P$ .

*Remarque.* Le groupe  $\text{Gr}^+(\Lambda)$  est parfois noté  $\pi_1(\overset{\circ}{D}/\Lambda)$ . Il ne faut pas le confondre avec le groupe  $G(X)$  utilisé dans [GLP1] pour démontrer le théorème de Rips sur les actions libres d'un groupe sur un arbre réel :  $G(X)$  est obtenu en quotientant  $\pi_1(\Sigma)$  par toutes les courbes incluses dans des feuilles, qu'elles soient régulières ou non, et sans condition sur l'holonomie.

Le théorème suivant donne une structure pour  $\text{Gr}^+(\Lambda)$  qui permet de définir l'invariant algébrique  $c(\Lambda)$ .

**Théorème de structure ([Gus, Th. I.1]).** *Soit  $\Lambda$  un pseudo-groupe d'isométries connexe. Alors,*

- *Le groupe  $\text{Gr}^+(\Lambda)$  est un produit libre de la forme*

$$\text{Gr}^+(\Lambda) \simeq F * \left( \underset{i=1}{\overset{p}{*}} G_i \right) * \left( \underset{j=1}{\overset{q}{*}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \right)$$

*où  $F$  est un groupe libre de type fini, et les groupes  $G_i$  sont de la forme  $G_i = \mathbb{Z}^{a_i}$  ou  $G_i = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}^{a_i}$  avec  $a_i \geq 2$ .*

- *Il y a une bijection entre les groupes  $G_i$  ( $i = 1 \dots p$ ) et les composantes homogènes de  $\Lambda$ . De plus, si  $\Lambda$  est minimal et homogène, le morphisme  $P : \text{Gr}^+(\Lambda) \rightarrow \text{Per}(\Lambda)$  est un isomorphisme.*

**Définition.** *Avec les notations du théorème de structure, on note*

$$c(\Lambda) = 2\text{Rg}(F) + 2p + q - 2.$$

*Remarque.* Si le groupe des périodes de  $\Lambda$  est non discret, alors  $c(\Lambda) \geq 0$ . En effet,  $\text{Gr}^+(\Lambda)$  ne peut pas être virtuellement cyclique puisqu'il se surjecte sur  $\text{Per}(\Lambda)$ . Donc si  $\text{Rg}(F)$  et  $p$  sont nuls,  $q$  doit être au moins égal à 3.

Supposons que  $\Lambda$  soit homogène. Le théorème de structure affirme alors que  $\text{Gr}^+(\Lambda)$  est isomorphe à un sous groupe non discret de  $\text{Isom}(\mathbb{R})$ , donc que  $c = 0$ . Réciproquement, si  $\Lambda$  est minimal mais pas homogène,  $\text{Gr}^+(\Lambda)$  est un produit libre de groupes cycliques infinis ou d'ordre 2. Comme  $\text{Per}(\Lambda)$  n'est pas discret, on voit alors que  $c(\Lambda) > 0$ . On a donc :

**Lemme 3.1.1.** *Si  $\Lambda$  est minimal, alors  $\Lambda$  est homogène si et seulement si  $c(\Lambda) = 0$ .*

Voici une autre façon de calculer  $c$  (qui dépend du système de générateurs). On construit d'abord un graphe  $\Delta'$  où pour chaque générateur  $\varphi \in S$ , on prend deux sommets  $g_\varphi, d_\varphi$  correspondant aux extrémités gauche et droite de  $\text{dom } \varphi$ , et deux autres  $g'_\varphi, d'_\varphi$  correspondant aux extrémités gauche et droite de  $\text{Im } \varphi$ . On met ensuite une arête entre  $g_\varphi$  et  $g'_\varphi$  ou  $d'_\varphi$ , et une arête entre  $d_\varphi$  et  $d'_\varphi$  ou  $g'_\varphi$  selon que  $\varphi$  préserve l'orientation ou non. Par commodité, on pourra noter  $\bar{\varphi}(g_\varphi)$  le sommet de  $\Delta'$  relié par une arête à  $g_\varphi$  (et pareillement pour  $d_\varphi$ ). On obtient ainsi un graphe à  $4k$  sommets,  $2k$  arêtes et  $2k$  composantes connexes où  $k$  est le cardinal de  $S$ .

On note  $D$  le multi-intervalle fermé associé à  $\overset{\circ}{D}$ . Aux sommets de  $\Delta'$  on associe des vecteurs unitaires tangents à  $D$  :

**Définition.** *Soit  $I \subset \overset{\circ}{D}$  un intervalle ouvert. On appelle vecteur unitaire sortant de  $I$  un vecteur unitaire tangent de  $D$  basé en une extrémité de  $I$ , et pointant vers l'extérieur de  $I$ .*



On associe alors à un sommet de  $\Delta'$  le vecteur unitaire sortant du bord de la base du générateur qui lui correspond. Partant du graphe  $\Delta'$ , on définit un graphe  $\Delta$  obtenu en identifiant deux sommets de  $\Delta'$  si les vecteurs correspondant sont dans la même  $\Lambda$ -orbite orientée. En particulier, pour un générateur  $\varphi$  de  $\Lambda$ , les sommets  $g_\varphi$  et  $\bar{\varphi}(g_\varphi) \in \Delta'$  seront identifiés dans  $\Delta$  si et seulement s'il existe  $w \in \Lambda$  qui prolonge  $\varphi$  au voisinage de  $g_\varphi$ . Par convention, l'orbite d'un vecteur tangent à  $D$   $\vec{v}$  basé en un point de  $\partial D$  est réduite à  $\{\vec{v}\}$ .

**Théorème 3.1.2 ([Gus] Th I.5, Levitt dans le cas orientable).**

$$c(\Lambda) = s - cc - |\partial D|$$

où  $s$  est le nombre de sommets de  $\Delta$ ,  $cc$  le nombre de ses composantes connexes.

*Remarque 3.1.3.* Si l'ensemble des générateurs  $S$  de  $\Lambda$  contient  $k$  isométries partielles, alors  $c(\Lambda) \leq 2k - |\partial D|$  d'après la seconde formule. L'invariant  $c$  est donc borné en fonction du nombre de générateurs de  $\Lambda$ .

La proposition suivante donne les premières propriétés de  $c$ .

**Proposition 3.1.4 ([Gus]).** *La fonction  $c(\Lambda)$  est décroissante dans le sens suivant : Soit  $\Lambda$  un pseudo-groupe d'isométries engendré par  $S$ . Supposons que  $\Lambda'$  soit engendré par un ensemble  $S'$  de la forme  $\{\varphi|_{I_\varphi} | \varphi \in S\}$  pour des intervalles ouverts non vides  $I_\varphi$ . Alors,  $c(\Lambda') \geq c(\Lambda)$ . En particulier,  $c(\Phi_{-t}(\Lambda)) \geq c(\Lambda)$  pour  $t > 0$ .*

*De plus, pour  $t > 0$  petit,  $\Delta(\Phi_{-t}(\Lambda)) = \Delta(\Lambda)$  et  $c(\Phi_{-t}(\Lambda)) = c(\Lambda)$ .*

*Preuve.* Pour montrer la première assertion, on remarque que la suspension de  $\Lambda'$  est naturellement incluse dans la suspension de  $\Lambda$  (l'inclusion induisant un isomorphisme entre les groupes fondamentaux). Comme  $\mathcal{L}^+(\Lambda') \subset \mathcal{L}^+(\Lambda)$ , on a un morphisme surjectif  $\text{Gr}^+(\Lambda') \rightarrow \text{Gr}^+(\Lambda)$ . Il est alors facile de voir que  $c(\Lambda) \leq c(\Lambda')$ .

Pour montrer la deuxième assertion, on montre qu'il y a les mêmes identifications pour le passage de  $\Delta'$  à  $\Delta$  dans le cas de  $\Lambda$  et de  $\varphi_{-t}(\Lambda)$  pour  $t > 0$  petit. Considérons  $\vec{u}$  un vecteur unitaire sortant d'une base d'un générateur de  $\Lambda$ . Lorsqu'on opère une restriction uniforme  $\Phi_{-t}$ , ce vecteur se déplace de  $t$  dans la direction rentrante. On note  $\vec{u}_t$  le vecteur correspondant dans  $\Phi_{-t}(\Lambda)$ . Il est facile de voir que si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs sortant de bases d'éléments de  $S$  n'appartenant pas à la même  $\Lambda$ -orbite,  $\vec{u}_t$  et  $\vec{v}_t$  ne peuvent pas être dans la même  $\Phi_{-t}(\Lambda)$ -orbite. Réciproquement, si deux de ces vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont dans la même  $\Lambda$ -orbite, considérons  $w \in \Lambda$  envoyant  $\vec{u}$  sur  $\vec{v}$ . Comme  $\text{dom}_{\Phi_{-t}(\Lambda)} w = \Phi_{-t}(\text{dom}_\Lambda w)$ , pour  $t$  assez petit,  $\vec{u}_t$  sera encore envoyé sur  $\vec{v}_t$  par  $w$  dans  $\Phi_{-t}(\Lambda)$ .  $\square$

### L'invariant métrique $e$

Le deuxième invariant d'un pseudo-groupe d'isométries  $\Lambda$  que l'on va considérer est métrique, on l'appelle son *épaisseur*. Cette épaisseur correspond à la mesure de l'espace des orbites  $\overset{\circ}{D}/\Lambda$ , et elle ne dépend que des orbites de  $\Lambda$ .

**Définition de l'invariant métrique  $e$ .** *L'épaisseur  $e(\Lambda)$  d'un pseudo-groupe  $\Lambda$  est la borne inférieure de la mesure de Lebesgue d'un ouvert de  $\overset{\circ}{D}$  rencontrant toutes les orbites.*

En particulier, un pseudo-groupe sans composante simpliciale a une épaisseur nulle. La proposition suivante montre comment les deux invariants  $c$  et  $e$  sont reliés. Elle sera fondamentale dans ce chapitre.

**Proposition 3.1.5 ([Gus], voir aussi [Gab2]).** *Pour  $t > 0$  petit,  $e(\Phi_{-t}(\Lambda)) = e(\Lambda) + t.c(\Lambda)$ . Plus précisément, la fonction  $t \mapsto e(\Phi_t(\Lambda))$  est continue, linéaire par morceaux, convexe, de dérivée à gauche  $-c(\Phi_t(\Lambda))$ .*

*Remarque.* Cette proposition peut donner une autre démonstration du fait que si  $\Lambda$  est minimal avec  $c(\Lambda) = 0$ , alors  $\Lambda$  est homogène. En effet, dans ce cas,  $e(\Phi_{-t}(\Lambda)) = 0$  pour  $t > 0$  petit, ce qui implique que  $\Phi_{-t}(\Lambda)$  a des orbites infinies, et donc que  $\Lambda$  est homogène.

## 3.2 Les minimaux sont presque maximaux : démonstration.

Voici l'énoncé du théorème que l'on va démontrer dans cette partie.

**Théorème 3.2.1.** *Soit  $\Lambda$  un pseudo-groupe d'isométries minimal de type fini. Alors  $\mathcal{C}(\Lambda)$  est fini et son cardinal peut être borné uniquement en fonction du nombre de générateurs de  $\Lambda$ .*

**Lemme fondamental.** *Soit  $\Lambda$  un pseudo-groupe minimal (de type fini), et soit  $\Lambda' \in \mathcal{C}(\Lambda)$  ( $\Lambda'$  a priori de type infini). Alors  $\Lambda'$  est de type fini, et  $c(\Lambda') < c(\Lambda)$ .*

*Preuve du lemme fondamental.* On raisonne par récurrence sur  $c(\Lambda)$ . L'invariant  $c(\Lambda)$  est positif d'après la remarque 3.1.3. Si  $c(\Lambda) = 0$ , alors  $\Lambda$  est homogène. Il est alors facile de voir que tout pseudo-groupe  $\Lambda' \geq \Lambda$  est homogène ce qui signifie que  $\mathcal{C}(\Lambda) = \emptyset$ .

On suppose maintenant que  $c(\Lambda) > 0$ , donc que  $\Lambda$  n'est pas homogène, et considérons  $\Lambda' \not\supseteq \Lambda$ . Comme  $\Lambda'$  et  $\Lambda$  n'ont pas les mêmes orbites orientées, il existe un vecteur unitaire  $\vec{v}$  basé en un point  $v \in \overset{\circ}{D}$  et  $w' \in \Lambda'$  tel que  $v \in \text{dom } w'$ , et tel que  $\vec{v}$  et  $w'(\vec{v})$  ne sont pas dans la même  $\Lambda$ -orbite.

Soit alors  $\delta > 0$  tel que  $[v - \delta, v + \delta] \subset \text{dom } w'$ . On considère le pseudo-groupe  $\Omega$  engendré par  $\Lambda$  et la restriction  $\alpha$  de  $w'$  à  $]v - \delta, v + \delta[$ .  $\Omega$  est de type fini, et  $\Lambda \subsetneq \Omega \subset \Lambda'$ . Supposons maintenant qu'on sache montrer que  $c(\Omega) < c(\Lambda)$ . Alors, soit  $\Lambda'$  et  $\Omega$  ont les mêmes orbites orientées et le lemme est démontré, soit on utilise l'hypothèse de récurrence appliquée à  $\Lambda' \in \mathcal{C}(\Omega)$ , ce qui permet aussi de conclure.

Reste donc à montrer que  $c(\Omega) < c(\Lambda)$ . Notons  $\Lambda_t = \Phi_{-t}(\Lambda)$  et  $\Omega_t = \Phi_{-t}(\Omega)$ . Soit  $\delta_0 < \delta$  tel que pour  $t \in [0, \delta_0]$ ,  $e(\Lambda_t) = t.c(\Lambda)$  et  $e(\Omega_t) = t.c(\Omega)$  (prop. 3.1.4). Comme  $\Lambda \subset \Omega$ ,  $\Lambda_t \subset \Omega_t$ , donc  $e(\Lambda_t) \geq e(\Omega_t)$  ce qui implique que  $c(\Omega) \leq c(\Lambda)$ .

Maintenant, pour  $t > 0$ ,  $\Lambda_t$  a toutes ses orbites finies puisque  $\Lambda$  n'est pas homogène et  $\Omega_t$  est obtenu à partir de  $\Lambda_t$  en ajoutant le générateur  $\Phi_{-t}(\alpha) = w'_{|]v-\delta+t, v+\delta-t[}$ . Pour  $s \in \mathbb{R}$ , notons  $\vec{v}_s$  le vecteur unitaire obtenu en translatant de  $s$  vers la droite le vecteur  $\vec{v}$ . On note  $v_s = v + s$  l'origine de  $\vec{v}_s$ . Comme  $\vec{v}$  et  $\alpha(\vec{v})$  ne sont pas dans la même  $\Lambda$ -orbite, pour tout  $|s| < t$ ,  $\vec{v}_s$  et  $\alpha(\vec{v}_s)$  ne sont pas dans la même  $\Lambda_t$  orbite. En particulier, pour tous les réels  $s$  sauf un nombre dénombrable d'entre eux,  $|s| < t$  implique que  $v_s$  et  $\alpha(v_s)$  ne sont pas dans la même  $\Lambda$ -orbite. Ceci implique que  $e(\Omega_t) < e(\Lambda_t)$  et donc que  $c(\Omega) < c(\Lambda)$ .  $\square$

**Corollaire 3.2.2.** *Soit  $\Lambda$  un pseudo-groupe minimal de type fini et soit  $\Lambda' \in \mathcal{C}(\Lambda)$  (a priori de type infini). Alors, il existe 2 vecteurs unitaires sortant de bases de générateurs de  $\Lambda$  qui sont dans la même  $\Lambda'$ -orbite mais pas dans la même  $\Lambda$ -orbite.*

*Preuve.* Il suffit de le montrer pour  $\Omega$  construit comme dans la démonstration du lemme précédent, c'est à dire en ajoutant un générateur  $\alpha$  à  $\Lambda$  tel qu'il existe un vecteur  $\vec{v}$  dont l'origine  $v$  appartienne à  $\text{dom } \alpha$  et tel que  $\vec{v}$  et  $\alpha(\vec{v})$  ne soient pas dans la même  $\Lambda$ -orbite.

Si le corollaire est faux, cela signifie que le graphe  $\Delta(\Omega)$  associé à  $\Omega$  contient  $\Delta(\Lambda)$  comme sous-graphe. Par conséquent,  $\Delta(\Omega)$  peut être construit à partir de  $\Delta(\Lambda)$  en rajoutant des sommets et des arêtes. Puisque car chaque sommet rajouté à  $\Delta(\Lambda)$  donne au plus une nouvelle composante connexe dans  $\Delta(\Omega)$ , Par conséquent  $s(\Delta(\Omega)) - cc(\Delta(\Omega)) \geq s(\Delta(\Lambda)) - cc(\Delta(\Lambda))$  et  $c(\Omega) \geq c(\Lambda)$ . Cela contredit le lemme fondamental.  $\square$

*Démonstration du théorème 3.2.1.* Soit  $Q$  un ensemble de paires de vecteurs unitaires sortant de bords de bases de générateurs de  $\Lambda$ . Pour tout  $t_g, t_d > 0$ , on définit alors un pseudo-groupe  $\Lambda_Q(t_g, t_d)$  de la manière suivante : pour toute paire  $\{\vec{u}, \vec{v}\} \in Q$ , on note  $u, v \in \mathring{D}$  les origines des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et on ajoute à  $\Lambda$  le générateur  $\alpha_{\{\vec{u}, \vec{v}\}}$  de domaine  $]u - t_g \cdot \vec{u}, u + t_d \cdot \vec{v}[$  et qui envoie  $\vec{u}$  sur  $\vec{v}$ .

**Affirmation.** *Il existe  $t_Q > 0$  tel que les orbites orientées de  $\Lambda_Q(t_g, t_d)$  soient indépendantes de  $t_g, t_d$  dans  $]0, t_Q]$ . On note alors  $\Lambda_Q = \Lambda_Q(t_Q, t_Q)$ .*

*Preuve.* On considère la borne supérieure de  $\{c(\Lambda_Q(t_g, t_d)) \mid (t_g, t_d) \in \mathbb{R}_+^{*2}\}$ . Cette borne est atteinte (disons en un point  $(m_g, m_d) \in \mathbb{R}_+^{*2}$ ) parce que  $c$  est à valeurs entières et majoré en fonction du nombre de générateurs. Prenons pour  $t_Q$  la plus petite coordonnée de  $(m_g, m_d)$ . Pour  $t_g, t_d < t_Q$ ,  $\Lambda_Q(m_g, m_d) \supset \Lambda_Q(t_g, t_d)$ . Montrons qu'ils ont les mêmes orbites. Comme  $c$  est décroissante au sens de la proposition 3.1.4,  $c(\Lambda_Q(m_g, m_d)) \leq c(\Lambda_Q(t_g, t_d))$  donc  $c(\Lambda_Q(m_g, m_d)) = c(\Lambda_Q(t_g, t_d))$  par maximalité. Si  $c(\Lambda_Q(m_g, m_d))$  et  $c(\Lambda_Q(t_g, t_d))$  sont tous les deux nuls,  $\Lambda_Q(m_g, m_d)$  et  $\Lambda_Q(t_g, t_d)$  sont homogènes et comme tous deux ont même groupe de périodes, ils ont forcément les mêmes orbites orientées. Sinon, si  $c(\Lambda_Q(m_g, m_d)) = c(\Lambda_Q(t_g, t_d)) > 0$ ,  $\Lambda_Q(m_g, m_d)$  et  $\Lambda_Q(t_g, t_d)$  ne sont pas homogènes, et le lemme fondamental donnerait une contradiction s'ils n'avaient pas les mêmes orbites orientées.  $\square$

Une conséquence à noter de cette affirmation est que pour tout  $t_g, t_d < t_Q$  et pour toute paire  $\{\vec{u}, \vec{v}\} \in Q$ , les vecteurs sortants de  $]u - t_g \cdot \vec{u}, u + t_d \cdot \vec{v}[$  sont dans la même orbite que les vecteurs correspondants sortant de  $\alpha_{\{\vec{u}, \vec{v}\}}(]u - t_g \cdot \vec{u}, u + t_d \cdot \vec{v}[)$ .

Cette affirmation nous donne donc une famille finie de pseudo-groupes dont le cardinal est borné en fonction du nombre de générateurs de  $\Lambda$  (cependant, les  $\Lambda_Q$  peuvent avoir les mêmes orbites orientées ou être homogènes). Le théorème sera alors démontré lorsqu'on aura prouvé que tout  $\Lambda' \in \mathcal{C}(\Lambda)$  a les mêmes orbites orientées qu'un  $\Lambda_Q$ . C'est ce qui fait l'objet du lemme 3.2.3.  $\square$

**Lemme 3.2.3.** *Soit  $\Lambda$  minimal de type fini. Tout  $\Lambda' \in \mathcal{C}(\Lambda)$  a les mêmes orbites orientées qu'un  $\Lambda_Q$ .*

*Preuve du lemme 3.2.3.* Soit  $t_0$  le minimum des  $t_Q$  et notons  $A$  l'ensemble des vecteurs unitaires sortant de bases des générateurs de  $\Lambda$ . D'après le corollaire 3.2.2, il existe deux vecteurs  $\vec{u}_1$  et  $\vec{v}_1$  de  $A$  qui sont dans la même  $\Lambda'$ -orbite mais pas dans la même  $\Lambda$ -orbite. On note  $u_1$  et  $v_1$  les origines de  $\vec{u}_1$  et  $\vec{v}_1$ .

Soit alors  $\Lambda_1$  obtenu en ajoutant à  $\Lambda$  le générateur  $\alpha_1$  défini sur  $]u_{g1}, u_{d1}[$  et qui envoie  $\vec{u}_1$  sur  $\vec{v}_1$  où  $u_{g1} = u_1 - t_{g1}\vec{u}_1$  et  $u_{d1} = u_1 + t_{d1}\vec{u}_1$ . On note aussi  $v_{g1} = v_1 - t_{g1}\vec{v}_1$ ,  $v_{d1} = v_1 - t_{d1}\vec{v}_1$ ,  $\vec{u}_{g1}$ ,  $\vec{u}_{d1}$  les vecteurs unitaires sortant de  $]u_{g1}, u_{d1}[$ , et  $\vec{v}_{g1}$ ,  $\vec{v}_{d1}$  les vecteurs unitaires sortant de  $]v_{g1}, v_{d1}[$ .

On choisit d'abord  $t_{g1} < t_0$  de sorte que  $\vec{u}_{g1}$  et  $\vec{v}_{g1}$  ne soient pas dans la  $\Lambda'$ -orbite d'un vecteur de  $A$ , ce qui enlève au plus un nombre dénombrable de choix pour  $t_{g1}$ . On choisit ensuite  $t_{d1} < t_0$  de sorte que  $\vec{u}_{d1}$  et  $\vec{v}_{d1}$  ne soient pas dans la  $\Lambda'$ -orbite d'un vecteur de  $A$  ni dans la  $\Lambda'$ -orbite de  $\vec{u}_{g1}$  ou  $\vec{v}_{g1}$ .

On sait alors grâce à l'affirmation que  $\vec{u}_{g1}$  et  $\vec{v}_{g1}$  sont dans la même  $\Lambda_1$ -orbite et qu'il en est de même pour  $\vec{u}_{d1}$  et  $\vec{v}_{d1}$ . Le corollaire implique alors soit que  $\Lambda_1$  a les mêmes orbites orientées que  $\Lambda'$  auquel cas le lemme est démontré, soit qu'il existe  $\vec{u}_2, \vec{v}_2 \in A \cup \{\vec{u}_{g1}, \vec{v}_{g1}, \vec{u}_{d1}, \vec{v}_{d1}\}$  qui sont dans la même  $\Lambda'$ -orbite mais pas dans la même  $\Lambda_1$ -orbite. Le choix de  $t_{g1}$  et  $t_{d1}$  implique alors que  $\vec{u}_2$  et  $\vec{v}_2$  sont forcément dans  $A$ .

On peut alors construire  $\Lambda_2$  à partir de  $\Lambda_1$  en ajoutant le nouveau générateur  $\alpha_2$  défini sur  $]u_2 - t_{g2}.\vec{u}_2, u_2 + t_{d2}.\vec{u}_2[$  et qui envoie  $\vec{u}_2$  sur  $\vec{v}_2$ , en choisissant  $t_{g2}$  de sorte que que  $\vec{u}_{g2}$  et  $\vec{v}_{g2}$  ne soient pas dans la  $\Lambda'$ -orbite d'un vecteur de  $A \cup \{\vec{u}_{g1}, \vec{v}_{g1}, \vec{u}_{d1}, \vec{v}_{d1}\}$  puis  $t_{d2}$  de sorte que  $\vec{u}_{d2}$  et  $\vec{v}_{d2}$  ne soient pas dans la  $\Lambda'$ -orbite d'un vecteur de  $A \cup \{\vec{u}_{g1}, \vec{v}_{g1}, \vec{u}_{d1}, \vec{v}_{d1}, \vec{u}_{g2}, \vec{v}_{g2}\}$ .

Ainsi, soit  $\Lambda_2$  a les mêmes orbites que  $\Lambda'$ , soit on peut itérer cette construction avec des vecteurs  $\vec{u}_{i+1}$  et  $\vec{v}_{i+1}$  qui sont forcément dans  $A$ . On aboutit ainsi en un nombre fini d'étapes (puisque  $A$  est fini) à un  $\Lambda_p$  qui a les mêmes orbites orientées que  $\Lambda'$ .

Enfin, notons  $t_{gmin}, t_{dmin} > 0$  et  $t_{gmax}, t_{dmax} < t_0$  les valeurs minimales et maximales des  $t_{gi}$  et  $t_{di}$ , et notons  $Q$  l'ensemble des paires  $\{\vec{u}_i, \vec{v}_i\}$ . On a alors  $\Lambda_Q(t_{gmin}, t_{dmin}) \subset \Lambda_p \subset \Lambda_Q(t_{gmax}, t_{dmax})$  ce qui implique grâce à l'affirmation que  $\Lambda'$ ,  $\Lambda_p$  et  $\Lambda_Q$  ont les mêmes orbites orientées.  $\square$

### 3.3 Application à une suite emboîtée de résolutions.

Le but de cette partie est de démontrer un corollaire du théorème 3.2.1 qui pourrait être utile dans l'étude des actions d'un groupe de type fini (mais pas de *présentation* finie) sur un arbre réel. Dans cette direction, Z. Sela a démontré que le théorème de scindement de Rips était vrai pour une action stable d'un groupe de type fini lorsqu'on suppose que les stabilisateurs de tripodes sont triviaux ([Sel3]).

Soit  $(T, \Gamma)$  une action minimale d'un groupe  $\Gamma$  de type fini. Fixons un ensemble fini  $S$  de générateurs de  $\Gamma$ . Soit  $D_1 \subset \dots \subset D_i \subset \dots$  une suite croissante exhaustive de sous-arbres finis de  $T$ . On va construire une suite de résolutions de  $(T, \Gamma)$  associée à ces arbres  $D_i$  comme dans les préliminaires. On appelle  $X_i$  le système d'isométries obtenu par restriction des générateurs à  $D_i$  et  $\Sigma_i$  le 2-complexe obtenu par suspension de  $X_i$ . On a naturellement des plongements  $\Sigma_1 \subset \dots \subset \Sigma_i \subset \dots$ . On suppose que les sous-arbres  $D_i$  sont assez grands pour que les domaines des générateurs soient non vides. On a alors une identification naturelle entre  $\pi_1(\Sigma_i, *)$  et le groupe libre  $\langle S \rangle$  de base  $S$ .

On considère l'ensemble des courbes incluses dans des feuilles  $\mathcal{C}_1 \subset \dots \subset \mathcal{C}_i \subset \dots$  dont les classes d'homotopie libre représentent des relations de  $\Gamma$ . Soit  $\Gamma_i$  le quotient de  $\pi_1(\Sigma_i, *)$  par le sous-groupe normal engendré par les classes d'homotopie libre des courbes de  $\mathcal{C}_i$ . On note  $\rho_i : \pi_1(\Sigma_i, *) \rightarrow \Gamma_i$ ,  $\bar{\Sigma}_i$  le revêtement de  $\Sigma_i$  associé à  $\rho_i$  et  $f_i : \bar{\Sigma}_i \rightarrow T$  l'unique application  $\Gamma_i$  équivariante constante sur les feuilles qui identifie isométriquement un relevé préféré  $\bar{D}_i$  de  $D_i \subset \Sigma_i$  avec  $D_i \subset T$ . On obtient ainsi une suite de résolutions emboîtées dans les sens suivant :

**Définition.** *Une suite de résolutions est dite emboîtée si*

- $D_i \subset D_j$
- on a une inclusion naturelle  $\Sigma_i \subset \Sigma_j$
- $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{C}_j$

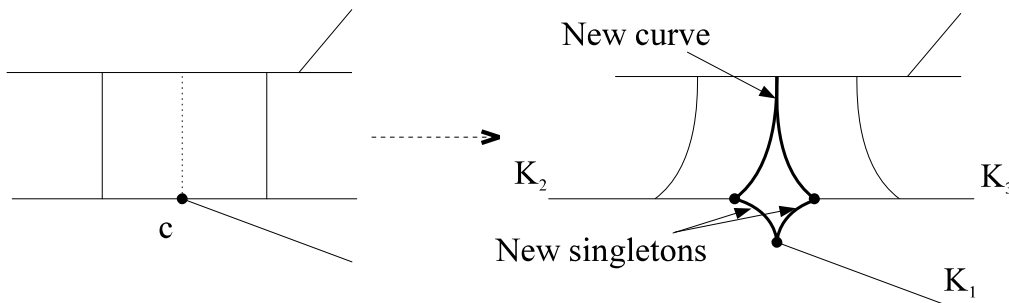


FIG. 3.1 – Une variante du découpage de domaine

Quitte à effectuer des opérations de Rips sur chaque résolution, on peut supposer que chaque domaine  $D_i$  est un multi-intervalle, et que  $D_i$  est une réunion de composantes de  $D_j$  pour  $j \geq i$  en préservant la propriété que les résolutions sont emboîtées. On commence pour cela par découper le domaine  $D_i$  aux points de branchement de  $D_1$ . On découpe ensuite  $D_i$  pour  $i \geq 2$  aux points de  $D_2$  qui ne sont

pas dans  $D_1$ . Pour découper  $D_i$  aux points de  $D_2$  qui appartiennent à  $\overset{\circ}{D}_1$ , on utilise une variante du découpage de domaine qui laisse  $D_1$  intact (voir figure 3.1). Il suffit ensuite d'itérer ce procédé.

Le but de cette partie est d'étudier le devenir d'une composante minimale dans cette suite de résolutions. On suppose donc que  $M_1 \subset D_1$  est l'adhérence d'une composante minimale de  $X_1$  et on considère  $M_i \subset D_i$  l'adhérence de la composante minimale de  $X_i$  contenant  $D$ . En découpant  $D_j$  le long de  $\partial M_i$  pour  $j \geq i$ , on obtient une suite de résolutions emboîtées telle que  $D_i$  est toujours une réunion de composantes de  $D_j$  pour  $j \geq i$ , et  $M_i$  est une réunion de composantes de  $D_i$ . On note alors  $\Sigma(M_i)$  la composante contenant  $M_i$  de  $\Sigma_i$  privé de ses singletons.

**Corollaire 3.3.1.** *Considérons une suite de résolutions emboîtées avec une suite de composantes minimales  $M_i$  incluses les unes dans les autres comme au dessus. On suppose que  $M_i$  n'est homogène pour aucun indice  $i$ , ou, dans le cas contraire, que le groupe des périodes de  $M_i$  se stabilise.*

*Alors, il existe un indice  $i_0$  tel que pour  $i \geq i_0$ , on puisse effectuer des mouvements de Rips sur  $X_i$  qui fixent  $\Sigma(M_{i_0})$  et les courbes de  $\mathcal{C}_{i_0}$ , et qui transforment  $\Sigma(M_i)$  en la réunion de  $\Sigma(M_{i_0})$ , de singletons et de bandes correspondant à des restrictions de l'identité.*

*Preuve.* On note  $Y_i$  le système d'isométries correspondant à la composante connexe  $\Sigma(M_i)$  de  $\Sigma_i$  privé de ses singletons. Les systèmes d'isométries ouverts  $\overset{\circ}{Y}_i$  induisent sur  $M_1$  une suite croissante de pseudo-groupes de type infini a priori (on peut en fait facilement montrer que ce système d'isométries est de type fini, mais on n'en a pas besoin pour l'instant). Lorsque  $M_i$  n'est jamais homogène, la suite croissante de ces pseudo-groupes doit se stabiliser d'après le théorème 3.2.1 et c'est encore le cas quand les composantes  $M_i$  sont homogènes et lorsque leur groupe des périodes se stabilise. Par conséquent, à partir d'un certain rang  $i_0$ , les traces des orbites (orientées) de  $\overset{\circ}{Y}_i$  sur  $M_1$  sont toutes les mêmes.

Puisque toute  $\overset{\circ}{Y}_{i_0}$ -orbite dans  $\overset{\circ}{M}_{i_0}$  rencontre  $\overset{\circ}{M}_1$ , et puisqu'un  $\overset{\circ}{Y}_{i_0}$ -mot induit un  $\overset{\circ}{Y}_i$ -mot qui le prolonge pour  $i \geq i_0$  (car  $\Sigma_{i_0} \subset \Sigma_i$ ), ceci implique clairement que  $\overset{\circ}{Y}_{i_0}$  a les mêmes orbites que  $\overset{\circ}{Y}_i$  en restriction à  $\overset{\circ}{M}_{i_0}$  pour  $i \geq i_0$ .

On peut maintenant oublier toute la suite de résolutions et se concentrer sur celles d'indices  $i_0$  et  $i$  en montrant qu'on peut effectuer sur la seconde des mouvements de Rips de sorte que la conclusion du théorème soit valide. On change

donc les notations, et on appelle  $X$  le système d'isométries minimal sans singleton de domaine  $D = M_{i_0}$  dont la suspension est  $\Sigma = \Sigma(M_{i_0})$  et  $X'$  le système d'isométries minimal sans singleton de domaine  $D' = M_i$  dont la suspension est  $\Sigma' = \Sigma(M_i)$ . Le système d'isométries  $X$  est emboîté dans  $X'$  au sens où  $\Sigma \subset \Sigma'$ . De plus,  $\overset{\circ}{X}$  et  $\overset{\circ}{X}'$  ont les mêmes orbites en restriction à  $D$ . Dans toute la suite, on fera l'abus de langage qui consiste à dire qu'on effectue une opération de Rips sur  $X'$  au lieu du système d'isométries plus grand  $X_i$  dont il est une composante minimale.

La première étape consiste à transformer le domaine de  $X'$  en  $D$ . On sait déjà que  $D$  est une réunion de composantes connexes de  $D'$ . Maintenant, comme  $X'$  est minimal, on peut montrer qu'il existe un ensemble fini de  $X'$ -mots  $w_1, \dots, w_p$  dont la réunion des domaines recouvre  $D' \setminus D$  et tels que leurs images sont dans  $D$ . Il suffit pour cela de remarquer que pour tout point  $x$  du bord de  $D'$ , il existe un  $X'$ -mot défini au voisinage de  $x$  et qui envoie  $x$  dans  $\overset{\circ}{D}'$  et de conclure par un argument de compacité en utilisant la densité des  $\overset{\circ}{X}'$ -orbites (Rips, voir [GLP1, p. 425]). On peut supposer que chaque  $w_k$  est de la forme  $\varphi_k.v_k$  où  $v_k$  est un mot uniquement en des générateurs dont le domaine et l'image sont dans  $D' \setminus D$  et où  $\varphi_k \in X' \cup X'^{-1}$  est un générateur dont le domaine est dans  $D' \setminus D$  et l'image dans  $D$ .

Appelons  $q$  la longueur maximale des  $w_k$  et procédons par récurrence sur  $q$ . Notons  $R$  la réunion des domaines des générateurs  $\varphi_k$ . On effectue des découpages de domaine aux points de  $\partial \text{dom } \varphi_k \setminus \partial D'$  de sorte que chaque composante issue du découpage de  $R$  soit égale au domaine d'un générateur (issu du découpage d'un  $\varphi_k$ ) dont l'image est dans  $D$  (figure 3.2). Ce faisant chaque  $v_k$  donne naturellement naissance à un nombre fini de nouveaux mots *de même longueur*, qui sont des restrictions de  $v_k$ , et dont la réunion des domaines est le domaine original de  $v_k$ .

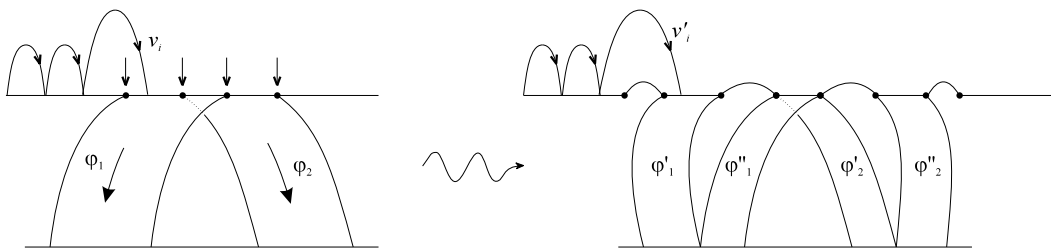


FIG. 3.2 – Découpages de domaines

Etant donnée une composante  $I$  issue du découpage de  $R$ , et  $\varphi_I$  un générateur dont le domaine est égal à  $I$  et dont l'image est dans  $D$ , on peut faire glisser toutes



les bases contenues dans  $I$  (sauf celle de  $\varphi_I$ ) le long de  $\varphi_I$  et ainsi obtenir que  $I$  est un arc libre, c'est à dire que le seul générateur ayant une base dans  $I$  est  $\varphi_I$ . On peut alors effectuer l'élagage total qui consiste à supprimer  $I$  et  $\varphi_I$ .

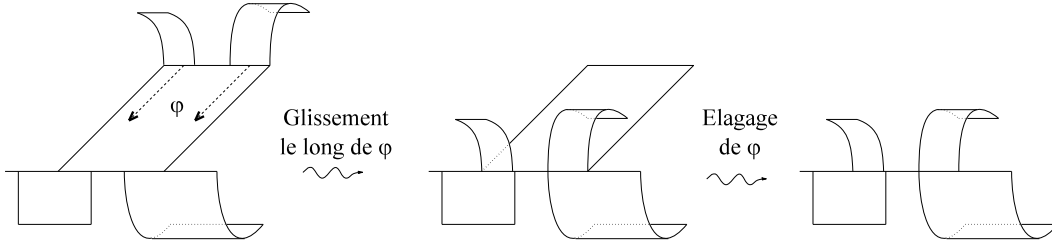


FIG. 3.3 – Glissement de base et élagage

Ces mouvements de Rips conduisent ainsi à un système d'isométries  $X'_1$  où tout point de  $D'_1 \setminus D$  peut être envoyé sur un point de  $D$  par un mot de longueur au plus  $q - 1$ . De plus, les  $\overset{\circ}{X}'_1$ -orbites contiennent les orbites de  $\overset{\circ}{X}$  et sont contenues dans la trace de celles de  $\overset{\circ}{X}'$ , donc  $\overset{\circ}{X}'_1$  a les mêmes orbites que  $\overset{\circ}{X}$ .

Ainsi, par récurrence, on obtient en un nombre fini d'étapes deux système d'isométries qu'on note encore  $X$  et  $X'$ , qui ont même domaine  $D = D'$ , tels que  $\overset{\circ}{X}$  et  $\overset{\circ}{X}'$  ont les mêmes orbites. Il faut remarquer qu'aucun de ces mouvements n'a affecté  $\Sigma \subset \Sigma'$ , cette inclusion reste donc toujours valide. Par contre, ces mouvements de Rips ont fait que  $X'$  a maintenant des singletons.

La fin de la démonstration utilise les mêmes mouvements de Rips que ceux effectués sur une composante minimale non homogène dans [Pau4] afin de rendre les générateurs indépendants (en utilisant le théorème de D. Gaboriau [Gab2]) (voir aussi section 2.6.1).

Chaque générateur  $\varphi$  de  $X$  est la restriction d'un générateur  $\varphi'$  de  $X'$  puisque  $\Sigma \subset \Sigma'$ . On effectue alors les découpages des bases  $\text{dom } \varphi'$  et  $\text{Im } \varphi'$  aux points de  $\partial \text{dom } \varphi \setminus \partial \text{dom } \varphi'$  et de  $\partial \text{Im } \varphi \setminus \partial \text{Im } \varphi'$  pour obtenir un système d'isométries encore noté  $X'$  dont l'ensemble des générateurs contient les générateurs de  $X$ .

Maintenant, considérons un générateur non singleton  $\varphi$  de  $X' \setminus X$ . L'isométrie partielle  $\overset{\circ}{\varphi}: \text{int}(\text{dom } \varphi) \rightarrow \text{int}(\text{Im } \varphi)$  est telle que  $x$  et  $\overset{\circ}{\varphi}(x)$  sont dans la même  $X$ -orbite pour tout  $x \in \text{int}(\text{dom } \varphi)$  puisque  $\overset{\circ}{X}$  et  $\overset{\circ}{X}'$  ont les mêmes orbites. La propriété *segment-closed* dit alors qu'il existe un nombre fini de  $X$ -mots  $w_1, \dots, w_p$  dont les domaines recouvrent l'intervalle fermé  $\text{dom } \varphi$  et qui coïncident avec  $\varphi$  sur l'intersection de leur domaines ([GLP2], voir aussi prop. 2.5.1). On peut donc découper  $\varphi$  en

un nombre fini de restrictions  $\varphi_k$  à des sous-intervalles non dégénérés de  $\text{dom } \varphi$  tels que sur chacun d'eux, on ait un  $X$ -mot  $w_k$  dont le domaine contient  $\text{dom } \varphi_k$  (et qui prolonge  $\varphi_k$ ). On effectue alors l'opération de glissement de base de  $\text{Im } \varphi_k$  le long de  $w_k^{-1}$ , ce qui transforme le générateur  $\varphi_k$  en une restriction de l'identité.

On obtient ainsi un système d'isométries  $X''$  dont les générateurs sont ceux de  $X$  plus des restrictions de l'identité et des singletons.  $\square$

## Chapitre 4

# Des aiguillages vers la frontière de l'outre-espace

Les systèmes d'aiguillages (*train tracks* en anglais) sont à l'origine une notion introduite par W. P. Thurston pour étudier les automorphismes des surfaces. Cette notion a été transportée dans le cadres des graphes par M. Bestvina et M. Handel, ce qui leur a permis de résoudre la conjecture de Scott : le sous-groupe des éléments fixés par un automorphisme de  $F_n$  est de rang inférieur à  $n$  (voir [BH]). M. Lustig a utilisé une autre notion de système d'aiguillage, dite *combinatoire* qui lui a permis de montrer que tout automorphisme de  $F_n$  avait un point fixe dans l'adhérence de l'outre-espace (voir [Lus1]).

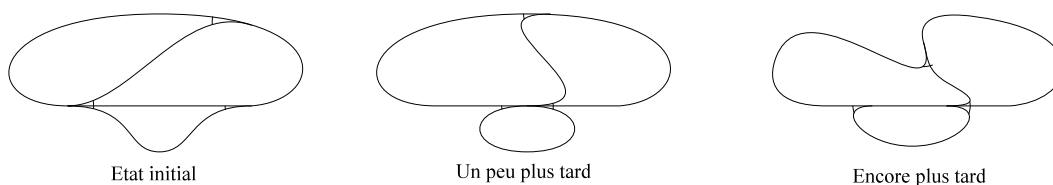


FIG. 4.1 – Recoller une action aiguillée

Considérons une action simpliciale libre  $(T, F_n)$  de  $F_n$ . On peut *aiguiller* cette action de la manière suivante : pour chaque sommet  $v$  de  $T$ , partitionnons en deux parties les arêtes orientées issues de  $v$ , et supposons que cette partition est équivariante (voir section 4.1 pour une définition en termes de systèmes d'isométries et de l'élargissement uniforme  $\Phi_t$ ). Dans la pratique, on représente les arêtes orientées d'une même partie de la partition tangentes les unes aux autres (figure 4.1). On peut

alors recoller sur une longueur  $t$  les arêtes appartenant à une même classe de la partition. On obtient ainsi un chemin d'actions dans l'outre-espace, et si on fait varier les longueurs des arêtes de l'action, on obtient aussi de tels chemins pour les actions dans le simplexe ouvert de  $CV_n$  correspondant à  $(T, F_n)$ . On dit que ces chemins sont obtenus en suivant le semi-flot  $\Phi_t$ . L'idée est alors d'essayer de suivre ces chemins jusqu'à aboutir sur la frontière de l'outre-espace pour obtenir des simplexes dans le bord de l'outre-espace.

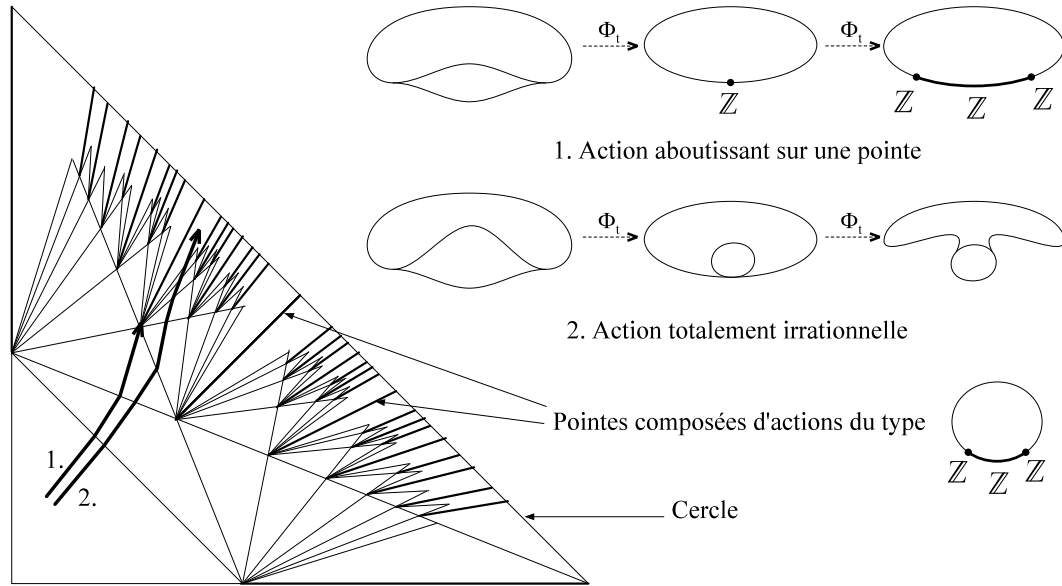


FIG. 4.2 – Pointes dans l'outre-espace de rang 2

L'outre-espace de rang 2 a été étudié de manière exhaustive par M. Culler et K. Vogtmann ([CV2]). On en a représenté une partie sur la figure 4.2. Sa frontière contient entre autres, un cercle qui correspond au bord de l'espace de Teichmüller du tore privé d'un point (seul le quart de ce cercle est visible sur la figure), et des *pointes* constituées d'actions simpliciales dont le graphe quotient est un cercle composé d'une arête ayant un stabilisateur trivial et d'une arête ayant un stabilisateur cyclique infini. Considérons une action aiguillée du type de celle représentée sur la figure 4.2 pour laquelle les longueurs des trois arêtes sont totalement irrationnelles. Dans ce cas, lorsqu'on suit le semi-flot, on ne peut pas rencontrer de pointe. Par conséquent, si on considère une action aiguillée qui conduit à une pointe lorsqu'on suit le semi-flot  $\Phi_t$ , on aboutit sur la frontière de l'outre-espace beaucoup plus tard pour les actions totalement irrationnelles voisines.

Si on continue à suivre le semi-flot le long des pointes, on pourra définir un *temps d'accès au bord*  $\tau$  qui sera continu, et tel qu'en suivant le semi-flot pendant un temps  $\tau$ , on arrive effectivement sur le bord de l'outre-espace.

Lorsque l'action aiguillée initiale varie dans un simplexe  $\sigma$ , on démontrera le théorème suivant :

**Théorème 4.0.1.** *Soit  $\sigma$  un simplexe ouvert d'actions aiguillées de dimension maximale dans  $CV_n$ . L'application de  $\sigma$  dans  $\partial CV_n$  définie par  $T \mapsto \Phi_{\tau(T)}(T)$  est continue et injective sur toute transversale aux orbites du semi-flot dans  $\sigma$ . Elle définit donc des simplexes de dimension maximale dans le bord de l'outre-espace.*

## 4.1 Aiguillage d'une action de $F_n$

### Du système d'isométries $X$ à l'action $T_X$ et système d'aiguillages

Partons d'un système d'isométries  $X$  connexe sur un multi-intervalle  $D$ , et soit  $\Sigma$  le 2-complexe feuilleté associé. Etant donné une identification entre  $\pi_1(\Sigma)$  et  $F_n$ , on a une action de  $F_n$  sur un arbre réel  $T_X = T_{\tilde{\Sigma}}$  qui lui correspond canoniquement en considérant l'espace des feuilles du revêtement universel  $\tilde{\Sigma}$  de  $\Sigma$  (il est automatiquement séparé, voir [GL]). Dans toute la suite, on supposera que le rang  $n$  du groupe libre est au moins égal à 2.

Maintenant, si  $X$  n'a pas de singleton, on peut définir pour  $t \geq 0$ , le système d'isométries  $\Phi_t(X)$  obtenu en élargissant toutes les composantes du domaine  $D$  d'une longueur  $t$  de chaque côté et en élargissant les domaines (et les images) des générateurs de la même façon (on pourrait aussi faire cela en présence de singletons à condition de leur choisir une *orientation transverse* indiquant l'orientation qu'on doit donner à leur prolongement, mais nous ne considérerons ici que des systèmes d'isométries sans singleton). Le 2-complexe  $\Sigma_t$  associé à  $\Phi_t(X)$  contient naturellement  $\Sigma$ . Cette inclusion étant une équivalence d'homotopie, on a une identification naturelle entre  $\pi_1(\Sigma_t)$  et  $F_n$  ce qui permet de définir une action  $T_{\Phi_t(X)}$  de  $F_n$ .

C'est une représentation de  $T$  comme action  $T_X$  associée un système d'isométries sans singleton sur un multi-intervalle qu'on appellera *système d'aiguillages pour  $T$* . Cela permet de considérer l'action  $T_{\Phi_t(X)}$ .

*Remarque.* Toute action (même très petite et géométrique, voire simpliciale) ne peut pas être aiguillée, i. e. se mettre sous la forme  $T_X$  pour un système d'isométries sur un multi-intervalle  $X$ . Si l'action  $(T, F_n)$  est géométrique, on peut voir  $T$  comme l'espace

des feuilles du revêtement *universel* de la suspension d'un système d'isométries sur un *arbre fini*, ou comme l'espace des feuilles d'un revêtement *galoisien* de la suspension d'un système d'isométries sur un multi-intervalle mais pas forcément comme l'espace des feuilles du revêtement *universel* de la suspension d'un système d'isométries sur un *multi-intervalle*. En effet, une action simpliciale très petite qui peut être aiguillée a des stabilisateurs d'arêtes qui sont des facteurs libres de  $F_n$  (il suffit de constater que pour tout  $t > 0$  petit,  $T_{\Phi_{-t}(X)}$  a des stabilisateurs de sommets (et d'arêtes) cycliques). Mais ceci n'est pas le cas dans toute action simpliciale même très petite.

### Comment aiguiller une action simpliciale libre

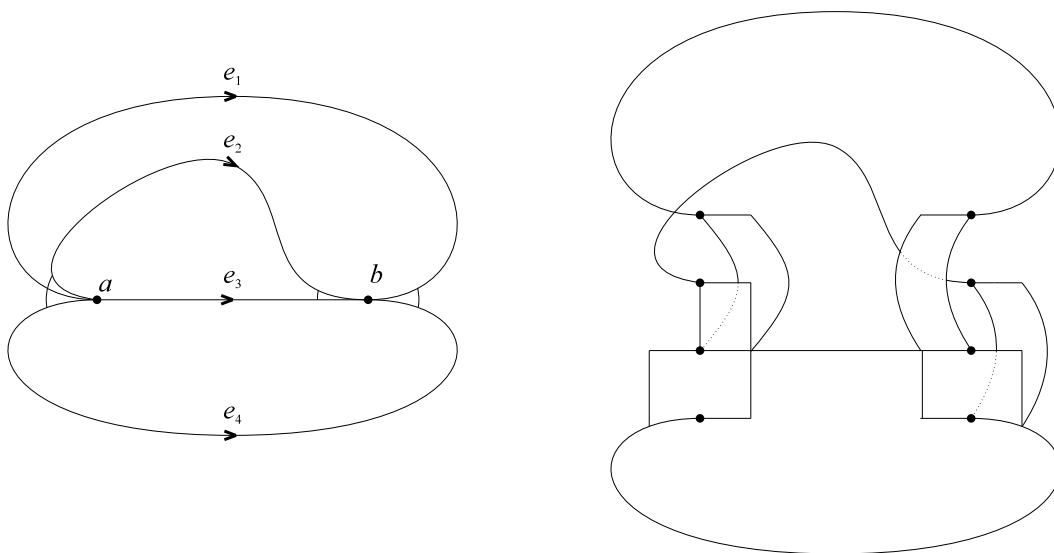


FIG. 4.3 – Construction d'un système d'aiguillages. On a choisi les arêtes  $e_g = \bar{e}_3$  et  $e_d \bar{e}_4$  pour le sommet  $a$ , et  $e_g = e_3$  et  $e_d = e_4$  pour le sommet  $b$ .

Donnons nous une action minimale simpliciale libre  $T$  de  $F_n$ . Supposons qu'en chaque sommet  $v$  du graphe quotient  $T/F_n$  on ait une partition des arêtes orientées incidentes sur  $v$  en deux parties non vides représentant les arêtes tangentes. On peut associer un système d'aiguillages sur  $T$  de la manière suivante (voir figure 4.3).

On choisit un  $\varepsilon > 0$  et pour chaque arête orientée  $e$  de  $T/F_n$ , on considère un intervalle orienté  $J_e = [a_{\bar{e}}, a_e]$  de longueur  $|J_e| = |e| + 2\varepsilon$  de sorte que  $J_e = J_{\bar{e}}$  où  $\bar{e}$  note l'arête  $e$  munie de l'orientation opposée à celle de  $e$ , et  $|e|$  note la longueur de  $e$ . On note  $b_e$  et  $c_e$  les points de  $J_e$  à distance  $\varepsilon$  et  $2\varepsilon$  de  $a_e$  respectivement. Fixons nous

maintenant un sommet  $v$  de  $T/F_n$ , et choisissons parmi les arêtes orientées incidentes sur  $v$ , un représentant  $e_g$  et  $e_d$  de chaque classe d'équivalence. On prend alors un générateur de domaine  $[c_{e_g}, a_{e_g}]$  qui envoie  $c_{e_g}$  sur  $a_{e_d}$  et  $a_{e_g}$  sur  $c_{e_d}$ . Ensuite, pour  $i \in g, d$  et pour  $e \neq e_i$  dans la classe de  $e_i$ , on note  $j$  le seul élément de  $\{g, d\} \setminus \{i\}$  et on prend un générateur de domaine  $[a_e, b_e]$  qui envoie  $a_e$  sur  $c_{e_j}$  et  $b_e$  sur  $b_{e_j}$  (voir figure 4.3).

L'espace des feuilles de  $\Sigma$  est naturellement isométrique à  $T/F_n$ . Le groupe fondamental de  $T/F_n$  étant naturellement identifié avec  $F_n$ , ceci permet de donner une identification entre  $F_n$  et  $\pi_1(\Sigma)$  et donc de définir l'action  $T_X$  de  $F_n$  qui est clairement isomorphe à  $T$ . On vérifie aisément que pour tout  $t \geq 0$ ,  $T_{\Phi_t(X)}$  est indépendant de tous les choix.

### Topologie sur l'ensemble des systèmes d'isométries $\mathcal{S}'$ , $X \mapsto T_X$ est continue

Naturellement, on aimerait que  $t \mapsto T_{\Phi_t(X)}$  voire que  $X \mapsto T_X$  soit continue. Pour cela, il faut définir une topologie sur l'ensemble des systèmes d'isométries. On suppose que les générateurs et les composantes de  $D$  sont numérotés :  $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ ,  $D_1, \dots, D_k$ . De plus, pour chaque composante  $D_i$  de  $D$  on se fixe une orientation de sorte qu'une isométrie partielle de  $D_i$  dans  $D_j$  qui ne soit pas un singleton ait une orientation bien définie. On peut alors étiqueter le graphe d'incidence  $\mathcal{I}$  d'un système d'isométries sans singleton en étiquetant chaque sommet par le numéro de la composante de  $D$  associé, et en étiquetant les arêtes par le numéro et l'orientation du générateur correspondant.

On se restreint alors à un ensemble  $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'_{\mathcal{I}}$  de systèmes d'isométries sans singleton et dont le graphe d'incidence étiqueté est isomorphe à un graphe étiqueté (et connexe)  $\mathcal{I}$  fixé. Puisque pour tout système d'isométries, son 2-complexe associé est naturellement homotopiquement équivalent à son graphe d'incidence, une identification entre  $F_n$  et  $\pi_1(\mathcal{I})$  donne une identification simultanée entre  $F_n$  et tous les groupes fondamentaux des 2-complexes associés aux systèmes d'isométries de  $\mathcal{S}'$ .

L'ensemble des systèmes d'isométries  $\mathcal{S}'$  est alors paramétré par un sous-ensemble de  $(\mathbb{R}_+^*)^{k+3p}$ , les  $k$  premières coordonnées représentant les longueurs des composantes de  $D$ , et les  $3p$  suivantes donnant la position du centre des domaines des générateurs, la position du centre de leur image, et la largeur de leur domaine. Ceci définit donc une topologie sur  $\mathcal{S}'$ .

La proposition I.4 de [GL] calcule (entre autres) la longueur de translation d'un

élément de  $F_n$  dans l'action  $T_X$ . Il en résulte immédiatement le fait que l'application  $X \mapsto T_X$  est continue. En particulier,  $t \mapsto T_{\Phi_t(X)}$  est aussi continue.

### Les stabilisateurs

On aura besoin dans la suite de s'intéresser aux stabilisateurs de points et d'arcs de l'action  $T_X$ . Pour comment ils sont reliés au système d'isométries  $X$  il suffit d'utiliser les propositions I.4 et I.5 de [GL]. En voici la traduction dans notre cadre.

**Proposition 4.1.1 ([GL]).** *Si  $g \in F_n$  est elliptique dans  $T_X$ , il existe une composante  $I$  de l'image réciproque  $\tilde{D}$  de  $D$  dans  $\tilde{S}$  telle que  $\text{Fix } g$  soit égal à l'image dans  $T$  de l'ensemble des points  $x \in I$  tels que  $x$  et  $g.x$  sont dans la même feuille de  $\tilde{\Sigma}$ .*

*En particulier, puisque  $D$  est un multi-intervalle,  $T_X$  n'a pas de stabilisateur de tripode.*

Dès qu'on se donne un intervalle  $I \subset D$  (éventuellement réduit à un point), on peut considérer un segment  $\bar{I} \subset T_X$  (défini modulo l'action de  $F_n$ ) obtenu en prenant l'image dans  $T_X$  d'un relevé de  $I$  dans  $\tilde{\Sigma}$ . La classe de conjugaison du stabilisateur de l'image de  $\bar{I}$  dans  $T_X$  est alors la même que celle de l'ensemble des  $X$ -mots  $w$  tels que  $I \subset \text{dom } w$  et  $w|_I = \text{Id}$ .

Par conséquent, on appellera *stabilisateur* d'un intervalle  $I$  dans  $D$  le sous-groupe de  $F_n$  défini modulo conjugaison par l'ensemble des  $X$ -mots  $w$  dont le domaine contient  $I$  et qui fixent  $I$ .

### Le semi-flot $\Phi_t$ et la minimalité

**Lemme 4.1.2.** *Si  $T_X$  est une action minimale de  $F_n$  munie d'un système d'aiguillages, alors  $T_{\Phi_t(X)}$  est minimale pour tout  $t \geq 0$ .*

Ce lemme permet de nous restreindre au sous-ensemble  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\mathcal{I}}$  de  $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'_{\mathcal{I}}$  formé des systèmes d'isométries  $X$  pour lesquels l'action correspondante est minimale puisque  $\mathcal{S}$  est invariant par le semi-flot  $\Phi_t$ .

*Remarque.* Si on ne suppose pas que  $T_X$  est minimale, on peut bien sûr considérer le sous-arbre minimal  $\min(T_{\Phi_t(X)})$  de  $T_{\Phi_t(X)}$ . Mais si l'action  $T_X$  n'est pas minimale il peut arriver que  $\min(T_{\Phi_t(X)})$  soit homothétique à  $\min(T_X)$  et finisse par avoir un point fixe global. Ce phénomène ne peut pas arriver si  $T_X$  est minimale. En effet,



grâce au lemme précédent,  $T_{\Phi_t(X)}$  est minimale pour tout  $t \geq 0$ , et  $T_{\Phi_t(X)}$  ne peut pas être réduit à un point puisque les composantes de l'image réciproque de  $\Phi_t(D)$  dans  $\tilde{\Sigma}_t$  se plongent isométriquement dans  $T_{\Phi_t(X)}$  par l'application quotient.

*Preuve du lemme.* On utilise une jolie caractérisation des actions minimales trouvée dans [Bo2] : une action  $(T, \Gamma)$  d'un groupe de type fini est minimale si et seulement si elle est finiment supportée et n'a pas de point terminal (i. e. tout point de  $T$  est dans l'intérieur d'un segment non dégénéré).

*Démonstration du critère de minimalité.* On sait déjà qu'une action minimale d'un groupe de type fini est finiment supportée et n'a pas de point terminal. Dans le sens contraire, supposons que  $(T, \Gamma)$  soit finiment supportée mais pas minimale. Notons  $T_{\min}$  le sous-arbre minimal de  $T$ . Soit  $K$  un arbre fini qui rencontre toutes les orbites, et  $K_0$  les sous-arbre fini de  $K$  défini par  $K_0 = K \cap T_{\min}$ . Soit  $I = [a, b]$  un segment de longueur maximale dans l'adhérence d'une composante de  $K \setminus K_0$  et reliant un point de  $K_0$  à un sommet terminal de  $K$ . On choisit les notations de sorte que  $a$  soit le point d'intersection de  $I$  avec  $K_0$ .

Supposons par l'absurde que  $b$  n'est pas terminal dans  $T$  et considérons un intervalle  $J = [a, b']$  tel que  $b \in ]a, b'[$ . Puisque  $K$  coupe toutes les orbites, on peut trouver un élément  $\gamma \in \Gamma$  tel que  $b' \in \gamma.K$ . Alors,  $\gamma.K_0 \subset T_{\min}$ , donc  $J \cap \gamma.K_0 = \{a\}$  et  $J \subset \gamma.K$ . Le segment  $\gamma^{-1}.J$  est donc un segment de  $K$  de longueur strictement supérieure à celle de  $I$  et qui ne rencontre  $K_0$  qu'en son extrémité  $\gamma^{-1}.a$ , ce qui est contradictoire avec le choix de  $I$ .  $\square$

Un corollaire de ce critère pour une action  $T_X$  définie à partir d'un système d'isométries *sans singleton* sur un multi-intervalle  $D$  est que  $T_X$  est minimale si et seulement si toute  $X$ -orbite coupe  $\overset{\circ}{D}$ . En effet,  $T_X$  est toujours finiment supportée (comme toute action géométrique) puisque l'orbite d'un relevé de  $D$  dans  $\tilde{\Sigma}$  coupe toutes les feuilles de  $\tilde{\Sigma}$ . De plus, comme les composantes de l'image réciproque  $\tilde{D}$  de  $D$  dans  $\tilde{\Sigma}$  se plongent isométriquement dans  $T_X$ , le fait que l'orbite d'un point du bord de  $D$  coupe  $\overset{\circ}{D}$  implique que  $T_X$  n'a pas de point terminal. Réciproquement, si l'orbite d'un point  $x$  de  $\partial D$  est contenue dans  $\partial D$ , et puisqu'il n'y a pas de singleton, il existe un intervalle  $J \subset D$  non réduit à un point contenant  $x$  tel que tout  $X$ -mot défini en  $x$  soit défini sur  $J$ . Considérons un relevé  $\tilde{x}$  de  $x$  dans  $\tilde{\Sigma}$ ,  $\tilde{J}$  le relevé de  $J$  correspondant, et  $\tilde{x}$  et  $\tilde{J}$  leur image dans  $T_X$ . Par conséquent, les images dans  $T_X$  de toutes les composante de  $\tilde{D}$  qui coupent la feuille de  $\tilde{x}$  sont des segments contenant  $\tilde{J}$  et dont une extrémité est  $\tilde{x}$ . Ceci implique alors que  $\tilde{x}$  est terminal dans  $T_X$ .

Maintenant, supposons que  $T = T_X$  est minimale, alors pour tout point  $x$  de  $\partial D$  il existe un  $X$ -mot  $w$  qui envoie  $x$  dans  $\overset{\circ}{D}$  et il est facile de voir que pour  $\Phi_t(X)$ , le point du bord correspondant à  $x$  dans  $\partial\Phi_t(D)$  est envoyé dans  $\Phi_t(\overset{\circ}{D})$   $w$  dans  $\Phi_t(X)$ .  $\square$

### Comment varie le domaine d'un $X$ -mot lorsqu'on perturbe $X$

Avant d'entrer dans le vif du sujet, nous prouvons quelques lemmes techniques montrant le devenir de l'intervalle de définition d'un  $X$ -mot donné  $w = \varphi_1 \dots \varphi_k$ , l'une des questions étant de savoir si un mot donné est *défini* dans le système d'isométries perturbé, c'est à dire si son domaine de définition est non vide.

On a une distance sur  $\mathcal{S}'$  (et sur  $\mathcal{S}$ ) qui définit la topologie et qui nous sera utile. Si  $I$  et  $J$  sont deux intervalles fermés de  $\mathbb{R}$ , on note  $d(I, J)$  le plus grand des deux nombres suivants :  $||I| - |J||$  (où  $|I|$  représente la largeur de l'intervalle  $I$ ), et le double de la distance entre le centre de  $I$  et celui de  $J$ . Si  $I = [g, d]$  et  $J = [g', d']$ , on a aussi  $d(I, J) = |g' - g| + |d' - d|$ . Pour calculer la distance entre deux systèmes d'isométries  $X$  et  $X'$  de  $\mathcal{S}'$ , on plonge les composantes de  $D$  et  $D'$  dans  $\mathbb{R}$  en préservant l'orientation de sorte que les centres de  $D_i$  et  $D'_i$  coïncident. On définit alors  $d(X, X')$  comme le maximum des  $d(D_j, D'_j)$ , des  $d(\text{dom}_X \varphi_i, \text{dom}_{X'} \varphi_i)$  et des  $d(\text{Im}_X \varphi_i, \text{Im}_{X'} \varphi_i)$ . En particulier, si  $X$  et  $X'$  sont  $\eta$ -proches, alors les bords des domaines et des ensembles d'arrivée des générateurs sont  $\eta$ -proches et les isométries globalement définies de  $\mathbb{R}$  induites sont  $\eta$ -proches (pour la distance uniforme). L'élargissement uniforme  $\Phi_t$  est une isométrie pour cette distance.

Il faut commencer par remarquer que si  $d(I, I') \leq \eta_1$  et  $d(J, J') \leq \eta_2$  alors  $d(I \cap J, I' \cap J') \leq \eta_1 + \eta_2$  si ni  $I \cap J$  ni  $I' \cap J'$  n'est vide (ce qui est assuré dès que  $|I \cap J| \geq \eta_1 + \eta_2$ ). De plus, si  $\bar{\varphi}$  et  $\bar{\varphi}'$  sont deux isométries globalement définies de  $\mathbb{R}$  telles que  $d(\bar{\varphi}, \bar{\varphi}') \leq \eta_1$  pour la distance uniforme, et si  $d(I, I') \leq \eta_2$  alors  $d(\bar{\varphi}^{-1}I, \bar{\varphi}'^{-1}I') \leq 2\eta_1 + \eta_2$ .

Considérons maintenant  $X$  et  $X' \in \mathcal{S}'$  tels que  $d(X, X') \leq \eta$ , et soit  $w = \varphi_1 \dots \varphi_p$  un mot dont les domaines dans  $X$  et  $X'$  sont non vides. Notons  $I_k = \text{dom}_X \varphi_k$ ,  $I'_k = \text{dom}_{X'} \varphi_k$  et  $\bar{\varphi}_k, \bar{\varphi}'_k$  les isométries globales de  $\mathbb{R}$  qui prolongent  $\varphi_k$  et  $\varphi'_k$ . On a alors

$$\begin{aligned} \text{dom}_X w &= \text{dom}_X \varphi_1 \cap \bar{\varphi}_1^{-1}(\text{dom}_X \varphi_2) \cap \dots \cap \bar{\varphi}_1^{-1} \dots \bar{\varphi}_{p-1}^{-1}(\text{dom}_X \varphi_p) \\ &= I_1 \cap \bar{\varphi}_1^{-1}[I_2 \cap \bar{\varphi}_2^{-1}[\dots [I_{p-1} \cap \bar{\varphi}_{p-1}^{-1}[I_p]] \dots]] \end{aligned}$$

On en déduit successivement que

$$\begin{aligned}
d(I_p, I'_p) &\leq \eta \\
d(\bar{\varphi}_{p-1}^{-1}[I_p], \bar{\varphi}'_{p-1}^{-1}[I'_p]) &\leq 3\eta \\
d(I_{p-1} \cap \bar{\varphi}_{p-1}^{-1}[I_p], I'_{p-1} \cap \bar{\varphi}'_{p-1}^{-1}[I'_p]) &\leq 4\eta \\
&\vdots \\
d(\text{dom}_X w, \text{dom}_{X'} w) &\leq (3p-2)\eta
\end{aligned}$$

On a bien sûr des estimations similaires pour les images de  $w$  dans  $X$  et  $X'$ . On en déduit le lemme suivant :

**Lemme 4.1.3.** *Soient  $X$  et  $X'$  deux systèmes d'isométries à distance  $\eta$ . Alors, si  $w$  est un mot de longueur  $p$  en les générateurs tel que  $\text{dom}_X w$  et  $\text{dom}_{X'} w$  sont non vides alors*

$$\begin{aligned}
d(\text{dom}_X w, \text{dom}_{X'} w) &\leq 3p\eta \\
d(\text{Im}_X w, \text{Im}_{X'} w) &\leq 3p\eta
\end{aligned}$$

*De plus,  $\text{dom}_{X'} w$  est non vide dès que  $|\text{dom}_X w| \geq 3p\eta$ . On a aussi que les isométries globales de  $\mathbb{R}$  induites par  $w$  dans  $X$  et  $X'$  sont  $p\eta$  proches pour la distance uniforme.*

**Corollaire 4.1.4.** *Soit  $w$  un mot de longueur plus petite que  $p$ . On suppose que les orbites de  $X$  sont finies et on note  $d$  la plus petite épaisseur d'une famille d'orbites finies de  $X$ . Alors, si  $d(X, X') = \eta < d/3p$ , on a :*

- *Si  $w$  est défini dans  $X'$ , il est défini dans  $X$*
- *Si  $w$  est défini dans  $X$  sur un intervalle non réduit à un point, il est défini dans  $X'$ .*

*Preuve du corollaire.* Le second point utilise juste que si  $\text{dom}_X w$  n'est pas réduit à un point alors  $|\text{dom}_X w| \geq d$ .

On va montrer la contraposée du premier point. Supposons donc que  $w$  n'est pas défini dans  $X$ . Alors, il existe un sous-mot à droite  $\varphi.v$  de  $w$  tel que  $\text{dom } v \neq \emptyset$  et  $\text{dom } \varphi.v = \emptyset$ . Si  $\text{dom } \varphi$  et  $\text{Im } v$  ne sont pas dans la même composante de  $D$ ,  $w$  n'a aucune chance d'être défini dans  $X'$ . Dans le cas contraire,  $\text{dom } \varphi$  et  $\text{Im } v$  sont séparés par au moins une famille d'orbites finies donc par un intervalle de largeur au moins  $d$ . Maintenant, le lemme assure que  $d(\text{Im}_X v, \text{Im}_{X'} v) \leq 3|v| \times \eta$  et  $d(\text{dom}_X \varphi, \text{dom}_{X'} \varphi) \leq \eta$ . Du coup, les extrémités des intervalles  $\text{dom } \varphi$  et  $\text{Im } v$  ne peuvent se rapprocher que de  $(3|v| + 1)\eta < d$  donc  $\varphi.v$  et a fortiori  $w$  ne peuvent pas être défini dans  $X'$ .  $\square$

## 4.2 Segment légaux et injectivité du semi-flot $\Phi_t$

### Segments légaux et pliages bornés

On sait d'après [GL] que les composantes de l'image réciproque  $\tilde{D}$  de  $D$  dans  $\tilde{\Sigma}$  se plongent isométriquement dans  $T_X$  par l'application quotient. Puisque  $\tilde{D}$  coupe toutes les feuilles de  $\tilde{\Sigma}$ , son image dans  $T_X$  recouvre tout  $T_X$ . Maintenant, choisissons une composante  $I_0$  de  $\tilde{D}$ , et choisissons un plongement de  $I_0$  dans  $\mathbb{R}$ . Si  $I_1$  est une autre composante de  $\tilde{D}$ , reliée à  $I_0$  par une bande de  $\tilde{\Sigma}$ , il y a un unique plongement de  $I_1$  dans  $\mathbb{R}$  qui soit constant sur l'intersection de feuilles de  $\tilde{\Sigma}$  avec  $I_0 \cup I_1$ .

On peut ainsi définir de proche en proche un plongement de  $\tilde{D}$  dans  $\mathbb{R}$  qui soit constant sur les feuilles de  $\Sigma$ . Cette application passe donc au quotient en un morphisme d'arbres réels  $P : T_X \rightarrow \mathbb{R}$ . Ce morphisme est équivariant pour l'action de  $F_n$  sur  $\mathbb{R}$  donnée par le morphisme des périodes  $P : \pi_1(\mathcal{I}) \rightarrow \text{Per}(X) \subset \text{Isom } \mathbb{R}$  associé au choix de ce plongement de  $I_0$  ( $P$  note à la fois le morphisme des périodes et le morphisme d'arbres réels, mais il n'y a pas de risque de confusion).

Notons  $\tilde{\Sigma}_t$  le revêtement universel de la suspension de  $\Phi_t(X)$  et  $\tilde{D}_t$  l'image réciproque de  $\Phi_t(D)$  dans  $\tilde{\Sigma}_t$ . On a une inclusion naturelle de  $\tilde{\Sigma}$  dans  $\tilde{\Sigma}_t$  qui induit un morphisme d'arbres réels équivariant  $f_t : T_X \rightarrow T_{\Phi_t(X)}$ . Si on note  $P_t : T_{\Phi_t(X)} \rightarrow \mathbb{R}$  le morphisme d'arbres réels associé au même plongement dans  $\mathbb{R}$  de  $I_0 \subset \tilde{\Sigma}_t$ , on a  $P = P_t \circ f_t$ .

**Définition.** On dit qu'un arc  $I \subset T_X$  est légal si  $P$  plonge isométriquement  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .

*Remarque.* Puisque tout segment peut être subdivisé en un nombre fini de sous-segments qui sont inclus dans l'image d'une composante de  $\tilde{D}$ , tout segment peut être subdivisé en un nombre fini de segments légaux.

**Lemme 4.2.1.** *L'application  $f_t$  est une isométrie en restriction à tout segment légal. De plus, si  $I$  et  $J$  sont deux segments légaux s'intersectant en un seul point  $x$ , et si le segment  $I \cup J$  n'est pas légal, alors les sous-arcs de  $I$  et  $J$  de longueur  $t$  contenant  $x$  sont identifiés par  $f_t$ .*

*Preuve.* Si  $I$  est un segment légal,  $f_t$  est une isométrie en restriction à  $I$  puisque  $P = P_t \circ f_t$ .

Prouvons maintenant la seconde assertion. Soient  $I'$  et  $J'$  les sous-arcs de  $I$  et  $J$  de longueur  $t$ . On subdivise  $I'$  et  $J'$  en un nombre fini de sous-intervalles

$I' = I_1 \cup \dots \cup I_p$  et  $J' = J_1 \cup \dots \cup J_p$  de sorte que chaque sous-intervalle  $I_i$  et  $J_i$  soit dans l'image d'une composante de  $\tilde{D}$  et que  $|I_i| = |J_i|$ . On peut supposer que  $x \in I_1 \cap J_1$ . Il suffit alors de montrer que  $I_1$  et  $J_1$  sont identifiés par  $f_t$  pour  $t = |I_1| = |J_1|$ .

Considérons donc  $[a_1, b_1]$  et  $[a'_1, b'_1]$  des relevés de  $I_1$  et  $J_1$  dans  $\tilde{D}$ , où  $a_1$  et  $a'_1$  sont des relevés de  $x$ . Puisque l'espace des feuilles de  $\tilde{\Sigma}$  est séparé,  $a_1$  et  $a'_1$  appartiennent à la même feuille. Notons  $w$  le mot correspondant à la suite de bandes qui relie  $a_1$  à  $a'_1$ . Comme  $I_1 \cup J_1$  n'est pas légal, l'orientation de  $w$  est telle que dans  $\tilde{\Sigma}_t$ ,  $w$  envoie  $[a_1, b_1]$  sur  $[a'_1, b'_1]$ , ce qui montre que  $I_1$  et  $J_1$  sont identifiés par  $f_t$ .  $\square$

**Lemme 4.2.2.** *Si  $T_X$  est minimale, tout segment légal est inclus dans une droite (isométrique à  $\mathbb{R}$ ) légale.*

*Preuve.* On a vu dans la preuve du lemme 4.1.2 sur la minimalité que pour tout point  $x \in \partial D$ , il existe un  $X$ -mot  $w_x$  dont le domaine n'est pas réduit à un point et qui envoie  $x$  dans  $\overset{\circ}{D}$ . Soit

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min_{x \in \partial D} \left\{ |\text{dom } w_x|, d(w_x(x), \partial D) \right\}.$$

On montre que si  $I = [a, b]$  est un segment légal, on peut le prolonger d'une longueur  $\varepsilon$  de chaque côté en un segment légal. En effet, le germe de  $I$  en  $a$  se relève dans  $\tilde{D}$  en un segment  $[a', c']$ . La définition de  $\varepsilon$  implique qu'on peut supposer que  $a'$  soit à distance au moins  $\varepsilon$  du bord de la composante de  $\tilde{D}$  qui le contient. On prolonge alors  $I$  par l'image dans  $T_X$  de la composante de  $\tilde{D} \setminus \{a'\}$  adjacente à  $a'$  et ne contenant pas  $c'$ .  $\square$

**Définition.** *On dit qu'une application continue  $f : T_1 \rightarrow T_2$  a des pliages bornés par  $C$  (bounded backtracking en anglais) si pour tout segment  $[a, b]$  de  $T_1$  tel que  $f(a) = f(b)$ ,  $f([a, b])$  est inclus dans la boule de rayon  $C$  de  $T_2$  centrée en  $f(a) = f(b)$  (voir section 2.9).*

**Lemme 4.2.3.** *Le morphisme  $f_t : T_X \rightarrow T_{\Phi_t(X)}$  a des pliages bornés par  $t$ .*

*Preuve.* Puisque connexité et convexité sont deux notions identiques dans un arbre réel, il suffit de démontrer que pour tous points  $a, b \in T_X$  tels que  $f_t(a) = f_t(b)$ , il existe un chemin  $c : [0, l] \rightarrow T_X$  reliant  $a$  et  $b$  tel que

$$\text{pour tout } s \in [0, l], \quad d(f_t \circ c(s), f_t(a)) \leq t.$$

Choisissons  $a', b' \in \tilde{D}$  des représentants de  $a$  et  $b$ . Le fait que  $f_t(a) = f_t(b)$  signifie que  $a'$  et  $b'$  sont dans la même feuille de  $\tilde{\Sigma}_t$  (on utilise l'inclusion  $\tilde{\Sigma} \subset \tilde{\Sigma}_t$  et le fait que l'espace des feuilles est séparé). Considérons l'unique arc simple inclus dans une feuille de  $\tilde{\Sigma}_t$  joignant  $a'$  et  $b'$  et notons  $a'_0 = a', a'_1, \dots, a'_{k-1}, a'_k = b'$  les points consécutifs de  $\tilde{D}_t$  rencontrés par cet arc.

Puisque  $\Phi_t(X)$  est obtenu à partir de  $X$  en élargissant le domaine du système d'isométries et les bases des générateurs d'une largeur  $t$  de chaque côté, pour tout  $i = 1, \dots, k$ , il existe un segment  $c_i = [p_i q_i]$  inclus dans une feuille de  $\tilde{\Sigma}$ , tel que  $p_i$  et  $q_i$  soient dans la même composante de  $\tilde{D}_t$  que  $a'_{i-1}$  et  $a'_i$  respectivement, et vérifiant  $d(a'_{i-1}, p_i) = d(a'_i, q_i) \leq t$ . Il suffit alors de prendre pour chemin  $c$  l'image dans  $T_X$  du chemin

$$[a' p_1] c_1 [q_1 p_2] c_2 \dots c_k [q_k b'].$$

□

**Corollaire 4.2.4.** *Si  $I_1$  et  $I_2$  sont deux segments légaux de  $T_X$  qui s'intersectent en un seul point  $x$ , et si  $I_1 \cup I_2$  n'est pas légal, alors  $f_t$  identifie  $I_1$  et  $I_2$  sur une longueur exactement égale à  $t$ .*

*Preuve.* S'ils étaient identifiés sur une longueur strictement supérieure à  $t$ ,  $f_t$  n'aurait pas des pliages bornés par  $t$  puisque  $f_t$  plonge isométriquement les segments légaux  $I_1$  et  $I_2$ . □

**Corollaire 4.2.5.** *Si  $(T_X, F_n)$  est simpliciale et minimale, les arêtes de  $T_X$  sont légales.*

*Preuve.* Supposons au contraire qu'on ait deux segments légaux adjacents  $I_1$  et  $I_2$  inclus dans une arête de  $T_X$  tels que  $I \cup J$  ne soit pas légal. Notons  $x$  le point d'intersection de  $I_1$  et  $I_2$ . Alors, pour  $t < \min(|I_1|, |I_2|)$  aucun point  $y \neq x$  de  $T_X$  ne peut être identifié avec  $x$  par  $f_t$ . En effet, si  $y$  appartient à  $I_1 \cup I_2$ ,  $[xy]$  est légal et donc est plongé par  $f_t$ , et si  $y$  est hors de  $I \cup J$ , alors  $f_t([xy])$  contient  $f_t(I_1)$  ou  $f_t(I_2)$  et a donc un rayon supérieur à  $t$ .

On en déduit que  $f_t(x)$  est un sommet terminal de  $T_{\Phi_t(x)}$  ce qui contredit le lemme 4.1.2 qui affirme que  $(T_{\Phi_t(X)}, F_n)$  est minimale. □

**Corollaire 4.2.6.** *Soit  $I$  un intervalle légal de  $T_X$  contenu dans l'axe d'un élément  $g \in F_n$ . Si le  $t$ -voisinage de  $I$  dans l'axe de  $g$  est légal, alors  $g$  est hyperbolique dans  $T_{\Phi_t(X)}$  et  $f_t(I)$  est inclus dans l'axe de  $g$ .*

*Preuve.* Notons  $J$  le  $t$ -voisinage de  $I$  dans l'axe de  $g$ . Si  $|J| > l_{T_X}(g)$ , alors l'axe de  $g$  est légal,  $f_t$  est une isométrie en restriction à cet axe et le résultat est clair.

Dans le cas contraire,  $\overset{\circ}{I}$  sépare  $g^{-1}.I$  de  $g.I$ , et  $g^{-1}.I$  et  $g.I$  sont dans les composantes de  $T_X \setminus \overset{\circ}{I}$  contenant les extrémités de  $I$ . Considérons le segment  $c$  joignant  $g^{-1}.J$  et  $J$ . Puisque  $f_t$  a des pliages bornés par  $t$ , un point  $a$  de  $c \cup g^{-1}.J$  (resp. de  $g.c \cup J$ ) ne peut pas être identifié avec un point  $b \in \overset{\circ}{I}$  par  $f_t$  car le segment  $[a, b]$  contient à son extrémité une partie légale de longueur strictement supérieure à  $t$ . Ceci implique que  $f_t(\overset{\circ}{I})$  sépare  $g^{-1}.f_t(I)$  de  $g.f_t(I)$  et que  $g^{-1}.I$  et  $g.I$  sont dans les composantes de  $T_{\Phi_t(x)} \setminus f_t(\overset{\circ}{I})$  contenant les extrémités de  $f_t(I)$ . On en déduit que  $g$  est hyperbolique dans  $T_X$  et que  $f_t(I)$  est inclus dans l'axe de  $g$ .  $\square$

### Semi-flot et injectivité

Considérons  $(T_0, F_n)$  une action simpliciale libre de  $F_n$  munie d'une partition pour chaque sommet  $v$  de  $T_0/F_n$  des arêtes incidentes sur  $v$ . Soit  $\sigma$  le cône ouvert d'actions aiguillées obtenu en donnant de manière équivariante à chaque arête de  $T_0$  une longueur non nulle (les actions sont considérées modulo *isométrie* équivariante). On suppose que ce cône est de dimension maximale, c'est à dire que tous les sommets de  $T_0/F_n$  sont de valence 3.

En restriction à ce cône, le semi-flot  $\Phi_t$  est linéaire, la longueur de chaque arête variant linéairement avec le temps, avec une pente égale à  $+2$ ,  $0$  ou  $-2$ . Si  $(T, F_n)$  est une action appartenant à  $\sigma$ , et si  $X$  est un système d'isométries tel que  $(T, F_n) = (T_X, F_n)$ , on note par abus  $\Phi_t(T)$  l'action  $(T_{\Phi_t(X)}, F_n)$ . L'injectivité que l'on va prouver est la suivante :

**Proposition 4.2.7.** *Si  $(T, F_n)$  et  $(T', F_n)$  sont deux actions aiguillées appartenant à  $\sigma$ , et s'il existe  $t_0, t'_0$  tels que  $\Phi_{t_0}(T, F_n) = \Phi_{t'_0}(T', F_n)$  modulo isométrie équivariante, alors il existe  $s \in \mathbb{R}_+$  tel que  $\Phi_s(T, F_n) = (T', F_n)$  ou  $\Phi_s(T', F_n) = (T, F_n)$  modulo isométrie équivariante.*

*De plus, si  $(T, F_n) \in \sigma$ , et si  $\Phi_{t_0}(T) \notin \sigma$ , alors, pour tout  $t \geq t_0$ ,  $\Phi_t(T) \notin \sigma$ .*

L'un des intérêts de cette proposition est le suivant : on va construire dans la suite un temps d'accès au bord  $\tau$  continu qui associe à  $T \in \sigma$  un temps  $\tau(T)$  tel que  $\Phi_{\tau(T)}$  correspond à une action de la frontière de l'outre-espace,  $\tau(\Phi_t(T)) = \tau(T) - t$ , et  $\tau(\lambda(T, F_n)) = \lambda\tau(T, F_n)$ . L'application de  $\sigma$  dans l'ensemble des action très petites de  $F_n$  modulo isométrie équivariante qui à  $T \in \sigma$  associe  $\Phi_{\tau(T)}(T)$  est alors injective sur toute transversale au semi-flot dans  $\sigma$ . Si  $[\sigma]$  est le simplexe ouvert correspondant

à  $\sigma$  dans  $CV_n$  (l'espace *projectifié* des actions simpliciales libres), cette application induit une application injective et continue de toute section transverse au flot de  $[\sigma]$  dans  $\partial CV_n$ . Ceci permet en particulier de définir des simplexes de dimension maximale dans la frontière de l'outre-espace.

*Preuve.* Soit  $(T_0, F_n)$  une action simpliciale libre aiguillée définissant le simplexe  $\sigma$ , de sorte que  $T$  et  $T'$  soient obtenus en changeant de manière équivariante les longueurs des arêtes de  $T_0$ . On note  $f : T_0 \rightarrow T$  et  $f' : T_0 \rightarrow T'$  les applications simpliciales équivariantes naturelles. Quitte à permuter les rôles de  $T$  et  $T'$ , on peut supposer que  $t_0 \geq t'_0$ .

Soit  $e$  une arête de  $T_0$ . On peut distinguer trois cas qui ne dépendent que des arêtes adjacentes de  $e$  (voir figure 4.4).

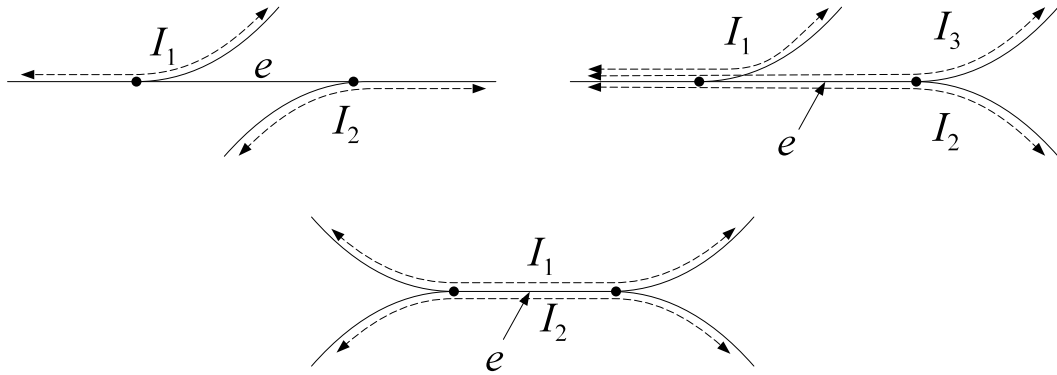


FIG. 4.4 – Les trois cas pour une arête  $e$  de  $T_0$

**Premier cas.** Il existe deux segments légaux disjoints  $I_1$  et  $I_2$  de  $T_0$  tels que  $e$  soit le pont entre  $I_1$  et  $I_2$  avec  $e \cap I_1 \in \overset{\circ}{I}_1$  et  $e \cap I_2 \in \overset{\circ}{I}_2$  (où  $\overset{\circ}{I}$  note  $I$  privé de ses extrémités). Ce cas correspond aux arêtes dont la longueur varie avec une pente  $-2$  le long du flot.

**Deuxième cas.** Il existe trois segments légaux  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  de  $T_0$  tels que  $e \subset \overset{\circ}{I}_2 \cap \overset{\circ}{I}_2$ ,  $e$  rencontre  $I_1$  en un point de  $\overset{\circ}{I}_1$ ,  $I_1 \cap I_2 \cap I_3$  est non réduit à un point et  $e = (I_2 \cap I_3) \setminus (I_1 \cap I_2 \cap I_3)$ . On choisit l'orientation de ces segments de manière à ce qu'elles concordent sur  $I_1 \cap I_2 \cap I_3$  et que  $e$  soit la composante de  $(I_2 \cap I_3) \setminus (I_1 \cap I_2 \cap I_3)$  qui soit *après*  $I_1 \cap I_2 \cap I_3$ . Ce cas correspond aux arêtes dont la longueur est constante le long du flot.

**Troisième cas.** Il existe deux segments légaux  $I_1$ , et  $I_2$  de  $T_0$  tels que  $e = \overset{\circ}{I}_1 \cap \overset{\circ}{I}_3$ . Ce cas correspond aux arêtes dont la longueur varie avec une pente  $+2$  le long du



flot.

Dans chacun des cas, considérons des droites légales  $d_1, d_2$  et éventuellement  $d_3$  dans  $T_0$  contenant respectivement  $I_1, I_2$  et  $I_3$ . Pour  $i = 1, 2$  ou  $3$ , soit  $J_i \subset d_i$  tel que  $f(J_i)$  et  $f'(J_i)$  contiennent les  $t_0$ -voisinage de  $f(I_i)$  et  $f'(I_i)$  dans  $f(d_i)$  et  $f'(d_i)$  respectivement. On considère aussi  $K_i \subset d_i$  tel que  $f(K_i)$  et  $f'(K_i)$  contiennent les  $t_0$ -voisinage de  $f(J_i)$  et  $f'(J_i)$  dans  $f(d_i)$  et  $f'(d_i)$  respectivement. Soit  $\gamma_i$  un élément hyperbolique de  $F_n$  dont l'axe contient  $K_i$  (il en existe toujours puisque  $(T_0, F_n)$  est non abéliennes, voir [Pau2, lemme 4.3], ou aussi prop. 1.3.1). Bien sûr,  $\gamma_i$  est hyperbolique dans  $T$  et  $T'$  et son axe contient  $f(K_i)$  et  $f'(K_i)$  respectivement. Lorsque les intervalles  $I_i$  sont orientés, comme dans le deuxième cas, on peut supposer que l'orientation de  $\gamma_i$  coïncide avec celle de  $I_i$  (quitte à changer  $\gamma_i$  en son inverse).

Retournons maintenant au premier cas. Pour toute action  $(T'', F_n)$ , si  $I_1$  et  $I_2$  sont des intervalles de  $T''$ , on note

$$D_{T''}(I_1, I_2) = \begin{cases} |\text{pont}(I_1, I_2)| & \text{si } I_1 \cap I_2 \neq \emptyset, \\ -|I_1 \cap I_2| & \text{si } I_1 \cap I_2 = \emptyset. \end{cases}$$

On pose aussi  $D_{T''}(\gamma_1, \gamma_2) = D_{T''}(\text{Axe}_{T''}(\gamma_1), \text{Axe}_{T''}(\gamma_2))$ . Pour tout  $(T'', F_n) \in \sigma$ , si  $f'' : T_0 \rightarrow T''$  note l'application naturelle, on a

$$D_{T''}(\gamma_1, \gamma_2) = D_{T''}(f''(J_1), f''(J_2)) = |f''(e)|$$

par choix des intervalles  $I_i$  et de  $\gamma_i$ .

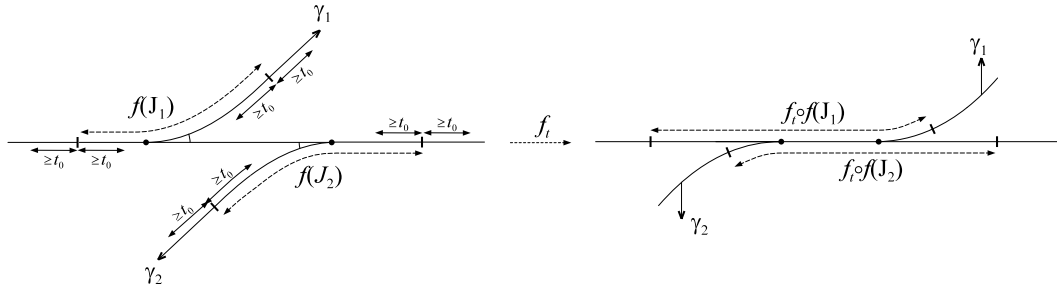


FIG. 4.5 – Configuration du premier cas

Notons  $f_t : T \rightarrow \Phi_t(T)$  et  $f'_t : T' \rightarrow \Phi_t(T')$ . Pour  $t \leq t_0$ ,  $f_t \circ f(J_i)$  appartient à l'axe de  $\gamma_i$  grâce au corollaire 4.2.6. De plus il est facile de voir en se servant du corollaire 4.2.4 que pour  $t \leq t_0$ ,

$$D_{\Phi_t(T)}(f_t \circ f(J_1), f_t \circ f(J_2)) = D_T(f(J_1), f(J_2)) - 2t = |f(e)| - 2t$$

donc que  $D_{\Phi_t(T)}(\gamma_1, \gamma_2) = |f(e)| - 2t$ . On a bien sûr les énoncés équivalents pour  $T'$ . Puisqu'il existe une isométrie équivariante entre  $\Phi_{t_0}(T)$  et  $\Phi_{t'_0}(T')$ , on a  $D_{\Phi_{t_0}(T)}(\gamma_1, \gamma_2) = D_{\Phi_{t'_0}(T')}(\gamma_1, \gamma_2)$ , d'où on déduit que

$$D_{\Phi_{t_0-t'_0}(T)}(\gamma_1, \gamma_2) = D_{T'}(\gamma_1, \gamma_2). \quad (4.1)$$

Dans le deuxième cas, étant donnés trois segments orientés  $I_1, I_2$  et  $I_3$  d'un arbre  $T''$  tels que  $I_1 \cap I_2 \cap I_3$  contienne plus d'un point, et tels que les orientations de ces intervalles coïncident sur  $I_1 \cap I_2 \cap I_3$ , on note  $D_{T''}(I_1, I_2, I_3)$  la longueur de la composante de  $I_2 \cap I_3 \setminus (I_1 \cap I_2 \cap I_3)$  qui est après  $I_1 \cap I_2 \cap I_3$  relativement à l'orientation de  $I_2 \cap I_3$ . On définit ainsi  $D_{T''}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = D_{T''}(\text{Axe}(\gamma_1), \text{Axe}(\gamma_2), \text{Axe}(\gamma_3))$  lorsque les axes de  $\gamma_1, \gamma_2$  et  $\gamma_3$  ont une intersection non dégénérée et lorsque leurs orientations coïncident.

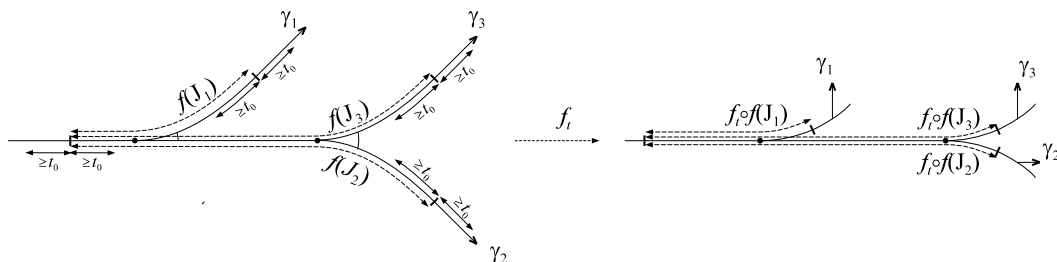


FIG. 4.6 – Configuration du second cas

Pour toute action  $(T'', F_n) \in \sigma$ , on a

$$D_{T''}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = D_{T''}(f''(J_1), f''(J_2), f''(J_3)) = |f''(e)|$$

par choix des intervalles  $I_i$  et de  $\gamma_i$ . Pour  $t \leq t_0$ , le corollaire 4.2.6 implique que  $f_t \circ f(J_i)$  appartient à l'axe de  $\gamma_i$ . Là encore, on voit facilement grâce au corollaire 4.2.4 que pour  $t \leq t_0$ ,

$$D_{\Phi_t(T)}(f_t \circ f(J_1), f_t \circ f(J_2), f_t \circ f(J_3)) = D_T(f(J_1), f(J_2), f(J_3)) = |f(e)|$$

et que  $D_{\Phi_t(T)}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = |f(e)|$ . Puisque  $D_{\Phi_{t_0}(T)}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = D_{\Phi_{t'_0}(T')}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ , on en déduit que

$$D_{\Phi_{t_0-t'_0}(T)}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = D_{T'}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3). \quad (4.2)$$

Dans le troisième cas, si  $I_1$  et  $I_2$  sont des intervalles de  $T''$ , on note  $D_{T''}(I_1, I_2)$  la longueur de l'intersection de  $I_1$  et  $I_2$ . On a

$$D_{T''}(\gamma_1, \gamma_2) = D_{T''}(f''(J_1), f''(J_2)) = |f''(e)|$$

par choix des intervalles  $I_i$  et de  $\gamma_i$ .

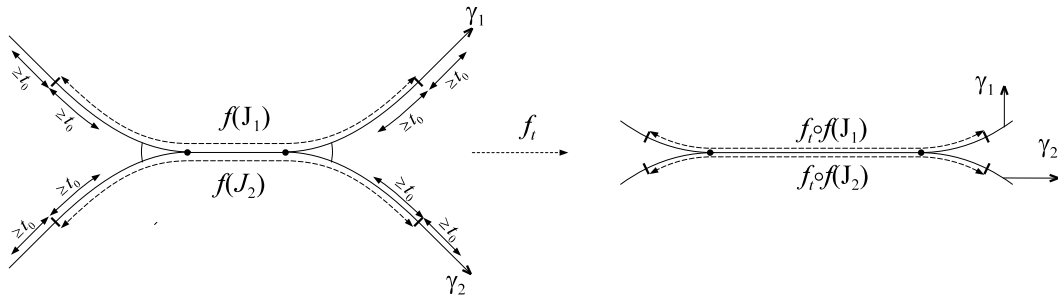


FIG. 4.7 – Configuration du troisième cas

Pour  $t \leq t_0$ ,  $f_t \circ f(J_i)$  appartient à l'axe de  $\gamma_i$  grâce au corollaire 4.2.6. On peut alors vérifier en se servant du corollaire 4.2.4 que pour  $t \leq t_0$ ,

$$D_{\Phi_t(T)}(f_t \circ f(J_1), f_t \circ f(J_2)) = D_T(f(J_1), f(J_2)) = |f(e)| + 2t$$

et que  $D_{\Phi_t(T)}(\gamma_1, \gamma_2) = |f(e)| + 2t$ . Puisque  $D_{\Phi_{t_0}(T)}(\gamma_1, \gamma_2) = D_{\Phi_{t'_0}(T')}(\gamma_1, \gamma_2)$ , on en déduit que

$$D_{\Phi_{t_0-t'_0}(T)}(\gamma_1, \gamma_2) = D_{T'}(\gamma_1, \gamma_2). \quad (4.3)$$

Notons  $s$  le premier instant où  $\Phi_s(T)$  sort de  $\sigma$ . Ceci se traduit par le fait que pour une arête  $e$  de  $T_0$ , l'arête correspondante dans  $\Phi_s(T)$  a une longueur nulle. Ceci n'est possible que pour une arête du premier cas (les longueurs des arêtes des autres cas sont croissantes), et on a alors  $D_{\Phi_s(T)}(\gamma_1, \gamma_2) = 0$ . En particulier, pour  $t \in [s, t_0]$   $D_{\Phi_t(T)}(\gamma_1, \gamma_2) \leq 0$  ce qui empêche  $\Phi_t(T)$  d'appartenir à  $\sigma$ . Ceci démontre la seconde partie de la proposition.

Maintenant, pour toute arête  $e$  de  $T_0$ ,

$$D_{\Phi_{t_0-t'_0}(T)}(\gamma_1, \gamma_2) = D_{T'}(\gamma_1, \gamma_2) = |f'(e)| > 0.$$

On en déduit que  $t_0 - t'_0 < s$ , c'est à dire que  $\Phi_{t_0-t'_0}(T)$  appartient à  $\sigma$ . Les équations (4.1), (4.2) et (4.3) montrent alors que pour chaque arête  $e$  de  $T_0$  on a

$$|f_{t_0-t'_0} \circ f(e)| = D_{\Phi_{t_0-t'_0}(T)}(\gamma_1, \gamma_2) = D_{T'}(\gamma_1, \gamma_2) = |f'(e)|.$$

On en déduit que  $\Phi_{t_0-t'_0}(T) = T'$ . □

### 4.3 Le temps d'accès au bord

On se place sur un ensemble  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\mathcal{I}}$  de systèmes d'isométries défini comme dans la section 4.1 : c'est un ensemble de systèmes d'isométries pour lequel le graphe d'incidence étiqueté  $\mathcal{I}$  est constant et pour lequel l'action  $T_X$  correspondant à un système d'isométries  $X$  est minimale. Le but de cette partie est de définir un *temps d'accès au bord*  $\tau : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}_+$  avec les propriétés suivantes :

**Proposition 4.3.1.** *Le temps d'accès au bord  $X \mapsto \tau(X)$  est nul sur les systèmes d'isométries pour lesquels l'action correspondante  $T_X$  n'est pas très petite. De plus, pour  $t \leq \tau(X)$ ,  $\tau(\Phi_t(X)) = \tau(X) - t$ . En particulier, si  $\tau(X) > 0$ , l'action  $T_{\Phi_t(X)}$  est très petite pour tout  $t \in [0, t_0]$ . Enfin  $\tau(X)$  est strictement positif lorsque  $T_X$  est simpliciale libre.*

Nous démontrerons alors le résultat suivant :

**Théorème 4.3.2.** *Le temps d'accès au bord  $X \mapsto \tau(X)$  est continu.*

Nous avons besoin de quelques définitions.

**Définition 4.3.3.** *Soit  $w$  un mot d'un système d'isométries  $X$  sans singleton sur un multi-intervalle  $D$  qui est une restriction de l'identité à un intervalle non vide (mais éventuellement réduit à un point). On suppose que les composantes de  $D$  sont orientées. Considérons le groupe libre  $F_X$  sur les générateurs du système d'isométries. On dira que  $w$  est un mot fixe robuste si pour tout morphisme  $p : F_X \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{R})$  tel que l'orientation de tout générateur  $\varphi \in X$ , coïncide avec celle de  $p(\varphi)$ , alors  $p(w) = \text{Id}$ .*

*Remarque.* Cette définition ne dépend pas des orientations choisies pour les composantes de  $D$ . En effet, si  $I$  est la composante de  $D$  contenant  $\text{dom } w$  et  $\text{Im } w$ ,  $w \in \pi_1(\mathcal{I}, I)$  où  $\mathcal{I}$  est le graphe d'incidence de  $X$  et  $\pi_1(\mathcal{I}, I)$  est vu comme un sous-groupe de  $F_X$  ( $F_X$  est le groupe de Bass de  $\mathcal{I}$ ) et  $\pi_1(\mathcal{I}, I)$  est un facteur libre de  $F_X$ . Le fait que  $w$  soit robuste est alors équivalent au fait que tout morphisme  $p' : \pi_1(\mathcal{I}, I) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{R})$  préservant l'orientation envoie  $w$  sur l'identité. Maintenant, il est clair que le changement d'orientation d'une base ne changera pas l'orientation d'un élément de  $\pi_1(\mathcal{I}, I)$ .

De plus, si  $w$  est un mot fixe robuste d'un système d'isométries  $X \in \mathcal{S}$ , et si  $\text{dom}_{X'} w \neq \emptyset$  pour un système  $X' \in \mathcal{S}$ , alors  $w$  est un mot fixe robuste de  $X'$ .

**Définition 4.3.4.** *On dira qu'un intervalle  $I$  non vide (éventuellement réduit à un point) de  $D$  a un stabilisateur robuste s'il existe un mot fixe robuste qui soit défini sur  $I$ . On dira que  $X$  a un stabilisateur robuste s'il existe un point de son domaine dont le stabilisateur est robuste.*

Un exemple typique de mot fixe robuste est un mot de la forme  $w = v^2$  où  $v$  a un point fixe et renverse l'orientation. Un autre exemple typique est  $w = uvu^{-1}v^{-1}$  pour des mots  $u$  et  $v$  préservant l'orientation à condition que  $w$  ait un domaine non vide.

L'intérêt de cette définition est le fait que si un système d'isométries possède un arc non dégénéré ayant un stabilisateur robuste, l'action associée ne peut pas être approchée par une action libre. Un simple argument sur la topologie de Gromov équivariante suffit à le montrer (mais nous n'en aurons pas besoin dans la suite). Par conséquent, dès l'apparition d'un stabilisateur robuste, il faudra s'arrêter de suivre le semi-flot  $\Phi_t$  sous peine de sortir de l'ensemble des action très petites puisque le domaine du mot fixe robuste sera non dégénéré pour les temps suivants.

De la même façon, il faudra s'arrêter de suivre le semi-flot dès qu'apparaîtra un stabilisateur non cyclique puisque l'action obtenue pour les temps supérieurs ne serait pas petite. Enfin, lorsqu'apparaît une composante minimale, aux temps supérieurs, elle devient homogène. Mais ceci empêche l'action correspondante d'être petite (Sela, voir aussi la remarque 2.5.4 dans le chapitre sur les actions stables).

Nous sommes maintenant armés pour définir le temps d'accès au bord :

**Définition 4.3.5.** *Soit  $X \in S$ . On pose*

- $\tau_1(X) = \inf\{t | \Phi_t(X) \text{ a un stabilisateur robuste}\},$
- $\tau_2(X) = \inf\{t | \Phi_t(X) \text{ a un stabilisateur non cyclique ou une composante minimale}\}.$

*On définit alors le temps d'accès au bord comme  $\tau(X) = \min(\tau_1(X), \tau_2(X))$ .*

Vérifions maintenant les premières propriétés de  $\tau$ .

*Démonstration de la proposition 4.3.1.* La première chose à vérifier est que le temps d'accès au bord est fini pour tout  $X$  dès que  $n \geq 2$ . On utilise pour cela le fait que le noyau du morphisme des périodes  $P : \pi_1(\mathcal{I}, I_0) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{R})$  n'est pas cyclique. Il suffit alors de remarquer que si  $w, w' \in \ker P$ , pour  $t > 0$  assez grand, on a  $\text{dom}_{\Phi_t(X)} w \cap \text{dom}_{\Phi_t(X)} w' \neq \emptyset$  donc  $w$  et  $w'$  ont un point fixe commun. Ceci implique que  $\tau_2(X)$  est fini. La même preuve montre que  $\tau_1(X)$  est lui aussi fini.

Vérifions maintenant que  $\tau(X)$  est nul pour  $X$  tel que  $T_X$  n'est pas très petite. Supposons donc que  $T_X$  n'est pas très petite. La première possibilité est que  $T_X$  ne soit pas petite auquel cas  $X$  a un stabilisateur non cyclique donc  $\tau_2(X) = 0 = \tau(X)$ . La deuxième possibilité est qu'il existe  $w \in F_n$  tel que  $\text{Fix}_{T_X} w \neq \text{Fix}_{T_X} w^k$  pour un  $k > 1$ . Dans ce cas, il existe un  $X$ -mot  $u$  tel que  $\text{Fix } u^k$  contienne strictement  $\text{Fix } u$ . Sur un multi-intervalle, ce n'est possible que si  $u$  fixe un point en renversant l'orientation auquel cas  $u^2$  est un mot fixe robuste, donc  $\tau_1(X) = 0 = \tau(X)$ . La dernière possibilité est que  $T_X$  ait un stabilisateur de tripode. Mais le fait que  $D$  soit un multi-intervalle empêche cela. On a donc montré que  $\tau(X)$  est nul quand  $T_X$  n'est pas très petite.

Le fait que pour  $t \leq \tau(X)$ ,  $\tau(\Phi_t(X)) = \tau(X) - t$  est évident.

Maintenant, si  $\tau(X) > 0$ , l'action  $T_{\Phi_t(X)}$  est très petite pour tout  $t \in [0, t_0[$  puisque  $\tau(\Phi_t(X)) > 0$ . L'action  $T_{\Phi_{\tau(X)}(X)}$  est alors très petite comme limite d'actions très petites.

Enfin pour montrer que  $\tau(X)$  est strictement positif lorsque  $T_X$  est simpliciale libre, on va montrer l'assertion plus forte disant que l'ensemble des systèmes d'isométries  $X$  tels que  $T_X$  est simpliciale libre est ouvert. Cette assertion est plus forte car pour les petits temps  $t$ ,  $\Phi_t(X)$  aura des stabilisateurs triviaux et n'aura pas de composante minimale. On pourrait utiliser le fait que l'ensemble des actions simpliciales libres de  $F_n$  est ouvert dans l'ensemble de toutes les actions de  $F_n$  mais on préfère donner une démonstration directe, plus simple, et qui donne une idée du genre d'argument qu'on utilisera dans ce chapitre.

Le fait que  $T_X$  est simpliciale libre est équivalent au fait qu'il y a un nombre fini de  $X$ -mots réduits dont le domaine est non vide (penser au fait que si  $w$  a un point fixe, alors pour tout  $k > 0$ ,  $w^k$  a un domaine non vide). Soit alors  $k$  un entier tel que tout  $X$ -mot réduit de longueur  $k$  ait un domaine vide. Notant  $d$  la plus petite épaisseur d'une famille d'orbites finies de  $X$ , le corollaire 4.1.4 dit que pour tout  $X'$  assez proche de  $X$  ( $d(X, X') < d/3k$ ), tout  $X'$ -mot réduit de longueur  $k$  a un domaine vide. Ceci implique a fortiori qu'un  $X'$ -mot de longueur supérieure à  $k$  a un domaine vide, et donc que  $T_{X'}$  est simpliciale libre.  $\square$

#### 4.4 Le temps d'accès au bord est continu

La démonstration se fait en deux étapes : on montrera que  $\tau_1$  et  $\tau_2$  sont semi-continues supérieurement, avant de démontrer l'autre semi-continuité de  $\tau$ .

### La première semi-continuité

**Proposition 4.4.1.** *La fonction  $\tau_1$  est semi-continue supérieurement.*

*Preuve.* Considérons  $X$  un système d'isométries et  $t_0 = \tau_1(X)$ . On veut montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que  $\tau_1(X') \leq t_0 + \varepsilon$  dès lors que  $d(X, X') \leq \eta$ .

Fixons donc un  $\varepsilon > 0$ . On a que pour tout  $t > t_0$ ,  $\Phi_t(X)$  contient un stabilisateur robuste et on cherche  $\eta > 0$  tel que si  $d(X', X) \leq \eta$ ,  $\Phi_{t_0+\varepsilon}(X')$  contienne un stabilisateur robuste.

Pour cela, considérons un mot fixe robuste  $w$  défini dans  $\Phi_{t_0+\varepsilon/2}(X)$ . Notons  $k = |w|$  la longueur de ce mot, et  $\lambda \geq 0$  la largeur de son domaine. Comme les orientations des générateurs sont fixées dans  $\mathcal{S}$ , il suffit de montrer que pour  $X'$  assez proche de  $X$ ,  $w$  est défini dans  $\Phi_{t_0+\varepsilon}(X')$  pour conclure que  $w$  est un mot fixe robuste de  $\Phi_{t_0+\varepsilon}(X')$ . Or, si  $X'$  est  $\eta$ -proche de  $X$ , alors  $X'_0 = \Phi_{t_0+\varepsilon}(X')$  est  $\eta$ -proche de  $X_0 = \Phi_{t_0+\varepsilon}(X)$  puisque  $\Phi_t$  est une isométrie sur  $\mathcal{S}$ . Comme  $|\text{dom}_{X_0} w| = \lambda + 2\varepsilon/2 \geq \varepsilon$ , d'après le lemme 4.1.3,  $w$  est défini dans  $X'_0$  dès que  $\eta < \varepsilon/3k$ .  $\square$

**Proposition 4.4.2.**  *$\tau_2$  est semi-continue supérieurement.*

*Preuve.* La démonstration suit le même schéma que la proposition précédente. Considérons  $X$  un système d'isométries et  $t_0 = \tau_1(X)$ . On veut montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que  $\tau_1(X') \leq t_0 + \varepsilon$  dès lors que  $d(X, X') \leq \eta$ .

Fixons donc  $\varepsilon > 0$ . On a que pour tout  $t > t_0$ ,  $\Phi_t(X)$  contient un stabilisateur non cyclique ou une composante minimale et on cherche  $\eta > 0$  tel que si  $d(X', X) \leq \eta$ ,  $\Phi_{t_0+\varepsilon}(X')$  contienne un stabilisateur non cyclique ou une composante minimale.

On note  $D$  le domaine de  $X$ , et  $D'$  celui de  $X'$ . Considérons  $x \in \Phi_{t_0+\varepsilon/2}(D)$  ayant un stabilisateur non cyclique ou appartenant à une composante minimale dans  $\Phi_{t_0+\varepsilon/2}(X)$ . Considérons deux mots  $w_1$  et  $w_2$  dans  $\Phi_{t_0+\varepsilon/2}(X)$ , ne commutant pas et préservant l'orientation, définis en  $x$  et dont la longueur de translation est assez petite (plus petite que  $l = \varepsilon/4$  suffira). On peut trouver de tels mots  $w_1, w_2$  si  $x$  est dans une composante minimale, et si le stabilisateur de  $x$  n'est pas cyclique, on peut prendre  $l = 0$ . Notons  $k = \max(|w_1|, |w_2|)$  le maximum des longueurs de ces mots, et  $\lambda \geq 0$  la largeur de l'intersection de leurs domaines dans  $\Phi_{t_0+\varepsilon/2}(X)$ . On démontrera le lemme suivant après avoir terminé la preuve de la proposition.

**Lemme 4.4.3.** *Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $t_1$  et  $t_2$  deux translations partielles de  $I$  définies de manière maximale (i.e.  $\text{dom } t_i = I \cap \bar{t}_i^{-1}(I)$  où  $\bar{t}_i$  est le prolongement de  $t_i$  à*

$\mathbb{R}$ ). On note  $\|t_i\|$  la longueur de translation de  $t_i$ , et on suppose que  $|I| \geq \|t_1\| + \|t_2\|$ . Alors, le système d'isométries sur  $I$  engendré par  $t_1$  et  $t_2$  est soit minimal soit à stabilisateurs non cycliques selon que  $\|t_1\|/\|t_2\|$  est rationnel ou non.

Soit  $X'$  un système d'isométries  $\eta$ -proche de  $X$ , et posons  $X_0 = \Phi_{t_0+\varepsilon}(X)$  et  $X'_0 = \Phi_{t_0+\varepsilon}(X')$ . On va appliquer le lemme à  $I = \text{dom}_{X'_0} w_1 \cap \text{dom}_{X'_0} w_2$ , avec  $t_i = w_i|_{I \cap w_i^{-1}(I)}$ . Pour appliquer ce lemme, il suffit de choisir  $\eta$  de sorte que

$$\|w_1\|_{X'_0} + \|w_2\|_{X'_0} \leq |\text{dom}_{X'_0} w_1 \cap \text{dom}_{X'_0} w_2|.$$

Or  $\|w_i\|_{X'_0} \leq l + k\eta$  et

$$|\text{dom}_{X'_0} w_1 \cap \text{dom}_{X'_0} w_2| \geq |\text{dom}_{X_0} w_1 \cap \text{dom}_{X_0} w_2| - 6k\eta = 2\varepsilon/2 + \lambda - 6k\eta.$$

Pour pouvoir appliquer le lemme, on veut donc que  $2l + 2k\eta \leq \varepsilon + \lambda - 6k\eta$  i. e.  $2l + 8k\eta \leq \varepsilon + \lambda$ . Donc, ayant choisi  $l = \varepsilon/4$ , il suffit de prendre  $\eta \leq \varepsilon/16k$ .  $\square$

*Preuve du lemme 4.4.3.* Quitte à changer  $t_1$  et  $t_2$  en leurs inverses, on se ramène au cas où  $t_1$  et  $t_2$  traduisent vers la droite. Supposons d'abord que  $\|t_1\|/\|t_2\|$  est rationnel, et considérons deux entiers positifs  $p$  et  $q$  tels que  $p\|t_1\| = q\|t_2\|$ . Notons  $x$  l'extrémité gauche de  $I$  et  $y$  son extrémité droite. Déjà,  $x$  appartient au domaine de  $t_1 t_2 t_1^{-1} t_2^{-1}$  et  $x$  est fixé par ce mot. On construit alors un mot  $w$  en  $t_1$  et  $t_2$  qui fixe  $x$  et qui ne commute pas avec  $t_1 t_2 t_1^{-1} t_2^{-1}$  : soit  $i_1$  le plus grand entier tel que  $t_1^{i_1}(x)$  soit défini. Puisque  $i_1$  est maximal,  $d(t_1^{i_1}(x), y) < \|t_1\|$ , et comme  $|I| \geq \|t_1\| + \|t_2\|$ ,  $i_1 \geq 1$ . On considère ensuite  $j_1$  le plus grand entier tel que  $t_2^{-j_1}(t_1^{i_1}(x))$  soit défini. Puisque  $|I| \geq \|t_1\| + \|t_2\|$  et  $d(t_1^{i_1}(x), y) < \|t_1\|$ , on a encore  $j_1 \geq 1$ . On continue cette construction jusqu'à ce que  $i_1 + \dots + i_k \geq p$  et on diminue alors  $i_k$  de sorte que  $i_1 + \dots + i_k = p$ . Le mot  $u = t_1^{i_k} t_2^{-j_{k-1}} \dots t_2^{-j_1} t_1^{i_1}$  est défini en  $x$ . Comme  $p\|t_1\| = q\|t_2\|$ ,  $u(x)$  est dans la même  $\bar{t}_2$ -orbite que  $x$  (où  $\bar{t}_2$  est le prolongement de  $t_2$  à  $\mathbb{R}$ ). Puisque le domaine de  $t_2$  est maximal, il existe un entier  $j_k$  tel que  $t_2^{-j_k}(u(x)) = x$ . Il suffit alors de prendre  $w = t_2^{-j_k} u$ .

Dans le cas où  $\|t_1\|/\|t_2\|$  est irrationnel, on montre que les orbites du système d'isométries sont la trace des orbites du groupe  $\mathbb{Z}t_1 + \mathbb{Z}t_2$  sur  $I$ , c'est à dire que pour tout  $x \in I$  et tout  $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$  tels que  $(p\bar{t}_1 + q\bar{t}_2)(x) \in I$ ,  $x$  et  $(p\bar{t}_1 + q\bar{t}_2)(x)$  sont dans la même orbite. On suppose toujours que  $t_1$  et  $t_2$  traduisent vers la droite. Si  $p$  et  $q$  sont de même signe, il est clair que  $t_1^p t_2^q$  est défini en  $x$ . Supposons donc par exemple que  $p > 0$  et  $q < 0$ . Comme  $|I| \geq \|t_1\| + \|t_2\|$ ,  $t_1$  ou  $t_2^{-1}$  est défini en  $x$ , par exemple,  $t_1$ . Comme dans le premier cas, on trouve des entiers  $i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k \geq 1$  tels que  $u = t_1^{i_k} t_2^{-j_{k-1}} \dots t_2^{-j_1} t_1^{i_1}$  soit défini en  $x$  avec  $i_1 + \dots + i_k = p$ . Les points  $u(x)$  et



$(p\bar{t}_1 + q\bar{t}_2)(x)$  sont dans la même  $\bar{t}_2$ -orbite et donc dans la même  $t_2$ -orbite puisque le domaine de  $T_2$  est maximal.  $\square$

*Remarque.* Ce système d'isométries n'est pas forcément homogène. Pour cela, il faudrait que le système d'isométries *ouvert* ait les mêmes orbites que le groupe  $\mathbb{Z}\bar{t}_1 + \mathbb{Z}\bar{t}_2$ . On peut voir que c'est le cas si et seulement si  $|I| > \|t_1\| + \|t_2\|$ .

### L'autre semi-continuité de $\tau$

Pour montrer la continuité de  $\tau$ , il suffit maintenant de démontrer le théorème suivant :

**Théorème 4.4.4.** *L'ensemble des systèmes d'isométries de  $\mathcal{S}$  dont les orbites sont finies, dont les stabilisateurs sont cycliques et n'ayant pas de stabilisateur robuste est ouvert dans  $\mathcal{S}$ .*

On aura aussi le résultat suivant :

**Théorème 4.4.5.** *L'ensemble des systèmes d'isométries de  $\mathcal{S}$  dont les orbites sont finies et dont les stabilisateurs sont cycliques est ouvert dans  $\mathcal{S}$ .*

*Remarque.* Peut-être faut-il rappeler que les stabilisateurs considérés ici sont les stabilisateurs des *points* de  $D$ , et non des arcs.

L'idée générale de la preuve est de contrôler la forme des mots qui peuvent être définis dans  $X'$  assez proche de  $X$  sous l'hypothèse que les orbites de  $X$  sont finies, et que ses stabilisateurs sont cycliques. C'est une idée assez similaire à celle qu'on a utilisée à la fin de la preuve de la proposition 4.3.1 où on démontrait qu'un mot défini dans  $X'$  assez proche de  $X$  tel que  $T_X$  est simpliciale libre est forcément défini dans  $X$ . Ici, on ne pourra pas arriver à ce résultat à cause du phénomène suivant (figure 4.8) : soit  $\Psi$  un  $X$ -mot qui est une restriction de l'identité. Soient  $u$  et  $v$  deux  $X$ -mots tels que  $\Psi u$  et  $v\Psi$  sont définis sur un intervalle non réduit à un point et tels que  $v\Psi u$  ne soit pas défini dans  $X$ . Alors, si on perturbe  $X$  en un système d'isométries  $X'$  de sorte que  $\Psi$  devienne une petite translation, il va exister un entier  $k$  tel que  $u\Psi^k v$  soit défini dans  $X'$ . Notre but est de montrer que c'est la seule façon d'obtenir un mot défini dans  $X'$  mais pas dans  $X$ . A partir de là, il ne sera pas difficile de déduire les théorèmes.

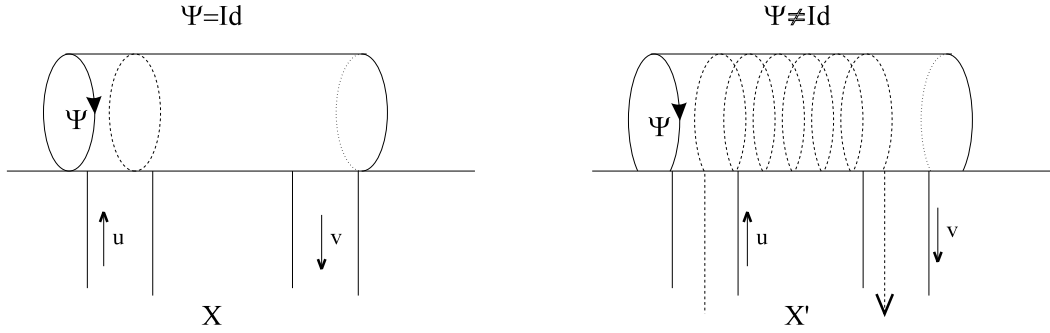


FIG. 4.8 – Il peut exister des mots définis dans  $X'$  et pas dans  $X$  pour  $X'$  proche de  $X$

### Les mots définis dans $X'$

**Définition 4.4.6.** On dira qu'un  $X$ -mot  $\Psi$  non trivial est fixe primitif s'il est réduit, s'il fixe un point  $x$  de  $D$  en préservant l'orientation et s'il est tel que tout  $X$ -mot  $\Psi'$  fixant  $x$  en préservant l'orientation est une puissance de  $\Psi$  (modulo simplifications).

**Définition 4.4.7.** Un  $X$ -mot  $w$  est appelé mot simple si son domaine est non vide dans  $X$  et si aucun de ses sous-mots ne fixe un point en préservant l'orientation.

On note  $d$  la plus petite épaisseur d'une famille d'orbite finies de  $X$ , et  $c$  le maximum des cardinaux des orbites orientables et du double des cardinaux des orbites non-orientables de  $X$  (l'orbite de  $x$  est dite non-orientable s'il existe un  $X$ -mot  $w$  qui fixe  $x$  en renversant l'orientation. Cette notion a un sens même si le domaine de  $w$  est réduit à un point puisqu'on a une notion d'orientation dans  $\mathcal{S}$  indépendante du domaine).

*Remarque.* Un mot fixe primitif ou un mot simple a une longueur au plus égale à  $c$ .

**Proposition 4.4.8.** Soit  $X'$  un système d'isométries  $\eta$ -proche de  $X$  (avec  $\eta < d/15c$ ), et soit  $w$  un mot réduit défini dans  $X'$ . Alors soit  $w$  est un mot simple dans  $X$ , soit  $w$  s'écrit sous la forme  $V\Psi^kU$  sans simplification où  $\Psi$  est un mot fixe primitif cycliquement réduit,  $k > 0$ , et  $U$  et  $V$  sont des mots simples tels que  $V\Psi$  et  $\Psi U$  sont définis dans  $X$ .

De plus, si  $w$  fixe un point de  $D'$  en préservant l'orientation, alors  $V = U^{-1}$  et  $w = U^{-1}\Psi^kU$ . En particulier,  $w$  est défini et fixe un point dans  $X$ .

*Preuve.* On va utiliser de manière récurrente le corollaire 4.1.4 sous la forme sui-

vante :

**Fait fondamental :** *Tout mot de longueur inférieure ou égale à  $5c$  et dont le domaine est non vide dans  $X'$  a un domaine non vide dans  $X$ .*

La démonstration se fait en 3 temps :

1. Grâce à un algorithme, on écrit  $w$  sous la forme d'un produit sans simplification  $w = u_m \dots u_1$  où chaque mot  $u_j$  est défini dans  $X$ , et est de l'une des deux formes suivantes avec des propriétés de maximalité :

*type 1 :*  $u_j = v_j^{-1} \Psi_j^{k_j} v_j$  où  $v_j$  est un mot simple de  $X$  et  $\Psi_j$  un mot fixe primitif de  $X$  cycliquement réduit

*type 2 :*  $u_j$  est un mot simple de  $X$

2. Deux mots  $u_j$  consécutifs sont de types différents, on a donc écrit

$$w = w_{p+1}(v_p^{-1} \Psi_p^{n_p} v_p) w_{p-1} \dots (v_2^{-1} \Psi_2^{n_2} v_2) w_2 (v_1^{-1} \Psi_1^{n_1} v_1) w_1$$

3. On montre que  $p$  est forcément inférieur ou égal à un et on conclut.

**Premier temps.** On note  $D$  et  $D'$  les domaines de  $X$  et  $X'$ . Etant donné un mot  $w$  réduit quelconque (pas forcément défini dans  $X$  ni dans  $X'$ ) voici un algorithme pour décomposer  $w$  en  $w = u_m \dots u_1$  où chaque  $u_j$  est de type 1 ou 2. Notons  $w = \varphi_p \dots \varphi_1$  un mot (réduit) et soit

$$F = \{i \mid \exists j > i \text{ et } \exists x \in D \text{ t.q. } \varphi_j \dots \varphi_i(x) = x \text{ en préservant l'orientation}\}.$$

- Si  $1 \in F$ , on considère le plus grand entier  $i$  tel qu'il existe  $x \in D$  tel que dans  $X$ ,  $\varphi_i \dots \varphi_1(x) = x$  en préservant l'orientation. On prend alors  $u_1 = \varphi_i \dots \varphi_1$  et on applique l'algorithme récursivement à  $w' = \varphi_p \dots \varphi_{i+1}$  si  $w'$  n'est pas le mot vide.
- Si  $1 \notin F$ , on considère le plus grand entier  $i$  tel que  $[1, i] \cap F = \emptyset$  et tel que  $\varphi_i \dots \varphi_1$  soit défini dans  $X$ . On prend alors  $u_1 = \varphi_i \dots \varphi_1$  et on applique récursivement l'algorithme à  $w' = \varphi_p \dots \varphi_{i+1}$  si ce mot est non vide.

Il est clair que cet algorithme s'arrête, et fournit une décomposition sans simplification de  $w$ . De plus, si  $u_j$  a été construit grâce à la deuxième partie de l'algorithme,  $u_j$  est un mot simple de  $X$ . Maintenant, si  $u_j$  est fourni par la première partie de l'algorithme, on peut écrire sans simplification  $u_j = v_j^{-1} u'_j v_j$  pour un mot  $u'_j$  cycliquement réduit qui fixe un point de  $D$  en préservant l'orientation et  $v_j$  peut éventuellement être vide. Comme les stabilisateurs sont cycliques dans  $X$ , on peut

écrire sans simplification  $u'_j = \Psi_j^{k_j}$  pour un mot fixe primitif  $\Psi_j$  cycliquement réduit et un entier  $k_j > 0$ . Choisissons  $x$  un point fixé par  $u_j$ , et considérons  $C$  le revêtement d'orientation du graphe de Cayley de l'orbite de  $x$ . Le groupe fondamental de  $C$  est cyclique. Le mot  $u_j$  décrit un lacet de  $C$  sans aller-retour,  $u'_j$  décrit une boucle sans aller-retour, et il est alors facile de voir que  $v_j$  est un mot simple, c'est à dire que le chemin associé ne passe pas deux fois par le même point de  $C$ .

**Second temps.** Jusque là, on n'a pas utilisé le fait que  $w$  est défini dans  $X'$ . On veut démontrer que deux mots  $u_j$  consécutifs n'ont pas le même type. Supposons par exemple que  $u_j$  et  $u_{j+1}$  sont tous les deux du premier type. Comme  $u_j$  et  $u_{j+1}$  sont des restrictions de l'identité, l'algorithme impose que le domaine de  $u_{j+1}u_j$  dans  $X$  soit vide parce que sinon,  $u_{j+1}u_j$  fixerait un point en préservant l'orientation et contredirait le choix de  $j$  maximal dans la première partie de l'algorithme.

Maintenant, comme  $w$  est défini dans  $X'$  par hypothèse,  $v_{j+1}^{-1}\Psi_{j+1}^{k_{j+1}}v_{j+1}v_j^{-1}\Psi_j^{k_j}v_j$  est défini dans  $X'$  donc  $\Psi_{j+1}v_{j+1}v_j^{-1}\Psi_j$  est aussi défini dans  $X'$ . Or la longueur de ce mot est inférieure à  $4c$ . Le fait fondamental implique donc que  $\Psi_{j+1}v_{j+1}v_j^{-1}\Psi_j$  est défini dans  $X$ . Ceci contredit le fait que  $u_{j+1}u_j$  n'est pas défini dans  $X$  puisque  $\Psi_j$  et  $\Psi_{j+1}$  sont des restrictions de l'identité.

Supposons maintenant que  $u_{j+1}$  et  $u_j$  sont tous les deux du deuxième type. L'algorithme impose alors que  $u_{j+1}u_j$  ne soit pas défini dans  $X$ . En effet, lorsque l'algorithme est arrivé à la première lettre de  $u_{j+1}$ , il a bifurqué sur la deuxième partie de l'algorithme, ce qui signifie que cette lettre n'est pas dans  $F$ . Le fait que l'algorithme n'ait pas incorporé la première lettre de  $u_{j+1}$  à  $u_j$  signifie donc que  $\varphi.u_j$  n'est pas défini dans  $X$  si  $\varphi$  note la première lettre de  $u_{j+1}$ .

Or  $u_{j+1}u_j$  est défini dans  $X'$  (puisque c'est un sous-mot de  $w$ ) et est de longueur plus petite que  $2c$ . Il est donc forcément défini dans  $X$  et on a une contradiction.

On vient donc de montrer que  $w$  est de la forme

$$w = w_{p+1}(v_p^{-1}\Psi_p^{n_p}v_p)w_{p-1} \dots (v_2^{-1}\Psi_2^{n_2}v_2)w_2(v_1^{-1}\Psi_1^{n_1}v_1)w_1$$

sans aucune simplification, pour des mots simples  $w_i, v_i$ , et des mots fixes primitifs cycliquement réduits  $\Psi_i$  et où seuls  $w_1, w_{p+1}$  et les  $v_j$  peuvent éventuellement être vides.

**Dernier temps.** Pour tout  $i$ ,  $w_i$  envoie une partie de  $\text{Im}_X v_{i-1}\Psi_{i-1}$  dans  $\text{dom}_X \Psi_i v_i$ . En effet,  $w$  est défini dans  $X'$  donc  $\Psi_i v_i w_i v_{i-1}^{-1} \Psi_{i-1}$  est défini dans  $X'$

et puisque sa longueur est inférieure à  $5c$ ,  $\Psi_i v_i w_i v_{i-1}^{-1} \Psi_{i-1}$  est aussi défini dans  $X$  d'après le fait fondamental. De même, on a que  $\text{Im}_X w_1$  coupe  $\text{dom}_X \Psi_1 v_1$  et que  $\text{dom}_X w_{p+1}$  coupe  $\text{Im}_X v_p \Psi_p$ .

Montrons qu'on a forcément  $p \leq 1$ . Si le contraire était vrai,  $\Psi_2 v_2 w_2 v_1^{-1} \Psi_1$  serait défini dans  $X$ , donc  $W = v_2^{-1} \Psi_2^{k_2} v_2 w_2 v_1^{-1} \Psi_1^{k_1} v_1$  serait défini en un point  $x$  de  $D$ . Considérons  $C$  le revêtement d'orientation du graphe de Cayley de  $x$  dans  $X$ . Son groupe fondamental est cyclique, et  $W$  décrit un chemin sans aller retour dans  $C$ . Un chemin sans aller retour dans  $C$  qui sort de l'unique cercle plongé de  $C$  ne peut plus y rentrer à nouveau. Comme les chemins correspondant à  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$  décrivent ce cercle, on en déduit que  $v_1$  et  $v_2$  sont des mots triviaux, et que  $\Psi_2 w_2$  contient un sous-mot à droite qui fixe  $x$  en préservant l'orientation. Ceci contredit la maximalité du choix de  $i$  dans la première partie de l'algorithme. On a donc  $p \leq 1$ .

Si  $p = 0$ ,  $w$  est un mot simple. On se place donc dans le cas où  $p = 1$ . Alors  $w = V \Psi^k U$  avec  $V \Psi$  et  $\Psi U$  définis dans  $X$  où on a posé  $U = v_1 w_1$  et  $V = w_2 v_1^{-1}$ . On veut montrer que  $U$  et  $V$  sont simples, on peut donc supposer que  $v_1$  est non vide. Or  $v_1^{-1} \Psi v_1 w_1$  est défini en un point  $x$  de  $D$ . Il lui correspond donc un chemin sans aller-retour dans le revêtement d'orientation  $C$  du graphe de Cayley de l'orbite de  $x$ . Le fait que groupe fondamental de  $C$  soit cyclique et que  $v_1$  soit non trivial implique alors que  $v_1 w_1$  est simple. En effet,  $\Psi$  décrit l'unique cercle plongé de  $C$ , et le fait que l'écriture  $v_1^{-1} \Psi v_1$  soit réduite montre que  $v_1$  et  $v_1 w_1$  sont des arcs simples de  $C$  qui n'intersectent ce cercle qu'en un seul point. Par conséquent,  $U$  est simple, et un raisonnement similaire s'applique à  $V$ .

Supposons maintenant que  $w$  fixe un point de  $D'$  en préservant l'orientation. Si  $w$  est simple dans  $X$ , et si  $x$  appartient à son domaine,  $w(x)$  et  $x$  sont séparés par au moins une famille d'orbites finies donc  $d(w(x), x) \geq d$ . On en déduit que dans  $X'$ ,  $d(\bar{w}, \text{Id}) \geq d - k\eta > 0$ .

Si  $w$  n'est pas simple, on a vu que  $w = V \Psi^k U$ . Comme  $w^2$  a un domaine non vide dans  $X'$ ,  $\Psi U V \Psi$  est défini dans  $X'$ , et donc dans  $X$  grâce au fait fondamental car sa longueur est inférieure à  $4c$ . Ceci signifie que  $\Psi^{-1}$  et  $\Psi U V$  sont définis en un même point de  $D$ , et donc que  $\Psi$  et  $V^{-1} U^{-1} \Psi U V$  sont définis en ce point qu'ils fixent forcément. Par conséquent, comme  $X$  est à stabilisateurs cycliques,  $\Psi$  et  $V^{-1} U^{-1} \Psi U V$  commutent modulo simplifications. On en déduit que  $\Psi$  et  $U V$  commutent et donc sont puissance d'un même élément (toujours modulo simplifications). Le fait que  $w$  préserve l'orientation donne que  $U V$  préserve l'orientation, et comme  $\Psi$  est fixe primitif, on en déduit que  $U V = \Psi^p$  pour un  $p \in \mathbb{Z}$  qui peut être nul. Par conséquent,

$w = V\Psi^k U = U^{-1}\Psi^{p+k}U$  modulo simplifications. Il est alors clair que l'algorithme aura écrit  $w$  sous la forme  $w = v_1^{-1}\Psi^{p+k}v_1$ .  $\square$

### Conclusion

*Preuve des théorèmes 4.4.4 et 4.4.5.* Soit  $X \in \mathcal{S}$  à orbites finies et à stabilisateurs cycliques. Soit  $X'$  à distance inférieure à  $d/15c$  de  $X$ . On veut montrer les orbites de  $X'$  sont finies et que ses stabilisateurs sont cycliques.

Soit  $x'$  un point de  $D'$  et soient  $w$  et  $w'$  deux  $X'$ -mots définis en  $x'$ . Grâce à la proposition 4.4.8, on peut écrire  $w = V\Psi^k U$  et  $w' = V'\Psi'^{k'} U'$ . Comme les domaines de  $w$  et  $w'$  se coupent dans  $X'$ ,  $\Psi U U'^{-1} \Psi'^{-1}$  est défini dans  $X'$  donc dans  $X$  d'après le fait fondamental. On en déduit que  $U^{-1}\Psi U$  et  $U'^{-1}\Psi' U'$  sont définis en un même point  $x$  de  $D$  et sont fixes primitifs dans  $X$  donc  $U^{-1}\Psi U = U'^{-1}\Psi'^{\pm 1} U'$  modulo simplifications.

Supposons d'abord que  $w$  et  $w'$  fixent  $x'$  et montrons qu'ils commutent. Quitte à élever ces mots au carré on peut supposer que  $w$  et  $w'$  préservent l'orientation. Posons  $w = U^{-1}\Psi^k U$  et  $w' = U'^{-1}\Psi'^{k'} U'$  comme dans la proposition 4.4.8. Puisque  $U^{-1}\Psi U = U'^{-1}\Psi'^{\pm 1} U'$ ,  $w$  et  $w'$  commutent.

Supposons maintenant qu'on ait pris  $x'$  dans une composante minimale de  $X'$  et prenons une suite de  $X'$ -mots  $w_i$  définis au voisinage de  $x'$  et ne fixant pas  $x'$  tels que  $d(w_i(x'), x') \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ . Posons  $w = w_1 = V\Psi^k U$  et  $w_i = V_i\Psi_i^{k_i} U_i$ . On a vu plus haut que  $U^{-1}\Psi U = U_i^{-1}\Psi_i^{\pm 1} U_i$ , donc  $w_i = V_i U_i U^{-1} \Psi^{\pm k_i} U$  modulo réductions. On peut donc écrire  $w_i = V'_i \Psi^{\pm k_i} U$  où la longueur de  $V'_i$  est bornée par  $3c$ .

Deux cas se présentent alors. Si  $\Psi$  est une restriction de l'identité dans  $X'$ , comme  $V'_i$  parcourt un nombre fini de mots puisque  $|V'_i| \leq 3c$ , l'ensemble des  $w_i.x'$  parcourus est fini, ce qui donne une contradiction. Si  $\Psi$  n'est pas une restriction de l'identité dans  $X'$ , notons  $\lambda$  la largeur de son domaine dans  $X'$ , et  $l \neq 0$  sa longueur de translation. Alors pour  $|k| > \lambda/l$ ,  $\text{dom}_{X'} \Psi^k = \emptyset$  donc  $w_i$  parcourt un nombre fini de mots ce qui est aussi contradictoire.

Ceci démontre le théorème 4.4.5. Pour démontrer le théorème 4.4.4, on suppose que  $X'$  contient un stabilisateur robuste défini par un mot  $w$ . Comme  $w$  préserve l'orientation, on sait d'après la proposition 4.4.8 que  $w$  est défini dans  $X$ , et comme  $w$  est fixe robuste dans  $X'$ , il est aussi fixe robuste dans  $X$ .  $\square$

## Chapitre 5

# Dynamique de $\text{Out}(F_n)$ sur le bord de l'outre-espace

### 5.1 Un fermé invariant dans la frontière de l'outre-espace

L'outre-espace  $CV_n$  de M. Culler et K. Vogtmann est l'ensemble des actions libres de  $F_n$  sur des arbres simpliciaux modulo *homothétie* équivariante. Dans tout ce chapitre, toutes les actions qu'on considère sont minimales et sans point fixe global. On sait depuis M. Cohen, M. Lustig, M. Bestvina, et M. Feighn ([CL, BF3]) que l'adhérence  $\overline{CV}_n$  de  $CV_n$  dans l'ensemble des actions de  $F_n$  modulo homothétie équivariante, est compacte et est constituée des actions très petites de  $F_n$ .

Ce chapitre s'intéresse à la dynamique de  $\text{Out}(F_n)$  sur  $\overline{CV}_n$ . Il est bien connu que  $CV_n$  forme un *ouvert* invariant dans l'ensemble de toutes les actions de  $F_n$  sur des arbres réels et que  $\text{Out}(F_n)$  agit proprement discontinûment sur  $CV_n$  (voir [CV2] ou la démonstration du théorème de ce chapitre). Quelle est alors la dynamique de  $\text{Out}(F_n)$  sur la frontière de l'outre-espace, c'est à dire sur le compact  $\partial CV_n = \overline{CV}_n \setminus CV_n$ ?

L'objet de ce chapitre est d'exhiber un fermé invariant  $\mathcal{F}_n$  strictement contenu dans la frontière de l'outre-espace. Nous allons plutôt décrire ce fermé par son complémentaire  $\mathcal{O}_n = \overline{CV}_n \setminus \mathcal{F}_n$ , le fait que  $\mathcal{F}_n \subset \partial CV_n$  se traduisant par  $\mathcal{O}_n \supset CV_n$ .

**Définition.** On appelle  $\mathcal{O}_n \subset \overline{CV}_n$  l'ensemble des actions simpliciales  $(T, F_n)$  telles que

- les stabilisateurs d'arête de  $(T, F_n)$  sont triviaux

- les stabilisateurs des sommets de  $(T, F_n)$  sont cycliques
- dès que  $\text{Stab } x \neq \{1\}$ ,  $\text{Stab } x$  agit transitivement sur l'ensemble des arêtes issues de  $x$ .

Ces conditions sont équivalentes au fait que le graphe de groupe quotient  $T/F_n$  a des groupes d'arêtes triviaux et que les seuls groupes de sommets non triviaux sont cycliques et sont attachés à des sommets terminaux de  $T/F_n$ .

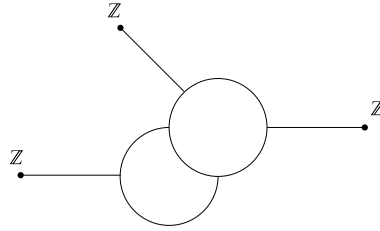


FIG. 5.1 – Une action typique dans  $\mathcal{O}_n$

Il est clair que l'ensemble  $\mathcal{O}_n$  est invariant sous l'action de  $\text{Out}(F_n)$ . Une action typique appartenant à  $\mathcal{O}_n$  est représentée figure 5.1. Pour alléger les figures, on a pris la convention de ne pas représenter les groupes triviaux dans les graphes de groupes.

*Remarque.* Le lemme 5.1.13 montrera que les actions dans  $\mathcal{O}_n$  ont un stabilisateur fini dans  $\text{Out}(F_n)$ . On peut facilement vérifier que le stabilisateur d'une action simpliciale n'appartenant pas à  $\mathcal{O}_n$  est infini. En effet, il existe un twist de Dehn (d'ordre infini) qui stabilise  $(T, F_n)$  lorsque  $T$  a un stabilisateur d'arête non trivial ou un stabilisateur cyclique non terminal (voir section 5.2.2 pour des définitions), et c'est clair si  $(T, F_n)$  est à stabilisateurs d'arêtes triviaux et possède un stabilisateur de sommet non cyclique.

Cette partie est consacrée au résultat suivant :

**Théorème 5.1.1.** *L'ensemble  $\mathcal{O}_n$  est ouvert et invariant dans  $\overline{CV}_n$ , et  $\text{Out}(F_n)$  agit proprement discontinûment sur  $\mathcal{O}_n$ .*

**Corollaire 5.1.2.** *L'ensemble  $\mathcal{F}_n = \overline{CV}_n \setminus \mathcal{O}_n$  est un compact invariant strictement inclus dans  $\partial CV_n$ .*



**5.1.1 Pourquoi cet ensemble  $\mathcal{O}_n$  — Des candidats malheureux au statut d'ouvert invariant dans  $\overline{CV}_n$**

Dans les parties 5.1 et 5.2, on va travailler non pas dans l'espace des actions de  $F_n$  modulo *homothétie* équivariante, mais modulo *isométrie* équivariante. En effet, il suffit de montrer que l'ensemble  $\mathcal{O}_n$  *non projectifié* (c'est à dire l'ensemble des « représentants modulo *isométrie* équivariante d'éléments de  $\mathcal{O}_n$  ») est ouvert dans l'ensemble des actions très petites de  $F_n$  modulo isométrie équivariante. Nous parlerons ainsi abusivement d'une « action de  $\mathcal{O}_n$  » pour signifier « un représentant modulo *isométrie* équivariante d'un élément de  $\mathcal{O}_n$  », et pareillement pour  $\overline{CV}_n$ .

Pour montrer que certains ensembles ne sont pas des ouverts de  $\overline{CV}_n$ , nous allons utiliser des *pliages* introduits par Stallings dans [Sta] (voir aussi [BF1] ou les parties 2.9, 5.2).

**Définition.** Soit  $(T, G)$  une action simpliciale, et  $e_1, e_2$  deux arêtes de même longueur issues d'un même sommet de  $T$ . Soit  $T'$  le quotient de  $T$  par la plus petite relation d'équivalence équivariante qui identifie isométriquement  $e_1$  avec  $e_2$  en partant de leur sommet commun. On dit que  $(T', G)$  est l'action obtenue par pliage de  $e_1$  sur  $e_2$ , et l'application quotient est appelée application de pliage.

**Premier candidat**

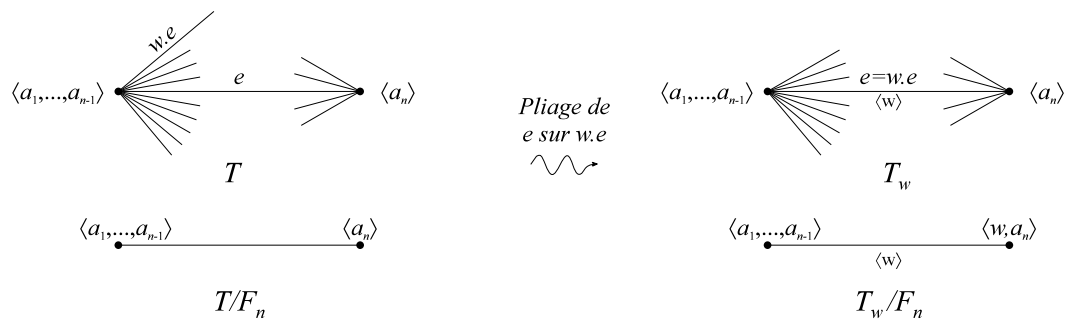


FIG. 5.2 – Echec du premier candidat

Le premier candidat à être un ouvert invariant de  $\overline{CV}_n$  est l'ensemble  $\mathcal{C}_n$  des actions de  $F_n$  très petites qui possèdent un arc ne contenant pas de point de branchement de  $T$  et dont le stabilisateur est trivial. Bien sûr,  $\mathcal{C}_n$  est invariant sous l'action

de  $\text{Out}(F_n)$  et contient  $CV_n$ . G. Levitt a démontré que l'ensemble des systèmes d'isométries (préservant l'orientation, sur un cercle) possédant une famille d'orbites finies dont le stabilisateur est trivial forme un ensemble ouvert (c'est un corollaire de la proposition IV.1 de [Lev2]). L'ensemble  $\mathcal{C}_n$  est donc naturellement candidat au statut d'ouvert invariant de  $\overline{CV}_n$ . Il est aussi facile de vérifier grâce à l'étude exhaustive de M. Culler et K. Vogtmann de  $\overline{CV}_2$  que  $\mathcal{C}_n$  est ouvert pour  $n = 2$ .

Cependant,  $\mathcal{C}_n$  n'est pas ouvert dès que  $n \geq 3$ . En effet, soit  $\{a_1, \dots, a_n\}$  une base de  $F_n$  et considérons une simpliciale action  $(T, F_n) \in \mathcal{C}_n$  comme sur la figure 5.2. Son graphe de groupes quotient est un segment composé d'une seule arête. Le groupe de cette arête est trivial, et les groupes de sommet sont  $\langle a_1, \dots, a_{n-1} \rangle$  et  $\langle a_n \rangle$ . Soit  $e = [uv]$  l'arête de  $T$  telle que  $\text{Stab } u = \langle a_1, \dots, a_{n-1} \rangle$  et  $\text{Stab } v = \langle a_n \rangle$ . Etant donné  $w \in \langle a_1, \dots, a_{n-1} \rangle$ , on considère l'arbre  $T_w$  obtenu en effectuant sur  $T$  le pliage qui identifie de manière équivariante l'arête  $e$  et l'arête  $w.e$ .

Cette action est très petite dès lors que  $w$  n'est pas une puissance propre et elle n'appartient pas à l'ensemble  $\mathcal{C}_n$ . Maintenant, si  $n \geq 3$ , on peut trouver des mots de plus en plus longs dans  $\langle a_1, \dots, a_{n-1} \rangle$  et qui ne sont pas des puissances propres. Il n'est alors pas très difficile de vérifier (voir le lemme de pliage 5.2.7) que  $(T_w, F_n) \xrightarrow{|w| \rightarrow \infty} (T, F_n)$ . Ceci montre que  $\mathcal{C}_n$  n'est pas ouvert.

**Second candidat**

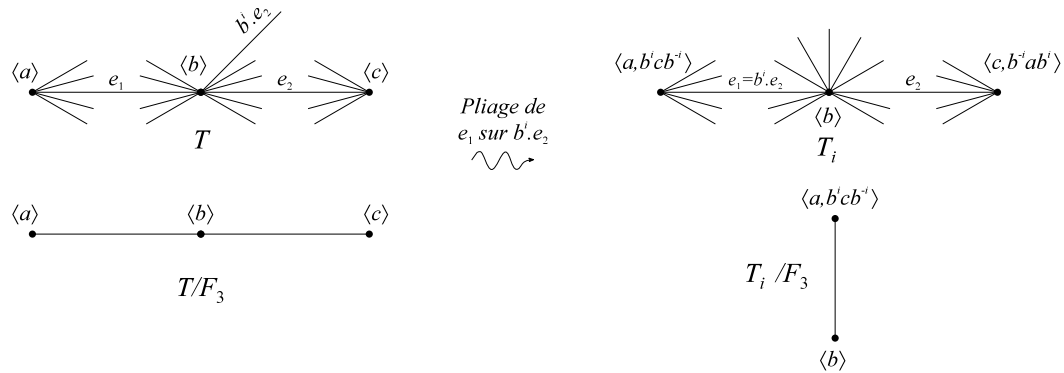


FIG. 5.3 – Echec du second candidat

Un second candidat à être ouvert est l'ensemble  $\mathcal{C}'_n$  des actions simpliciales très petites dont tous les stabilisateurs (de sommets et d'arêtes) sont au plus cycliques. C'est un candidat naturel puisque le théorème 4.4.5 affirme que l'ensemble des sys-

tèmes d'isométries  $X$  sur des multi-intervalles tels que l'action associée est dans  $\mathcal{C}'_n$  est ouvert (à condition de fixer un graphe d'incidence étiqueté). De plus, on peut vérifier que cet ensemble est ouvert pour  $n = 2$ .

Mais là encore,  $\mathcal{C}'_n$  n'est pas ouvert dès que  $n \geq 3$ . Prenons par exemple une action de  $F_3 = \langle a, b, c \rangle$  sur un arbre simplicial  $T$  dont le graphe de groupes quotient est un segment composé de deux arêtes de même longueur comme sur la figure 5.3. Les stabilisateurs d'arêtes sont triviaux et les groupes de sommets sont  $\langle a \rangle$ ,  $\langle b \rangle$  et  $\langle c \rangle$ .

On considère alors  $(T_i, F_3)$  l'action obtenue en effectuant le pliage équivariant qui consiste à identifier  $e_1$  avec  $b^i.e_2$ . L'action ainsi obtenue est très petite, mais n'est pas dans  $\mathcal{C}'_n$ . On montre alors facilement (voir le lemme de pliage 5.2.7) que  $(T_i, F_3) \xrightarrow{|i| \rightarrow \infty} (T, F_3)$ . Un argument similaire montre que  $\mathcal{C}'_n$  n'est pas ouvert dans  $\overline{CV}_n$  pour tout  $n \geq 3$ .

L'échec de ces deux candidats explique pourquoi il devient naturel de considérer cet ensemble  $\mathcal{O}_n$  : il faut éviter les stabilisateurs non cycliques et les stabilisateurs qui ne sont pas terminaux dans le graphe quotient. En fait, on peut montrer qu'une action simpliciale appartient à  $\mathcal{O}_n$  si et seulement si son stabilisateur dans  $\text{Out}(F_n)$  est fini (voir section 5.1.3)

$\mathcal{O}_n$  n'est pas ouvert dans l'ensemble de toutes les actions de  $F_n$

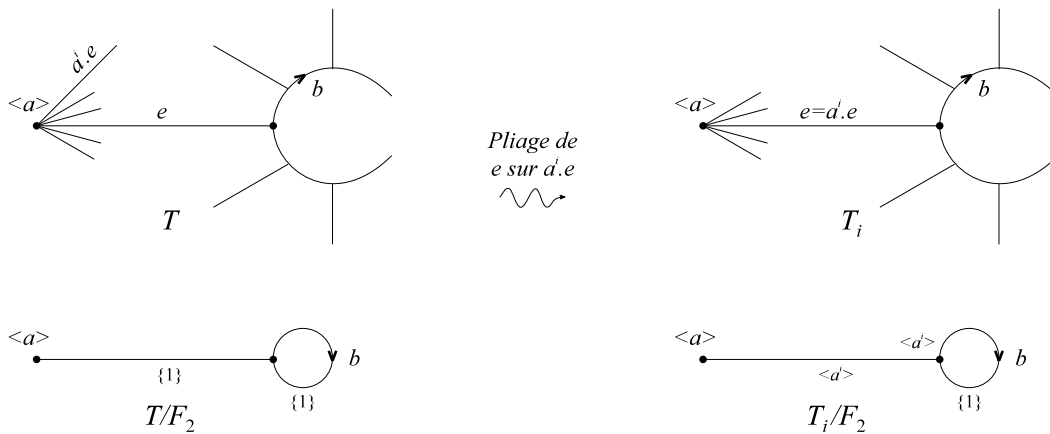


FIG. 5.4 –  $\mathcal{O}_n$  n'est pas ouvert dans l'ensemble de toutes les actions de  $F_n$

Voici un exemple qui montre que  $\mathcal{O}_n$  n'est pas ouvert dans l'ensemble des actions petites de  $F_n$ . Considérons une action  $(T, F_2) \in \mathcal{O}_2$  comme sur la figure 5.4. Soit  $e$  une arête adjacente à un sommet dont le stabilisateur est non trivial, et soit  $a$  un générateur de ce stabilisateur. Soit  $(T_i, F_2)$  l'action obtenue en effectuant sur  $T$  le pliage équivariant qui identifie  $e$  et  $a^i.e$ . Comme pour les deux candidats aux dessus, on a que  $(T_i, F_2) \xrightarrow{|i| \rightarrow \infty} (T, F_2)$  grâce le lemme de pliage 5.2.7. De plus,  $(T_i, F_2)$  est petite et n'appartient pas à  $\mathcal{O}_2$  mais elle n'est pas très petite dès que  $|i| \geq 2$ . Un argument similaire montre que  $\mathcal{O}_n$  n'est pas ouvert dans l'ensemble de toutes les actions de  $F_n$  pour tout  $n \geq 2$ .

Nous passons maintenant à la preuve du théorème 5.1.1

### 5.1.2 $\mathcal{O}_n$ est ouvert dans $\overline{CV}_n$

Voici le schéma de la preuve du théorème 5.1.1. On part d'une action  $(T, F_n) \in \mathcal{O}_n$ , et on considère un domaine fondamental de cette action. Etant donnée une action  $(T', F_n)$  proche de  $(T, F_n)$  pour la topologie de Gromov équivariante, on va construire un domaine fondamental pour  $(T', F_n)$  à partir de l'approximation du domaine fondamental de  $D$ . Grâce à ce domaine fondamental, il sera facile de voir que  $(T', F_n) \in \mathcal{O}_n$ .

#### Domaine fondamental et base de $F_n$ adaptée pour une action dans $\mathcal{O}_n$

Soit  $(T, F_n)$  une action dans  $\mathcal{O}_n$ . On considère le graphe de groupes quotient  $Q = T/F_n$  (avec sa métrique). Choisissons un sous arbre maximal  $\tau$  de  $Q$ , et un relevé  $\tilde{\tau}$  de  $\tau$  dans  $T$ . La théorie de Bass-Serre fournit alors une identification entre  $F_n$  et le groupe fondamental du graphe de groupes  $Q$  et une isométrie équivariante entre  $T$  et le revêtement universel de  $Q$ . Choisissons une orientation de chaque arête de  $Q \setminus \tau$  et un générateur de chaque groupe de sommet non trivial. Considérons l'image dans  $\pi_1(Q, \tau)$  puis dans  $F_n$  de ces générateurs et de ces arêtes. On obtient ainsi une base préférée  $B$  de  $F_n$ .

Cette base  $B$  a la propriété que pour tout  $\gamma \in B \cup B^{-1}$ , soit  $\gamma.\tilde{\tau} \cap \tilde{\tau}$  contient un unique point qu'on note  $\chi_\gamma$ , (ce cas se produit quand  $\gamma$  provient d'un générateur d'un groupe de sommet, i. e. quand  $\gamma$  est elliptique) soit  $\gamma.\tilde{\tau}$  ne rencontre pas  $\tilde{\tau}$  mais il y a une arête de  $T$  qui relie ces deux ensembles. On note alors  $\chi_\gamma$  le milieu de cette arête (ce cas se produit quand  $\gamma$  provient d'une arête de  $Q \setminus \tau$  i. e. quand  $\gamma$  est

hyperbolique).

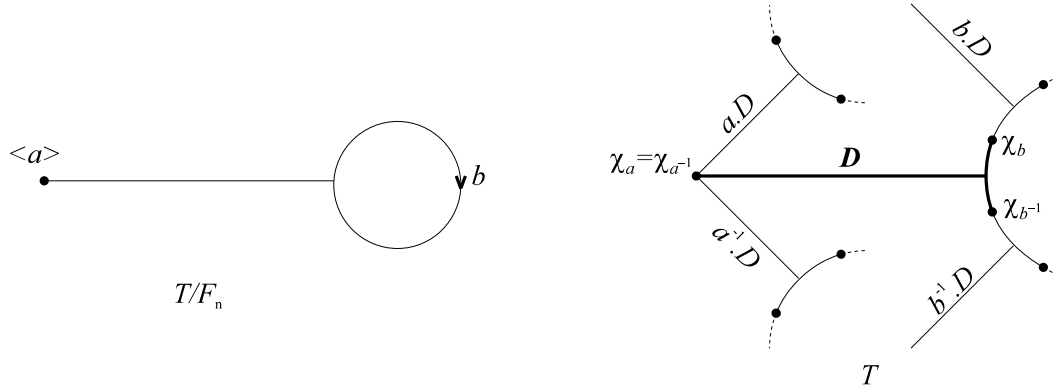


FIG. 5.5 – Le domaine fondamental  $D$  de  $(T, F_n)$

Soit  $D$  l'ensemble construit en rajoutant à  $\tilde{\tau}$  les segments reliant  $\chi_\gamma$  à  $\tilde{\tau}$  pour tout  $\gamma \in B \cup B^{-1}$ . Les points  $\chi_\gamma$  vérifient les propriétés suivantes :

- $\forall \gamma \in B \cup B^{-1}$ ,  $\gamma.D \cap D = \{\chi_\gamma\}$  et  $\chi_\gamma = \chi_{\gamma^{-1}}$  si et seulement si  $\gamma$  est elliptique
- $\forall \gamma \in B \cup B^{-1}$ ,  $\chi_\gamma$  est un sommet terminal de  $D$

Il est immédiat de vérifier que  $D$  est un domaine fondamental dans le sens suivant :

- $D$  est un sous-arbre fini qui rencontre toutes les orbites de  $(T, F_n)$
- Si  $x, y \in D$  sont tels que  $y = w.x$  pour  $w \in F_n \setminus \{1\}$ , alors
  - soit  $x = \chi_\gamma^{-1}$ ,  $y = \chi_\gamma$  et  $w = \gamma$  pour un élément hyperbolique  $\gamma \in B \cup B^{-1}$
  - soit  $x = y = \chi_\gamma$  et  $w = \gamma^p$  pour un élément elliptique  $\gamma \in B \cup B^{-1}$

Soit  $F = \{1\} \cup B \cup B^{-1} \subset F_n$  et  $\varepsilon > 0$ . On peut alors considérer le voisinage  $V_\varepsilon(T) = V_T(\varepsilon, F, D)$  composé de toutes les actions minimales  $(T', F_n)$  de  $F_n$  telles qu'il existe une  $\varepsilon$ -approximation  $F$ -équivariante entre  $D$  et un sous-arbre fini  $D'$  de  $(T', F_n)$ . Notre but est de démontrer que pour  $\varepsilon$  assez petit, si  $(T', F_n) \in V_\varepsilon(T)$ , et si  $(T', F_n)$  est très petite, alors  $(T', F_n) \in \mathcal{O}_n$ . Nous démontrerons dans la foulée que si  $(T, F_n)$  est simpliciale *libre*, alors  $(T', F_n) \in V_\varepsilon(T)$  est aussi simpliciale libre pour  $\varepsilon$  assez petit sans supposer que  $(T', F_n)$  est très petite, ce qui démontrera que  $CV_n$  est ouvert dans l'ensemble de toutes les actions de  $F_n$ .

### Construire un domaine fondamental pour $(T', F_n)$ à partir de $D'$

On appelle  $d$  la longueur de la plus courte des arêtes de  $D$ .

**Lemme 5.1.3.** *Si  $\gamma \in B \cup B^{-1}$  est hyperbolique dans  $(T, F_n)$ , et si  $\varepsilon$  est assez petit ( $\varepsilon < d/2$ ), alors  $\gamma$  est hyperbolique dans  $(T', F_n)$ .*

*Preuve.* C'est juste un corollaire du fait que la topologie de Gromov équivariante est plus fine que la topologie des longueurs de translation. Considérons le point  $x = \chi_\gamma$  qui est dans l'axe de  $\gamma$  lorsque  $\gamma$  est hyperbolique dans  $T$ . Soit  $x' \in D'$  un point d'approximation de  $x$ . Maintenant,  $l_{T'}(\gamma) = d(\gamma^{-1}.x', \gamma.x') - d(x', \gamma.x')$  est  $2\varepsilon$ -proche de  $d(\gamma^{-1}.x, \gamma.x) - d(x, \gamma.x) = l_T(\gamma) \geq d$ .  $\square$

*Remarque.* Il se peut au contraire qu'un élément elliptique de  $B \cup B^{-1}$  devienne hyperbolique dans une action  $(T', F_n)$  très proche.

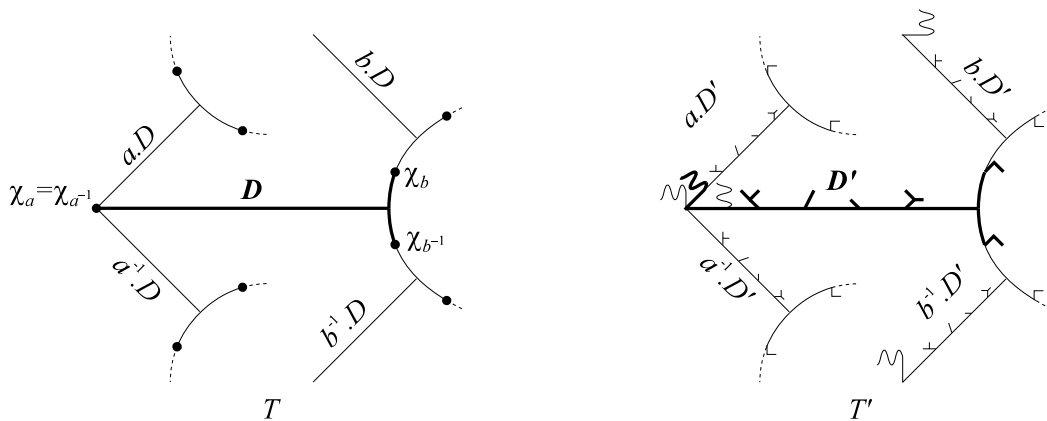


FIG. 5.6 – L'approximation entre  $D$  et  $D'$

**Définition.** Soit  $K$  un arbre fini. Etant donné  $\delta > 0$ , on appelle  $\delta$ -intérieur de  $K$  l'ensemble  $\text{int}_\delta(K)$  des points de  $K$  qui sont milieux d'un segment de longueur  $2\delta$ .

**Lemme 5.1.4.** Les propriétés suivantes du  $\delta$ -intérieur d'un arbre fini  $K$  sont claires :

- Si  $K$  a un diamètre au moins égal à  $2\delta$ , alors  $\text{int}_\delta(K) \neq \emptyset$  et  $K$  est contenu dans le  $\delta$ -voisinage de  $\text{int}_\delta(K)$ .
- $\text{int}_\delta(K)$  est un sous arbre fini de  $K$

On rappelle que  $d$  désigne la longueur de l'arête la plus courte de  $D$ .

**Lemme 5.1.5.** Soient  $\delta = 3\varepsilon$  et  $D'_1 = \text{int}_\delta(D')$ . Si  $\varepsilon$  est assez petit ( $\varepsilon < d/3$ ), alors

$$\forall \gamma \in B \cup B^{-1} \quad \gamma.D'_1 \cap D'_1 = \emptyset.$$

*Preuve.* Supposons au contraire qu'on ait un élément  $y' = \gamma.x' \in \gamma.D'_1 \cap D'_1$  pour un  $\gamma \in B \cup B^{-1}$ . Par définition du  $\delta$ -intérieur, on a des points  $a', b', c', d' \in D'$  tels que

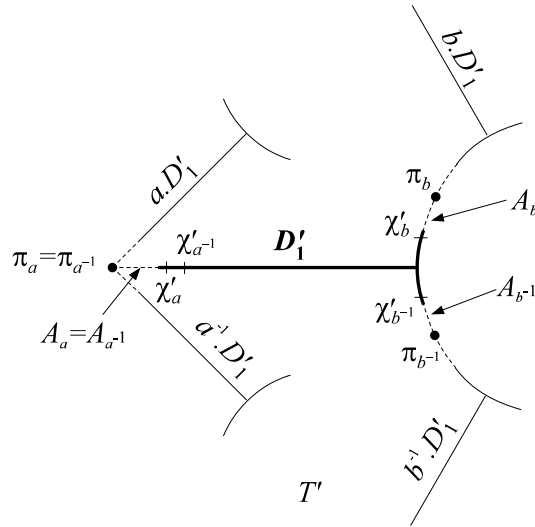


FIG. 5.7 – L'ensemble  $D'_1 = \text{int}_\delta(D')$

$a', x', b'$  (resp.  $c', y', d'$ ) sont alignés dans cet ordre et  $\delta$ -éloignés les uns des autres. Considérons des points  $x, y, a, b, c, d \in D$  approximant  $x', y', a', b', c', d'$ .

Puisque  $y' = \gamma.x'$ , l'approximation  $F$ -équivariante donne que  $d(\gamma.x, y) \leq \varepsilon$ . Or  $\chi_\gamma$  appartient à  $[\gamma.x, y]$  puisque  $\gamma.x \in \gamma.D, y \in D$  et  $\gamma.D \cap D = \{\chi_\gamma\}$ . Par conséquent,  $x$  est  $\varepsilon$ -proche de  $\chi_{\gamma^{-1}}$  et  $D$  n'a pas de point de branchement à distance inférieure à  $d - \varepsilon$  de  $x$ .

Supposons d'abord que  $x \notin [a, b]$ . Alors la projection  $p$  de  $x$  sur  $[a, b]$  doit être  $(3\varepsilon/2)$ -proche de  $x$ . En effet, dans un arbre réel, le produit de Gromov  $(a|b)_x = \frac{1}{2}(d(x, a) + d(x, b) - d(a, b))$  est égal à  $d(x, [a, b])$ , mais comme ici  $(a'|b')_{x'} = 0$ , on a  $(a|b)_x \leq 3\varepsilon/2$ . Maintenant, puisque  $d(x, a), d(x, b) \geq \delta - \varepsilon > 3\varepsilon/2$ ,  $p$  est forcément un point de branchement de  $D$  ce qui est impossible puisque  $d(x, p) \leq 3\varepsilon/2 < d - \varepsilon$ .

On a donc  $x \in [a, b]$ . Puisque  $[\chi_{\gamma^{-1}}, x]$  ne contient pas de point de branchement de  $D$ , on peut supposer par symétrie de l'argument que les points  $\chi_{\gamma^{-1}}, a, x$ , et  $b$  sont alignés dans cet ordre. Ceci empêche alors  $x$  d'être  $\varepsilon$ -proche de  $\chi_{\gamma^{-1}}$  puisque  $d(a, x) \geq \delta - \varepsilon > \varepsilon$ .  $\square$

Le fait que  $D'$  soit dans le  $\delta$ -voisinage de  $D'_1$  implique qu'on a une  $\varepsilon_1$ -approximation  $F$ -équivariante entre  $D$  et  $D'_1$  pour  $\varepsilon_1 = \varepsilon + 2\delta = 7\varepsilon$ . Nous oublions donc à partir de maintenant l'approximation entre  $D$  et  $D'$  pour nous concentrer sur l'approximation entre  $D$  et  $D'_1$ . Choisissons donc pour  $\gamma \in B \cup B^{-1}$  un point

$\chi'_\gamma \in D'_1$  approximant  $\chi_\gamma \in D$ .

Nous allons maintenant construire un ensemble  $\Delta$  inclus dans  $T'$  dont on va montrer qu'il est un domaine fondamental pour  $(T', F_n)$ . On obtient  $\Delta$  en ajoutant à  $D'_1$  des intervalles  $A_\gamma$  pour  $\gamma \in B \cup B^{-1}$  définis ainsi :

- Si  $\gamma$  est elliptique dans  $(T', F_n)$ , on appelle  $\pi_\gamma = \pi_\gamma^{-1}$  la projection de  $D'_1$  sur  $\text{Fix } \gamma$  et on prend pour  $A_\gamma = A_{\gamma^{-1}}$  le segment reliant  $D'_1$  et  $\pi_\gamma$ .
- Si  $\gamma$  est hyperbolique dans  $(T', F_n)$ , on appelle  $\pi_\gamma$  le milieu de l'intersection de l'axe de  $\gamma$  avec le segment reliant  $D'_1$  et  $\gamma.D'_1$  (de sorte que  $\gamma.\pi_{\gamma^{-1}} = \pi_\gamma$ ). On prend alors pour  $A_\gamma$  le segment reliant  $D'_1$  et  $\pi_\gamma$ .

Les points  $\pi_\gamma$  sont les analogues pour  $\Delta$  des points  $\chi_\gamma$ . On rappelle que  $\varepsilon_1 = \varepsilon + 2\delta$  est tel qu'on a une  $\varepsilon$ -approximation  $F$ -équivariante entre  $D$  et  $D'_1$ .

**Lemme 5.1.6.** *L'arc  $A_\gamma$  est contenu dans l' $\varepsilon_1$ -voisinage de  $\chi'_\gamma$ .*

*Preuve.* Puisque  $A_\gamma$  est contenu dans le segment joignant  $D'_1$  et  $\gamma.D'_1$ , tout segment  $[p, q]$  avec  $p \in D'_1$  et  $q \in \gamma.D'_1$  contient  $A_\gamma$ . Par conséquent,  $A_\gamma \subset [\chi'_\gamma, \gamma.\chi'_{\gamma^{-1}}]$ . Mais puisque  $\chi_\gamma = \gamma.\chi_{\gamma^{-1}}$ ,  $d(\chi'_\gamma, \gamma.\chi'_{\gamma^{-1}}) \leq \varepsilon_1$ .  $\square$

**Définition.** *On appelle  $\Delta$  la réunion de  $D'_1$  et des intervalles  $A_\gamma$  pour  $\gamma \in B \cup B^{-1}$ .*

**Lemme 5.1.7.** *Si  $\varepsilon$  est assez petit ( $\varepsilon < d/21$ ), alors*

$$\forall \gamma \in B \cup B^{-1} \quad \gamma.\Delta \cap \Delta = \{\pi_\gamma\}$$

et  $\pi_\gamma$  est terminal dans  $\Delta$ . De plus,  $\pi_\gamma = \pi_{\gamma'}$  si et seulement si  $\gamma = \gamma'$  ou  $\gamma = \gamma'^{-1}$  avec  $\gamma$  elliptique dans  $T'$ . Enfin, si  $\gamma$  est elliptique dans  $(T', F_n)$ , le germe de  $\Delta$  en  $\pi_\gamma$  n'est pas fixé par  $\gamma$ ; et si  $\gamma$  est hyperbolique dans  $(T', F_n)$ , le germe de  $\Delta$  en  $\pi_\gamma$  pointe vers le demi-axe négatif de  $\gamma$ .

*Preuve.* Il est clair par construction que pour tout  $\gamma \in B \cup B^{-1}$ ,

$$\gamma.(D'_1 \cup A_\gamma \cup A_{\gamma^{-1}}) \cap (D'_1 \cup A_\gamma \cup A_{\gamma^{-1}}) = \{\pi_\gamma\}.$$

Pour montrer que  $\gamma.\Delta \cap \Delta = \{\pi_\gamma\}$ , il suffit donc de vérifier que

$$\gamma.A_{\gamma'} \cap A_{\gamma''} = \emptyset \quad \text{et} \quad \gamma.A_{\gamma'} \cap D'_1 = \emptyset$$

pour  $\gamma' \in B \cup B^{-1} \setminus \{\gamma, \gamma^{-1}\}$  et  $\gamma'' \in B \cup B^{-1}$ . Mais on sait que  $A_{\gamma'}$  est contenu dans l' $\varepsilon_1$ -voisinage de  $\chi'_{\gamma'}$ . Or  $\gamma.\chi_{\gamma'}$  est loin de  $D$  (à distance au moins  $d$ ) donc  $\gamma.\chi'_{\gamma'}$  est loin de  $D'_1$  (à distance au moins  $d - \varepsilon_1$ ) donc  $\gamma.A_{\gamma'}$  ne peut pas rencontrer  $D'_1$ , ni  $A_{\gamma''}$  qui est dans l' $\varepsilon_1$ -voisinage de  $D'_1$ . Cet argument fonctionne dès que  $3\varepsilon_1 < d$ .



Maintenant, le point  $\pi_\gamma$  est terminal dans  $D'_1 \cup A_\gamma \cup A_{\gamma^{-1}}$  par construction. Il est aussi terminal dans  $\Delta$  puisque les intervalles rajoutés à  $D'_1 \cup A_\gamma \cup A_{\gamma^{-1}}$  pour obtenir  $\Delta$  sont loin de  $A_\gamma \cup A_{\gamma^{-1}}$ . Les dernières affirmations ne posent alors pas de problème.  $\square$

**Corollaire 5.1.8.**  $\Delta$  rencontre toutes les orbites de  $(T', F_n)$ .

*Preuve.* Notons  $\Delta_k = \bigcup_{|w| \leq k} w.\Delta$ . Comme  $\Delta$  est connexe et puisque pour tout  $\gamma \in B \cup B^{-1}$ , l'ensemble  $\gamma.\Delta \cap \Delta$  est non vide,  $\Delta_1$  est connexe. On a alors par récurrence que  $\Delta_k$  est connexe pour tout  $k$  puisque  $\Delta_{k+1} = \bigcup_{|w| \leq 1} w.\Delta_k$  et que pour  $k \geq 1$  et  $|w| \leq 1$   $\Delta \subset w.\Delta_k$ . Par conséquent, la réunion croissante des  $\Delta_k$  est un sous arbre invariant de  $(T', F_n)$  et recouvre donc  $T'$  par minimalité.  $\square$

Le lemme 5.1.6 démontre que  $\Delta$  est dans l' $\varepsilon_1$ -voisinage de  $D'_1$  et que  $d(\chi'_\gamma, \pi_\gamma) \leq \varepsilon_1$ . On a donc une  $\varepsilon_2$ -approximation  $F$ -équivariante entre  $D$  et  $\Delta$  (avec  $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_1 = 21\varepsilon$ ) pour laquelle  $\pi_\gamma$  est un point approximant  $\chi_\gamma$ . Dorénavant, on n'utilisera plus que cette approximation entre  $D$  et  $\Delta$ . Pour montrer que  $\Delta$  est un domaine fondamental pour  $(T', F_n)$ , nous allons nous servir de techniques similaires à celles qui apparaissent dans [CV2]. Nous supposons dans toute la suite que  $\varepsilon < d/21$ .

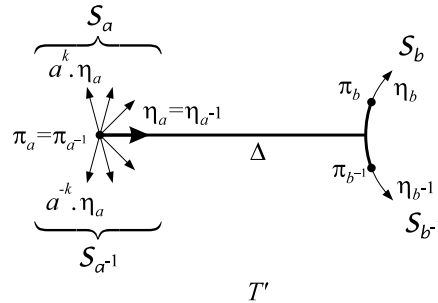


FIG. 5.8 –  $\Delta$  et les germes  $\eta_\gamma$

**Définition.** Soit  $\gamma \in B \cup B^{-1}$ .

- Si  $\gamma$  est hyperbolique dans  $(T', F_n)$ , on appelle  $\eta_\gamma$  le germe de l'axe positif de  $\gamma$  en  $\pi_\gamma$ . On définit aussi

$$\mathcal{S}_\gamma = \left\{ x \in T' \setminus \{\pi_\gamma\} \mid \text{germe}_{\pi_\gamma}([\pi_\gamma, x]) = \eta_\gamma \right\}.$$

- Si  $\gamma$  est elliptique dans  $(T', F_n)$ , on appelle  $\eta_\gamma = \eta_{\gamma^{-1}}$  le germe de  $\Delta$  en  $\pi_\gamma$ . On définit aussi

$$\mathcal{S}_\gamma = \left\{ x \in (T', F_n) \setminus \{\pi_\gamma\} \mid \exists k > 0 \text{ t.q. } \text{germe}_{\pi_\gamma}([\pi_\gamma, x]) = \gamma^k . \eta_\gamma \right\}$$

**Lemme 5.1.9.** *Si  $(T', F_n)$  est très petite, ou si  $(T, F_n)$  est simpliciale libre, et si  $\varepsilon < d/21$  alors les ensembles  $\mathcal{S}_\gamma$  ( $\gamma \in B \cup B^{-1}$ ) sont disjoints deux à deux et sont disjoints de  $\Delta$ .*

*Preuve.* Supposons que  $\gamma \in B \cup B^{-1}$  soit hyperbolique dans  $(T', F_n)$ . Puisque  $\eta_\gamma$  pointe vers le demi-axe positif de  $\gamma$  et que le germe de  $\Delta$  en  $\pi_\gamma$  est le demi-axe négatif de  $\gamma$ ,  $\Delta$  ne rencontre pas  $\mathcal{S}_\gamma$ . De même,  $\mathcal{S}_\gamma$  ne rencontre pas  $\mathcal{S}_{\gamma^{-1}}$  car  $\pi_{\gamma^{-1}} = \gamma^{-1}.\pi_\gamma$  et  $\eta_{\gamma^{-1}}$  pointe vers le demi-axe négatif de  $\gamma$ .

Supposons maintenant que  $\gamma \in B \cup B^{-1}$  soit elliptique dans  $(T', F_n)$ . On a vu que  $\gamma$  est alors elliptique dans  $(T, F_n)$  donc que  $(T, F_n)$  n'est pas libre. On utilise alors l'hypothèse que  $(T', F_n)$  est très petite : puisque  $\gamma$  ne fixe pas  $\eta_\gamma$ ,  $\gamma^k$  ne fixe pas  $\eta_\gamma$  non plus, donc les germes  $\gamma^k.\eta_\gamma$  pour  $k \in \mathbb{Z}$  sont tous distincts. En particulier,  $\Delta$ ,  $\mathcal{S}_\gamma$  et  $\mathcal{S}_{\gamma^{-1}}$  sont disjoints.

Supposons maintenant qu'un point  $x$  appartienne à  $\mathcal{S}_\gamma \cap \mathcal{S}_{\gamma'}$  avec  $\gamma' \neq \gamma^{\pm 1}$ . Alors  $[x, \pi_\gamma[ \subset \mathcal{S}_\gamma$  et  $[x, \pi_{\gamma'}[ \subset \mathcal{S}_{\gamma'}$ . Par conséquent, aucun de ces deux intervalles semi-ouverts ne peut rencontrer  $\Delta$  puisque  $\mathcal{S}_\gamma$  et  $\mathcal{S}_{\gamma'}$  ne rencontrent pas  $\Delta$ . Or  $[x, \pi_\gamma] \cup [x, \pi_{\gamma'}] \supset [\pi_\gamma, \pi_{\gamma'}]$ , et puisque  $[\pi_\gamma, \pi_{\gamma'}] \subset \Delta$ , on aboutit à une contradiction dès que  $\pi_\gamma \neq \pi_{\gamma'}$ .  $\square$

**Lemme 5.1.10.** *Pour tout  $\gamma \in B \cup B^{-1}$ , on a :*

- $\gamma.\pi_{\gamma^{-1}} = \pi_\gamma$
- $\gamma.(\Delta \setminus \{\pi_{\gamma^{-1}}\}) \subset \mathcal{S}_\gamma$
- $\gamma.\mathcal{S}_{\gamma'} \subset \mathcal{S}_\gamma$  pour tout  $\gamma' \in (B \cup B^{-1}) \setminus \{\gamma^{-1}\}$

*Preuve.* Le premier point a déjà été remarqué lors de la construction. Pour vérifier le second point on distingue deux cas selon que  $\gamma$  est elliptique ou non dans  $T'$ . Si  $\gamma$  est elliptique dans  $T'$ , le germe de  $\Delta$  en  $\pi_\gamma$  est  $\eta_\gamma$ , donc, si  $x \in \Delta \setminus \{\pi_\gamma\}$ , le germe de  $\Delta$  en  $\pi_\gamma$  de  $[\pi_\gamma, x]$  est  $\gamma.\eta_\gamma$  et  $\gamma.x \in \mathcal{S}_\gamma$ . Dans le cas où  $\gamma$  est hyperbolique dans  $T'$ , le germe de  $\Delta$  au point  $\pi_{\gamma^{-1}}$  est  $\gamma^{-1}.\eta_\gamma$ . Par conséquent, pour un point  $x \in \Delta \setminus \{\pi_{\gamma^{-1}}\}$ , le germe de  $\Delta$  en  $\pi_\gamma$  de  $[\pi_\gamma, x]$  est  $\eta_\gamma$  donc  $\gamma.x \in \mathcal{S}_\gamma$ .

Le troisième point ne pose pas de difficulté lorsque  $\gamma' = \gamma$ . Supposons donc que  $\gamma' \neq \gamma^{\pm 1}$  et soit  $x \in \mathcal{S}_{\gamma'}$ . Puisque  $\mathcal{S}_{\gamma'}$  ne rencontre pas  $\Delta$ , les trois points  $x$ ,  $\pi_{\gamma'}$  et  $\pi_{\gamma^{-1}}$  sont alignés dans cet ordre. En particulier, le germe en  $\pi_{\gamma^{-1}}$  de  $[\pi_{\gamma^{-1}}, x]$  est le germe de  $\Delta$ . Si  $\gamma$  est elliptique dans  $T'$ , on conclut que le germe en  $\pi_\gamma$  de  $[\pi_\gamma, \gamma.x]$  est  $\gamma.\eta_\gamma$ , donc que  $\gamma.x \in \mathcal{S}_\gamma$ . Si  $\gamma$  est hyperbolique, le germe en  $\pi_\gamma$  de  $[\pi_\gamma, \gamma.x]$  est  $\eta_\gamma$  donc  $\gamma.x \in \mathcal{S}_\gamma$ .  $\square$

*Remarque.* Ceci implique que la réunion de  $\Delta$  et des  $\mathcal{S}_\gamma$  pour  $\gamma \in B \cup B^{-1}$  recouvre  $T'$ . En effet, grâce au corollaire 5.1.8, on peut écrire  $y \in T'$  comme  $y = w.x$  pour un élément  $x$  de  $\Delta$  et un mot réduit  $w = \gamma_p \dots \gamma_1$ . Le lemme précédent implique que

$$\gamma \cdot (\Delta \cup \mathcal{S}_{\gamma'}) \subset \Delta \cup \mathcal{S}_\gamma \quad \text{pour } \gamma' \neq \gamma^{\pm 1} \text{ dans } B \cup B^{-1}.$$

On en déduit que  $y \in \Delta \cup \mathcal{S}_{\gamma_p}$ .

On a alors le corollaire suivant qui conclut que  $\Delta$  est un domaine fondamental pour  $T'$ .

**Corollaire 5.1.11.** *Soient  $x, y \in \Delta$  tels que  $x = w.y$  avec  $w \neq 1$ . Alors,*

- soit  $x \neq y$  auquel cas  $x = \pi_{\gamma^{-1}}$ ,  $y = \pi_\gamma$  et  $w = \gamma$  pour un élément  $\gamma$  de  $B \cup B^{-1}$  hyperbolique dans  $T'$
- soit  $x = y = \pi_\gamma$  et  $w = \gamma^p$  pour un élément  $\gamma$  de  $B \cup B^{-1}$  hyperbolique dans  $T'$ .

*Preuve.* Ecrivons  $w = \gamma_p \dots \gamma_1$  sous forme réduite. Comme dans la remarque précédente, on a que  $\gamma_k \dots \gamma_1.x \in \Delta \cup \mathcal{S}_{\gamma_k}$ . Si  $\gamma_k \dots \gamma_1.x$  appartient à  $\mathcal{S}_{\gamma_k}$ , on voit récursivement que  $\gamma_p \dots \gamma_1.x$  appartient à  $\mathcal{S}_{\gamma_p}$  et donc pas à  $\Delta$ , ce qui est contradictoire. On a donc que  $\gamma_k \dots \gamma_1.x$  appartient à  $\Delta$  pour tout  $k$ . En particulier, on a que  $x = \pi_{\gamma_1^{-1}}$  puisque  $\gamma_1 \cdot (\Delta \setminus \{\pi_{\gamma_1^{-1}}\}) \subset \mathcal{S}_{\gamma_1}$ . Par conséquent, lorsque  $w$  est de longueur 1, le corollaire est démontré puisque  $\gamma_1 \cdot \pi_{\gamma_1^{-1}} = \pi_{\gamma_1}$ . Dans le cas contraire,  $\gamma_2 \cdot (\pi_{\gamma_1}) \in \Delta$  donc  $\pi_{\gamma_1} = \pi_{\gamma_2^{-1}}$ . Puisque  $w$  est réduit, ceci n'est possible que si  $\gamma_2 = \gamma_1$  et si  $\gamma_1$  est elliptique dans  $T'$ . On obtient alors par récurrence que  $w = \gamma_1^p$  et  $x = y = \pi_{\gamma_1}$  avec  $\gamma_1$  elliptique dans  $T'$ .  $\square$

**Proposition 5.1.12.** *L'action  $(T', F_n)$  appartient à  $\mathcal{O}_n$*

*Preuve.* Montrons d'abord que  $T'$  est simplicial. L'arbre  $T'$  est la réunion des images de  $\Delta$  par  $F_n$ . Mais si on fixe un translaté  $\Delta_0 = w_0.\Delta$ , l'ensemble des translatsés  $\Delta' = w'.\Delta$  pour  $w' \neq w_0$  ne coupe  $\Delta_0$  que le long des points  $w_0.\pi_\gamma$ . On en déduit que  $T'$  est simplicial, et qu'on peut prendre pour ensemble de sommets de  $T'$  les images par  $F_n$  des points de branchement de  $\Delta$  et des points  $\pi_\gamma$ .

Pour montrer que  $(T', F_n)$  appartient à  $\mathcal{O}_n$ , il faut étudier le stabilisateur d'un point  $x \in T'$ . Puisque  $\Delta$  rencontre toutes les orbites, on peut supposer que  $x \in \Delta$  modulo conjugaison. Maintenant, si  $w.x = x$  avec  $w \neq 1$ , on sait que  $x = \pi_\gamma$  et que  $w = \gamma^k$  ce qui montre que  $\text{Stab } x$  est cyclique. De plus, comme  $T'$  est recouvert par  $\Delta$  et les  $\mathcal{S}_{\gamma'}$  pour  $\gamma' \in B \cup B^{-1}$ , l'ensemble des germes issus du point  $x = \pi_\gamma$  est

$\gamma^{\mathbb{Z}}.\eta_\gamma$ , ce qui montre que  $\text{Stab } x$  agit transitivement sur l'ensemble des germes issus de  $x$ . Cela montre aussi que les stabilisateurs d'arcs sont triviaux puisqu'il y a un nombre dénombrable de points ayant un stabilisateur non trivial. On conclut donc que  $(T', F_n)$  appartient à  $\mathcal{O}_n$ .  $\square$

Cette proposition achève de démontrer la première partie du théorème : toute action très petite  $(T', F_n)$  assez proche d'une action de  $\mathcal{O}_n$  appartient à  $\mathcal{O}_n$ .

### 5.1.3 L'action de $\text{Out}(F_n)$ sur $\mathcal{O}_n$ est proprement discontinue.

Dans cette partie, on considère de nouveau les actions modulo *homothétie* équivariante. On commence par démontrer le lemme suivant, qui est une condition nécessaire pour que  $\text{Out}(F_n)$  agisse proprement discontinûment sur  $\mathcal{O}_n$ .

**Lemme 5.1.13.** *Soit  $(T, F_n)$  une action de  $\mathcal{O}_n$ . Alors, le stabilisateur de  $(T, F_n)$  dans  $\text{Out}(F_n)$  est fini.*

*Preuve.* Supposons qu'on ait un automorphisme  $\alpha$  de  $F_n$  tel qu'il y ait une homothétie équivariante  $h$  entre  $(T, F_n).\alpha$  et  $(T, F_n)$ . Cette homothétie induit naturellement une homothétie du graphe quotient  $T/F_n = T.\alpha/F_n$  ce qui implique que  $h$  est en fait une isométrie. L'identité de  $(T, F_n)$  vers  $(T, F_n).\alpha$  est  $\alpha$  équivariante au sens où  $\text{Id}(g.x) = \alpha(g).\text{Id}(x)$ . L'application  $f = h \circ \text{Id}$  est donc une isométrie de  $(T, F_n)$  qui est  $\alpha$ -équivariante.

Dans [Bass] (voir aussi [BJ]), H. Bass introduit la notion de morphisme de graphes de groupes. C'est une notion un peu plus compliquée que ce à quoi on pourrait s'attendre naïvement. Nous n'avons besoin ici que de la notion d'automorphisme de graphe de groupes.

**Définition.** *Un automorphisme  $\varphi$  d'un graphe de groupes  $Q$  consiste en*

- un automorphisme  $\varphi$  du graphe sous-jacent de  $Q$
- pour tout sommet  $v \in Q$ , un isomorphisme  $\varphi_v : \Gamma_v \rightarrow \Gamma_{\varphi(v)}$
- pour toute arête orientée  $e$ , un isomorphisme  $\varphi_e : \Gamma_e \rightarrow \Gamma_{\varphi(e)}$  tel que  $\varphi_e = \varphi_{\bar{e}}$
- pour chaque sommet  $v \in Q$ , un élément  $\gamma_v \in \pi_1(Q, \varphi(v))$
- pour chaque arête  $e$  de  $Q$ , un élément  $\gamma_e \in \pi_1(Q, \varphi(o(e)))$  tel que  $\delta_e := \gamma_{o(e)}^{-1} \gamma_e$  appartienne à  $\Gamma_{o(e)}$

tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_e & \xrightarrow{i_{\tilde{e}}} & \Gamma_{o(e)} \\ \downarrow \varphi_e & & \downarrow I_{\delta_e}^{-1} \circ \varphi_{o(e)} \\ \Gamma_{\varphi(e)} & \xrightarrow{i_{\varphi(\tilde{e})}} & \Gamma_{\varphi(o(e))} \end{array}$$

*Remarque.* Lorsque les groupes d'arête sont triviaux, ce diagramme est automatiquement commutatif.

D'après [Bass, BJ], l'isométrie  $f : (T, F_n) \rightarrow (T, F_n)$  induit un automorphisme  $\varphi$  du graphe de groupes  $Q$  : soit  $\tau$  un arbre maximal de  $Q$ , et soit  $\tilde{\tau}$  le relevé préféré de  $\tau$  de sorte que si  $v \in \tau$ , le stabilisateur du relevé  $\tilde{v}$  de  $v$  dans  $\tilde{\tau}$  soit l'image dans  $F_n$  de  $\Gamma_v$  vu comme sous-groupe de  $\pi_1(Q, \tau)$ . On choisit aussi pour chaque arête orientée  $e$  de  $Q \setminus \tau$  un relevé  $\tilde{e}$  adjacent à  $\tilde{\tau}$  tel que  $\tilde{e} = \tilde{e}$ . On appelle  $\tilde{S}$  la réunion des relevés ainsi choisis des arêtes de  $Q$ . Pour  $v \in Q$ , soit  $h_v$  un élément de  $\pi_1(Q, \tau)$  tel que  $h_v \cdot f(\tilde{v})$  appartienne à  $\tilde{\tau}$ . De même, pour toute arête  $e$  de  $\tau$ , on considère un élément  $h_e$  tel que  $h_e f(\tilde{e})$  soit dans  $\tilde{S}$ . Le morphisme  $\varphi_v : \Gamma_v = \text{Stab } \tilde{v} \rightarrow \Gamma_{\varphi(v)} = \text{Stab } \widetilde{\varphi(v)}$  est alors défini par

$$\text{Stab } \tilde{v} \xrightarrow{\alpha} \text{Stab } f(\tilde{v}) \xrightarrow{I_{h_v}} \text{Stab } \widetilde{\varphi(v)}$$

où  $I_g$  note la conjugaison  $x \mapsto gxg^{-1}$ . Les morphismes  $\varphi_e$  sont définis de manière analogue.

On définit  $\gamma_v$  comme l'élément correspondant à  $h_v^{-1}$  dans  $\pi_1(Q, v)$ . La définition de  $\gamma_e$  est un peu plus compliquée. Considérons le cas plus simple où  $o(\tilde{e})$  et  $o(\widetilde{\varphi(e)}) = h_e \cdot o(f(\tilde{e}))$  appartiennent à  $\tilde{\tau}$  (voir [Bass] pour les autres cas). Notons  $v = o(e)$  l'origine  $e$ . Les arêtes  $h_e \cdot f(\tilde{e})$  et  $h_v \cdot f(\tilde{e})$  ont la même origine  $h_v \cdot f(v) = \widetilde{\varphi(v)}$ . On définit alors  $\delta_e = h_v h_e^{-1} \in \text{Stab } \widetilde{\varphi(v)} = \Gamma_{\varphi(v)}$  puis  $\gamma_e$  de sorte que  $\delta_e = \gamma_{o(e)}^{-1} \gamma_e$ .

Un tel morphisme  $\varphi$  induit  $\alpha$  au niveau du groupe fondamental de  $Q$  dans le sens suivant : on définit  $\varphi^* : \pi_1(Q, v) \rightarrow \pi_1(Q, \varphi(v))$  en posant pour tout lacet  $(g_0, e_1, \dots, e_n, g_n)$  basé en  $v$  dans le graphe de groupes  $Q$ ,

$$\begin{aligned} \varphi^*(g_0 e_1 \dots e_n g_n) = \\ (\gamma_{v_0} \varphi_{v_0}(g_0) \gamma_{v_0}^{-1}) (\gamma_{e_1} \varphi(e_1) \gamma_{\tilde{e}_1}^{-1}) \dots (\gamma_{e_n} \varphi(e_n) \gamma_{\tilde{e}_n}^{-1}) (\gamma_{v_n} \varphi_{v_n}(g_n) \gamma_{v_n}^{-1}). \end{aligned}$$

Il existe alors un chemin  $p_v$  dans le graphe de groupes  $Q$  reliant  $v$  à  $\varphi(v)$  tel que le morphisme qu'il induit de  $I_{p_v} : \pi_1(Q, \varphi(v)) \rightarrow \pi_1(Q, v)$  soit tel que  $I_{p_v} \circ \varphi^*$  induise  $\alpha$  sur  $\pi_1(Q, v)$  (voir [Bass]).

Notons  $\text{Aut}(Q)$  l'ensemble des automorphismes du graphe de groupes  $Q$  et soit  $\text{Aut}_0(Q)$  le sous-groupe (distingué) de  $\text{Aut}(Q)$  formé des automorphismes qui induisent l'identité sur le graphe sous-jacent de  $Q$ . Puisque le groupe des automorphismes d'un simple graphe fini est fini,  $\text{Aut}_0(Q)$  est d'indice fini dans  $\text{Aut}(Q)$ . Il nous suffit alors de montrer que l'image de  $\text{Aut}_0(Q)$  dans  $\text{Out}(\pi_1(Q, v))$  est finie dans le cas où  $(T, F_n)$  appartient à  $\mathcal{O}_n$ .

Le fait que  $(T, F_n) \in \mathcal{O}_n$  signifie que les groupes de sommets non triviaux de  $Q$  sont cycliques et terminaux. Soit  $(g_0, e_1, \dots, e_n, g_n)$  un lacet basé en  $v$  dans le graphe de groupes  $Q$ . On note  $v_i = o(e_i + 1) = t(e_i)$  le  $i$ -ème sommet traversé par le lacet de sorte que  $g_i \in \Gamma_{v_i}$ . Si  $v_i$  n'est pas un sommet terminal,  $g_i = 1$  et  $\gamma_{\bar{e}_{i-1}}^{-1} \gamma_{v_i} \in \Gamma_{v_i} = \{1\}$  donc

$$(\gamma_{e_{i-1}} e_{i-1} \gamma_{\bar{e}_{i-1}}^{-1})(\gamma_{v_i} \varphi_{v_i}(g_i) \gamma_{v_i}^{-1})(\gamma_{e_i} e_i \gamma_{\bar{e}_i}^{-1}) = \gamma_{e_{i-1}} e_{i-1} e_i \gamma_{\bar{e}_i}^{-1}.$$

Dans le cas contraire,  $e_{i-1} = \bar{e}_i$  et comme  $\Gamma_{v_i}$  est abélien,  $\gamma_{\bar{e}_{i-1}}^{-1} \gamma_{v_i}$  commute avec  $\varphi_{v_i}(g_i)$  et

$$(\gamma_{e_{i-1}} e_{i-1} \gamma_{\bar{e}_{i-1}}^{-1})(\gamma_{v_i} \varphi_{v_i}(g_i) \gamma_{v_i}^{-1})(\gamma_{e_i} e_i \gamma_{\bar{e}_i}^{-1}) = \gamma_{e_{i-1}} e_{i-1} \varphi_{v_i}(g_i) e_i \gamma_{\bar{e}_i}^{-1}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \varphi^*(g_0 e_1 \dots e_n g_n) &= \\ &= (\gamma_{v_0} \varphi_{v_0}(g_0) \gamma_{v_0}^{-1}) (\gamma_{e_1} \varphi(e_1) \gamma_{\bar{e}_1}^{-1}) \dots (\gamma_{e_n} \varphi(e_n) \gamma_{\bar{e}_n}^{-1}) (\gamma_{v_n} \varphi_{v_n}(g_n) \gamma_{v_n}^{-1}) = \\ &= \gamma_{v_0} \varphi_{v_0}(g_0) \gamma_{v_0}^{-1} \gamma_{e_1} \varphi(e_1) \varphi_{v_1}(g_1) \varphi(e_2) \varphi_{v_2}(g_2) \dots \\ &= \dots \varphi(e_{n-1}) \varphi_{v_{n-1}}(g_{n-1}) \varphi(e_n) \gamma_{\bar{e}_n}^{-1} \gamma_{v_n} \varphi_{v_n}(g_n) \gamma_{v_n}^{-1}. \end{aligned}$$

Dans le cas où  $v = v_0 = v_n$  est terminal on obtient

$$\varphi^*(g_0 e_1 \dots e_n g_n) = \gamma_{e_1} \varphi_{v_0}(g_0) \varphi(e_1) \dots \varphi(e_n) \varphi_{v_n}(g_n) \gamma_{e_1}^{-1}$$

et dans le cas contraire,

$$\varphi^*(g_0 e_1 \dots e_n g_n) = \gamma_{v_0} \varphi_{v_0}(g_0) \varphi(e_1) \dots \varphi(e_n) \varphi_{v_n}(g_n) \gamma_{v_0}^{-1}.$$

On en déduit que l'automorphisme extérieur associé à  $\varphi^*$  est déterminé par les  $\varphi_{v_i}$ , et comme les  $\Gamma_{v_i}$  sont cycliques, on voit qu'on obtient ainsi un nombre fini d'automorphismes extérieurs.  $\square$

On a une décomposition de  $\mathcal{O}_n$  en simplexes ouverts : si  $(T, F_n) \in \mathcal{O}_n$ , on appelle  $\sigma(T) \subset \mathcal{O}_n$  l'ensemble des actions de  $F_n$  modulo homothétie équivariante obtenues

en faisant varier les longueurs des arêtes de  $T$  de manière équivariante (la longueur de chaque arête doit rester non nulle). L'ensemble de ces simplexes ouverts forme une partition de  $\mathcal{O}_n$  invariante sous l'action de  $\text{Out}(F_n)$ . De plus, comme il existe un nombre fini de graphes de groupes (non marqués) dont le groupe fondamental soit isomorphe à  $F_n$ , et dont les groupes d'arêtes soient triviaux, il y a un nombre fini d'orbites de simplexes dans  $\mathcal{O}_n$ .

*Remarque.* Les simplexes ouverts ne sont pas forcément des ouverts de  $\overline{CV}_n$ .

On peut aussi considérer l'ensemble  $\bar{\sigma}(T)$  (qui n'est pas forcément un simplexe fermé) des actions  $(T', F_n)$  modulo homothétie équivariante obtenues en faisant varier les longueurs des arêtes de  $T$  de manière équivariante (on autorise ici certaines longueurs d'arêtes à être nulles) et telles que  $(T', F_n)$  soit non triviale et appartienne à  $\mathcal{O}_n$ . Ce n'est pas toujours un simplexe fermé car le simplexe fermé peut contenir des actions qui ne sont pas dans  $\mathcal{O}_n$ . On appelle alors  $E(T)$  l'étoile de  $T$ , c'est à dire l'ensemble des actions  $T' \in \mathcal{O}_n$  telles que  $T \in \bar{\sigma}(T')$ . On peut aussi voir  $E(T)$  comme l'ensemble des actions simpliciales  $(T', F_n)$  telles qu'il existe une application équivariante préservant l'alignement de  $T'$  dans  $T$ . Si  $T' \in E(T)$ ,  $E(T')$  contient clairement  $E(T)$  et  $E(T)$  est une réunion de simplexes ouverts.

Cette réunion est finie lorsque  $(T, F_n) \in \mathcal{O}_n$ . En effet, si on avait une suite  $\sigma_n$  de simplexes tels que  $\sigma(T) \subset \bar{\sigma}_n$ , quitte à extraire une sous-suite, on aurait des automorphismes extérieurs  $\alpha_n \in \text{Out}(F_n)$  tels que  $\sigma_n = \alpha_n \cdot \sigma_0$  et  $\alpha_n$  fixe globalement  $\sigma(T)$ . De tels  $\alpha_n$  seraient distincts dans  $\text{Out}(F_n)$  et fixeraient le barycentre de  $\sigma(T)$  c'est à dire l'action obtenue en donnant la même longueur à toutes les arêtes. Ceci contredit le fait que le stabilisateur dans  $\text{Out}(F_n)$  d'une action appartenant à  $\mathcal{O}_n$  est fini.

Montrons maintenant que pour tout  $T \in \mathcal{O}_n$ ,  $E(T)$  est ouvert.

**Proposition 5.1.14.** *Soit  $(T, F_n) \in \mathcal{O}_n$  et soit  $(T', F_n) \in \overline{CV}_n$  assez proche de  $(T, F_n)$ . Alors, il existe une application simpliciale équivariante de  $T'$  dans  $T$  préservant l'alignement qui est linéaire sur les arêtes. On a donc  $T' \in E(T)$ .*

*Preuve.* Remarquons que le domaine fondamental  $\Delta$  de  $T'$  construit plus haut est l'enveloppe convexe des point  $\pi_\gamma$ . En effet, cette enveloppe convexe rencontre toutes les orbites par un argument identique à celui qui montre que  $\Delta$  rencontre toutes les orbites (5.1.8). Le corollaire 5.1.11 implique alors que  $\Delta$  est égal à cette enveloppe convexe.

Pour démontrer la proposition, il suffit de démontrer le lemme 5.1.15 énoncé plus

bas. En effet, ce lemme fournit une application de  $\Delta$  dans  $D$  linéaire sur les arêtes qui envoie  $\pi_\gamma$  sur  $\chi_\gamma$ . Cette application se prolonge à  $T'$  par équivariance et on vérifie facilement qu'elle préserve l'alignement.  $\square$

**Lemme 5.1.15.** *Soient  $D, \Delta$  deux arbres finis avec une  $\varepsilon_2$ -approximation entre eux. Supposons que pour chaque sommet terminal  $\pi_\gamma$  de  $\Delta$  on ait un point approximant  $\chi_\gamma$  qui soit terminal dans  $D$ . Notons  $d$  la longueur de la plus courte arête de  $D$  et supposons que  $\varepsilon_2 < d/3$ . Alors, il existe une application naturelle  $f$  de  $\Delta$  dans  $D$  linéaire sur les arêtes de  $\Delta$ , préservant l'alignement et qui envoie  $\pi_\gamma$  sur  $\chi_\gamma$ .*

On garde la preuve de ce lemme pour plus tard.

*Remarque.* La proposition 5.1.14 montre que pour toute action  $(T_0, F_n) \in \mathcal{O}_n$ ,  $E(T_0)$  est ouvert dans  $\overline{CV}_n$  puisque pour toute action  $(T, F_n) \in E(T_0)$ ,  $E(T) \subset E(T_0)$  contient un voisinage de  $T$ .

**Corollaire 5.1.16.** *L'action de  $\text{Out}(F_n)$  sur  $\mathcal{O}_n$  est proprement discontinue.*

*Preuve.* Soit  $K \supset \mathcal{O}_n$  un compact.  $K$  est recouvert par un nombre fini de  $E(T_i)$ . Comme chaque étoile  $E(T_i)$  est composée d'un nombre fini de simplexes ouverts,  $K$  est recouvert par un nombre fini de simplexes ouverts. Supposons que  $K \cdot \alpha_k \cap K \neq \emptyset$  pour un ensemble infini d'automorphismes extérieurs  $\alpha_k$  de  $F_n$ . Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer qu'il existe deux simplexes ouverts  $\sigma$  et  $\sigma'$  tels que  $\sigma \cdot \alpha_k \cap \sigma' \neq \emptyset$ . Puisque la décomposition de  $\mathcal{O}_n$  en simplexes ouverts est équivariante, ceci implique que  $\sigma \cdot \alpha_k = \sigma'$ . Il suffit alors de montrer que le stabilisateur d'un simplexe ouvert  $\sigma$  est fini. Mais comme le stabilisateur d'un simplexe est égal au stabilisateur de son barycentre, le lemme 5.1.13 permet de conclure.  $\square$

*Démonstration du lemme 5.1.15.* On définit d'abord  $f$  sur les sommets terminaux de  $\Delta$  en envoyant  $\pi_\gamma$  sur  $\chi_\gamma$ . Soit  $b$  un point de branchement de  $\Delta$ . On veut prolonger  $f$  à  $b$ .

Puisque  $b$  est un point de branchement de  $\Delta$ , il existe un tripode  $(\pi_{\gamma_1}, \pi_{\gamma_2}, \pi_{\gamma_3})$  de  $\Delta$  tel que

$$\{b\} = [\pi_{\gamma_1}, \pi_{\gamma_2}] \cap [\pi_{\gamma_2}, \pi_{\gamma_3}] \cap [\pi_{\gamma_3}, \pi_{\gamma_1}].$$

Dans  $D$ , soit les trois points  $(\chi_{\gamma_1}, \chi_{\gamma_2}, \chi_{\gamma_3})$  sont non alignés soit deux de ces points sont égaux, donc dans les deux cas, on peut définir  $f(b)$  par

$$[\chi_{\gamma_1}, \chi_{\gamma_2}] \cap [\chi_{\gamma_2}, \chi_{\gamma_3}] \cap [\chi_{\gamma_3}, \chi_{\gamma_1}] = \{f(b)\}.$$



On veut montrer que  $f(b)$  est indépendant du choix du tripode. Soit  $b' \in D$  un point approximant  $b$ , et soient  $b_1$  et  $b_2$  deux choix distincts possibles pour  $f(b)$ . En utilisant le produit de Gromov, il vient que  $d(b', b_1) \leq 3\varepsilon_2/2$  et  $d(b', b_2) \leq 3\varepsilon_2/2$  donc que  $d(b_1, b_2) \leq 3\varepsilon_2$ . Comme  $b_1$  et  $b_2$  sont soit des points de branchement soit des points terminaux de  $D$  ils sont au moins à distance  $d$  s'ils sont distincts. On obtient donc une contradiction dès que  $\varepsilon_2 < d/3$ .

On prolonge alors  $f$  linéairement sur les arêtes de  $\Delta$  et il est facile de vérifier que  $f$  préserve l'alignement.  $\square$

## 5.2 Plier pour approximer

Dans cette partie, nous continuons notre étude de la dynamique de  $\text{Out}(F_n)$  sur la frontière de l'outre-espace, et plus précisément sur le fermé invariant  $\mathcal{F}_n = \overline{CV_n} \setminus \mathcal{O}_n$ . Nous démontrons le théorème suivant :

**Théorème 5.2.1.** *Soit  $(T, F_n)$  une action simpliciale appartenant au fermé  $\mathcal{F}_n$ , et soit  $(T', F_n)$  une action petite. On suppose que  $n \geq 3$ . Alors l'orbite de  $(T', F_n)$  sous l'action de  $\text{Out}(F_n)$  s'accumule sur  $(T, F_n)$ .*

Voici un corollaire immédiat qui illustre l'intérêt de ce théorème.

**Corollaire 5.2.2.** *Pour  $n \geq 3$ , il y a un unique fermé minimal invariant sous l'action de  $\text{Out}(F_n)$  et non vide dans la frontière de l'outre-espace. Cet ensemble  $\mathcal{M}_n$  est l'adhérence de l'orbite de toute action simpliciale appartenant à  $\mathcal{F}_n$ .*

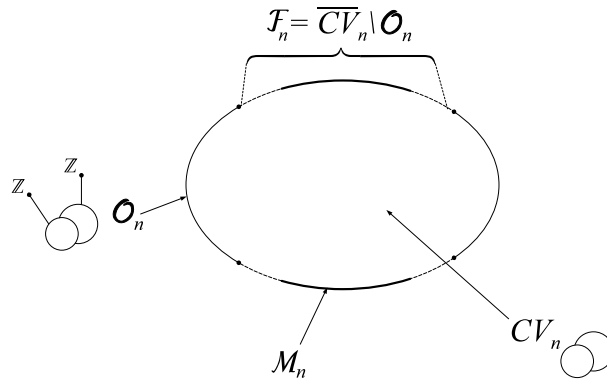


FIG. 5.9 – L'adhérence de l'outre-espace

On a bien sûr les inclusions

$$\mathcal{M}_n \subset \mathcal{F}_n \subsetneq \partial CV_n.$$

D. Gaboriau et G. Levitt ont démontré dans [GL] que la dimension topologique du bord de l'outre-espace est égale à  $3n - 5$ . On trouve facilement un simplexe d'actions simpliciales dans  $\mathcal{F}_n$ , (et donc dans  $\mathcal{M}_n$ , d'après le corollaire) qui est de dimension maximale, c'est à dire  $3n - 5$  (voir figure 5.10). Par conséquent, les dimensions topologiques de  $\mathcal{M}_n$  et de  $\mathcal{F}_n$  sont égales à  $3n - 5$ .

**Corollaire 5.2.3.** *La dimension topologique de tout ouvert de  $\mathcal{M}_n$  est égale à  $3n - 5$ .*

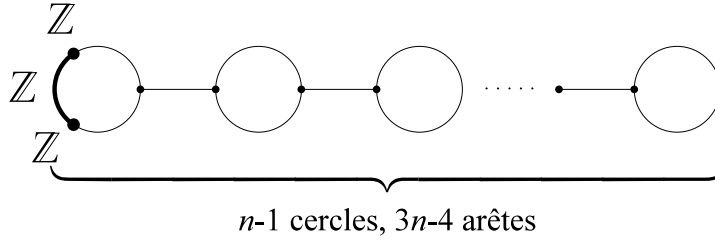


FIG. 5.10 – Un simplexe de dimension  $3n - 5$  dans  $\mathcal{M}_n$

En effet, si  $U$  est un ouvert de  $\mathcal{M}_n$ , et si  $(T', F_n)$  est une action simpliciale dans  $\mathcal{M}_n$  qui engendre un simplexe  $\sigma(T')$  de dimension  $3n - 5$ , il existe  $\alpha \in \text{Out}(F_n)$  tel que  $(T', F_n) \cdot \alpha$  appartienne à  $U$ . Alors  $U \cap \sigma(T') \cdot \alpha$  contient une boule de dimension  $3n - 5$ , donc la dimension de  $U$  est égale à  $3n - 5$ .

*Remarque.* On peut aussi montrer que la dimension topologique de tout ouvert de  $\mathcal{O}_n \cap \partial CV_n$  est de dimension  $3n - 5$  car un tel ouvert contient une action qui engendre un simplexe de dimension maximale.

**Corollaire 5.2.4.** *L'ensemble des points de  $\mathcal{M}_n$  ayant un stabilisateur trivial dans  $\text{Out}(F_n)$  est un  $G_\delta$  dense de  $\mathcal{M}_n$ .*

*Preuve.* Il suffit de montrer que pour tout  $\alpha \neq 1 \in \text{Out}(F_n)$ , l'ensemble des points fixes de  $\alpha$  dans  $\mathcal{M}_n$  est d'intérieur vide.

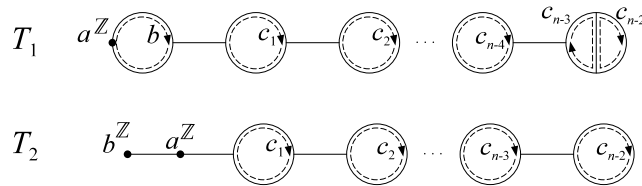


FIG. 5.11 – Les actions  $(T_1, F_n)$  et  $(T_2, F_n)$

Supposons au contraire que  $\alpha$  fixe point par point un ouvert  $U$  de  $\mathcal{M}_n$ . Considérons  $(T_1, F_n)$  et  $(T_2, F_n)$  les actions représentées sur la figure 5.11. On suppose que les longueurs des arêtes de  $T_1/F_n$  (resp. de  $T_2/F_n$ ) sont toutes distinctes. L'orbite de  $(T_1, F_n)$  rencontre  $U$  puisque toutes les orbites sont denses dans  $\mathcal{M}_n$ . Quitte à changer  $(T_1, F_n)$  par un élément de son orbite, on suppose que  $(T_1, F_n) \in U$ . Par conséquent,  $\alpha$  fixe  $T_1$ . Nous montrerons plus tard qu'il existe une base  $\{a, b, c_1, \dots, c_{n-2}\}$  telle

que le stabilisateur dans  $\text{Out}(F_n)$  de  $T_1$  est l'ensemble des automorphismes ayant un représentant  $\hat{\alpha} \in \text{Aut}(F_n)$  de la forme

$$\hat{\alpha} : \begin{cases} a \mapsto a^{\pm 1} \\ b \mapsto a^k b \\ c_i \mapsto c_i \end{cases}$$

pour  $k \in \mathbb{Z}$  (modulo une conjugaison de  $F_n$ ). De plus, on verra que  $a$  est elliptique dans  $T_1$ .

De la même façon, on peut supposer que  $(T_2, F_n) \in U$  et il existe une base  $\{a', b', c'_1, \dots, c'_{n-2}\}$  de  $F_n$  telle que le stabilisateur de  $T_2$  est l'ensemble des automorphismes extérieurs ayant un représentant  $\hat{\alpha}$  de la forme

$$\hat{\alpha} : \begin{cases} a' \mapsto a'^{\pm 1} \\ b' \mapsto a'^l b'^{\pm 1} a'^{-l} \\ c'_i \mapsto c'_i \text{ pour } i < n-2 \\ c'_{n-2} \mapsto c'_{n-2}^{\pm 1} \end{cases}$$

pour  $l \in \mathbb{Z}$ .

Par conséquent, si on considère l'image  $\bar{\alpha}$  de  $\alpha$  dans  $GL_n(\mathbb{Z})$ , on voit que  $\bar{\alpha}$  est à la fois conjugué à

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & k & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \text{ et à } \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & & & & \\ 0 & \pm 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & & 1 & \\ & & & & & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que  $k = 0$  et qu'on peut représenter  $\alpha$  par l'involution  $\hat{\alpha}$  qui fixe  $b$  et les  $c_i$  et envoie  $a$  sur  $a^{\pm 1}$ . Ce raisonnement montre que si  $\alpha' \in \text{Out}(F_n)$  fixe un ouvert contenant  $T_1$ , alors  $\alpha' = \alpha$  est l'involution citée au dessus.

L'ensemble des mots  $w$  tels que  $\hat{\alpha}(w)$  est conjugué à  $w^{-1}$  est l'ensemble des mots conjugués à un élément de  $a^{\mathbb{Z}}$ . En effet, soit  $w = x_1 \dots x_p$  cycliquement réduit tel que  $\hat{\alpha}(w)$  soit conjugué à  $w^{-1}$ . L'écriture de  $\hat{\alpha}(w)$  obtenue en remplaçant dans  $w$  toutes les occurrences de  $a$  par  $a^{-1}$  et inversement est réduite et cycliquement réduite. On en déduit que  $x_p^{-1} = \hat{\alpha}(x_1) \neq x_1$ , donc que  $x_1 = x_p = a^{\pm 1}$ , et une récurrence sur la longueur de  $w$  permet de conclure.

Si  $\beta \in \text{Out}(F_n)$  est tel que  $T_1.\beta \in U$ ,  $\beta\alpha\beta^{-1}$  fixe un ouvert contenant  $T_1$ , et le raisonnement précédent montre que  $\alpha = \beta\alpha\beta^{-1}$ . On en déduit qu'un représentant  $\hat{\beta}$  de  $\beta$  envoie  $a$  sur un conjugué de  $a^{\pm 1}$  puisque tout mot  $w$  tel que  $\alpha(w) = w^{-1}$  est conjugué à  $a$ .

On en déduit que si  $T_1.\beta \in U$ , alors  $l_{T_1.\beta}(a) = 0$  puisque  $a$  est elliptique dans  $T_1$ . Il suffit maintenant pour avoir une contradiction de montrer qu'il existe une action  $(T, F_n) \in U$  telle que  $a$  soit hyperbolique dans  $T$ . En effet, la densité des orbites impliquera alors qu'il existe une suite  $\beta_k \in \text{Out}(F_n)$  telle que  $(T_1, F_n).\beta_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (T, F_n)$ , ce qui contredit  $l_{T_1.\beta_k}(a) = 0$ .

Pour trouver une action  $(T, F_n) \in U$  telle que  $a$  soit hyperbolique dans  $T$ , il suffit de trouver une action  $(T, F_n) \in \mathcal{M}_n$  telle que tout élément primitif de  $F_n$  (i. e. appartenant à une base de  $F_n$ ) soit hyperbolique. Il existe de telles actions pour  $n = 2$  : il suffit de considérer un feuilletage mesuré à feuilles denses sur un tore troué. En effet, les seuls éléments elliptiques dans l'action correspondante  $(T_0, F_2)$  sont ceux qui sont conjugués à un élément du groupe fondamental du bord du tore troué. Comme l'image du groupe fondamental du bord du tore troué est triviale dans l'abélianisé de  $F_2$ , tout élément primitif de  $F_2$  est hyperbolique dans  $T_0$ . Cette action  $(T_0, F_2)$  peut être approximée par une action simpliciale très petite à stabilisateurs d'arêtes non triviaux en approximant le feuilletage par un autre feuilletage mesuré à feuilles compactes.

Pour trouver un exemple pour tout  $n$ , il suffit de considérer l'action associée au graphe d'actions suivant : on prend un bouquet de  $n - 2$  cercles, on prend  $(T_0, F_2)$  comme action de sommet, les groupes des arêtes sont triviaux, et on choisit des points d'attache  $p_e \in T_0$  quelconques. L'action  $(T, F_n)$  obtenue vérifie que tout élément elliptique dans  $T$  est trivial dans l'abélianisé de  $F_n$ , et n'est donc pas primitif. Elle appartient à  $\mathcal{M}_n$  pour  $n \geq 3$  car elle peut être approximée par une action simpliciale ayant un stabilisateur d'arête non trivial (et qui appartient donc à  $\mathcal{M}_n$ ).

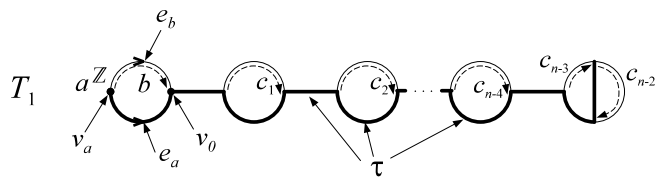
Pour terminer la preuve, il nous reste à calculer les stabilisateurs de  $(T_1, F_n)$  et  $(T_2, F_n)$ . Comme dans le lemme 5.1.13, un élément  $\alpha$  du stabilisateur de  $(T_1, F_n)$  est induit par un automorphisme  $\varphi$  du graphe de groupes quotient marqué  $Q = T_1/F_n$ . Rappelons qu'on a choisi les longueurs des arêtes de  $T_1/F_n$  toutes distinctes. Par conséquent,  $\varphi$  fixe chaque arête non orientée de  $Q$ . Si on avait  $\varphi(e) = \varphi(\bar{e})$  pour une arête orientée  $e$  dont les extrémités sont distinctes, chaque arête  $e'$  incidente sur  $o(e)$

serait aussi incidente sur  $t(e)$  puisque  $\varphi(\{e', \bar{e}'\}) = \{e', \bar{e}'\}$ . Ceci ne peut se produire que si  $Q$  possède exactement deux sommets et que toute arête est incidente sur ces deux sommets à la fois, ce qui n'est pas le cas de  $Q$ . Par conséquent, comme  $Q$  n'a pas d'arête dont les deux extrémités sont égales,  $\varphi$  induit l'identité du graphe sous jacent à  $Q$ .

L'automorphisme  $\varphi$  de  $Q$  est donc déterminé par les données suivantes

- pour tout sommet  $v \in Q$ , un automorphisme  $\varphi_v : \Gamma_v \rightarrow \Gamma_v$  et un élément  $\gamma_v \in \pi_1(Q, v)$
- pour toute arête orientée  $e$  de  $Q$ , un élément  $\gamma_e \in \pi_1(Q, o(e))$  tel que  $\delta_e = \gamma_{o(e)}^{-1} \gamma_e$  appartienne à  $\Gamma_{o(e)}$ .

Comme les groupes d'arêtes sont triviaux, les relations de commutation que doit vérifier  $\varphi$  sont automatiques.



Soit  $v_a$  l'unique sommet de  $Q$  dont le groupe est non trivial et  $a$  un générateur de  $\Gamma_{v_a}$ . On choisit comme point base  $v_0$  de  $Q$  le sommet de valence 3 du cercle contenant  $v_a$ . Choisissons un sous-arbre maximal  $\tau$  de  $Q$ . On identifie  $a$  avec l'élément  $\bar{e}_a a e_a \in \pi_1(Q, v_0)$  où  $e_a$  est l'arête orientée de  $\tau$  telle que  $o(e_a) = v_a$  et  $t(e_a) = v_0$ . Soit  $e_b$  l'arête orientée n'appartenant pas à  $\tau$  telle que  $o(e_b) = v_a$  et  $t(e_b) = v_0$ . On note  $b$  l'élément de  $\pi_1(Q, v_0)$  défini par  $\bar{e}_a e_b$ . Enfin, on choisit une orientation  $e_1, \dots, e_{n-2}$  de chaque arête de  $Q \setminus \tau$  distincte de  $\{\bar{e}_b, e_b\}$ . On considère alors les éléments  $c_i$  pour  $i = 1, \dots, n-2$  de  $\pi_1(Q, v_0)$  consistant à relier  $v_0$  à  $o(e_i)$  dans  $\tau$  à suivre  $e_i$  puis à revenir au point  $v_0$  dans  $\tau$ . On identifie  $\{a, b, c_1, \dots, c_{n-2}\}$  avec une base de  $F_n$  grâce au marquage de  $Q$ .

Pour tout lacet  $(g_0, e_1, \dots, e_n, g_n)$  du graphe de groupes  $Q$  basé en  $v_0$ , soit

$$\varphi^*(g_0 e_1 \dots e_n g_n) = (\gamma_{v_0} \varphi_{v_0}(g_0) \gamma_{v_0}^{-1}) (\gamma_{e_1} e_1 \gamma_{\bar{e}_1}^{-1}) \dots (\gamma_{e_n} e_n \gamma_{\bar{e}_n}^{-1}) (\gamma_{v_n} \varphi_{v_n}(g_n) \gamma_{v_n}^{-1}).$$

On sait que  $\varphi^*$  est un représentant de  $\alpha$  dans  $\text{Aut}(F_n)$  ([Bass, BJ]). Lorsque  $v_i \neq v_a$ , comme  $\delta_e \in \Gamma_{o(e)}$ ,  $\delta_{\bar{e}_i}^{-1} = \gamma_{\bar{e}_i}^{-1} \gamma_{v_i}$  et  $\delta_{e_{i+1}} = \gamma_{v_i}^{-1} \gamma_{e_{i+1}}$  sont égaux à 1. Puisque chaque sommet traversé par les chemins  $c_i$  a un groupe trivial, on en déduit que  $\varphi^*(c_i) =$

$\gamma_{v_0} c_i \gamma_{v_0}^{-1}$ . De plus,

$$\begin{aligned} \varphi^*(a) &= \gamma_{v_0} \varphi_{v_0}(1) (\gamma_{v_0}^{-1} \gamma_{\bar{e}_a}) \bar{e}_a (\gamma_{\bar{e}_a}^{-1} \gamma_{v_a}) \varphi_{v_a}(a) (\gamma_{v_a}^{-1} \gamma_{e_a}) e_a (\gamma_{\bar{e}_a}^{-1} \gamma_{v_0}) \varphi_{v_0}(1) \gamma_{v_0}^{-1} \\ &= \gamma_{v_0} \bar{e}_a \delta_{e_a}^{-1} \varphi_{v_a}(a) \delta_{e_a} e_a \gamma_{v_0}^{-1} = \gamma_{v_0} \bar{e}_a \varphi_{v_a}(a) e_a \gamma_{v_0}^{-1} = \gamma_{v_0} a^{\pm 1} \gamma_{v_0}^{-1}. \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned} \varphi^*(b) &= \gamma_{v_0} \varphi_{v_0}(1) (\gamma_{v_0}^{-1} \gamma_{\bar{e}_a}) \bar{e}_a (\gamma_{\bar{e}_a}^{-1} \gamma_{v_a}) \varphi_{v_a}(1) (\gamma_{v_a}^{-1} \gamma_{e_b}) e_b (\gamma_{\bar{e}_b}^{-1} \gamma_{v_0}) \varphi_{v_0}(1) \gamma_{v_0}^{-1} \\ &= \gamma_{v_0} \bar{e}_a (\delta_{e_a}^{-1} \delta_{e_b}) e_b \gamma_{v_0}^{-1} = \gamma_{v_0} a^k b \gamma_{v_0}^{-1}. \end{aligned}$$

où  $k \in \mathbb{Z}$  est défini par  $\delta_{e_a}^{-1} \delta_{e_b} = a^k$ .

On en déduit que tout  $\alpha \in \text{Out}(F_n)$  fixant  $(T_1, F_n)$  est représenté dans  $\text{Aut}(F_n)$  par un automorphisme qui fixe  $a$  et  $c_1, \dots, c_{n-2}$  et qui envoie  $b$  sur  $a^k b$  pour  $k \in \mathbb{Z}$ .

Le stabilisateur de  $(T_2, F_n)$  se calcule de même.  $\square$

### 5.2.1 Le lemme de pliage

Le lemme de pliage généralise le phénomène qui est apparu dans l'étude des candidats au statut d'ouvert invariant dans la section 5.1.1 et qui a empêché ces ensembles d'être ouverts.

#### Les pliages

On va ici non pas plier deux arêtes ensemble, mais deux chemins,  $\alpha$  et  $\beta$  issus d'un même point de  $T$ . Pour que cette opération se passe sans problème, on a besoin d'hypothèses techniques sur les chemins, qu'on regroupe sous l'appellation (H).

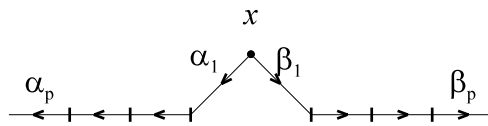


FIG. 5.12 – L'hypothèse (H)

**Définition.** Soit  $(T, F_n)$  une action simpliciale sans inversion. Soient  $\alpha, \beta$  deux chemins sans aller-retour issus du même point  $x$  de  $T$ , dont les extrémités sont des sommets de  $T$ . On suppose que  $\alpha$  et  $\beta$  traversent le même nombre d'arêtes et on note  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  et  $\beta_1, \dots, \beta_p$  les arêtes orientées successives parcourues par  $\alpha$  et  $\beta$ . On dit que ces chemins satisfont à l'hypothèse (H) si

- (H1) pour tout  $i = 1, \dots, p$ ,  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  ont même longueur  
 (H2)  $\alpha_1$  et  $\beta_1$  sont des arêtes adjacentes distinctes  
 (H3) Il existe une orientation équivariante des arêtes de  $T$  notée  $O$  telle que les arêtes  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  soient orientées positivement (on dit que les chemins  $\alpha$  et  $\beta$  sont bien orientés).

Bien sûr, l'hypothèse (H3) signifie qu'il existe une orientation des arêtes du quotient  $T/F_n$  telles que les projections dans  $T/F_n$  de  $\alpha$  et  $\beta$  soient bien orientées.

Considérons le pliage de  $T_0 = T$  qui identifie de manière équivariante l'arête  $\alpha_1$  avec l'arête  $\beta_1$ . On note  $T_1$  l'action simpliciale ainsi obtenue et  $f_1 : T_0 \rightarrow T_1$  l'application de pliage. L'hypothèse (H1) dit alors que  $(T_1, F_n)$  possède une métrique naturelle invariante et (H2) dit que l'application de pliage  $f_1$  n'est pas l'identité. L'hypothèse (H3) affirme que  $(T_1, F_n)$  n'a pas d'inversion et que  $f_1 \circ \alpha$  et  $f_1 \circ \beta$  sont des chemins bien orientés et donc sans aller-retour.

On peut maintenant considérer le nouveau pliage  $f_2 : T_1 \rightarrow T_2$  qui identifie de manière équivariante  $f_1(\alpha_2)$  et  $f_1(\beta_2)$ . Comme deux arêtes identifiées par  $f_1$  sont adjacentes, les arêtes  $f_1(\alpha_2)$  et  $f_1(\beta_2)$  sont nécessairement distinctes dans  $T_1$ , donc  $f_2$  n'est pas l'identité. En itérant ce procédé, on obtient des pliages  $f_i : T_{i-1} \rightarrow T_i$  distincts de l'identité et on note  $q_i = f_i \circ \dots \circ f_1 : T \rightarrow T_i$ . On note encore  $T' = T_p$  la dernière action obtenue et  $q = q_p : T \rightarrow T'$ . On dit que  $T'$  est obtenue à partir de  $T$  par pliage du chemin  $\alpha$  le long de  $\beta$ . On appelle *pliages intermédiaires* les pliages  $f_i$ . Bien sûr, le lemme précédent s'applique pour tous les pliages intermédiaires.

### Quelques exemples de pliages.

Nous nous intéressons maintenant à quelques exemples de pliages de chemins qui vont intervenir à plusieurs reprises dans la suite. Dans ces exemples, on considère une action simpliciale  $(T, F_n)$ . On se donne deux chemins  $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_p$  et  $\beta = \beta_1 \dots \beta_p$  dans  $T$  issus d'un sommet  $x$  et satisfaisant à l'hypothèse (H). On notera avec une barre les projections dans  $T/F_n$  des sommets, des arêtes et des chemins de  $T$ . Ainsi, les chemins  $\bar{\alpha}$  et  $\bar{\beta}$  dans  $T/F_n$  sont issus du point  $\bar{x}$ . Ils sont immergés d'après l'hypothèse (H3).

On note  $(T', F_n)$  l'action obtenue en pliant  $\alpha$  le long de  $\beta$ , et  $q : T \rightarrow T'$  l'application de pliage. On notera aussi  $(T_i, F_n)$  l'action obtenue après les  $i$  premiers pliages intermédiaires,  $q_i : T \rightarrow T_i$  sera l'application de pliage correspondante, et  $f_i : T_{i-1} \rightarrow T_i$  le pliage élémentaire. On note  $\bar{f}_i$  et  $\bar{q}_i$  les applications induites par  $f_i$



et  $q_i$  au niveau des graphes quotient.

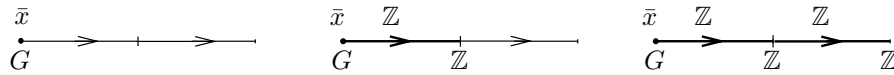


FIG. 5.13 – Pliage de deux segments dans la même orbite.

**Pliage de deux segments dans la même orbite** (figure 5.13). On suppose dans cet exemple que  $\bar{\alpha}$  et  $\bar{\beta}$  sont deux segments plongés dans  $T/F_n$ , qu'il existe  $g \in F_n \setminus \{1\}$  tel que  $g.\alpha = \beta$  (en particulier  $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$ ), et que les stabilisateurs des arêtes de  $\alpha$  et de  $\beta$  sont triviaux.

Le premier pliage intermédiaire  $f_1$  induit un isomorphisme entre  $T/F_n$  et  $T_1/F_n$  et le stabilisateur de  $f_1(\alpha_1) = f_1(\beta_1)$  est le sous-groupe de  $F_n$  engendré par  $g$ . De plus, les chemins  $\alpha^{(1)} = f_1(\alpha_2 \dots \alpha_p)$  et  $\beta^{(1)} = f_1(\beta_2 \dots \beta_p)$  satisfont encore aux conditions de cet exemple :  $\bar{\alpha}^{(1)}$  et  $\bar{\beta}^{(1)}$  sont deux segments plongés dans  $T_1/F_n$ ,  $g.\alpha^{(1)} = \beta^{(1)}$  et les stabilisateurs des arêtes de  $\alpha^{(1)}$  et  $\beta^{(1)}$  sont triviaux.

On en déduit par récurrence que  $\bar{q} : T/F_n \rightarrow T'/F_n$  est un isomorphisme, et que le stabilisateur de chaque arête de  $q(\alpha) = q(\beta)$  est le sous-groupe de  $F_n$  engendré par  $g$ . Notons que chaque pliage intermédiaire est défini par l'identification de deux arêtes dont les stabilisateurs sont triviaux (cette condition nous sera utile pour appliquer le lemme de pliage 5.2.7).

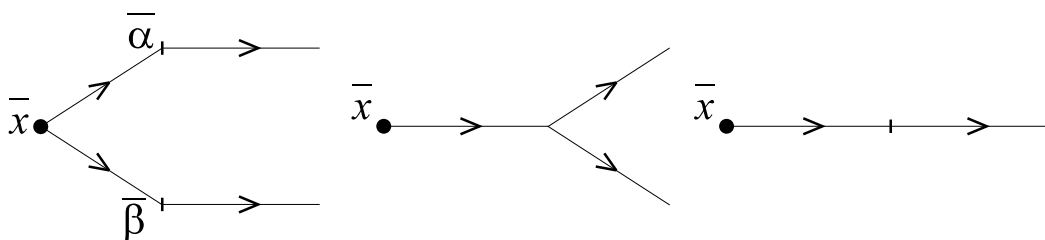


FIG. 5.14 – Pliage de deux segments adjacents.

**Pliage de deux segments adjacents** (figure 5.14) On suppose dans cet exemple que  $\bar{\alpha}$  et  $\bar{\beta}$  sont deux segments plongés dans  $T/F_n$  tels que  $\bar{\alpha} \cap \bar{\beta} = \{\bar{x}\}$ , et que les stabilisateurs des arêtes de  $\alpha$  et de  $\beta$  sont triviaux.

Au niveau des graphes quotient, le premier pliage intermédiaire  $\bar{f}_1$  consiste à identifier  $\bar{\alpha}_1$  et  $\bar{\beta}_1$  et le stabilisateur de  $f_1(\alpha_1) = f_1(\beta_1)$  est trivial. De plus, les chemins  $\alpha^{(1)} = f_1(\alpha_2 \dots \alpha_p)$  et  $\beta^{(1)} = f_1(\beta_2 \dots \beta_p)$  satisfont récursivement aux conditions de cet exemple.

On voit alors par récurrence que  $\bar{q}$  consiste à identifier  $\bar{\alpha}$  avec  $\bar{\beta}$ , que les stabilisateurs des arêtes de  $q(\alpha) = q(\beta)$  sont triviaux et que tous les pliages intermédiaires se font entre des arêtes dont les stabilisateurs sont triviaux.

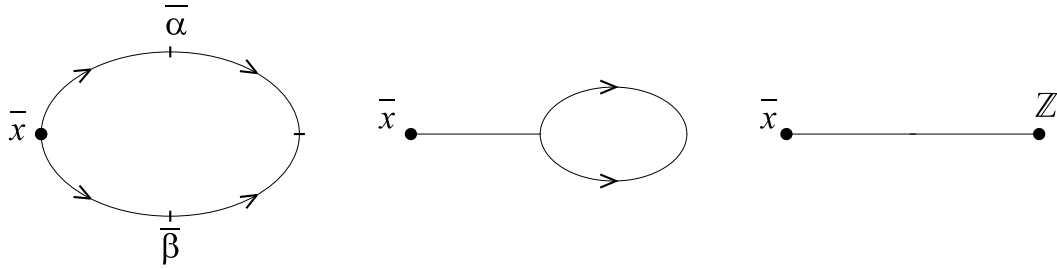


FIG. 5.15 – Pliage de deux demi-cercles.

**Pliage de deux demi-cercles** (figure 5.15) On suppose dans cet exemple que  $\bar{\alpha}$  et  $\bar{\beta}$  sont deux segments plongés dans  $T/F_n$  qui ne s'intersectent qu'en leur deux extrémités et que les stabilisateurs des arêtes de  $\alpha$  et de  $\beta$  sont triviaux.

Notons  $\alpha = [x, y_a]$  et  $\beta = [x, y_b]$  avec  $y_b = h.y_a$ . Là encore,  $\bar{q}$  consiste à identifier  $\bar{\alpha}$  avec  $\bar{\beta}$ , les stabilisateurs des arêtes de  $q(\alpha) = q(\beta)$  sont triviaux, tous les pliages intermédiaires se font entre des arêtes dont les stabilisateurs sont triviaux, et le stabilisateur de  $q(y_a) = q(y_b)$  est non trivial et est égal au groupe engendré par  $\text{Stab}(y_a)$  et  $h$ .

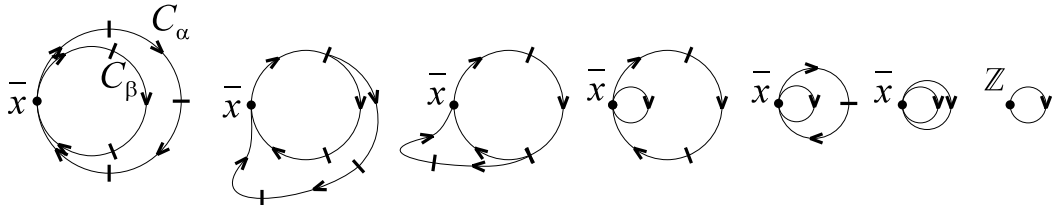


FIG. 5.16 – Pliage de deux cercles adjacents.

**Pliage de deux cercles adjacents** (figure 5.16) On suppose dans cet exemple qu'il existe deux cercles plongés  $C_\alpha$  et  $C_\beta$  dans  $T/F_n$  qui s'intersectent en  $\{\bar{x}\}$  et tels que  $\bar{\alpha}$  fasse un tour autour de  $C_\alpha$  puis continue dans  $C_\alpha \cup C_\beta$  et que  $\bar{\beta}$  fasse un tour autour de  $C_\beta$  puis continue dans  $C_\alpha \cup C_\beta$ . On note  $a$  et  $b$  le nombre d'arêtes contenues dans  $C_\alpha$  et  $C_\beta$  respectivement. On suppose que les stabilisateurs des arêtes de  $\alpha$  et de  $\beta$  sont triviaux.

On se place d'abord dans le cas où  $a \neq b$ , par exemple  $a < b$  et on regarde l'effet des  $a$  premiers pliages élémentaires. Les chemins  $\alpha'$  et  $\beta'$  qu'il reste alors à plier satisfont récursivement les conditions de cet exemple : les  $a$  premières arêtes de  $\bar{\alpha}'$  sont  $\bar{q}_a(\bar{\alpha}_{a+1} \dots \bar{\alpha}_{2a}) = \bar{q}_a(\bar{\beta}_{a+1} \dots \bar{\beta}_{2a})$  et parcourent donc le cercle  $C'_\alpha = q_a(C_\alpha)$ . Les  $b - a$  premières arêtes de  $\bar{\beta}'^{(a)}$  forment un cercle  $C'_\beta$  contenant  $b' = b - a$  arêtes et qui n'intersecte  $C'_\alpha$  qu'en  $\bar{q}(\bar{x})$ .

Cette situation se reproduit donc récursivement jusqu'à ce que les deux cercles (qu'on note encore  $C_\alpha$  et  $C_\beta$ ) comportent autant d'arêtes. Dans ce cas, le pliage recolle  $C_\alpha$  et  $C_\beta$  en un seul cercle  $C'$  dont les groupes d'arête sont triviaux. De plus, le stabilisateur de  $q(x)$  est alors non trivial. Les pliages suivants feraient alors apparaître de nouveaux stabilisateurs d'arêtes. On s'arrêtera donc en général de plier à ce moment là.

Ces pliages de chemins sont à rapprocher de l'élargissement uniforme pour les systèmes d'isométries. En effet, dans [Lev2, partie V], G. Levitt étudie l'élargissement uniforme correspondant au recollement de trois cercles tangents. Certaines propriétés d'autosimilarité lui permettent de construire ainsi des systèmes d'isométries minimaux de type *exotique*.

### Image réciproque d'une arête et lemme de pliage.

On appelle *image réciproque d'une arête*  $e$  de  $T_1$  par l'application  $f_1 : T \rightarrow T_1$  l'ensemble des arêtes  $e'$  de  $T$  qui sont envoyées sur  $e$  par  $f_1$ . Notons bien qu'il ne s'agit pas de l'ensemble des points de  $T$  qui s'envoient sur un point de  $e$  par  $f_1$  car ce dernier peut contenir des sommets isolés supplémentaires. L'intérêt fondamental de cette hypothèse (H), et en particulier de (H3) est le fait suivant :

**Lemme 5.2.5.** *L'image réciproque d'une arête  $e$  de  $T_1$  par  $f_1$  est un ensemble d'arêtes adjacentes à un sommet  $x$  telles que l'orientation induite par  $O$  sur ces arêtes est centrifuge ( $x$  est l'origine de ces arêtes orientées).*

*Remarque.* Si (H3) n'est pas vérifiée,  $f_1^{-1}(e)$  peut contenir une droite.

*Preuve.* L'arbre  $T_1$  est le quotient de  $T$  par la relation d'équivalence engendrée par  $e \sim_0 e'$  s'il existe  $g \in F_n$  tel que  $\{g.e, g.e'\} = \{\alpha_1, \beta_1\}$ . Il suffit alors de vérifier que si  $e \sim_0 e' \sim_0 e''$ , ces trois arêtes orientées par  $O$  ont leur origine en un même point.  $\square$

**Lemme 5.2.6.** *On suppose que chaque pliage intermédiaire  $f_i$  se fait entre des arêtes dont le stabilisateur est trivial. Soient  $e_1$  et  $e_2$  deux arêtes adjacentes et distinctes dans  $T$ . Si  $e_1$  et  $e_2$  sont identifiées par  $q : T \rightarrow T'$ , alors elles sont identifiées par  $f_1$ .*

*Remarque.* L'hypothèse faite sur les pliages  $f_i$  peut être affaiblie, mais nous n'en aurons pas besoin dans la suite. Cependant, le lemme n'est pas vrai si on ne fait aucune hypothèse sur les pliages  $f_i$ .

**Corollaire 5.2.7 : le lemme de pliage.** *Soit  $(T, F_n)$  une action simpliciale sans inversion. Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux chemins dans  $T$  vérifiant l'hypothèse (H), issus d'un même point  $x$  dont le stabilisateur est infini. Soit  $w_k$  une suite d'éléments distincts de  $\text{Stab } x$  et soit  $T^{(k)}$  l'action obtenue en pliant  $\alpha$  le long de  $w_k.\beta$ . On suppose que chaque pliage intermédiaire se fait entre des arêtes dont le stabilisateur est trivial. En particulier, les stabilisateurs de  $\alpha_1$  et  $\beta_1$  sont supposés triviaux. Sous ces hypothèses,*

$$(T^{(k)}, F_n) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (T, F_n)$$

*Le lemme implique le corollaire.* Notons  $f_1^{(k)}$  le pliage qui identifie de manière équivariante les arêtes  $\alpha_1$  et  $w_k.\beta_1$ . Montrons que deux arêtes  $e_1$  et  $e_2$  de  $T$  sont identifiées par  $f_1^{(k)}$  pour au plus un nombre fini d'indices  $k$ . Dans le cas où  $\alpha_1$  et  $\beta_1$  ne sont pas dans la même orbite,  $e_1$  et  $e_2$  sont identifiées par  $f_1^{(k)}$  si et seulement si il existe  $g \in F_n$  tel que  $g.\{e_1, e_2\} = \{\alpha_1, w_k.\beta_1\}$ , ce qui se produit pour au plus un indice  $k$  puisque les stabilisateurs de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont triviaux.

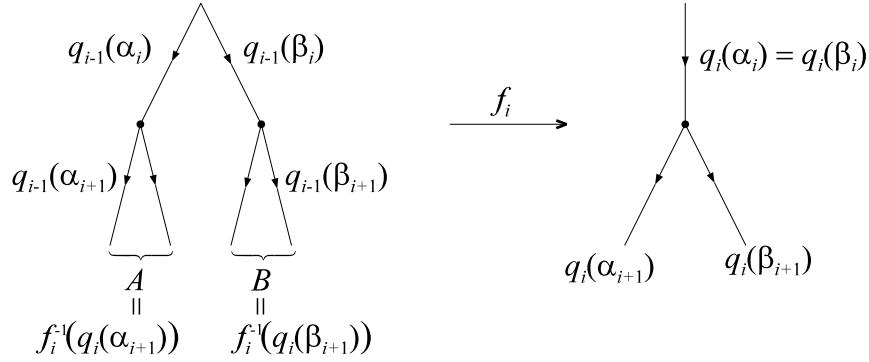
Si  $\alpha_1$  et  $\beta_1$  sont dans la même orbite, soit  $h$  tel que  $h.\alpha_1 = \beta_1$  ( $h$  est unique). Les arêtes  $e_1$  et  $e_2$  sont alors identifiées par  $f_1^{(k)}$  si et seulement si il existe  $g \in F_n$  et  $i \in \mathbb{Z}$  tels que  $g.\{e_1, e_2\} = \{\alpha_1, (w_k h)^i.\alpha_1\}$ . Supposons maintenant que  $e_1$  et  $e_2$  sont identifiées par  $f_1^{(k)}$  pour un nombre infini d'indices  $k$ . Il existe alors  $k_0$  et un ensemble infini d'indices  $k$  tels que

$$g_{k_0}.e_1 = \alpha_1, g_{k_0}.e_2 = (w_{k_0} h)^{i_0}.\alpha_1 \quad \text{et} \quad g_k.e_1 = \alpha_1, g_k.e_2 = (w_k h)^{i_k}.\alpha_1,$$

alors  $(w_{k_0} h)^{i_0} = (w_k h)^{i_k}$ . Par conséquent, les  $w_k h$  forment un ensemble infini de racines de  $(w_{k_0} h)^{i_0}$ , ce qui est contradictoire.

Maintenant qu'on a vu que deux arêtes  $e_1$  et  $e_2$  de  $T$  sont identifiées par  $f_1^{(k)}$  pour au plus un nombre fini d'indices  $k$ , on va montrer la convergence de  $(T^{(k)}, F_n)$  vers  $(T, F_n)$  en utilisant la topologie de Gromov. Soit  $K$  un sous arbre fini de  $T$ , et  $F \subset F_n$  une partie finie. On considère l'arbre fini  $K_e = \text{Conv}(K, F.K)$ . Considérons maintenant un couple d'arêtes adjacentes  $e_1, e_2$  de  $K_e$ . Grâce au lemme, si ces deux arêtes sont identifiées par le pliage  $q^{(k)}$  du chemin  $\alpha$  le long de  $w_k.\beta$ , elles sont identifiées par le pliage  $f_1^{(k)}$  de l'arête  $\alpha_1$  le long de  $w_k.\beta_1$ . Il existe alors au plus un nombre fini d'indices  $k$  pour lesquels  $e_1$  et  $e_2$  sont identifiées par  $q^{(k)}$ . Par conséquent, pour  $k$  assez grand, le pliage  $q^{(k)}$  de  $\alpha$  le long de  $w_k.\beta$  est une isométrie locale en restriction à  $K_e$ , et donc une isométrie. Il est alors facile d'en déduire que  $q^{(k)}$  induit une 0-approximation  $F$ -équivariante entre  $K$  et  $q^{(k)}(K) \subset T^{(k)}$ .  $\square$

*Preuve du lemme.* Supposons au contraire qu'on ait un  $i > 0$  tel que  $q_i(e_1) \neq q_i(e_2)$  et  $q_{i+1}(e_1) = q_{i+1}(e_2)$ . Ceci implique en particulier que l'orientation des arêtes  $q_i(e_1)$  et  $q_i(e_2)$  est centrifuge.



Dans le cas où  $q_i(\alpha_{i+1})$  et  $q_i(\beta_{i+1})$  ne sont pas dans la même orbite dans  $T_i$ , et puisque par hypothèse  $\text{Stab } q_i(\alpha_{i+1}) = \text{Stab } q_i(\beta_{i+1}) = \{1\}$ , l'ensemble des arêtes identifiées avec  $q_i(\alpha_{i+1})$  et  $q_i(\beta_{i+1})$  par  $f_{i+1}$  ne contient rien d'autre que la paire  $\{q_i(\alpha_{i+1}), q_i(\beta_{i+1})\}$ . Donc modulo l'action de  $F_n$ , on peut supposer par exemple que  $q_i(e_1) = q_i(\alpha_{i+1})$  et  $q_i(e_2) = q_i(\beta_{i+1})$ . Par conséquent, grâce au lemme précédent,  $q_{i-1}(e_1)$  et  $q_{i-1}(e_2)$  ont la même origine que  $q_{i-1}(\alpha_{i+1})$  et  $q_{i-1}(\beta_{i+1})$  respectivement, ce qui les empêche d'être adjacentes.

Dans le cas où  $q_i(\alpha_{i+1})$  et  $q_i(\beta_{i+1})$  sont dans la même orbite dans  $T_i$ , considérons  $h$  l'unique élément de  $F_n$  qui envoie  $q_i(\alpha_{i+1})$  sur  $q_i(\beta_{i+1})$ . Puisque  $\text{Stab } q_i(\alpha_{i+1}) = \text{Stab } q_i(\beta_{i+1}) = \{1\}$ , l'ensemble des arêtes identifiées avec  $q_i(\alpha_{i+1})$  et  $q_i(\beta_{i+1})$  par  $f_{i+1}$  est exactement  $h^{\mathbb{Z}}.\alpha_{i+1}$ . On peut donc par exemple supposer que  $q_i(e_1) =$

$q_i(\alpha_{i+1})$  et  $q_i(e_2) = h^k \cdot q_i(\alpha_{i+1})$ . Considérons alors les images réciproques  $A$  et  $B$  des arêtes  $q_i(\alpha_{i+1})$  et  $q_i(\beta_{i+1})$  par le pliage  $f_i$ . Par le lemme précédent, les arêtes de  $A$  ont toutes la même origine qui est le sommet terminal de  $q_{i-1}(\alpha_i)$ , et l'origine des arêtes de  $B$  est le sommet terminal de  $q_{i-1}(\beta_i)$ . Comme  $q_{i-1}(e_1)$  et  $q_{i-1}(e_2)$  sont adjacentes et d'orientation centrifuge, les arêtes de  $h^k \cdot A$  ont la même origine que celles de  $A$ . Ceci implique que  $h^k$  fixe l'origine des arêtes de  $A$  et donc celle des arêtes de  $B$  puisque  $B = h \cdot A$ . Le segment  $q_{i-1}(\alpha_i) \cup q_{i-1}(\beta_i)$  est donc fixé par  $h$ , ce qui contredit l'hypothèse faite sur le pliage  $f_i$ .  $\square$

### 5.2.2 Le théorème d'approximation M. Cohen et M. Lustig

Le théorème d'approximation de M. Cohen et M. Lustig étudie la dynamique des *twists de Dehns multiples* et permet d'approximer une action très petite simpliciale par d'autres actions (voir [CL]). C'est en particulier grâce à ce théorème que M. Cohen et M. Lustig ont démontré que toute action simpliciale et très petite pouvait être approchée par une action simpliciale libre de  $F_n$ . Dans ce chapitre, ce sera le moteur qui permet de montrer que les orbites sous l'action de  $\text{Out}(F_n)$  s'accumulent sur certaines actions.

Avant d'énoncer ce théorème, rappelons qu'un graphe d'actions est un graphe de groupes  $G$  tel que pour chaque sommet  $v$  de  $G$ , on a une action de  $\Gamma_v$  sur un arbre réel  $T_v$  (qui peut être réduit à un point), et pour chaque arête orientée  $e$  on se donne un point  $p_e$  de  $T_{t(e)}$  qui est fixé par  $i_e(\Gamma_e) \subset \Gamma_{t(e)}$ . A un tel graphe d'actions est associé canoniquement une action  $(T(G), \pi_1(G))$ . (voir [CL, combination lemma], [Lev4] ou section 2.3).

Rappelons maintenant la définition des twists de Dehn pour un graphe de groupes ([CL]). Soit  $G$  un graphe de groupes dont on suppose ici que les groupes d'arêtes non triviaux sont cycliques infinis (cette condition n'est pas nécessaire pour définir les twists de Dehn mais elle sera toujours vérifiée dans ce cadre). Dans ce cas, pour construire l'espace topologique  $X_G$  dont le groupe fondamental est  $\pi_1(G)$ , pour chaque arête dont le groupe est non trivial, on peut choisir comme espace d'arête  $X_e$  une copie du cercle orienté  $S^1$  (voir section 1.2). Ceci suppose le choix d'un générateur préféré de  $\Gamma_e$  correspondant au parcours de  $S^1$  dans le sens positif.

Un twist de Dehn du cylindre  $S^1 \times [0, 1]$  est une application de la forme  $(e^{i\theta}, t) \mapsto (e^{i\theta + 2i\pi p t}, t)$  pour un entier  $p \in \mathbb{Z}$ . Etant donnés une arête orientée  $e$  de  $G$  et un entier  $p \in \mathbb{Z}$ , un *twist de Dehn simple* du graphe de groupes  $G$  sur l'arête  $e$  est alors

un homéomorphisme  $D$  de  $X_G$  qui est l'identité hors de  $X_e \times [0, 1]$ , et qui est un twist de Dehn en restriction au cylindre  $X_e \times [0, 1]$ .

Donnons nous un ensemble  $E$  d'arêtes orientées tel qu'une arête donnée n'apparaissent pas dans  $E$  avec ses deux orientations, et un entier  $p_e \in \mathbb{Z}$  pour chaque arête orientée  $e \in E$ . On définit alors un *twist de Dehn multiple* sur  $E$  comme la composition des twists de Dehn simples sur les arêtes  $e$ , ce qui est bien défini car tous ces twists de Dehn commutent. On appelle encore *twist de Dehn* l'automorphisme de  $\pi_1(G, *)$  correspondant. Si  $G$  est marqué par une identification entre  $F_n$  et  $\pi_1(G, *)$ , on dit encore que l'automorphisme induit dans  $F_n$  est un twist de Dehn.

*Remarque.* Si  $(T, F_n)$  est une action très petite simpliciale, et si  $Q$  est son graphe de groupes quotient marqué, alors, un twist de Dehn  $D$  de  $Q$  fixe l'action  $(T, F_n)$ .

Si  $G$  est un graphe de groupes, on note  $\text{triv}(G)$  la réunion des arêtes *ouvertes* de  $G$  dont le groupe est trivial.

### Le théorème d'approximation ([CL])

**Les données.** Soit  $(T, F_n)$  une action très petite et simpliciale, et soit  $Q = T/F_n$  le graphe de groupes quotient marqué. Soit  $A$  une réunion de composantes connexes de  $Q \setminus \text{triv}(Q)$ . Pour chaque composante  $A_0$  de  $A$ , considérons une action  $(T_{A_0}, \Gamma_{A_0})$  petite et des points  $p_e \in T_{A_0}$  pour chaque arête  $e$  de  $Q$  incidente sur  $A_0$ .

**La construction.** Soit  $(T', F_n)$  l'action simpliciale obtenue en écrasant les composantes connexes de l'image réciproque de  $A$  dans  $T$ . Le graphe sous-jacent au graphe de groupes marqué  $Q' = T'/F_n$  est obtenu en écrasant en un point chaque composante  $A_0$  de  $A$ , et le groupe  $\Gamma_{A_0}$  correspondant est isomorphe à  $\pi_1(A_0, *)$ . On note  $\frac{1}{k}(T_{A_0}, F_n)$  l'action obtenue en divisant par  $k$  la métrique de  $(T_{A_0}, F_n)$ . Soit  $G_k$  le graphe d'actions obtenu en associant à un sommet  $A_0$  de  $Q'$  l'action  $\frac{1}{k}(T_{A_0}, F_n)$ , et l'action triviale aux autres sommets de  $Q'$ . Les points de recollement des arêtes sont les points  $p_e$ . On note alors  $(T_k, F_n)$  l'action associée à ce graphe d'actions.

**Le résultat.** Sous l'hypothèse que chaque élément d'un groupe d'arête de  $A_0$  est hyperbolique dans  $T_{A_0}$ , il existe des twists de Dehn  $D_k \in \text{Out}(F_n)$  tels que les actions  $(T'_k, F_n) = (T_k, F_n).D_k$  convergent vers  $(T, F_n)$  quand  $k \rightarrow \infty$ .

Ce théorème implique en particulier que si  $(T, F_n)$  est une action très petite et simpliciale dont aucun stabilisateur d'arête n'est trivial, et si  $(T', F_n)$  est une

action petite dans laquelle les éléments des stabilisateurs d'arêtes de  $T$  agissent hyperboliquement, alors l' $\text{Out}(F_n)$ -orbite de  $(T', F_n)$  s'accumule sur  $(T, F_n)$  dans l'espace des actions de  $F_n$  projectifié. Il suffit pour cela de prendre  $A = T/F_n$  et  $(T_A, F_n) = (T', F_n)$ .

*Illustration du théorème d'approximation.* Soit  $(T, F_n)$  une action simpliciale très petite, et  $Q = T/F_n$  son graphe de groupes quotient. On suppose dans cet exemple qu'il n'y a qu'une composante du graphe  $Q \setminus \text{triv}(Q)$  qui n'est pas réduite à un point, et on suppose que son groupe fondamental en tant que graphe de groupes est cyclique. Comme  $(T, F_n)$  est supposée très petite, cela implique que cette composante est un intervalle  $I$ , dont tous les groupes d'arêtes et de sommets sont isomorphes à  $\mathbb{Z}$ , et que les morphismes d'arêtes qui sont en fait des isomorphismes. On prendra comme sous-graphe  $A$  de  $Q$  l'intervalle  $I$ .

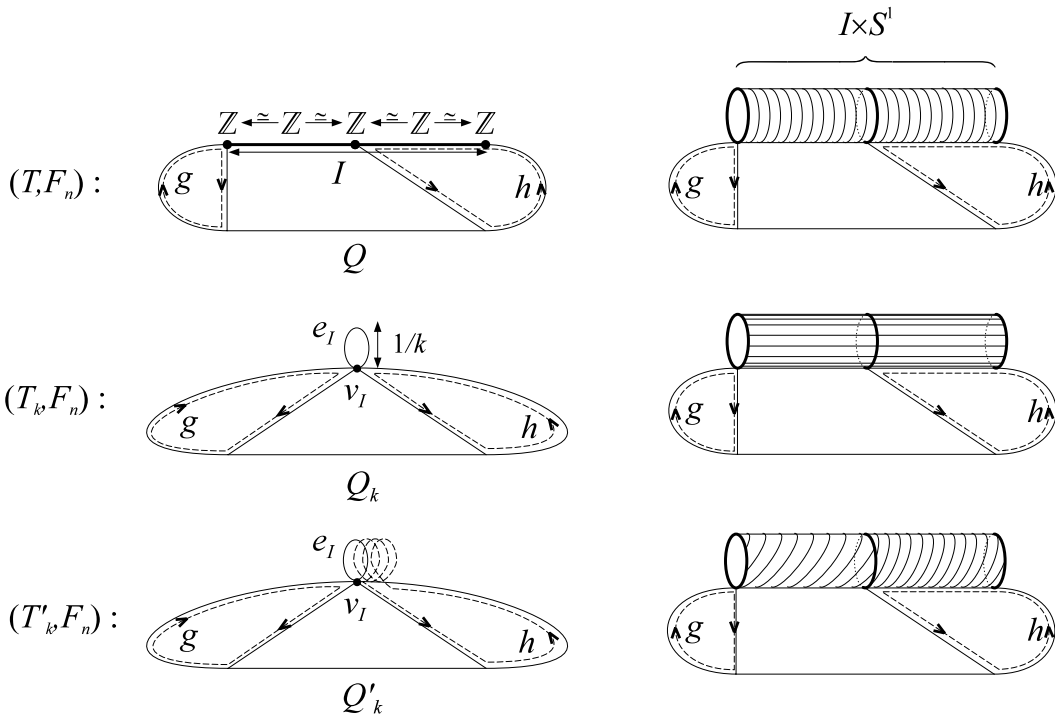


FIG. 5.17 – Twist de Dehn

Pour construire l'espace  $X_Q$  dont le groupe fondamental est le groupe fondamental du graphe de groupes  $Q$ , on peut partir du graphe sous-jacent à  $Q$  puis recoller un bouquet de  $p$  cercles sur les sommets de  $Q$  dont le groupe est isomorphe à  $F_p$ , et



un cylindre le long de  $I$ . Considérons le feuilletage transversalement mesuré sur  $X_Q$  qui donne à  $Q$  sa métrique, pour laquelle les arêtes recollées sont incluses dans une feuille et le cylindre est feuilleté par  $\{*\} \times S^1$ . L'action  $(T, F_n)$  peut alors être vue comme l'espace des feuilles du revêtement universel de  $X_Q$ .

Soit  $(T', F_n)$  l'action obtenue en écrasant en un point les composantes connexes de l'image réciproque de  $I$  dans  $T$ , et  $Q' = T'/F_n$  son graphe de groupes quotient. On obtient  $Q'$  à partir de  $Q$  en écrasant  $I$  en un point  $v_I$ , et le groupe  $\Gamma_I$  attaché à  $v_I$  est le groupe fondamental de  $I$  en tant que graphe de groupes. Considérons le graphe d'actions défini à partir de  $Q'$  en associant à  $v_I$  l'action de  $\Gamma_I$  sur  $\mathbb{R}$  par translations de sorte qu'un générateur de  $\Gamma_I$  agisse par la translation de longueur  $1/k$ , et en choisissant le même point de recollement  $p_e \in \mathbb{R}$  pour toutes les arêtes orientées incidentes sur  $v_I$  (on met l'action triviale sur tous les autres sommets). On obtient ainsi l'action  $(T_k, F_n)$  du théorème. On note  $Q_k$  son graphe de groupes quotient marqué. Ce graphe est obtenu à partir de  $Q'$  en rajoutant une arête de longueur  $1/k$  dont les deux extrémités sont en  $v_I$ .

Un autre moyen de visualiser l'action  $(T_k, F_n)$  consiste à changer le feuilletage du cylindre par un feuilletage  $I \times \{*\}$  pour lequel  $S^1$  a pour mesure transverse  $1/k$ .

Notons  $l(e)$  la longueur de chaque arête  $e$  de  $I$  et choisissons pour chaque arête  $e$  une suite d'entiers  $p_k(e) > 0$  telle que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_k(e)}{k} = l(e)$ . On choisit alors une orientation des arêtes de  $I$  de sorte qu'un des parcours de  $I$  soit bien orienté, et on considère le twist de Dehn  $D_k$  qui fait  $p_k(e)$  tours sur chaque arête  $e$ . Le théorème d'approximation dit alors que l'action  $(T'_k, F_n) = (T_k, F_n).D_k$  converge vers  $(T, F_n)$  quand  $k$  tend vers l'infini.

Une autre façon plus géométrique de voir  $(T'_k, F_n)$  consiste à faire agir sur le feuilletage du cylindre l'inverse de l'homéomorphisme correspondant à  $D_k$  puis à prendre l'espace des feuilles du revêtement universel du 2-complexe obtenu (voir figure 5.17).

Soient  $e_1$  et  $e_2$  deux arêtes orientées issues de  $v_I$  et telles que les arêtes correspondantes dans  $Q$  n'aient pas la même origine dans  $I$ . On note  $Q'_k = T'_k/F_n$  le graphe de groupes obtenu en changeant le marquage de  $Q_k$  par l'automorphisme  $D_k$ . On peut alors voir que si  $g$  est un élément hyperbolique dans  $(T, F_n)$ , alors pour  $k$  assez grand, la projection de l'axe de  $g$  dans  $Q'_k$  ne passe jamais consécutivement de  $\bar{e}_1$  à  $e_2$  ou de  $\bar{e}_2$  à  $e_1$  (où  $\bar{e}$  note l'arête ayant l'orientation opposée à celle de  $e$ ). Nous utiliserons ce fait dans la démonstration du lemme de pliage pour les stabilisateurs d'arête.

**Lemme de pliage 5.2.8 pour les stabilisateurs d'arête.** Soit  $(T, F_n)$  une action très petite simpliciale appartenant à  $\mathcal{F}_n$ , et  $Q = T/F_n$  son graphe de groupes quotient. On suppose qu'il n'y a qu'une composante  $I$  du graphe  $Q \setminus \text{triv}(Q)$  qui n'est pas réduite à un point, et on suppose que le groupe fondamental de  $I$ , en tant que graphe de groupes est cyclique ( $I$  est un intervalle dans ce cas, et on est dans la situation de l'illustration du théorème d'approximation).

On prend toutes les notations de l'illustration du théorème d'approximations. En particulier, soit  $(T'_k, F_n)$  la suite d'actions qu'on y construit et  $Q'_k = T'_k/F_n$  leurs graphes de groupes quotient marqués. On se donne deux chemins  $\bar{\alpha}$  et  $\bar{\beta}$  dans  $Q'_k \setminus e_I$  issus de  $v_I$ , et on choisit des relevés  $\alpha^{(k)}$  et  $\beta^{(k)}$  de  $\bar{\alpha}$  et  $\bar{\beta}$  issus du même point de  $T'_k$ . On suppose que  $\alpha^{(k)}$  et  $\beta^{(k)}$  vérifient l'hypothèse (H), et que lorsqu'on plie  $\alpha^{(k)}$  sur  $\beta^{(k)}$  dans  $T_k$ , les pliages intermédiaires se font entre des arêtes dont le stabilisateur est trivial. Notons  $e_\alpha$  (resp.  $e_\beta$ ) la première arête orientée de  $Q'_k$  parcourue par  $\bar{\alpha}$  (resp.  $\bar{\beta}$ ). On suppose que les arêtes correspondant à  $e_\alpha$  et  $e_\beta$  dans  $Q$  n'ont pas la même origine dans  $I$  (voir figure 5.18)

Notons  $(T^{(k)}, F_n)$  l'action obtenue en pliant  $(T'_k, F_n)$  le long de  $\alpha^{(k)}$  et  $\beta^{(k)}$ . Alors,  $(T^{(k)}, F_n)$  tend vers  $(T, F_n)$  quand  $k$  tend vers l'infini.

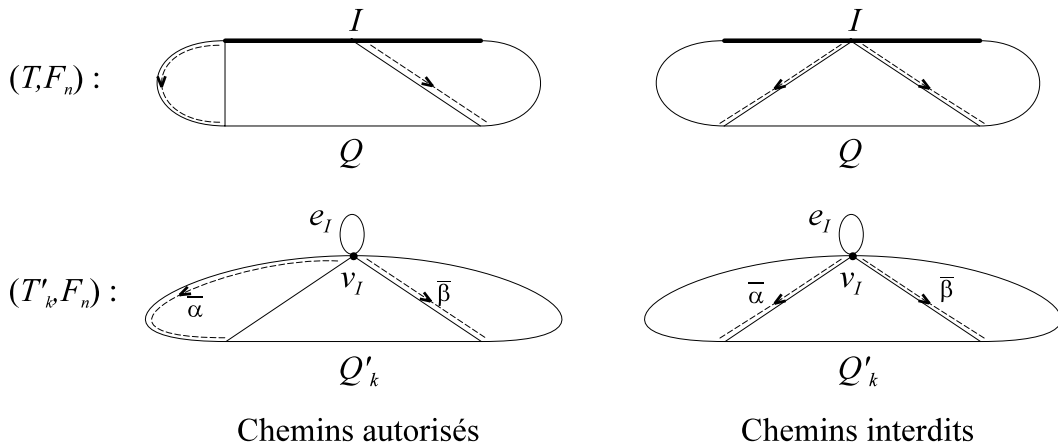


FIG. 5.18 –

*Preuve.* On montre la convergence pour la topologie des fonctions longueurs. On sait que  $(T'_k, F_n)$  converge vers  $(T, F_n)$  d'après le théorème d'approximation.

Supposons que  $g \in F_n$  soit elliptique dans  $T$ . Alors, sa longueur de translation dans  $(T'_k, F_n)$  tend vers 0, et comme un pliage diminue les longueurs,  $l_{T^{(k)}}(g) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ .

Si  $g \in F_n$  est hyperbolique dans  $T$ , on a vu que pour  $k$  assez grand, son axe dans  $(T'_k, F_n)$  a une projection dans  $Q'_k$  qui ne passe jamais consécutivement de  $\bar{e}_\alpha$  à  $e_\beta$  ou de  $\bar{e}_\beta$  à  $e_\alpha$ . Ceci implique que deux arêtes consécutives de l'axe de  $g$  dans  $(T'_k, F_n)$  ne sont pas identifiées par le premier pliage intermédiaire dans le recollement de  $\alpha^{(k)}$  le long de  $\beta^{(k)}$ . Le lemme 5.2.6 conclut alors que l'axe de  $g$  dans  $(T'_k, F_n)$  se plonge isométriquement dans  $T^{(k)}$  via l'application de pliage. Par conséquent, la longueur de translation de  $g$  dans  $T^{(k)}$  est la même que dans  $(T'_k, F_n)$  pour  $k$  assez grand.  $\square$

### 5.2.3 Démonstration du théorème 5.2.1

Pour démontrer le théorème 5.2.1, nous allons dans un premier temps approximer  $(T, F_n)$  par une action simpliciale appartenant à  $\mathcal{F}_n$  sans stabilisateur d'arête et dont le graphe quotient est un arbre. On pourra alors approximer cette action par une action dont aucun des stabilisateurs d'arêtes n'est trivial, avec un certain contrôle sur ces stabilisateurs d'arêtes qui permettra de conclure en appliquant le théorème d'approximation.

#### Première étape : approximer pour se débarrasser des composantes de $Q \setminus \text{triv}(Q)$ dont le groupe fondamental n'est pas cyclique

**Proposition 5.2.9.** *Toute action simpliciale  $(T, F_n)$  appartenant à  $\mathcal{F}_n$  peut être approximée par une action simpliciale  $(T', F_n)$  appartenant à  $\mathcal{F}_n$  telle que toutes les composantes de  $(T'/F_n) \setminus \text{triv}(T'/F_n)$  ont un groupe fondamental cyclique en tant que graphes de groupes.*

*On peut en outre supposer que  $(T'/F_n) \setminus \text{triv}(T'/F_n)$  possède au plus une composante qui n'est pas réduite à un point.*

*Remarque.* Si une action simpliciale très petite est telle que toutes les composantes de  $Q \setminus \text{triv}(Q)$  ont un groupe fondamental cyclique en tant que graphes de groupes alors tous les sommets de  $Q$  ont un groupe cyclique, et les composantes de  $Q \setminus \text{triv}(Q)$  non réduites à un point sont des segments. De plus, pour les arêtes dont le groupe est non trivial, les morphismes d'arêtes sont des isomorphismes.

*Démonstration de la proposition.* Considérons la réunion  $A$  des composantes de  $Q \setminus \text{triv}(Q)$  dont le groupe fondamental n'est pas cyclique. Soit  $A_0$  une composante de  $A$ ,

$\Gamma_{A_0}$  le groupe fondamental de  $A_0$  et  $m \geq 2$  le rang du groupe libre  $\Gamma_{A_0}$ . Considérons une action  $(T'_{A_0}, \Gamma_{A_0})$  dont le graphe de groupes quotient est un bouquet de  $m - 1$  cercles, dont les groupes d'arêtes sont triviaux et le groupe du sommet est infini cyclique.

Pour pouvoir appliquer le théorème d'approximation de M. Cohen et M. Lustig, il faut que les éléments des groupes d'arêtes de  $A_0$  soient hyperboliques dans  $T_{A_0}$ . Nous utilisons pour cela le lemme suivant que nous démontrerons plus tard.

**Lemme 5.2.10.** *Soit  $g_1, \dots, g_k$  un ensemble fini d'éléments de  $\Gamma_{A_0}$ . Pour une action  $(T'_{A_0}, \Gamma_{A_0})$  comme au dessus, il existe un automorphisme  $\varphi$  de  $\Gamma_{A_0}$  tel que  $g_1, \dots, g_k$  soient hyperboliques dans  $(T'_{A_0}, \Gamma_{A_0}) \cdot \varphi$ .*

Choisissons  $g_1, \dots, g_k$  des représentants des classes de conjugaison des générateurs des groupes d'arête de  $A_0$  et soit  $\varphi$  comme dans la conclusion du lemme. Soit  $(T_{A_0}, \Gamma_{A_0}) = (T'_{A_0}, \Gamma_{A_0}) \cdot \varphi$  et considérons  $(T'_k, F_n)$  les actions construites dans le théorème d'approximation à partir de  $(T_{A_0}, \Gamma_{A_0})$ . L'action  $(T'_k, F_n)$  est simpliciale, et appartient à  $\mathcal{F}_n$  puisqu'il existe un sommet qui n'est pas terminal dans  $T'_k/F_n$  et dont le groupe est non trivial. On conclut grâce au théorème d'approximation :  $(T'_k, F_n)$  est une approximation de  $(T, F_n)$ .

Supposons maintenant que  $(T, F_n)$  soit telle que toutes les composantes de  $Q \setminus \text{triv}(Q)$  aient un groupe fondamental cyclique (en tant que graphes de groupes). Si plusieurs de ces composantes sont non réduites à un point, on applique à nouveau le théorème d'approximation. On considère  $A$  la réunion de toutes les composantes de  $Q \setminus \text{triv}(Q)$  non réduites à un point sauf une. Pour chacune de ces composantes, on considère une action simpliciale libre du groupe fondamental (cyclique) de la composante en question (sur une droite par exemple). Comme on garde de cette manière un stabilisateur d'arête non trivial, on est sûr que l'action approximante obtenue grâce au théorème d'approximation appartient à  $\mathcal{F}_n$ .  $\square$

*Preuve du lemme 5.2.10.* Considérons la base  $\langle a_1, \dots, a_m \rangle$  de  $\Gamma_{A_0}$  où  $a_i$  est représenté par le lacet correspondant à la  $i$ -ème arête pour  $i = 1, \dots, m - 1$ , et par un générateur du groupe du sommet pour  $i = m$ . L'ensemble des éléments de  $\Gamma_{A_0}$  qui sont elliptiques dans  $T'_{A_0}$  est alors l'ensemble des conjugués des puissances de  $a_m$ .

Considérons l'automorphisme  $\psi$  de  $\Gamma_{A_0}$  qui fixe  $a_1, \dots, a_{m-1}$  et qui envoie  $a_m$  sur  $a_m a_1$ . Il est facile de voir que pour tout  $g \in \Gamma_{A_0}$ , il existe au plus un entier  $p$  tel que  $\psi^p(g)$  soit conjugué à une puissance de  $a_m$ . Il suffit alors de prendre  $\varphi = \psi^p$  pour  $p$  assez grand.  $\square$

**Deuxième étape : approximer  $T$  par une action dont le graphe quotient est un arbre**

**Proposition 5.2.11.** *Pour  $n \geq 3$ , toute action simpliciale  $(T, F_n)$  appartenant à  $\mathcal{F}_n$  peut être approximée par une action simpliciale  $(T', F_n)$  telle que*

- $T'$  a des stabilisateurs d'arête triviaux
- le graphe quotient  $T'/F_n$  est un arbre
- $(T', F_n)$  appartient à  $\mathcal{F}_n$ .

Cette proposition généralise le phénomène qui est arrivé au second candidat au statut d'ouvert invariant dans la section précédente. Puisque les stabilisateurs de  $T'$  sont triviaux, la condition  $(T', F_n) \in \mathcal{F}_n$  revient à dire que  $T'/F_n$  possède un groupe non trivial en un sommet qui n'est pas terminal, ou un groupe non cyclique en un sommet terminal.

*Preuve.* D'après la proposition 5.2.9, on peut supposer que les composantes connexes de  $(T/F_n) \setminus \text{triv}(T/F_n)$  ont un groupe fondamental cyclique en tant que graphe de groupes, et soit que  $(T, F_n)$  a des stabilisateurs d'arêtes triviaux, soit que la seule composante de  $(T/F_n) \setminus \text{triv}(T/F_n)$  qui n'est pas réduite à un point est un intervalle  $I$ .

Pour commencer, on approxime  $T$  en changeant de manière équivariante la longueur de ses arêtes pour faire en sorte qu'elles soient toutes rationnelles. On peut alors multiplier la métrique par un entier, et subdiviser  $T$  de sorte que toutes les arêtes aient une longueur égale à 1.

On fait d'abord la démonstration dans le cas où  $T$  n'a pas de stabilisateur d'arête, la démonstration dans le cas contraire utilisant les mêmes techniques. Soit donc une action  $(T, F_n)$  appartenant à  $\mathcal{F}_n$ , dont les stabilisateurs d'arêtes sont triviaux et les stabilisateurs de sommets cycliques. Il existe un sommet  $x$  de  $T$  dont le stabilisateur est non trivial et dont la projection  $\bar{x}$  dans  $Q = T/F_n$  n'est pas un sommet terminal.

L'idée est de choisir des chemins  $\alpha$  et  $\beta$  issus de  $x$  dans  $T$ , de considérer une suite  $w_k$  d'éléments distincts de  $\text{Stab } x$ , et d'approximer  $T$  en pliant ensemble les chemins  $\alpha$  et  $w_k.\beta$  issus de  $x$  grâce lemme de pliage 5.2.7. Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont bien choisis, les conditions requises pour appliquer le lemme de pliage seront remplies, et l'approximation  $(T^{(k)}, F_n)$  de  $(T, F_n)$  obtenue en pliant  $\alpha$  le long de  $w_k.\beta$  aura les mêmes propriétés que  $(T, F_n)$  et on pourra donc itérer cette opération et raisonner par récurrence sur le nombre d'arêtes.

Précisément, l'hypothèse de récurrence est qu'on sait démontrer la proposition pour toute action  $(T', F_n)$  simpliciale telle que

- $T'/F_n$  a strictement moins d'arêtes que  $T/F_n$
- les longueurs des arêtes de  $T'$  sont égales à 1
- les stabilisateurs d'arêtes de  $(T', F_n)$  sont triviaux
- il existe un sommet non terminal  $\bar{x}$  de  $Q' = T'/F_n$  dont le groupe est non trivial.

On considère une suite  $w_k$  d'éléments distincts du stabilisateur de  $x$ . Le lemme suivant donne des conditions pour trouver des chemins à plier convenables. Pour nous, un chemin infini sera un chemin infini d'un seul côté.

**Lemme 5.2.12.** *Soient  $\alpha = \alpha_1\alpha_2\dots$  et  $\beta = \beta_1\beta_2\dots$  deux chemins finis ou infinis dans  $T$  issus d'un même sommet  $x$  tels qu'il existe une orientation équivariante des arêtes de  $T$  de sorte que  $\alpha$  et  $\beta$  soient bien orientés. On suppose que toutes les arêtes  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  traversées par  $\alpha$  et  $\beta$  ont un stabilisateur trivial et que  $\alpha_1$  et  $\beta_1$  ne sont pas dans la même orbite. On suppose enfin qu'au moins l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :*

1.  $\alpha$  et  $\beta$  sont infinis
2.  $\alpha$  est strictement plus long que  $\beta$  et le sommet terminal de  $\beta$  (distinct de  $x$ ) a un stabilisateur non trivial.

Alors, il existe des restrictions  $\alpha'$  et  $\beta'$  de  $\alpha$  et  $\beta$  satisfaisant l'hypothèse (H) et telles que pour tout indice  $k$ ,

1. l'action  $(T^{(k)}, F_n)$  obtenue en pliant  $\alpha$  le long de  $w_k \cdot \beta$  possède un sommet ayant un stabilisateur non trivial et dont la projection dans  $Q^{(k)} = T^{(k)}/F_n$  n'est pas un sommet terminal
2. tout les pliages intermédiaires se font entre des arêtes appartenant à des orbites différentes et dont le stabilisateur est trivial.

*Remarque.* Le deuxième point de la conclusion de ce lemme montre qu'il n'y a pas création de nouveau stabilisateur d'arête. En particulier, si tous les stabilisateurs d'arêtes de  $T$  sont triviaux,  $T^{(k)}$  est aussi à stabilisateurs d'arêtes triviaux.

*Démonstration du lemme 5.2.12.* On note  $T_i^{(k)}$  l'arbre obtenu après le  $i$ -ème pliage élémentaire de  $\alpha$  le long de  $w_k \cdot \beta$ ,  $Q_i^{(k)} = T_i^{(k)}/F_n$ ,  $q_i : T \rightarrow T_i^{(k)}$  l'application de pliage et  $\bar{q}_i^{(k)} : Q \rightarrow Q_i^{(k)}$  l'application induite au niveau des graphes quotient.

On commence par une remarque : si pour  $i > 1$ , les arêtes  $q_{i-1}(\alpha_i)$  et  $q_{i-1}(w_k \cdot \beta_i) \subset T_{i-1}^{(k)}$  qui définissent le  $i$ -ème pliage élémentaire sont dans la même

orbite, alors le sommet commun  $x_i$  de ces deux arêtes a un stabilisateur non trivial et sa projection  $\bar{x}_{i-1}$  dans  $Q_{i-1}^{(k)}$  n'est pas un sommet terminal. En effet,  $x_{i-1}$  n'est pas terminal car il appartient à l'intérieur du segment  $q_{i-1}(\alpha_{i-1} \cup \alpha_i)$  qui est bien orienté et dont la projection dans  $Q_{i-1}^{(k)}$  est par conséquent immergée. De plus, un élément de  $F_n$  qui envoie  $q_{i-1}(\alpha_i)$  sur  $q_{i-1}(w_k \cdot \beta_i)$  fixe  $x_{i-1}$  car ces deux arêtes ont une orientation centrifuge.

Le fait que  $q_{i-1}(\alpha_i)$  et  $q_{i-1}(w_k \cdot \beta_i)$  soient dans la même orbite est indépendant du choix de  $w_k$  car un pliage de deux chemins  $\alpha$  et  $\beta$  est le quotient par la plus petite relation d'équivalence équivariante qui identifie  $\alpha$  et  $\beta$ .

Par conséquent, s'il existe un indice  $i$  tel que  $q_{i-1}(\alpha_i)$  et  $q_{i-1}(w_k \cdot \beta_i)$  soient dans la même orbite, on peut considérer le plus petit indice  $i_0$  qui vérifie cette condition ( $i_0 > 1$ ) et prendre pour  $\alpha'$  et  $\beta'$  la restriction de  $\alpha$  et  $\beta$  aux  $i_0 - 1$  premières arêtes.

Dans le cas où pour tout  $i$ ,  $q_{i-1}(\alpha_i)$  et  $q_{i-1}(w_k \cdot \beta_i)$  ne sont pas dans la même orbite, chaque pliage intermédiaire fait strictement diminuer le nombre d'arêtes du graphe quotient, ce qui est donc impossible dans le cas où  $\alpha$  et  $\beta$  sont tous deux infinis. Sous la deuxième hypothèse, on prend  $\beta' = \beta$  et  $\alpha'$  la restriction de  $\alpha$  de même longueur que  $\beta$ . Il suffit de montrer que l'image dans  $T^{(k)}$  du sommet terminal de  $\beta$  n'est pas terminal (puisque par hypothèse son stabilisateur n'est pas trivial). Mais ceci provient du fait qu'il est contenu dans l'intérieur du segment  $q_l^{(k)}(\alpha_l \cup \alpha_{l+1})$  qui est bien orienté.  $\square$

On se donne une action  $(T, F_n)$  telle que les longueurs de toutes ses arêtes sont entières, à stabilisateurs d'arêtes triviaux, et possédant un sommet  $x \in T$  dont le stabilisateur est non trivial et dont la projection dans le graphe quotient  $T/F_n$  n'est pas un sommet terminal. On veut approximer  $(T, F_n)$  grâce au lemme de pliage 5.2.7 par une action simpliciale  $(T', F_n)$  vérifiant l'hypothèse de récurrence ou la conclusion de la proposition.

Pour appliquer le lemme 5.2.12, il suffit de trouver un chemin infini  $\bar{\alpha}$  dans  $Q = T/F_n$ , bien orienté pour une orientation des arêtes de  $Q$  traversées par  $\bar{\alpha}$ , et tel qu'il y ait une arête  $\bar{e}$  d'origine  $\bar{x}$  qui n'est pas traversée par  $\bar{\alpha}$ . En effet, on peut alors construire un chemin bien orienté  $\bar{\beta}$  qui part de  $\bar{x}$  en suivant l'arête  $\bar{e}$  et qui soit est infini, soit vérifie que le groupe de son extrémité différente de  $\bar{x}$  est non trivial. Il suffit en effet de prendre  $\bar{\beta}_1 = \bar{e}$ , de définir l'orientation de  $\beta_1$  pour que  $\bar{\beta}$  soit bien orienté, puis de prolonger  $\bar{\beta}$  indifféremment en suivant l'orientation des arêtes déjà traversées par  $\alpha$  et  $\beta$ . La seule situation dans laquelle on ne peut pas prolonger  $\bar{\beta}$  est lorsque  $\bar{\beta}$  arrive à un sommet terminal de  $Q$ . Mais par minimalité,

le stabilisateur de ce sommet est forcément non trivial. Des relevés  $\alpha$  et  $\beta$  de  $\bar{\alpha}$  et  $\bar{\beta}$  satisfont alors aux hypothèses du lemme 5.2.12.

Ainsi, si on trouve un chemin infini  $\bar{\alpha}$  dans  $Q = T/F_n$ , bien orienté tel qu'il y ait une arête  $\bar{e}$  d'origine  $\bar{x}$  qui n'est pas traversée par  $\bar{\alpha}$ , le lemme 5.2.12 appliqué à des chemins  $\alpha$  et  $\beta$  comme au-dessus fournira des chemins  $\alpha'$  et  $\beta'$  auquel on peut appliquer le lemme de pliage, et ainsi approximer  $(T, F_n)$  par une action  $(T^{(k)}, F_n)$  dont le graphe quotient possède un sommet non terminal dont le groupe est non trivial, dont les arêtes ont longueur 1 et ont un stabilisateur trivial. Comme  $T^{(k)}/F_n$  a strictement moins d'arêtes que  $T/F_n$ , on pourra appliquer l'hypothèse de récurrence à  $(T^{(k)}, F_n)$ .

Il nous reste donc à faire un petit raisonnement sur les graphes pour voir dans quels cas on peut trouver un chemin infini  $\bar{\alpha}$  bien orienté qui ne passe pas par toutes les arêtes de  $Q$ , et à trouver une autre forme de pliage dans les autres cas.

On suppose que  $Q$  n'est pas un arbre car sinon, la proposition est démontrée. En particulier, il existe un cercle  $C$  plongé dans  $Q$ . S'il existe un cercle plongé  $C$  ne contenant pas  $\bar{x}$ , on peut toujours trouver un chemin infini qui ne passe pas par toutes les arêtes adjacentes à  $\bar{x}$ . En effet, il suffit de prendre pour  $\bar{\alpha}$  le chemin qui suit un arc simple dans  $Q$  reliant  $\bar{x}$  à  $C$  avant de tourner indéfiniment autour de  $C$ . Si  $\bar{x}$  est de valence au moins trois dans  $Q$ , on peut prendre pour  $\bar{\alpha}$  un chemin qui tourne indéfiniment autour de  $C$ .

Il nous reste donc à étudier le cas où  $\bar{x}$  est de valence 2 dans  $Q$  et où tout cercle plongé dans  $Q$  passe par  $\bar{x}$ . Ceci n'arrive que lorsque  $Q$  a le type d'homotopie du cercle, et que  $Q \setminus \{\bar{x}\}$  est connexe. Dans ce cas,  $\bar{x}$  appartient à l'unique cercle plongé  $C$  de  $Q$ .

Supposons d'abord qu'il y ait un sommet  $\bar{u} \neq \bar{x}$  dans  $Q$  dont le stabilisateur soit non trivial et tel que les longueurs des deux arcs simples  $\bar{\alpha}$  et  $\bar{\beta}$  de  $Q$  reliant  $\bar{x}$  à  $\bar{u}$  soient distinctes. Comme il existe une orientation des arêtes telles que  $\bar{\alpha}$  et  $\bar{\beta}$  soient bien orientés, la deuxième hypothèse du lemme 5.2.12 s'applique à des relevés  $\alpha$  et  $\beta$  issus de  $x$  et fournit des chemins  $\alpha'$  et  $\beta'$ . Le lemme de pliage 5.2.7 permet alors de conclure comme précédemment.

Dans le cas où les longueurs de  $\bar{\alpha}$  et  $\bar{\beta}$  sont égales, ces chemins se rejoignent au point  $\bar{v}$  antipodal à  $\bar{x}$  dans  $C$ . Notons  $\bar{\alpha}'$  (resp.  $\bar{\beta}'$ ) l'intersection de  $\bar{\alpha}$  (resp.  $\bar{\beta}$ ) avec  $C$ . On considère  $\alpha'$  et  $\beta'$  deux relevés issus de  $x$  de  $\bar{\alpha}'$  et  $\bar{\beta}'$ . Le pliage de  $\alpha'$  le long de



$w_k.\beta'$  rentre dans le cadre de l'exemple du pliage de deux demi-cercles (page 146). En particulier, tous les pliages intermédiaires se font entre des arêtes dont le stabilisateur est trivial. L'action  $(T^{(k)}, F_n)$  obtenue a des stabilisateurs d'arête triviaux, c'est une approximation de  $(T, F_n)$  grâce au lemme de pliage 5.2.7, et  $Q^{(k)}$  est un arbre.

Dans le cas où  $\bar{u} \neq \bar{v}$ , cela signifie que dans  $Q$ , le point  $\bar{v}$  est de valence au moins 3 et que  $\bar{q}^{(k)}(\bar{v})$  n'est pas un sommet terminal de  $Q^{(k)}$ . On note  $v_a$  et  $v_b = h.v_a$  les extrémités distinctes de  $x$  de  $\alpha'$  et  $\beta'$ . Comme le stabilisateur de  $q^{(k)}(v_a) = q^{(k)}(w_k.v_b)$  est non trivial, l'action  $(T^{(k)}, F_n)$  appartient à  $\mathcal{F}_n$  et satisfait donc à la conclusion de la proposition. Dans le cas où  $\bar{u} = \bar{v}$ , le fait que le groupe de  $\bar{u}$  est non trivial implique que le groupe de  $\bar{q}^{(k)}(\bar{u})$  n'est pas cyclique car il contient  $w_k.h$  et le stabilisateur de  $v_a$ . Dans ce cas aussi  $(T^{(k)}, F_n)$  appartient à  $\mathcal{F}_n$  et satisfait à la conclusion de la proposition.

Il reste à étudier le cas où  $\bar{x}$  est le seul sommet de  $Q$  dont le groupe est non trivial. Mais alors, par minimalité,  $Q$  est un cercle, et le stabilisateur de  $x$  est un groupe libre de rang  $n - 1$ . Il n'est donc pas cyclique dès que  $n \geq 3$ . On considère alors  $\bar{v}$  l'antipode de  $\bar{x}$  dans  $Q$  (quitte à subdiviser  $Q$  contient un nombre impair d'arêtes) et on prend  $\bar{\alpha}$  et  $\bar{\beta}$  les deux arcs simples dans  $Q$  joignant  $\bar{x}$  à  $\bar{v}$ . Soient  $\alpha$  et  $\beta$  des relevés de  $\bar{\alpha}$  et  $\bar{\beta}$  issus de  $x$ . Le pliage de  $\alpha$  le long de  $w_k.\beta$  correspond au pliage de deux demi-cercles. Tous les pliages intermédiaires se font entre des arêtes dont le stabilisateur est trivial, et l'action  $(T^{(k)}, F_n)$  obtenue a pour graphe quotient un segment. Le stabilisateur de  $q^{(k)}(x)$  est isomorphe à  $F_{n-1}$  et celui de  $q^{(k)}(v_a)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ . Le lemme de pliage 5.2.7 montre que  $(T^{(k)}, F_n)$  est une approximation de  $(T, F_n)$ . Elle satisfait à la conclusion de la proposition.

Ceci démontre donc la proposition dans le cas où  $(T, F_n)$  a des stabilisateurs d'arêtes triviaux.

**Lorsque les stabilisateurs d'arêtes de  $(T, F_n)$  ne sont pas tous triviaux.** On utilise le lemme de pliage 5.2.8 pour les stabilisateurs d'arête au lieu du lemme de pliage 5.2.7 standard. On a vu qu'on pouvait supposer que  $Q \setminus \text{triv}(Q)$  a une unique composante non réduite à un point et que cette composante est un intervalle  $I$ . On considère une approximation  $(T'_k, F_n)$  de  $(T, F_n)$  construite comme dans l'illustration du théorème d'approximation. On va choisir des chemins  $\bar{\alpha}$  et  $\bar{\beta}$  issus de  $v_I$  dans  $Q'_k \setminus e_I$ , et qui commencent par des arêtes  $e_\alpha$  et  $e_\beta$  telles que les arêtes correspondantes dans  $Q$  ont des origines distinctes.

On distingue les mêmes cas et on les traite de la même façon en remplaçant le graphe  $Q$  par  $Q'_k \setminus e_I$  et  $\bar{x}$  par  $v_I$ , mais il faut traiter le cas supplémentaire où  $Q$  est un arbre. Par minimalité,  $I$  ne contient pas de point terminal de  $Q$ . On prend alors  $\bar{s}_\alpha$  et  $\bar{s}_\beta$  deux sommets terminaux de  $Q_k$  appartenant à deux composantes connexes distinctes de  $Q'_k \setminus \{v_I\}$  telles que les composantes correspondantes de  $Q \setminus I$  ne soient pas adjacentes dans  $Q$  (on impose que leurs adhérences ne s'intersectent pas). Soit  $\bar{\alpha}$  (resp.  $\bar{\beta}$ ) l'arc de  $Q'_k$  reliant  $v_I$  à  $s_\alpha$  (resp.  $s_\beta$ ), où on tronque le plus long de ces deux chemins pour faire en sorte qu'ils aient la même longueur. On considère  $\alpha$  et  $\beta$  des relevés de  $\bar{\alpha}$  et  $\bar{\beta}$  issus de  $x$ .

Lorsqu'on plie  $\alpha$  le long de  $w_k.\beta$ , on est dans le cadre du pliage de deux segments adjacents. Les pliages intermédiaires se font entre des arêtes dont les stabilisateurs sont triviaux et n'appartenant pas à la même orbite. Grâce au lemme de pliage pour les stabilisateurs d'arête, on obtient ainsi une approximation de  $(T^{(k)}, F_n)$  de  $(T, F_n)$ . Les stabilisateurs d'arêtes de  $(T^{(k)}, F_n)$  sont triviaux, et son graphe de groupes quotient est un arbre possédant un sommet non terminal dont le groupe n'est pas trivial (lorsque  $d(v_I, \bar{s}_\alpha) \neq d(v_I, \bar{s}_\beta)$ ) ou un sommet terminal dont le groupe n'est pas cyclique (lorsque  $d(v_I, s_\alpha) = d(v_I, s_\beta)$ ). Cette action satisfait donc la conclusion de la proposition.  $\square$

### Troisième étape : Approximer $T$ par une action sans stabilisateur d'arête trivial

**Proposition 5.2.13.** *Soit  $n \geq 3$  et soit  $(T, F_n)$  une action simpliciale appartenant à  $\mathcal{F}_n$ . On peut alors approximer  $(T, F_n)$  par une action simpliciale très petite  $(T', F_n)$  appartenant à  $\mathcal{F}_n$  telle que toute arête possède un stabilisateur non trivial, et telle qu'il existe une base  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  de  $F_n$  telle que pour tout élément  $g$  fixant une arête dans  $T'$ ,  $g$  ou  $g^{-1}$  soit conjugué à un mot positif de cette base (c'est à dire où n'apparaissent pas les lettres  $a_i^{-1}$ ).*

Cette proposition est la généralisation du phénomène qui est apparu dans l'étude du premier candidat au statut d'ouvert invariant.

*Preuve.* Grâce à la proposition 5.2.11, on peut supposer que le graphe  $Q = T/F_n$  est un arbre et que  $T$  est à stabilisateurs d'arêtes triviaux. Là encore, quitte à approximer les longueurs des arêtes de  $T$  par des longueurs rationnelles, à multiplier la métrique et à subdiviser  $T$ , on peut supposer que les longueurs de toutes les arêtes sont égales à 1.

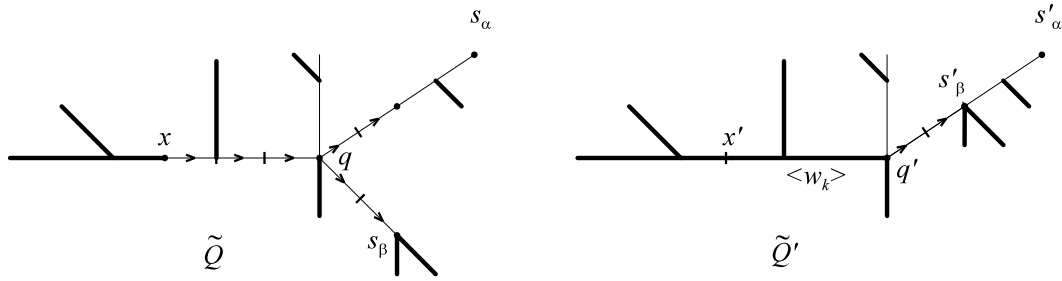
On va alors raisonner par récurrence sur le nombre d'arêtes de  $Q = T/F_n$  dont le stabilisateur est trivial. On rappelle que  $\text{triv}(Q)$  note la réunion des arêtes ouvertes dont le stabilisateur est trivial. L'hypothèse de récurrence est qu'on sait démontrer la proposition pour toute action  $(T', F_n)$  dont le graphe de groupes quotient  $Q'$  a strictement moins d'arêtes que  $Q$ , dont les longueurs des arêtes sont égales à 1 et telles que

- $(T', F_n)$  est une action très petite dont le graphe quotient est un arbre,
- $\text{triv}(Q')$  est connexe
- $\text{triv}(Q')$  contient un sommet terminal dont le groupe n'est pas cyclique ou un sommet non terminal dont le groupe est non trivial
- il existe une base  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  de  $F_n$  et un relevé  $\tilde{Q}'$  de  $Q'$  tels que
  - $a_i$  fixe un point de  $\tilde{Q}'$
  - pour tout point  $x \in \tilde{Q}' \setminus \text{triv}(\tilde{Q}')$ , ( $x$  n'est pas forcément un sommet),  $\text{Stab } x$  est engendré par des mots positifs en les générateurs  $a_i$  qui fixent un point dans la composante de  $\tilde{Q}' \setminus \text{triv}(\tilde{Q}')$  contenant  $x$ .

Bien sûr, l'action  $(T, F_n)$  de laquelle on part vérifie ces quatre conditions. Pour démontrer la dernière, il suffit de choisir un relevé  $\tilde{Q}$  de  $Q$ , de prendre une base de tous les stabilisateurs des sommets de  $\tilde{Q}$ , et de considérer la base  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  de  $F_n$  obtenue en prenant la réunion des bases choisies pour chaque stabilisateur de sommet. Dans cette preuve, on va à nouveau définir des chemins  $\alpha$  et  $\beta$  de  $T$  de façon à pouvoir appliquer le lemme de pliage 5.2.7. On distingue deux cas.

**Premier cas :**  $\overline{\text{triv}(Q)}$  possède un sommet terminal  $\bar{x}$  dont le groupe n'est pas cyclique (Voir figure 5.19 où on a représenté en gras les arêtes ayant un stabilisateur non trivial). Soit  $x$  le relevé de  $\bar{x}$  dans  $\tilde{Q}$ , et soient  $s_\alpha$  et  $s_\beta$  deux sommets terminaux de  $\text{triv}(\tilde{Q})$  distincts de  $x$ , et soient  $\alpha$  et  $\beta$  les chemins joignant  $x$  à  $s_\alpha$  et  $s_\beta$ . Pour que  $\overline{\text{triv}(Q)}$  reste connexe après pliage, on impose que  $|\alpha \cap \beta|$  soit minimal parmi tous les choix des paires  $\{s_\alpha, s_\beta\}$ , ce qui revient à dire que  $\alpha$  et  $\beta$  se séparent dès qu'ils rencontrent un point de branchement  $q$  de l'arbre  $\overline{\text{triv}(\tilde{Q})}$ . En particulier, on aura  $s_\alpha = s_\beta$  si et seulement si  $\overline{\text{triv}(Q)}$  est un segment. Si  $\alpha$  et  $\beta$  n'ont pas la même longueur, on tronque le plus long des deux pour satisfaire à cette condition.

Il nous faut maintenant choisir la suite  $w_k$  d'éléments de  $\text{Stab } x$  qui nous servira à recoller  $\alpha$  le long de  $w_k \cdot \beta$ . Pour cela, on choisit un ensemble de générateurs  $g_1, \dots, g_p$  de  $\text{Stab } x$  composé de mots positifs en les générateurs  $a_i$  qui fixent un point dans la composante de  $\tilde{Q} \setminus \text{triv}(\tilde{Q})$  contenant  $x$ . Comme  $\text{Stab } x$  n'est pas cyclique, il existe une suite  $w_k$  de mots positifs en les  $g_i$  qui ne sont pas des puissances propres dans

FIG. 5.19 – Pliage de  $\alpha$  et  $\beta$  dans le premier cas

$F_n$  et qui ne sont pas conjugués à des éléments de  $F_n$  qui fixent déjà une arête dans  $T$ .

Lorsqu'on effectue le pliage correspondant à l'intersection de  $\alpha$  et  $\beta$ , le graphe quotient  $Q$  ne change pas mais le stabilisateur de  $[x, q] = \alpha \cap \beta$  dans  $T^{(k)}$  devient non trivial et est engendré par  $w_k$ . La seconde partie du recollement ne crée pas de nouveau stabilisateur d'arête, mais identifie les projections dans  $Q$  de  $\alpha$  et  $\beta$ . Notons  $(T^{(k)}, F_n)$  l'action obtenue en recollant  $\alpha$  le long de  $w_k \cdot \beta$ . Le graphe quotient  $Q^{(k)} = T^{(k)}/F_n$  est un arbre et  $\text{triv}(Q^{(k)})$  est connexe. Comme les pliages intermédiaires se font entre des arêtes dont le stabilisateur est trivial, le lemme de pliage 5.2.7 assure que l'action  $(T^{(k)}, F_n)$  approxime  $(T, F_n)$  quand  $k$  devient grand.

Soit  $C_\beta$  la composante de  $\tilde{Q} \setminus \{q\}$  contenant  $s_\beta$ . On définit alors un relevé  $\tilde{Q}^{(k)}$  de  $Q^{(k)}$  dans  $T^{(k)}$  en prenant la réunion des images dans  $T^{(k)}$  de  $\tilde{Q} \setminus C_\beta$  et de  $w_k \cdot C_\beta$  par l'application de pliage. On change la base  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  en conjuguant par  $w_k$  les générateurs ayant un point fixe dans  $C_\beta$ . L'ensemble  $\langle a'_1, \dots, a'_n \rangle$  ainsi obtenu est encore une base de  $F_n$  car  $w_k$  s'écrit dans la base  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  sans utiliser de générateur ayant un point fixe dans  $C_\beta$ . Les  $a'_i$  fixent un point de  $\tilde{Q}^{(k)}$ .

Si maintenant  $y$  est un point de  $\tilde{Q} \setminus ([x, q] \cup C_\beta)$  ou de  $w_k \cdot C_\beta$ , son image  $y'$  dans  $T^{(k)}$  a pour stabilisateur le groupe engendré par le stabilisateur de  $y$  dans  $T$ , et on voit facilement que la dernière condition de l'hypothèse de récurrence est vérifiée. Si  $y \in [x, q]$ ,  $y'$  est dans la même composante de  $\tilde{Q}^{(k)} \setminus \text{triv}(\tilde{Q}^{(k)})$  que l'image de  $x$  dans  $T^{(k)}$ , et le choix de  $w_k$  fait que la dernière condition de l'hypothèse de récurrence est satisfaite par  $T^{(k)}$ .

Enfin, puisque  $w_k$  n'est pas une puissance propre dans  $F_n$  et vu qu'on n'a pas créé de stabilisateur de tripode dans  $T^{(k)}$  puisque  $w_k$  ne fixait pas d'arête dans  $T$ ,  $(T^{(k)}, F_n)$  est très petite. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence.

**Deuxième cas :**  $\overline{\text{triv}(Q)}$  possède un sommet  $\bar{x}$  dont le groupe est non trivial et qui n'est pas terminal dans  $\overline{\text{triv}(Q)}$ . Soit  $x$  le relevé de  $\bar{x}$  dans  $\tilde{Q}$ , et soient  $s_\alpha$  et  $s_\beta$  deux sommets terminaux de  $\overline{\text{triv}(\tilde{Q})} \setminus \{x\}$ , et soient  $\alpha$  et  $\beta$  les chemins joignant  $x$  à  $s_\alpha$  et  $s_\beta$ . Si  $\alpha$  et  $\beta$  n'ont pas la même longueur, on tronque le plus long des deux pour satisfaire à cette condition. Considérons une suite quelconque  $w_k$  d'éléments distincts de  $\text{Stab } x$  et notons  $(T^{(k)}, F_n)$  l'action obtenue en pliant  $\alpha$  le long de  $w_k \cdot \beta$ .

Le nouveau graphe quotient  $Q^{(k)} = T^{(k)}/F_n$  est obtenu à partir de  $Q$  en recollant les projections dans  $Q$  de  $\alpha$  et  $\beta$ . En particulier,  $\overline{\text{triv}(Q^{(k)})}$  est connexe, et  $Q^{(k)}$  est toujours un arbre. Puisque les stabilisateurs de  $s_\alpha$  et  $s_\beta$  sont non triviaux,  $\overline{\text{triv}(\tilde{Q}^{(k)})}$  possède un point non terminal dont le groupe n'est pas trivial lorsque  $d(x, s_\alpha) \neq d(x, s_\beta)$  et un point terminal dont le groupe n'est pas cyclique dans le cas contraire. Pour  $k$  assez grand, on sait alors grâce au lemme de pliage 5.2.7 que  $(T^{(k)}, F_n)$  est une approximation de  $T$ .

Soit  $C_\beta$  la composante  $\tilde{Q} \setminus \{p\}$  contenant  $s_\beta$ . Comme au dessus, on prend pour relevé  $\tilde{Q}^{(k)}$  de  $Q^{(k)}$  la réunion des images de  $\tilde{Q} \setminus C_\beta$  et de  $w_k \cdot C_\beta$  dans  $T^{(k)}$ . Ce relevé  $\tilde{Q}^{(k)}$  vérifie toujours les conditions de l'hypothèse de récurrence à condition de conjuguer par  $w_k$  les générateurs  $a_i$  ayant un point fixe dans  $C_\beta$ . Enfin,  $(T^{(k)}, F_n)$  est très petite puisqu'on n'a pas créé de nouveau stabilisateur d'arête. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à  $(T^{(k)}, F_n)$

Cette récurrence s'arrête lorsque  $\text{triv}(Q)$  est vide. La proposition est alors démontrée.  $\square$

### Dernière étape : conclusion

Pour démontrer le théorème 5.2.1, il suffit maintenant de prouver la proposition suivante.

**Proposition 5.2.14.** *Soit  $n \geq 3$  et soit  $(T, F_n)$  une action simpliciale très petite telle que toute arête possède un stabilisateur non trivial, et telle qu'il existe une base  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  de  $F_n$  telle que pour tout élément  $g$  fixant une arête dans  $T$ ,  $g$  ou  $g^{-1}$  soit conjugué à un mot positif de cette base.*

*Alors, si  $(T', F_n)$  est une action petite, l'orbite de  $(T', F_n)$  sous l'action de  $\text{Out}(F_n)$  s'accumule sur  $(T, F_n)$  dans l'espace projectifié des actions de  $F_n$ .*

*Preuve.* On utilise le théorème d'approximation de M. Cohen et M. Lustig : pour toute action petite  $(T'', F_n)$ , il existe une suite de twists de Dehn  $D_k$  tels que  $\frac{1}{k}(T'', F_n).D_k$  tende vers  $(T, F_n)$  quand  $k \rightarrow \infty$  à condition que tout élément fixant une arête dans  $T$  soit hyperbolique dans  $T''$ . Il suffit alors de trouver une action  $(T'', F_n)$  dans l'orbite de  $(T, F_n)$  telle que les éléments des stabilisateurs d'arête de  $T$  soient hyperboliques dans  $T''$ . Il suffit donc de démontrer le lemme suivant.  $\square$

**Lemme 5.2.15.** *Soit  $(T, F_n)$  une action petite (non triviale). Il existe une base  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  de  $F_n$  telle que tous les mots positifs écrits dans cette base soient hyperboliques dans  $T$ .*

*Preuve.* On démontre d'abord que pour toute action sans point fixe global de  $F_n$ , il existe une base de  $F_n$  contenant un élément hyperbolique. Pour cela, partons d'une base  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  quelconque et supposons que tous les  $a_i$  soient elliptiques. L'élément  $a_i a_j$  est elliptique si et seulement si  $\text{Fix } a_i \cap \text{Fix } a_j \neq \emptyset$ . Si pour tous  $i \neq j$  la base  $\langle a_1, \dots, a_{i-1}, a_i a_j, a_{i+1}, \dots, a_n \rangle$  est composée d'éléments elliptique, alors  $(T, F_n)$  a un point fixe global.

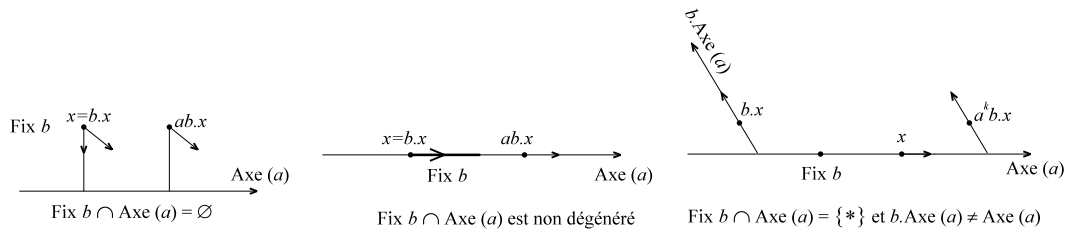


FIG. 5.20 – Si  $b$  ne préserve pas l'axe de  $a$ ,  $a^k b$  est hyperbolique pour un certain  $k$

Montrons maintenant que toute action petite de  $F_n$  admet une base composée d'éléments hyperboliques. On part du fait que si  $a$  est hyperbolique, et si  $b$  est elliptique,  $ab$  est hyperbolique sauf peut-être dans le cas où  $\text{Fix } b \cap \text{Axe } a$  contient exactement un point  $x$  et si  $b$  envoie une partie du demi-axe positif de  $a$  en  $x$  dans le demi-axe négatif de  $a$ . De plus, si  $b$  ne préserve pas l'axe de  $a$ , il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $b^k a$  est hyperbolique pour un  $k$  assez grand en valeur absolue (figure 5.20). Mais si  $b$  préserve l'axe de  $a$ ,  $b^2$  et  $ab^2 a^{-1}$  fixent cet axe et ne commutent pas donc  $(T, F_n)$  n'est pas petite. Partant d'une base  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  de  $F_n$  telle que  $a_1$  soit hyperbolique, il existe  $k_2, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$  tels que la base  $\langle a_1, a_1^{k_2} a_2, \dots, a_1^{k_n} a_n \rangle$  soit composée d'éléments hyperboliques.

On peut en déduire une base composée d'éléments hyperboliques dont les axes

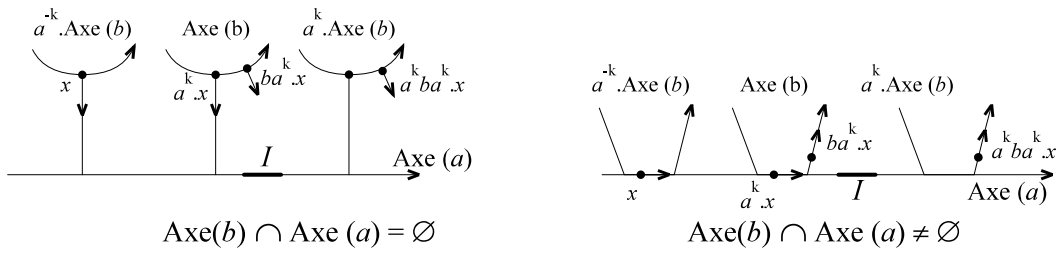


FIG. 5.21 –

contiennent un segment commun non dégénéré  $I$ , et dont les orientations coïncident : soit  $I$  un intervalle non dégénéré de l'axe de  $a_1$ , et considérons un autre générateur  $a_i$ . Alors, pour  $k_i$  assez grand,  $a_1^{k_i} a_i a_1^{k_i}$  est hyperbolique et son axe contient  $I$  (figure 5.21). Il suffit alors de considérer la base  $\langle a_1, a_1^{k_2} a_2 a_1^{k_2}, \dots, a_1^{k_n} a_n a_1^{k_n} \rangle$ , et de prendre l'inverse des générateurs dont l'orientation ne coïncide pas avec celle de  $a_1$ .

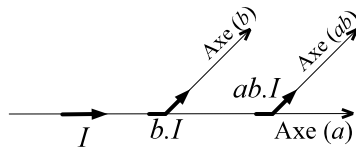


FIG. 5.22 – L'axe de  $ab$  contient  $I$

Pour montrer le lemme, il suffit alors de remarquer que si  $a$  et  $b$  sont hyperboliques et tels que l'intersection de leurs axes contienne un intervalle  $I$  non réduit à un point, et si leurs orientations coïncident, alors  $ab$  est hyperbolique, et son axe contient  $I$  (figure 5.22).  $\square$

### 5.3 A-t-on $\mathcal{M}_n = \mathcal{F}_n$ ?

On ne sait pas pour l'instant s'il est vrai que  $\mathcal{M}_n$  est égal à  $\mathcal{F}_n$ . Pour démontrer cette égalité, il suffirait d'approcher toute action non simpliciale par une action dans  $\mathcal{M}_n$ . Dans [BF3], M. Bestvina et M. Feighn montrent comment approcher une action très petite  $(T, F_n)$  par une action très petite et simpliciale. Il résulte de leur étude que si  $(T, F_n)$  a un stabilisateur d'arc non trivial, on peut supposer que l'action approximante possède elle aussi un stabilisateur d'arête non trivial. Puisqu'une telle action appartient à  $\mathcal{M}_n$ , cela signifie que toute action très petite ayant un stabilisateur d'arc non trivial appartient à  $\mathcal{M}_n$ .

De plus, si une approximation géométrique de  $(T, F_n)$  possède une composante de type surface orientable, on peut l'approcher par une action simpliciale très petite possédant des stabilisateurs d'arête non triviaux, donc  $(T, F_n)$  appartient à  $\mathcal{M}_n$ . On aurait aussi la même conclusion en présence d'une composante de type surface non orientable si on savait que le groupe modulaire d'une surface non orientable agit avec orbites denses sur l'ensemble de ses feuilletages mesurés sans feuille régulière compacte à un seul côté.

Si  $(T, F_n)$  est une action très petite de  $F_n$ , D. Gaboriau et G. Levitt montrent dans [GL] qu'il n'y a qu'un nombre fini d'orbites de points de branchements dans  $T$ . On peut alors appliquer le théorème de [Lev4] qui dit que  $(T, F_n)$  peut être vue comme l'action associée à un graphe d'actions fini  $\mathcal{G}(T)$  dont les actions de sommet  $(T_v, \Gamma_v)$  sont transitives, c'est à dire à orbites denses. Si on suppose que les stabilisateurs d'arcs de  $(T, F_n)$  sont triviaux, les groupes d'arêtes de ce graphe d'actions sont triviaux. Le lemme 2.4 affirme que si on a des approximations  $(T'_v, \Gamma_v)$  des actions de sommet, on obtient une approximation de  $(T, F_n)$  en remplaçant dans  $\mathcal{G}(T)$  l'action  $(T_v, \Gamma_v)$  par  $(T'_v, \Gamma'_v)$ , et en remplaçant les points d'attache  $p_e$  par des points approximant  $p'_e$  pour la topologie de Gromov équivariante. Pour approximer une action non simpliciale par une action de  $\mathcal{M}_n$ , on peut donc supposer que toutes les orbites de  $(T, F_n)$  sont denses.

Dans la suite nous allons démontrer le théorème suivant (voir les définitions dans la suite).

**Théorème 5.3.1.** *Soit  $n \geq 3$  et  $(T, F_n)$  une action très petite à orbites denses telle que la mesure de Lebesgue combinaison linéaire d'au plus  $n - 1$  mesures ergodiques. Alors  $(T, F_n)$  appartient à  $\mathcal{M}_n$ .*

*Remarque.* Soit  $\alpha \in \text{Out}(F_n)$  un automorphisme irréductible dont les puissances sont



irréductibles. Cette condition est équivalente au fait qu'aucune puissance de  $\alpha$  ne fixe (à conjugaison près) un facteur libre de  $F_n$ . Alors, M. Lusitg a démontré que  $\alpha$  a exactement deux points fixes dans  $\overline{CV}_n$  et n'a pas de point périodique ([Lus2]). On peut en déduire que ces points fixes sont uniquement ergodiques. En effet, on verra qu'on peut associer naturellement à une action  $(T, F_n)$  un simplexe  $\sigma(T)$  construit à partir de ses mesures invariantes. Si  $(T, F_n)$  n'est pas uniquement ergodique,  $\sigma(T)$  n'est pas réduit à un point. Or  $\sigma(T)$  est globalement fixé par  $\alpha$  si  $\alpha$  fixe  $(T, F_n)$ . On en déduit qu'une puissance de  $\alpha$  fixe ce simplexe point par point, ce qui est contradictoire.

### 5.3.1 Mesures sur les arbres réels

Dans toute la suite, on considère les actions modulo *isométrie* équivariante.

#### Mesures de longueurs et actions uniquement ergodiques

La théorie classique de la mesure est mal adaptée aux arbres réels faute de compacité locale. Dans [Pau3], F. Paulin propose une autre définition d'une mesure pour un arbre réel, appelée *mesure de longueur*. Pour simplifier, on parlera parfois de *mesure* d'un arbre réel pour signifier *mesure de longueur*.

**Définition.** Une mesure de longueur  $\mu$  d'un arbre réel  $T$  est la donnée pour tout segment compact  $I \subset T$  d'une mesure borélienne finie ( $\sigma$ -additive)  $\mu_I$  telle que pour  $I' \subset I$ ,  $\mu_{I'} = (\mu_I)|_{I'}$ .

Si  $T$  est muni d'une action par isométries d'un groupe  $\Gamma$ , on dit qu'une mesure de longueurs  $\mu$  sur  $T$  est *invariante* si pour tout intervalle  $I$  et tout élément  $g \in \Gamma$ ,  $\mu_{g.I} = (g|_I)_* \mu_I$ . La mesure de Lebesgue de chaque intervalle  $I$  donne un exemple de mesure de longueur invariante. Pour tout intervalle  $I$ , on notera  $\mu(I) = \mu_I(I)$ . On dit que  $\mu$  est sans atome si les mesures  $\mu_I$  sont non atomiques.

*Remarque.* Il est a priori possible qu'une mesure invariante d'une action à orbites denses ait des atomes. Mais c'est par contre impossible dès que l'action a ses orbites denses dans les segments.

Soit  $f : T \rightarrow T'$  une application continue telle que tout intervalle  $I$  de  $T$  peut être subdivisé en un nombre fini de sous-intervalles  $I_1, \dots, I_p$  tels que pour tout  $i = 1, \dots, p$ ,  $f$  préserve l'alignement en restriction à  $I_i$  (on rappelle qu'on dit que  $f$  préserve l'alignement si pour tout  $x \in [y, z]$ ,  $f(x) \in [f(y), f(z)]$ ). Cette hypothèse est

en particulier vérifiée si  $f$  est un morphisme d'arbres réels ou préserve l'alignement. Si  $\mu$  est une mesure de longueur *sans atome* sur  $T'$ , on peut transporter la mesure  $\mu'$  en une mesure  $\mu = f^*\mu'$  sur  $T$  de la manière suivante : subdivisons  $I$  en des sous-intervalles  $I_1, \dots, I_p$  tels que  $f$  préserve l'alignement en restriction à chaque  $I_i$ . On définit alors  $\mu_I$  comme l'unique mesure sans atome sur  $I$  telle que pour tout intervalle  $I' \subset I_i$ ,  $\mu_I(I') = \mu'_{q(I_i)}(q(I'))$ .

### Mesures et applications préservant l'alignement

On dit que  $\mu$  est positive lorsque les  $\mu_I$  sont positives. A partir de maintenant, on ne considère plus que des mesures positives invariantes.

Soit  $(T, \Gamma)$  une action de  $\Gamma$ . Si  $q : T \rightarrow T'$  est une application équivariante préservant l'alignement et 1-lipschitzienne, en transportant sur  $T$  la mesure de Lebesgue de  $T'$ , on obtient une mesure positive sur  $T$  dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue de  $T$  est inférieure à 1. Réciproquement, étant donné une mesure de longueurs positive invariante  $\mu$  de densité inférieure à 1 par rapport à la mesure de Lebesgue, on peut considérer la pseudo-métrique  $d_\mu(x, y) = \mu([x, y])$ . Il est facile de vérifier que l'espace métrique  $T_\mu$  obtenu en rendant cette pseudo-métrique séparée est un arbre réel. Il est naturellement muni d'une action de  $\Gamma$  par isométries et l'application quotient  $q : T \rightarrow T_\mu$  est équivariante, 1-lipschitzienne et préserve l'alignement. Ces deux opérations sont inverses l'une de l'autre.

Voici quelques propriétés simples des applications préservant l'alignement.

**Lemme 5.3.2.** *Soit  $q : T_1 \rightarrow T_2$  une application équivariante préservant l'alignement. Alors, l'image réciproque d'un convexe est convexe. Pour tout  $\gamma \in \Gamma$ , on a  $\text{Car}_{T_2} \gamma = q(\text{Car}_{T_1} \gamma)$ . De plus, si  $\gamma$  est hyperbolique dans  $T_1$ , et elliptique dans  $T_2$ ,  $\gamma$  fixe un unique point  $a = q(\text{Axe}_{T_1} \gamma)$  dans  $T_2$ .*

*Preuve.* Soit  $K_2$  un convexe de  $T_2$  et soient  $a, b \in K_1 = q^{-1}(K_2)$ . Tout point  $c \in [a, b]$  s'envoie sur un point de  $[q(a), q(b)]$  qui appartient à  $K_1$  donc  $c \in K_2$ . L'image réciproque d'un convexe est donc convexe.

On a  $q(\text{Car}_{T_1}(\gamma)) \subset \text{Car}_{T_2}(\gamma)$  car un point  $a$  appartient à l'ensemble caractéristique de  $\gamma$  si et seulement si  $\gamma^{-1}.a$ ,  $a$  et  $\gamma.a$  sont alignés dans cet ordre. Si  $\gamma$  est hyperbolique dans  $T_2$ , l'image de  $\text{Car}_{T_1} \gamma$  dans  $T_2$  est un connexe  $\gamma$ -invariant qui contient donc l'axe de  $\gamma$ . Si  $\gamma$  est elliptique dans  $T_2$ , l'image réciproque d'un point fixe de  $\gamma$  dans  $T_2$  est un connexe  $\gamma$ -invariant de  $T_1$ , qui intersecte donc l'ensemble

caractéristique de  $\gamma$  dans  $T_1$ . On en déduit que  $q(\text{Car}_{T_1}(\gamma)) = \text{Car}_{T_2}(\gamma)$  et que  $\gamma$  fixe au plus un point dans  $T_2$  si  $\gamma$  est hyperbolique dans  $T_1$ .  $\square$

**Corollaire 5.3.3.** *Soit  $(T_1, F_n)$  et  $(T_2, F_n)$  deux actions minimales de  $F_n$  et  $q : T_1 \rightarrow T_2$  une application équivariante préservant l'alignement. Si  $(T_1, F_n)$  est très petite alors  $(T_2, F_n)$  est très petite.*

*Preuve.* L'action  $(T_2, F_n)$  est petite d'après le lemme 5.3.2 puisque tout élément qui fixe le segment non dégénéré  $[x, y]$  de  $T_2$  fixe le pont reliant les deux sous-arbres  $q^{-1}(x)$  et  $q^{-1}(y)$ . Elle n'a pas de stabilisateur de tripode car si  $x, y, z$  sont trois points non alignés de  $T_\mu$  fixés par un élément  $g \in F_n$ , la réunion des ponts entre  $q^{-1}(x)$ ,  $q^{-1}(y)$  et  $q^{-1}(z)$  forme un tripode de  $T$  fixé par  $g$ . Supposons que  $\text{Fix}_{T_2} g \neq \text{Fix}_{T_2} g^k$  pour un  $k > 1$ , et soit  $x$  un point de  $T_2$  qui soit fixé par  $g^k$  et pas par  $g$ . Les sous-arbres  $q^{-1}(x)$  et  $g.q^{-1}(x)$  sont disjoints et  $g^k$ -invariants. Par conséquent,  $g^k$  fixe point par point le pont reliant  $q^{-1}(x)$  à  $q^{-1}(g.x)$ , contrairement à  $g$ . Ceci contredit le fait que  $(T_1, F_n)$  soit très petite.  $\square$

## Mesures ergodiques

Une *homothétie* de la mesure de longueurs  $\mu$  consiste à multiplier toutes les mesures  $\mu_I$  par un même réel non nul.

**Définition.** *On dit que  $(T, \Gamma)$  est uniquement ergodique si la mesure de Lebesgue est l'unique mesure positive invariante non nulle sur  $T$  modulo homothétie.*

En particulier, si  $(T, \Gamma)$  est uniquement ergodique, dès qu'on se donne une application continue équivariante  $q : T \rightarrow T'$  et préservant l'alignement,  $q$  est une homothétie.

Si  $(T, \Gamma)$  est une action, on note  $M(T)$  l'ensemble de toutes les mesures positives invariantes. Un ensemble  $E \subset T$  est dit *mesurable* si son intersection avec tout intervalle est mesurable. On dit que  $E$  est de mesure nulle relativement à la mesure de longueurs  $\mu$  si pour tout  $I$ ,  $\mu_I(E \cap I) = 0$ . Une fonction  $f : T \rightarrow \mathbb{R}$  est constante  $\mu$ -presque partout s'il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{c\})$  soit de mesure nulle pour  $\mu$ .

**Définition.** *On dit qu'une mesure  $\mu \in M(T)$  est ergodique si toute fonction mesurable (c'est à dire mesurable en restriction à tout intervalle)  $f : T \rightarrow \mathbb{R}$  et invariante par  $\Gamma$  est constante  $\mu$ -presque partout.*

*Remarque.* Cette définition équivaut à dire que  $\mu$  n'est pas une combinaison linéaire positive non triviale dans  $M(T)$ , c'est à dire que si  $\mu = t_1\mu_1 + t_2\mu_2$  avec  $t_1, t_2 > 0$  et  $\mu_1, \mu_2 \in M(T)$ , alors  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont homothétiques à  $\mu$ . En effet, si  $\mu = t_1\mu_1 + t_2\mu_2$  est ergodique,  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont absolument continues par rapport à  $\mu$  (sur tout intervalle). Pour tout intervalle  $I$ , on peut donc écrire  $\mu_{1I} = f_{1I}\mu_I$  pour une fonction  $f_{1I}\mu_I$  définie  $\mu_I$ -presque partout. Ces fonctions  $f_{1I}$  se recollent en une fonction mesurable  $\Gamma$ -invariante de  $T$  dans  $\mathbb{R}_+$  définie  $\mu$ -presque partout. Puisque  $\mu$  est ergodique,  $f_1$  est constante presque partout et  $\mu_1$  est homothétique à  $\mu$ . Supposons réciproquement qu'il existe une fonction  $\Gamma$ -invariante  $f$  qui n'est pas constante  $\mu$ -presque partout. Il existe alors un réel  $M$  tel qu'aucun des deux ensembles  $A^+ = \{x \in T | f(x) \geq M\}$  et  $A^- = \{x \in T | f(x) < M\}$  ne soit de mesure nulle. On peut alors écrire  $\mu = \mu|_{A^+} + \mu|_{A^-}$ .

La mesure de Lebesgue de  $(T, F_n)$  est ergodique si et seulement si toute application équivariante 1-lipschitzienne  $q : T \rightarrow T'$  est une homothétie puisqu'on a une correspondance entre mesures invariantes de densité inférieure à 1 par rapport à la mesure de Lebesgue et les applications équivariantes 1-lipschitziennes  $q : T \rightarrow T'$ . Bien sûr, si  $(T, \Gamma)$  est uniquement ergodique, la mesure de Lebesgue est ergodique.

On peut considérer une topologie *de la convergence vague* sur  $M(T)$  (voir [Pau3]). Pour cette topologie, une suite  $\mu^{(k)}$  de mesures converge vers  $\mu$  si et seulement si pour tout intervalle  $I$  et toute fonction continue  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\int f d\mu_I^{(k)} \rightarrow \int f d\mu_I.$$

En général, pour cette topologie,  $M(T) \setminus \{0\}$  n'est pas projectivement compact. Il faut en particulier penser au phénomène suivant : si  $I$  est un intervalle de  $T$ , et  $b \in I \setminus \partial I$  est un point de branchement de  $T$ , si  $\delta_k$  est une masse de Dirac en un point  $x_k \notin I$  tel que  $x_k \rightarrow b$ , alors la suite  $\delta_k$  ne tend pas vers la masse de Dirac au point  $b$  ([Pau3]).

*Remarque.* Si  $(T, \Gamma)$  est une action minimale d'un groupe de type fini, il existe un arbre fini  $K \subset T$  tel que tout segment  $I$  peut être découpé en un nombre fini d'intervalles  $I_1, \dots, I_p$  pour lesquels il existe  $g_i \in \Gamma$  tels que  $g_i \cdot I_i \subset K$ . Notons  $M_0(T)$  l'ensemble des mesures de longueurs invariantes positives de  $(T, \Gamma)$  *sans atome*. On a alors une identification naturelle entre  $M_0(T)$  et l'ensemble des mesures  $\mu$  de  $K$  sans atome qui sont *invariantes par*  $\Gamma$ , c'est à dire telles que pour tout  $g \in \Gamma$ ,

$$(g|_{K \cap g^{-1} \cdot K})_* \mu|_{K \cap g^{-1} \cdot K} = \mu|_{K \cap g \cdot K}.$$

La topologie sur  $M_0(T)$  induite par  $M(T)$  coïncide avec la topologie usuelle sur l'ensemble des mesures sans atome de  $K$ . L'ensemble  $M_1(T)$  des mesures positives, invariantes et de densité inférieure à 1 par rapport à la mesure de Lebesgue forme donc un compact convexe (qui contient la mesure nulle). Il faut remarquer que pour tout intervalle  $I$ , la fonction  $\mu \mapsto \mu(I)$  restreinte à  $M_0(T)$  est continue car les mesures de  $M_0(T)$  n'ont pas d'atome.

Remarquons aussi que  $\mu$  est une mesure ergodique si et seulement si  $M_1(T_\mu)$  est de dimension 1. En effet, supposons que  $M_1(T_\mu)$  est de dimension 1, et qu'on ait une décomposition  $\mu = \mu_1 + \mu_2$ . Pour  $i \in \{1, 2\}$ , la mesure  $\mu_i$  a une densité inférieure à 1 par rapport à  $\mu$ . On en déduit que l'application  $q_i : T \rightarrow T_{\mu_i}$  passe au quotient en une application 1-lipschitzienne préservant l'alignement  $\bar{q}_i T_\mu \rightarrow T_{\mu_i}$ . On en déduit donc deux mesures  $\bar{\mu}_1$  et  $\bar{\mu}_2$  sur  $T_\mu$  de densité inférieure à 1 par rapport à la mesure de Lebesgue de  $T_\mu$ . Par hypothèse, ces deux mesures sont proportionnelles, ce qui montre que  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont proportionnelles et donc que  $\mu$  est ergodique. Réciproquement, si  $M_1(T_\mu)$  n'est pas de dimension 1 et la mesure de Lebesgue de  $T_\mu$  n'est pas ergodique (car toute mesure dans  $M_1(T_\mu)$  est de la forme  $f \cdot \mu$  avec  $f \leq 1$   $\Gamma$ -invariante). La mesure de Lebesgue  $\bar{\mu}$  de  $T_\mu$  se décompose donc non trivialement comme  $\bar{\mu} = \bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2$ . En transportant ces mesures dans  $T$  on obtient une décomposition  $\mu = \mu_1 + \mu_2$  qui montre que  $\mu$  n'est pas ergodique.

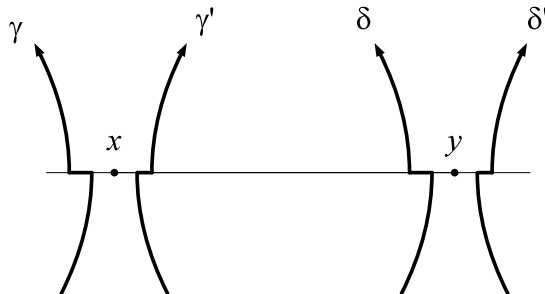
### Mesures et simplexes

**Lemme 5.3.4.** *Soit  $(T, \Gamma)$  une action à orbites denses qui n'est pas abélienne. L'application  $\sigma_T$  de  $M_0(T) \setminus \{0\}$  dans l'ensemble de  $\Gamma$  modulo isométrie équivariante qui à  $\mu$  associe  $(T_\mu, \Gamma)$  est injective.*

*Remarque.* Ce lemme est bien sûr faux si on ne suppose pas que  $T$  est à orbites denses.

*Preuve.* On peut supposer que  $T$  n'est pas une droite car dans ce cas, on sait que  $(T, \Gamma)$  est uniquement ergodique et le lemme est trivial.

L'action  $(T, F_n)$  étant supposée minimale, pour tout  $\mu \in M_0(T) \setminus \{0\}$ ,  $(T_\mu, F_n)$  est minimale puisque l'image réciproque d'un sous-arbre invariant est un sous-arbre invariant. Supposons qu'on ait une isométrie équivariante  $f : T_{\mu_1} \rightarrow T_{\mu_2}$  pour deux mesures invariantes non nulles  $\mu_1$  et  $\mu_2$  appartenant à  $M_0(T)$ . On note  $q_1$  et  $q_2$  les applications quotient de  $T$  dans  $T_{\mu_1}$  et  $T_{\mu_2}$  respectivement.



Pour  $\gamma, \delta \in \Gamma$ , on note  $\text{pont}_T(\gamma, \delta)$  le segment reliant les ensembles caractéristiques de  $\gamma$  et  $\delta$  dans  $T$ , ou leur point d'intersection lorsqu'ils s'intersectent en exactement un point. On ne définit pas  $\text{pont}_T(\gamma, \delta)$  lorsque les ensembles caractéristiques de  $\gamma$  et  $\delta$  s'intersectent en plus d'un point.

Soient  $x, y$  deux points distincts de  $T$ . On veut montrer que  $\mu_1([x, y]) = \mu_2([x, y])$ . Puisque les orbites de  $T$  sont denses, et puisque  $T$  n'est pas une droite, les points de branchement de  $T$  sont denses dans les segments : si  $I$  est un segment et si  $x \in \overset{\circ}{X}$ , on trouve un point de branchement dans  $\overset{\circ}{I}$  et proche de  $x$  en projetant sur  $I$  un point de branchement proche de  $x$  (et n'appartenant pas forcément à  $I$ ). Or, comme  $(T, \Gamma)$  est non abélienne, tout segment est contenu dans l'axe d'un élément hyperbolique de  $\Gamma$  (voir [Pau2]).

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , puisque  $\mu_1$  et  $\mu_2$  n'ont pas d'atome, on peut alors trouver des éléments  $\gamma, \gamma', \delta$  et  $\delta'$  de  $\Gamma$ , hyperboliques dans  $T$ , tels que leurs axes soient deux à deux disjoints et tels que

$$x \in \text{pont}_T(\gamma, \gamma') \quad \text{et} \quad y \in \text{pont}_T(\delta, \delta')$$

avec

$$\mu_i(\text{pont}_T(\gamma, \gamma')), \mu_i(\text{pont}_T(\delta, \delta')) \leq \varepsilon$$

pour  $i \in \{1, 2\}$ . On a

$$q_i(\text{pont}_T(\gamma, \gamma')) = \text{pont}_{T_{\mu_i}}(\gamma, \gamma')$$

et

$$q_i(x) \in \text{pont}_{T_{\mu_i}}(\gamma, \gamma').$$

Il en est de même pour  $q_i(y)$  relativement à  $\delta, \delta'$ .

Par conséquent, pour  $i \in \{1, 2\}$ ,

$$\left| \mu_i([x, y]) - d\left(\text{pont}_{T_{\mu_i}}(\gamma, \gamma'), \text{pont}_{T_{\mu_i}}(\delta, \delta')\right) \right| \leq 2\varepsilon.$$

Mais  $f$  envoie  $\text{pont}_{T_{\mu_1}}(\gamma, \gamma')$  et  $\text{pont}_{T_{\mu_1}}(\delta, \delta')$  sur  $\text{pont}_{T_{\mu_2}}(\gamma, \gamma')$  et  $\text{pont}_{T_{\mu_2}}(\delta, \delta')$  respectivement. On en déduit que  $\mu_1([x, y])$  est  $4\varepsilon$ -proche de  $\mu_2([x, y])$  et ce pour tout  $\varepsilon > 0$ . On en déduit que  $\mu_1 = \mu_2$ .  $\square$

Cette application  $\sigma_T$  est linéaire au sens où

$$l_{\sigma(t_1\mu_1+t_2\mu_2)} = t_1l_{\sigma(\mu_1)} + t_2l_{\sigma(\mu_2)}$$

pour tous  $t_1, t_2 \geq 0$ . Elle est continue sur  $M_0(T)$  car  $\mu \mapsto \mu(I)$  est continue pour tout intervalle  $I$  de  $T$ .

**Corollaire 5.3.5.** *Soit  $(T, F_n)$  une action très petite à orbites denses. Alors  $M_0(T)$  est un convexe de dimension finie et  $M_0(T) \setminus \{0\}$  est projectivement compact. De plus, il existe un ensemble fini de mesures ergodiques dont le cardinal est borné par  $3n - 4$  et tel que toute mesure dans  $M_0(T)$  soit une combinaison linéaire positive de ces mesures ergodiques. En particulier,  $M_1(T)$  est compact et les applications  $\sigma_T$  et  $(\sigma_T)|_{M_1(T) \setminus \{0\}}$  définissent deux simplexes dans l'outre-espace.*

*Preuve.* On commence par remarquer que si  $\mu_1, \dots, \mu_p$  sont des mesures ergodiques distinctes non nulles, elles sont linéairement indépendantes dans  $M(T)$ . Ceci provient du fait qu'il existe des ensembles mesurables  $E_1, \dots, E_p$  disjoints qui recouvrent  $T$  et tels que  $E_j$  est de  $\mu_i$ -mesure nulle pour  $i \neq j$ .

L'ensemble des actions très petites qui ne sont pas simpliciales libres (modulo *isométrie* équivariante) a une dimension topologique égale à  $3n - 4$  (voir [GL]). Puisque  $\sigma_T$  est linéaire et injective, l'espace vectoriel engendré par  $M_0(T)$  a une dimension au plus égale à  $3n - 4$ . On en déduit que  $T$  possède au plus  $3n - 4$  mesures ergodiques non nulles sans atomes modulo homothétie puisqu'elles sont linéairement indépendantes.

Il nous reste maintenant à montrer que toute mesure  $\mu \in M_0(T)$  est combinaison linéaire positive d'un nombre fini de mesures ergodiques. Or l'ensemble des mesures dont la densité est inférieure ou égale à 1 par rapport à une mesure  $\mu \in M_0(T)$  donnée est compact puisqu'isomorphe à l'ensemble des mesures sur un arbre fini  $K$  invariantes par  $\Gamma$  et de densité inférieure à un. Il suffit alors d'appliquer le théorème de Krein Millman.  $\square$

### 5.3.2 Limites et applications préservant l'alignement

La proposition suivante constitue le cœur de la preuve des théorèmes de cette partie.

**Proposition 5.3.6.** *Soit  $(T, \Gamma)$  une action minimale non abélienne à orbites denses d'un groupe de type fini. On fait l'hypothèse que  $T$  n'est pas une droite. Supposons qu'on ait des actions  $(T_p, \Gamma)$ ,  $(T'_p, \Gamma)$  et  $(T', F_n)$  telles que  $T_p \xrightarrow{t \rightarrow \infty} T$  et  $T'_p \xrightarrow{t \rightarrow \infty} T'$  pour la topologie de Gromov équivariante. On suppose enfin qu'on a des applications équivariantes  $q_p : T_p \rightarrow T'_p$  1-lipschitziennes et préservant l'alignement.*

*Alors, il existe une application équivariante  $q : T \rightarrow T'$  1-lipschitzienne qui préserve l'alignement.*

$$\begin{array}{ccc} T_p & \xrightarrow{p \rightarrow \infty} & T \\ q_p \downarrow & & \downarrow q \\ T'_p & \xrightarrow{p \rightarrow \infty} & T' \end{array}$$

**Lemme 5.3.7.** *Soient  $K_p$  et  $K'_p$  deux suites exhaustives croissantes de sous-arbres finis de  $T$  et  $T'$  respectivement,  $F^p$  une suite exhaustive croissante de parties finies de  $\Gamma$  et  $\varepsilon_p$  une suite strictement décroissante tendant vers 0 telles que :*

- on a une  $\varepsilon_p$ -approximation  $F^p$ -équivariante  $R_p$  entre  $K_p \subset T$  et  $H_p \subset T_p$
- on a une  $\varepsilon_p$ -approximation  $F^p$ -équivariante  $R'_p$  entre  $K'_p \subset T$  et  $H'_p \subset T'_p$ .

*Soit  $x \in T$  et supposons que  $p$  soit assez grand pour que  $x \in K_p$ . Soit  $x_p \in T_p$  tel que  $x_p R_p x$ , et soit  $x'_p = q_p(x_p) \in T'_p$ . Soit enfin  $y'_p \in T'$  un point approximant de la projection de  $x'_p$  sur  $H'_p$ .*

*Alors,  $d(x'_p, H'_p) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$  et la suite  $(y'_p)$  converge dans  $T'$ .*

*Preuve du lemme.* Comme dans la preuve du lemme 5.3.4, pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut trouver deux éléments hyperboliques  $\gamma$  et  $\delta$  de  $\Gamma$  tels que

- $\text{Axe}(\gamma) \cap \text{Axe}(\delta) = \emptyset$
- $x \in \text{pont}_T(\gamma, \delta)$
- $\text{pont}_T(\gamma, \delta)$  a un diamètre inférieur à  $\varepsilon$ .

Lorsque  $p$  est assez grand,  $\gamma$ ,  $\gamma^{-1}$ ,  $\delta$ ,  $\delta^{-1}$ , appartiennent à  $F^p$ , et un argument simple de la topologie de Gromov équivariante montre que les axes de  $\gamma$  et  $\delta$  dans  $T_p$  ne s'intersectent pas et sont à distance inférieure à  $2\varepsilon$  (voir par exemple [Pau2] prop. 3.5). On note  $\text{pont}_{T_p}(\gamma, \delta)$  le segment reliant les axes de  $\gamma$  et  $\delta$  dans  $T_p$ . On peut aussi facilement vérifier que  $d(x_p, \text{pont}_{T_p}(\gamma, \delta)) \leq \varepsilon$  pour  $p$  assez grand.

On déduit du lemme 5.3.2 que les ensembles caractéristiques de  $\gamma$  et  $\delta$  dans  $T'_p$  s'intersectent en au plus un point. En effet, si  $a'$  et  $b'$  appartiennent à l'intersection de ces ensembles caractéristiques, leurs images réciproques dans  $T_p$  contiennent à la



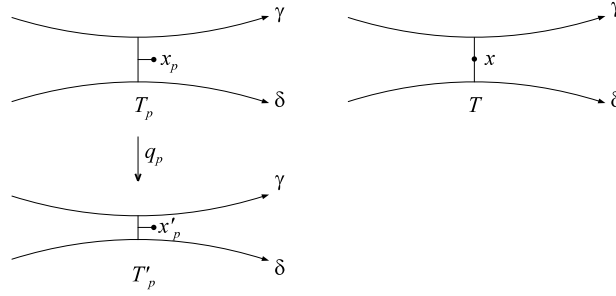


FIG. 5.23 – Le pont entre  $\gamma$  et  $\delta$

fois des points de l'axe de  $\gamma$  et de l'axe de  $\delta$ . Comme ces images réciproques sont connexes, toutes deux se rencontrent sur le pont entre ces deux axes, d'où  $a' = b'$ .

Pour démontrer le premier point du lemme, il suffit maintenant de démontrer que pour  $p$  assez grand, le pont entre les ensembles caractéristiques de  $\gamma$  et  $\delta$  dans  $T'_p$  est contenu dans  $H'_p$ . Considérons un point  $a \in T'$  tel que  $b = \gamma.a \neq a$ . Supposons que  $p$  est assez grand pour que  $K'_p$  contienne  $[a, b]$ ,  $F^p$  contienne  $\gamma$ , et  $\varepsilon_p < d(a, b)/100$ . Considérons  $a_p$  et  $b_p$  des points approximatifs de  $a$  et  $b$  dans  $T'_p$ . Le milieu  $m$  de  $[a_p, \gamma.a_p]$  appartient à  $\text{Car}_{T'_p} \gamma$ . Comme  $d(\gamma.a_p, b_p)$  est très petite devant  $d(a_p, \gamma.a_p)$ ,  $m$  appartient à  $[a_p, b_p] \subset H'_p$ . On en déduit que pour  $p$  assez grand,  $H'_p$  contient à la fois des points de l'ensemble caractéristique de  $\gamma$  et  $\delta$ , il contient donc le pont les reliant.

Le fait que  $\text{Car } \gamma$  et  $\text{Car } \delta$  s'intersectent en au plus un point est une condition fermée pour la topologie de Gromov (voir par exemple [Pau2]). On en déduit que  $\text{Car}_{T'} \gamma$  et  $\text{Car}_{T'} \delta$  s'intersectent en au plus un point.

Notons maintenant  $x''_p$  le projeté de  $x_p$  sur  $H'_p$ , et soit  $y'_p$  un point d'approximation de  $x''_p$  dans  $T'$ . On a que  $d(x''_p, \text{pont}_{T'_p}(\gamma, \delta)) \leq \varepsilon$ . Pour  $p$  assez grand, on en déduit que  $y'_p$  est  $2\varepsilon$ -proche de  $\text{pont}_{T'}(\gamma, \delta)$ . De plus, comme  $|\text{pont}_{T'_p}(\gamma, \delta)| \leq 2\varepsilon$  puisque  $q_p$  est 1-lipschitzienne, on en déduit pour  $p$  assez grand que  $|\text{pont}_{T'}(\gamma, \delta)| \leq 3\varepsilon$ . On obtient

$$\begin{aligned} d(y'_p, y'_q) &\leq d(y'_p, \text{pont}_{T'}(\gamma, \delta)) + d(y'_q, \text{pont}_{T'}(\gamma, \delta)) + |\text{pont}_{T'}(\gamma, \delta)| \\ &\leq 2\varepsilon + 2\varepsilon + 3\varepsilon \leq 7\varepsilon. \end{aligned}$$

La suite  $(y'_p)$  est donc de Cauchy. Mais l'arbre  $T'$  n'est pas forcément complet (si  $T'$  n'est pas complet, son complété n'est pas minimal...). Par contre, ce qui précède montre que si on fixe  $\gamma_0$  et  $\delta_0$  tel que  $x$  appartienne au pont reliant les axes de  $\gamma_0$  et

$\delta_0$ ,  $d(y'_p, \text{pont}_{T'}(\gamma_0, \delta_0))$  tend vers 0. Comme  $\text{pont}_{T'}(\gamma_0, \delta_0)$  est compact,  $y'_p$  converge vers un point de cet ensemble.  $\square$

*Démonstration de la proposition.* On veut définir  $q(x)$  comme étant la limite d'une telle suite  $y'_p$ . Pour montrer que  $q(x)$  est indépendant de tous les choix, il suffit d'appliquer le lemme à la suite obtenue en alternant les termes de deux suites  $y'_p^{(1)}$  et  $y'_p^{(2)}$  obtenues grâce à des choix différents.

Il suffit maintenant de montrer que  $q$  est équivariante, 1-lipschitzienne, et préserve l'alignement. Soient  $a, b, c$  trois points de  $T$  alignés dans cet ordre. Pour  $p$  assez grand,  $a, b, c$  appartiennent à  $K_p$ . Soient  $a_p, b_p, c_p$  des points approximant  $a, b, c$  dans  $T_p$ . On a  $(a|c)_b = 0$  donc  $(a_p|c_p)_{b_p} \leq 3\varepsilon_p/2$ . Or, une application 1-lipschitzienne préservant l'alignement diminue le produit de Gromov. En notant  $a'_p, b'_p, c'_p$  les images de  $a_p, b_p, c_p$  par  $q_p$ , et  $a''_p, b''_p, c''_p$  leurs projections sur  $H'_p$ , on obtient  $(a_p|c_p)_{b_p} \geq (a'_p|c'_p)_{b'_p} \geq (a''_p|c''_p)_{b''_p}$  car la projection sur  $H'_p$  est 1-lipshitz et préserve l'alignement. En notant  $a'''_p, b'''_p, c'''_p$  de points approximant de  $a''_p, b''_p, c''_p$  dans  $T'$ , on obtient  $(a'''_p|c'''_p)_{b'''_p} \leq 3\varepsilon_p$ . On conclut que  $(q(a)|q(c))_{q(b)} = 0$  et que  $q$  préserve l'alignement.

Le même raisonnement montre que pour  $p$  assez grand,

$$d(a'''_p, b'''_p) \leq \varepsilon_p + d(a''_p, b''_p) \leq \varepsilon_p + d(a'_p, b'_p) \leq \varepsilon_p + d(a_p, b_p) \leq 2\varepsilon_p + d(a, b)$$

et donc que  $q$  est 1-lipschitzienne.

Enfin, pour démontrer l'équivariance, on suppose que  $b = \gamma.a$  pour un élément  $\gamma \in \Gamma$ , et on suppose que  $p$  est assez grand pour que  $\gamma \in F^p$ . On a alors

$$\begin{aligned} d(\gamma.a'''_p, b'''_p) &\leq \varepsilon_p + d(\gamma.a''_p, b''_p) \leq \varepsilon_p + d(\gamma.a'_p, b'_p) \\ &\leq \varepsilon_p + d(\gamma.a_p, b_p) \leq 2\varepsilon_p + d(\gamma.a, b) = 2\varepsilon_p \end{aligned}$$

ce qui prouve l'équivariance de  $q$ .  $\square$

### 5.3.3 Approximation des actions ayant peu de mesures ergodiques

**Proposition 5.3.8.** *Soit  $(T, F_n)$  une action très petite pour  $n \geq 3$ . On suppose la mesure de Lebesgue est ergodique. Alors  $(T, F_n)$  appartient à  $\mathcal{M}_n$ .*

*Remarque.* Il existe des actions à orbites denses pour lesquelles la mesure de Lebesgue n'est pas ergodique. Pour trouver de tels exemples, il suffit de trouver des actions

qui possèdent plusieurs mesures ergodiques sans atome et de considérer l'action  $T_\mu$  associée à une combinaison convexe  $\mu$  non triviale de deux de ces mesures ergodiques.

Or H. B. Keynes et D. Newton puis M. Keane ont trouvé des exemples d'échanges d'intervalles minimaux et non uniquement ergodiques ([KeNe, Kea]). Puisque les orbites sont denses dans les segments, les mesures ergodiques de ces échanges d'intervalles n'ont pas d'atomes. L'action de  $F_n$  qui leur est associée n'est pas uniquement ergodique. Cependant W. Veech et H. Masur ont montré que presque tous les échanges d'intervalles (orientables) et satisfaisant une condition combinatoire évidemment nécessaire étaient uniquement ergodiques ([Vee, Mas]). R. Martin a montré plus récemment qu'il existait des systèmes d'isométries de type exotique qui n'étaient pas uniquement ergodiques ([Mar]).

Du côté des actions non géométriques, on peut bêtement construire une action à orbites denses, telle que toutes ses approximations fortes soient libres simpliciales, et pour laquelle la mesure de Lebesgue n'est pas ergodique. Partons de deux actions libres non-géométriques  $(T_1, F_3)$  et  $(T_2, F_3)$  à orbites denses et telles que toutes leurs approximations fortes géométriques soient libres simpliciales (il existe de telles actions, voir [GL]). Etant donnés deux points bases  $*_1, *_2$  dans  $T_1$  et  $T_2$ , on peut construire l'action  $T = T_1 \underset{*_1=*_2}{*} T_2$  de  $F_3 * F_3$ . En multipliant la mesure de Lebesgue de  $T_1$  et  $T_2$  par deux réels  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , on voit que la mesure de Lebesgue  $T$  n'est pas ergodique.

*Preuve.* Nous allons utiliser la proposition 5.3.6. Comme  $(T, F_n)$  est très petite, on peut l'approcher par des actions  $(T_p, F_n)$  simpliciales libres. Soit  $g \in F_n$  un élément hyperbolique dans  $T$ ; pour  $p$  assez grand,  $g$  est hyperbolique dans  $T_p$ . Soit  $I \subset T_p$  un intervalle de longueur  $l_{T_p}(g)$  dans l'axe de  $g$  dans  $T_p$ . Comme  $T_p/F_n$  a au plus  $3n - 3$  arêtes, il existe une orbite d'arêtes  $F_n.e$  qui contribue pour au moins  $l_{T_p}(g)/(3n - 3)$  à la longueur de  $I$ . Soit  $\mu_p$  la mesure sur  $T_p$  qui est égale à la mesure de Lebesgue en restriction à  $F_n.e$ , et qui est nulle ailleurs. On note  $T'_p = (T_p)_{\mu_p}$ . L'application quotient  $q_p : T_p \rightarrow T'_p$  est 1-lipschitzienne, équivariante et préserve l'alignement.

L'action  $(T'_p, F_n)$  est simpliciale, très petite, à stabilisateurs d'arête triviaux elle n'a qu'une seule orbite d'arêtes et  $l_{T'_p}(g) \geq \frac{1}{3n-3} l_{T_p}(g)$ . Comme  $n \geq 3$ , si son graphe quotient est un segment, elle possède un stabilisateur de sommet non cyclique, et si son graphe quotient est un cercle, elle possède un stabilisateur de sommet non trivial qui n'est pas terminal dans le graphe quotient. Cela signifie que  $(T'_p, F_n) \in \mathcal{M}_n$ .

Comme  $\overline{CV}_n$  est compact, quitte à extraire une sous suite, il existe des réels positifs  $\lambda_p$  tels que  $\lambda_p.(T'_p, F_n)$  converge vers une action  $(T', F_n)$ . Comme  $l_{T'_p}(g)$  ne

s'approche pas de 0, la suite  $\lambda_p$  est majorée par un réel  $A$ . La suite  $\frac{\lambda_p}{A} \cdot (T'_p, F_n)$  converge alors vers  $\frac{1}{A} \cdot (T', F_n)$ , et les applications  $\frac{\lambda_p}{A} \cdot q_p : (T_p, F_n) \rightarrow \frac{\lambda_p}{A} \cdot (T'_p, F_n)$  sont 1-lipschitziennes.

On peut donc appliquer la proposition 5.3.6 pour en déduire qu'il existe une application équivariante  $q : T \rightarrow \frac{1}{A} \cdot T'$  1-lipschitzienne qui préserve l'alignement. Comme la mesure de Lebesgue est ergodique, on en déduit que  $(T', F_n)$  est homothétique à  $(T, F_n)$  et donc que  $(T, F_n)$  est limite d'actions appartenant à  $\mathcal{M}_n$ .  $\square$

**Théorème 5.3.1.** *Soit  $(T, F_n)$  une action très petite à orbites denses (avec  $n \geq 3$ ). Si la mesure de Lebesgue de  $T$  est combinaison linéaire positive d'au plus  $n - 1$  mesures ergodiques, alors  $(T, F_n)$  appartient à  $\mathcal{M}_n$ .*

*Preuve.* Nous commençons par remarquer que  $(T, F_n)$  est limite d'actions simpliciales  $(T_p, F_n)$  telles qu'on ait des morphismes d'arbres réels équivariants  $f_p : T_p \rightarrow T$ . On peut se ramener au cas où  $(T, F_n)$  est géométrique puisqu'une approximation forte géométrique de  $(T, F_n)$  possède un morphisme d'arbres réels équivariant sur  $T$ . Or si  $(T, F_n)$  est géométrique et possède une composante minimale, les approximations construites par M. Bestvina et M. Feighn dans [BF3] possèdent un morphisme simplicial équivariant sur  $T$ . En effet, l'approximation est construite par une technique de rétrécissement de bande tant pour le cas des composantes exotiques que pour le cas des composantes de type surface (voir aussi proposition 2.7.2 dans le cas exotique). On en déduit immédiatement que les approximations obtenues possèdent un morphisme d'arbre réel équivariant sur  $T$ .

Notons  $\lambda$  la mesure de Lebesgue de  $T$ , et soient  $\mu_1, \dots, \mu_k$  des mesures ergodiques de  $M_1(T)$  telles que  $\lambda = \sum_{i=1}^k t_i \mu_i$  avec  $k \leq n - 1$ . Notons  $\nu_i$  la mesure de  $T_p$  de densité inférieure à 1 définie par  $\nu_i = f_p^* \mu_i$ , et considérons l'arbre simplicial  $T_p^i = (T_p)_{\nu_i}$  associé à la mesure  $\nu_i$ .

Montrons que  $(T_p^i, F_n) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} (T_{\mu_i}, F_n)$ . Soit  $g \in F_n$ . Si  $g$  est elliptique dans  $T$ , on a  $l_{T_p^i}(g) \leq l_{T_p}(g) \rightarrow 0$  donc  $l_{T_p^i}(g) \rightarrow 0 = l_{T_{\mu_i}}(g)$ . Si  $g$  est hyperbolique dans  $T$ , il est hyperbolique dans  $T_p$  pour  $p$  assez grand. Soit  $I$  un intervalle de longueur  $l_{T_p}(g)$  inclus dans l'axe de  $g$  dans  $T_p$  et découpons  $I$  en un nombre fini de sous-intervalles isométriquement plongés dans  $T$  par  $f_p$ . On peut raffiner cette subdivision de sorte qu'il existe un ensemble  $E \subset I$  qui soit une réunion des intervalles de la subdivision, tel que  $f_p(E)$  soit un intervalle de longueur  $l_T(g)$  inclus dans l'axe de  $g$ , et tel que  $f_p$  soit injective en restriction à  $E \setminus \partial E$ .

La mesure de Lebesgue de  $I \setminus E$  est alors égale à  $l_{T_p}(g) - l_T(g)$  et tend donc vers 0 avec  $p$ . Or la différence  $l_{T_p^i}(g) - l_{T_{\mu_i}}(g)$  est égale à  $\nu_i(I \setminus E)$  qui tend elle aussi vers 0 puisque  $\nu_i$  a une densité inférieure à 1 par rapport à la mesure de Lebesgue de  $T_p^i$ . Ceci montre donc que  $(T_p^i, F_n)$  tend vers  $(T_{\mu_i}, F_n)$  quand  $p$  tend vers l'infini.

On procède maintenant comme dans le théorème précédent. Soit  $g \in F_n$  un élément hyperbolique dans  $T_{\mu_i}$ . Soit  $I \subset T_p^i$  un intervalle de longueur  $l_{T_p^i}(g)$  dans l'axe de  $g$ . Comme  $T_p^i/F_n$  a au plus  $3n - 3$  arêtes, il existe une orbite d'arêtes  $F_n.e$  qui contribue pour au moins  $l_{T_p^i}(g)/(3n - 3)$  à la longueur de  $I$ . Soit  $\nu'_i$  la mesure sur  $T_p^i$  qui est égale à la mesure de Lebesgue en restriction à  $F_n.e$ , et qui est nulle ailleurs. On note  $T_p'^i = (T_p^i)_{\nu'_i}$ . L'action  $(T_p'^i, F_n)$  est simpliciale, très petite, elle n'a qu'une seule orbite d'arêtes et  $l_{T_p'^i}(g) \geq \frac{1}{3n-3}l_{T_p^i}(g)$ . En particulier, cette action appartient forcément à  $\mathcal{M}_n$ .

Comme  $\overline{CV}_n$  est compact, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer qu'il existe des réels  $\lambda_p \in ]0, 1]$  tels que  $\lambda_p.(T_p'^i, F_n)$  converge vers une action  $(T', F_n)$  et tels que les applications naturelles  $q_p : (T_p'^i, F_n) \rightarrow \lambda_p.(T_p'^i, F_n)$  sont 1-lipschitziennes. On peut bien sûr prendre une sous-suite commune à tous les indices  $i$ .

Comme  $\mu_i$  est ergodique, on en déduit d'après la proposition 5.3.6 que  $(T', F_n)$  est homothétique à  $(T_{\mu_i}, F_n)$ , donc que  $(T_p'^i, F_n)$  tend vers  $c_i(T_{\mu_i}, F_n)$  pour un réel  $c_i > 0$ .

Considérons les mesures  $\nu''_i$  sur  $T_p$  telles que  $(T_p)_{\nu''_i} = T_p'^i$ . On a donc que  $((T_p)_{\nu''_i}, F_n)$  tend vers  $c_i.(T_{\mu_i}, F_n)$ . Soit  $\nu$  la mesure sur  $T_p$  définie par

$$\nu = \sum_{i=1}^k \frac{t_i}{c_i} \nu''_i$$

où la mesure de Lebesgue de  $T$  est égale à  $\sum_{i=1}^k t_i \mu_i$ . Il est alors clair que  $((T_p)_{\nu}, F_n)$  tend vers  $(T, F_n)$ . Comme chaque action  $((T_p)_{\nu''_i}, F_n)$  possède une seule orbite d'arêtes,  $((T_p)_{\nu}, F_n)$  possède au plus  $k \leq n - 1$  arêtes. Pour conclure, il suffit de vérifier qu'une action simpliciale très petite ayant au plus  $n - 1$  orbites d'arêtes appartient à  $\mathcal{M}_n$ .  $\square$



## Chapitre 6

# Scindement JSJ et petites actions d'un groupe hyperbolique à un bout

Dans [Sel2], Z. Sela a démontré que les groupes hyperboliques sans torsion possédaient un scindement JSJ. Ce scindement tire son origine des travaux de W. H. Jaco, P. B. Shalen et K. Johannson sur la sous-variété caractéristique d'une variété irréductible de dimension 3 ([JaSh, Jo]). Il s'agit d'un scindement d'un groupe  $\Gamma$  sur des groupes cycliques tel que tout scindement élémentaire de  $\Gamma$  sur un groupe cyclique « se lit » dans le scindement JSJ (un scindement *élémentaire* signifie ici un produit amalgamé ou une HNN-extension). Depuis, ce scindement JSJ a été généralisé par E. Rips et Z. Sela aux groupes de présentation finie à un bout ([RiSe]), par M. J. Dunwoody et M. E. Sageev pour des scindements des groupes de présentation finie sur des groupes sveltes (*slender* en anglais), avec une condition similaire au fait que  $\Gamma$  a un seul bout ([DuSa]), puis par K. Fujiwara et P. Papasoglu en enlevant cette condition ([FuPa]).

Une approche topologique de ce scindement JSJ a été donnée par B. Bowditch dans [Bo2]. Elle s'applique aux scindements des groupes hyperboliques à un bout (y compris avec torsion) sur les groupes virtuellement cycliques. Ce scindement se lit dans la topologie du bord de  $\Gamma$ , et en particulier sur la structure des points de coupure locale. Cette décomposition utilise le fait que  $\partial\Gamma$  est localement connexe, ce qui a été récemment démontré par B. Bowditch et G. A. Swarup ([Bo1, Bo3, Lev5, Swa, Bo4]) en utilisant le fait que la connexité locale est impliquée par l'absence

de point de coupure globale ([BM]). La construction utilise aussi l'absence de point de coupure globale que B. Bowditch démontre dans [Bo2]. C'est cette approche que nous utiliserons dans ce chapitre, un de ses avantages étant que le scindement obtenu est très canonique.

Le scindement JSJ est une petite action minimale de  $\Gamma$  sur un arbre simplicial avec des sommets de trois types différents en fonction de leur stabilisateur :

- les sommets de type élémentaire dont le stabilisateur est virtuellement cyclique
- les sommets de type surface dont le stabilisateur est un groupe fuchsien convexe-cocompact non élémentaire
- les sommets de type rigide.

Dans ce chapitre, nous allons montrer comment « lire » toute petite action d'un groupe hyperbolique à un bout sur un arbre réel dans son scindement JSJ (voir th. 6.1.2 pour un énoncé précis) : on peut obtenir n'importe quelle petite action minimale de  $\Gamma$  sur un arbre réel

- en substituant à chaque sommet  $v$  de type surface une petite action minimale  $(T_v, \Gamma(v))$  de son stabilisateur  $\Gamma(v)$  telle que les stabilisateurs des arêtes adjacentes à  $v$  fixent un point dans  $T_v$
- en éclatant les sommets de type élémentaire en un arbre fini
- et en donnant une longueur (éventuellement nulle) aux arêtes de  $S$ .

En particulier, les groupes d'arêtes et les groupes rigides du scindement JSJ ont un point fixe dans toute petite action de  $\Gamma$  sur un arbre réel.

En utilisant le théorème de Skora affirmant que toute petite action d'un groupe de surface est géométrique, on obtient la généralisation suivante du théorème de Skora :

**Corollaire 6.0.1.** *Toute petite action d'un groupe hyperbolique à un bout est géométrique.*

*Remarque.* Cette généralisation peut être obtenue plus directement en utilisant la machine de Rips comme dans la démonstration de M. Bestvina du théorème de Skora ([Be]).

Ce théorème montre en un sens que ce scindement JSJ est très canonique :

**Corollaire 6.0.2.** *Soit  $\Gamma$  hyperbolique à un bout. Le scindement JSJ est l'unique action simpliciale minimale  $(S, \Gamma)$  modulo isomorphisme équivariant vérifiant les conditions suivantes :*

- les sommets de  $S$  sont de trois types, élémentaire, surface et rigide de sorte



que toute petite action minimale puisse être lue dans  $S$  au sens du théorème 6.1.2

- aucune arête de  $S$  n'est adjacente à deux sommets ayant le même type
- les deux sommets voisins d'un sommet élémentaire de valence 2 dans  $S$  sont du même type.

## 6.1 Le scindement JSJ d'un groupe hyperbolique à un bout

### Le scindement JSJ

**Définition.** *Un groupe fuchsien  $\Gamma$  est un groupe non élémentaire muni d'une action isométrique proprement discontinue sur l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}_2$  (cette action n'est pas forcément fidèle, mais son noyau est fini). Son cœur convexe est le plus petit convexe fermé invariant non vide de  $\mathbb{H}_2$ . On dit que  $\Gamma$  est convexe-cocompact s'il agit cocompactement sur son cœur convexe.*

*Les groupes périphériques d'un groupe fuchsien sont les stabilisateurs des composantes du bord de son cœur convexe.*

*Remarque.* Le quotient par  $\Gamma$  de son cœur convexe est un orbifold compact à bord, c'est à dire une surface à bord avec un nombre fini de points singuliers de type conique dans l'intérieur, un certain nombre de *bords miroirs* et de coins. Si on quotiente  $\Gamma$  par le noyau fini de son action sur  $\mathbb{H}_2$ , on obtient le groupe fondamental de cet orbifold. Les groupes périphériques sont les conjugués des images réciproques dans  $\Gamma$  des groupes fondamentaux des composantes du bord de  $O$ .

Soit  $\Gamma$  un groupe hyperbolique à un bout. Nous rappelons ici la vision du scindement JSJ de B. Bowditch (voir [Bo2, th. 0.1, 5.28 et prop. 5.30]).

**Théorème 6.1.1 ([Bo2]).** *Le scindement JSJ de  $\Gamma$  est une action minimale de  $\Gamma$  sur un arbre simplicial  $S$  dont les stabilisateurs d'arêtes sont virtuellement cycliques. Les sommets de  $S$  sont de trois types distincts :*

1. *Les sommets de type élémentaire dont le stabilisateur est un sous-groupe virtuellement cyclique maximal dans  $\Gamma$ . Ils sont de valence finie dans  $S$ .*
2. *Les sommets de type surface dont le stabilisateur est un groupe fuchsien convexe-cocompact non élémentaire et quasi-convexe dans  $\Gamma$ . Leurs groupes périphériques sont précisément les stabilisateurs des arêtes incidentes.*

3. Les sommets de type rigide qui ne sont ni élémentaires ni de type surface.

Si  $v$  est un sommet et  $e$  une arête de  $S$ , on note  $\Gamma(v)$  et  $\Gamma(e)$  leur stabilisateur. Deux sommets adjacents de  $S$  ne sont jamais du même type et l'action de  $\Gamma$  sur  $S$  préserve le type des sommets. Elle n'a donc pas d'inversion.

Ce scindement est canonique au sens où pour tout  $\alpha \in \text{Aut}(\Gamma)$ , il y a un isomorphisme  $\Gamma$ -équivariant entre  $S.\alpha$  et  $S$ . On peut aussi voir ce fait de la façon suivante :  $\text{Aut}(\Gamma)$  agit sur  $S$  et l'action des automorphismes intérieurs de  $\Gamma$  coïncide avec l'action de  $\Gamma$  sur  $S$  via le morphisme canonique de  $\Gamma$  dans  $\text{Aut}(\Gamma)$ .

Il est maximal dans le sens suivant : si  $\Gamma$  admet un scindement élémentaire non trivial sur un groupe virtuellement cyclique, alors le groupe d'arête est conjugué à un sous-groupe de  $\Gamma(v)$  pour un sommet  $v$  de  $S$  de type élémentaire ou surface ([Bo2, prop. 5.30]). En particulier, un groupe de type rigide  $\Gamma(v)$  n'admet pas de scindement non trivial  $(T, \Gamma(v))$  sur des groupes virtuellement cycliques tel que les stabilisateurs des arêtes de  $S$  incidentes sur  $v$  soient elliptiques dans  $T$ .

*Remarque.* Il est possible que  $S$  soit réduit à un point. Si c'est un sommet de type surface,  $\Gamma$  est un groupe fuchsien cocompact, et si c'est un sommet de type rigide,  $\Gamma$  ne se scinde pas sur un groupe virtuellement cyclique. Il faut aussi noter qu'il existe des groupes de type surface qui sont rigides au sens où ils ne se scindent pas relativement à leurs groupes périphériques. C'est par exemple le cas pour le pantalon.

### Comment lire toute action petite de $\Gamma$ dans son scindement JSJ

**Définition.** Soit  $(S, \Gamma)$  une petite action minimale de  $\Gamma$  sur un arbre simplicial  $S$ . On suppose que les sommets de  $S$  sont de type élémentaire, surface ou rigide selon leur stabilisateur, comme plus haut. On se donne une petite action minimale de  $\Gamma$  sur un arbre réel  $T$ .

On dit que  $(T, \Gamma)$  peut être lue dans  $(S, \Gamma)$  si les stabilisateurs d'arêtes, les groupes rigides et les stabilisateurs des groupes de type élémentaire de  $S$  fixent un point dans  $T$  et si on peut obtenir  $(T, \Gamma)$  de la façon suivante :

Soit  $Q = S/\Gamma$  le graphe de groupes quotient marqué de  $S$ ,  $\Gamma_v$  et  $\Gamma_e$  les groupes associés à un sommet  $v$  ou une arête  $e$  de  $Q$ , et  $i_e$  les morphismes d'arêtes.

- Pour chaque sommet  $v$  de type surface dans  $Q$ , on considère une petite action minimale  $(T_v, \Gamma_v)$  (éventuellement triviale) telle que pour toute arête orientée  $e$  incidente sur  $v$ ,  $i_e(\Gamma_e)$  fixe un point  $p_e$  dans  $T_v$ .
- Pour chaque sommet  $v$  de type élémentaire dans  $Q$ , on considère une action

*triviale (c'est à dire ayant un point fixe globale mais pas forcément minimale) de  $\Gamma_v$  sur un arbre fini  $K_v$  et pour chaque arête  $e$  incidente sur  $v$ , on se donne un point  $p_e \in K_v$  fixé par  $\Gamma_e$ . On impose que  $K_v$  soit l'enveloppe convexe de l'orbite (finie) des points  $p_e$  pour  $e$  adjacente à  $v$ .*

- *Pour chaque sommet  $v$  de type rigide, on prend l'action triviale de  $\Gamma_v$  sur un point.*
- *On se donne enfin des longueurs (éventuellement nulles) pour chaque arête  $e$  de  $Q$ . On impose que les arêtes adjacentes à un sommet de type élémentaire aient une longueur nulle.*

*On obtient ainsi un graphe d'actions dont le graphe de groupes sous-jacent est  $Q$ , et on note  $(T_Q, \Gamma)$  l'action correspondant à ce graphe d'actions.*

*On dit que  $(T, \Gamma)$  peut-être lue dans  $(S, \Gamma)$  s'il existe une action de la forme  $(T_Q, \Gamma)$  comme au dessus avec une isométrie équivariante entre  $T$  et  $T_Q$ .*

*Remarques.*

- *Les arbres finis  $K_v$  correspondent à des éclatements des sommets de type élémentaire. On aurait pu remplacer cette opération par des pliages partiels entre des arêtes incidentes sur un sommet de type élémentaire.*
- *Le théorème de Skora sur les actions des groupes fuchsien fait qu'on connaît bien les actions  $(T_v, \Gamma_v)$  qu'on substitue aux sommets de type surface : toute action petite et *minimale* d'un groupe fuchsien convexe-cocompact sur un arbre réel telle que ses groupes périphériques soient elliptiques est géométrique et provient d'un feuilletage mesuré sur un orbifold ([Sko], voir th. 6.2.11). En particulier, les groupes périphériques fixent un seul point lorsque l'action est minimale. Dans la construction de  $T_Q$ , on n'a donc pas le choix du point  $p_e$  pour les arêtes incidentes sur un sommet de type surface (on redémontrera directement ce fait dans la preuve du théorème 6.1.2).*

Le théorème principal de ce chapitre est le suivant :

**Théorème 6.1.2.** *Soit  $\Gamma$  un groupe hyperbolique à un bout. Alors toute petite action de  $\Gamma$  sur un arbre réel peut-être lue dans son scindement JSJ comme dans la définition précédente.*

## Unicité du scindement JSJ

Nous voulons prouver le corollaire suivant du théorème 6.1.2 :

**Corollaire 6.0.2.** *Soit  $\Gamma$  hyperbolique à un bout. Le scindement JSJ est l'unique ac-*

tion simpliciale minimale  $(S, \Gamma)$  modulo isomorphisme équivariant vérifiant les conditions suivantes :

- les sommets de  $S$  sont de trois types, élémentaire, surface et rigide de sorte que toute petite action minimale puisse être lue dans  $S$
- aucune arête de  $S$  n'est adjacente à deux sommets du même type
- les deux sommets voisins d'un sommet élémentaire de valence 2 dans  $S$  sont du même type.

*Preuve.* Les théorèmes 6.1.1 et 6.1.2 montrent que le scindement JSJ de  $\Gamma$  vérifie ces conditions, la dernière étant énoncée dans le théorème 5.28 de [Bo2].

Donnons nous  $(S', \Gamma)$  une action simpliciale vérifiant les hypothèses de la proposition et donnons une longueur 1 à toutes les arêtes de  $S'$ . On note  $\Gamma(v)$  et  $\Gamma(e)$  le stabilisateur dans  $\Gamma$  d'un sommet  $v$  et d'une arête  $e$  de  $S$  ou  $S'$ . La première condition affirme que  $S'$  peut être obtenue à partir de  $S$  en éclatant les sommets de type élémentaire, en substituant les sommets  $v$  de type surface par une petite action minimale  $(T_v, \Gamma(v))$  et en changeant les longueurs des arêtes de  $S$ .

On veut démontrer que pour tout sommet  $v$  de type surface de  $S$ ,  $\Gamma(v)$  fixe un point dans  $S'$ . Supposons donc le contraire, et soit  $(T_v, \Gamma(v))$  le sous-arbre minimal  $\Gamma(v)$ -invariant de  $S'$ . Soit  $e$  une arête de  $S'$  et soit  $\Gamma_0$  son stabilisateur dans  $\Gamma(v)$ . On va construire une action de  $\Gamma$  dans laquelle  $\Gamma_0$  n'a pas de point fixe global. En utilisant le fait que les stabilisateurs d'arêtes de  $S'$  sont elliptiques dans toute petite action de  $\Gamma$ , on aura une contradiction.

Soit  $d \subset \mathbb{H}_2$  l'axe de  $\Gamma_0$ . Cette géodésique n'est pas une composante du bord car le scindement correspondant de  $\Gamma_0$  n'est pas trivial. En utilisant le fait que  $\Gamma(v)$  n'est pas élémentaire, on trouve un élément d'ordre infini de  $\Gamma(v)$  dont l'axe  $d'$  rencontre  $d$ . La géodésique  $d'$  induit une petite action de  $\Gamma(v)$  sur un arbre simplicial  $T$  : il suffit d'épaissir  $d'$  (et sa  $\Gamma(v)$ -orbite) pour obtenir un feuilletage mesuré pour lequel  $d'$  est une feuille et de considérer l'arbre associé. comme  $d$  intersecte  $d'$ ,  $\Gamma_0$  n'a pas de point fixe global dans  $T$ . On en déduit immédiatement une action de  $\Gamma$  sur un arbre simplicial dans lequel  $\Gamma_0$  n'a pas de point fixe global : il suffit de considérer un graphe d'actions dont le graphe de groupes sous-jacent est  $Q$ , et en prenant  $(T, \Gamma(v))$  comme action de sommet associée à  $v$ . On obtient ainsi une contradiction avec le fait que les stabilisateurs d'arêtes de  $S'$  ont un point fixe global dans toute action de  $\Gamma$  sur un arbre réel. On a ainsi démontré que pour tout sommet  $v$  de type surface de  $S$ ,  $\Gamma(v)$  fixe un point dans  $S'$ .

Maintenant, puisqu'aucune arête de  $S'$  ne relie deux sommets de type élémentaire, les sous-arbres finis  $K_v$  considérés lors des éclatements des sommets élémentaires ont au plus un sommet non terminal. Pour obtenir  $S'$  à partir de  $S$ , au lieu d'éclater les sommets élémentaires, il suffit donc de donner une longueur (nulle ou non) aux arêtes adjacentes aux sommets de type élémentaire.

On note  $(S_0, \Gamma)$  l'action obtenue à partir de  $S$  en changeant les longueurs des arêtes de  $S$  de manière à obtenir une isométrie équivariante  $f_0 : S_0 \rightarrow S'$  (mais  $f_0$  n'est pas forcément simpliciale). Elle induit donc une application préservant l'alignement  $f : S \rightarrow S'$ . Comme les rôles de  $S$  et  $S'$  sont symétriques, on a une application préservant l'alignement  $f' : S' \rightarrow S$ . On veut maintenant modifier l'application  $f$  pour obtenir un isomorphisme simplicial entre  $S$  et  $S'$ .

Puisque  $\text{Stab}(v) \subset \text{Stab}(f(v)) \subset \text{Stab}(f' \circ f(v))$ ,  $f$  envoie les sommets non élémentaires de  $S$  sur les sommets non élémentaires de  $S'$  et  $f' \circ f$  est l'identité en restriction à l'ensemble de ces sommets car un sommet de  $S$  est caractérisé par son stabilisateur (si  $u, v \in S$  sont tels que  $\text{Stab } u$  est non élémentaire et  $\text{Stab } u \subset \text{Stab } v$  alors  $u = v$ ). On a donc  $\text{Stab } v = \text{Stab } f(v)$  pour tout  $v$  de type non élémentaire. On a bien sûr les faits symétriques pour  $f'$ . En particulier,  $f$  préserve le type sur l'ensemble des sommets non élémentaires. Comme  $f$  et  $f'$  préservent l'alignement, on en déduit que si trois sommets non élémentaires de  $S$  ne sont pas alignés dans  $S$ , leurs images par  $f$  ne sont pas alignées.

Soit  $v$  un sommet de type élémentaire, et notons  $E(v)$  la réunion des arêtes adjacentes à  $v$  et des sommets voisins de  $v$ . Si  $v$  a une valence au moins égale à 3 dans  $S$ ,  $f(E(v))$  contient donc un point de branchement, il est unique et égal à  $f(v)$  puisque  $f$  préserve l'alignement. Comme  $f$  est surjective et préserve l'alignement, si  $I$  est un arc de  $S$  ne rencontrant l'ensemble des points de branchements qu'en ses extrémités, il en est de même pour  $f(I)$ . Par conséquent, l'image par  $f$  d'une arête reliant un sommet élémentaire  $v_1$  de valence au moins 3 à un sommet non élémentaire  $v_2$  est une arête de  $S'$  : c'est un arc dont l'intérieur ne rencontre pas de sommet non élémentaire de  $S'$  (puisque ce serait un point de branchement) ni de sommet de type élémentaire (puisque aucune arête de  $S'$  ne relie deux sommets de type élémentaire).

De la même façon, l'image par  $f$  d'une arête reliant deux sommets non élémentaires  $v_1$  et  $v_2$  est un arc qui ne contient pas de point de branchement et qui contient donc au plus un sommet de type élémentaire et de valence 2. Comme  $v_1$  et  $v_2$  sont voisins dans  $S$ , ils sont de types différents et la troisième hypothèse implique que  $f(v_1)$  et  $f(v_2)$  sont en fait reliés par une arête.

Si  $v$  est un sommet élémentaire de valence 2 dans  $S$ , ses deux sommets voisins sont non élémentaires et ont le même type. L'image par  $f$  de l'arc reliant  $v_1$  et  $v_2$  est un arc dont l'intérieur ne rencontre pas de point de branchement et qui contient donc au plus un sommet élémentaire de valence 2. Grâce à la troisième condition, comme  $f(v_1)$  et  $f(v_2)$  sont deux sommets du même type, l'intérieur de  $f([v_1, v_2])$  contient exactement un sommet élémentaire  $v'$  de valence 2. On peut alors changer  $f$  de sorte que  $f(v) = v'$ , et que  $f$  envoie les arêtes  $[v, v_1]$  et  $[v, v_2]$  sur  $[v', f(v_1)]$  et  $[v', f(v_2)]$ .

L'application  $f$  ainsi modifiée est un isomorphisme simplicial équivariant entre  $S$  et  $S'$ , l'isomorphisme inverse pouvant être obtenu par une modification similaire de  $f'$ .  $\square$

### Construction du scindement JSJ

Considérons un groupe hyperbolique à un bout  $\Gamma$ . La construction de B. Bowditch du scindement JSJ s'appuie à la fois sur la topologie du bord, et la dynamique de  $\Gamma$  sur  $\partial\Gamma$ . Du point de vue topologique, le bord n'a pas de point de coupure globale, est localement connexe et l'étude cruciale sera celle des points de coupure locale. Du point de vue dynamique, la preuve utilise que  $\Gamma$  agit comme un groupe de convergence uniforme sur son bord. Par définition,  $\Gamma$  agit comme un groupe de convergence si de toute suite infinie d'éléments distincts de  $\Gamma$  on peut extraire une sous-suite dont la dynamique soit hyperbolique, c'est à dire telle qu'il existe un puits et une source telle que le puits attire tout compact ne contenant pas le point source. Cette condition est équivalente au fait que  $\Gamma$  agit proprement discontinûment sur l'espace  $(\partial\Gamma)^3$  privé de la grande diagonale. Ce groupe de convergence est *uniforme* si  $\Gamma$  agit cocompactement sur  $(\partial\Gamma)^3$  privé de la grande diagonale.

**Proposition 6.1.3 ([Bo2]).** *Soit  $\Gamma$  un groupe hyperbolique, et  $T$  un arbre simplicial muni d'une action finiment supportée de  $\Gamma$  telle que les stabilisateurs d'arêtes soient quasi-convexes dans  $\Gamma$ , alors les stabilisateurs de sommet de  $\Gamma$  sont aussi quasi-convexes.*

**Définition.** *Un sous-groupe  $H$  d'un groupe hyperbolique  $\Gamma$  est dit quasi-convexe s'il existe une constante  $C$  telle que toute géodésique de  $\Gamma$  reliant deux points de  $H$  reste à distance de  $H$  inférieure à  $C$ .*

Soit  $\Gamma$  un groupe hyperbolique. Un sous-groupe quasi-convexe de  $\Gamma$  est hyperbolique, et son bord  $\partial H$  s'identifie avec l'ensemble limite de  $H$  noté  $\Lambda(H) \subset \partial\Gamma$  c'est à

dire l'ensemble des points d'accumulation de  $H$  dans  $\partial\Gamma$ . De plus, si  $H_1$  et  $H_2$  sont quasi-convexes,  $H_1 \cap H_2$  est quasi-convexe et  $\Lambda(H_1 \cap H_2) = \Lambda(H_1) \cap \Lambda(H_2)$ . Un sous-groupe infini de  $\Gamma$  ne contenant pas  $F_2$  est virtuellement cyclique, quasi-convexe, et son ensemble limite consiste en exactement deux points qui sont les points fixes attractif et répulsif de tout élément d'ordre infini dans ce sous-groupe. Par conséquent, la proposition précédente implique que les stabilisateurs de sommets d'une petite action minimale simpliciale  $(T, \Gamma)$  sont quasi-convexes.

Soit  $T$  un arbre réel. Un *rayon* dans  $T$  est une classe d'équivalence d'applications isométriques  $r : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  où  $r \sim r'$  si l'intersection de leurs images est non compacte. On note  $\partial T$  l'ensemble des rayons de  $T$  (on ne peut pas définir l'ensemble des bouts de  $T$  faute de compacité locale, même quand  $T$  est simplicial). On note  $\Gamma(v)$  et  $\Gamma(e)$  les stabilisateurs d'un sommet  $v$  ou d'une arête  $e$  dans une action  $(T, \Gamma)$ .

**Proposition 6.1.4 ([Bo2]).** *Soit  $(T, \Gamma)$  une action simpliciale de  $\Gamma$  à stabilisateurs d'arêtes quasi-convexes. On a alors une identification naturelle entre  $\partial T$  et*

$$\partial\Gamma \setminus \left( \bigcup_{v \text{ sommet de } T} \Lambda\Gamma(v) \right).$$

*En particulier, si  $\gamma$  est hyperbolique dans  $T$ , les deux rayons définis par l'axe de  $\gamma$  correspondent aux points fixes attractif et répulsif de  $\gamma$  dans  $\partial\Gamma$ .*

**Proposition 6.1.5 ([Bo2]).** *Soit  $(T, \Gamma)$  une petite action simpliciale et minimale de  $\Gamma$ , et soit  $e$  une arête de  $T$ . Alors,  $\partial\Gamma$  privé des deux points de  $\Lambda(\Gamma(e))$  n'est pas connexe.*

*Plus précisément, notons  $T_1$  et  $T_2$  les deux composantes connexes de  $T \setminus \overset{\circ}{e}$  et considérons pour  $i \in \{1, 2\}$*

$$U_i = \partial T_i \cup \left( \bigcup_{v \text{ sommet de } T_i} \Lambda\Gamma(v) \setminus \Lambda\Gamma(e) \right).$$

*Alors  $U_1$  et  $U_2$  sont deux ouverts disjoints non vides de  $\partial\Gamma \setminus \Lambda(e)$  qui recouvrent  $\partial\Gamma \setminus \Lambda(e)$ .*

A partir de maintenant,  $\Gamma$  note un groupe hyperbolique à un bout. On va utiliser le fait que  $\partial\Gamma$  est localement connexe et n'a pas de point de coupure globale. La proposition précédente montre en particulier que si on a un scindement élémentaire d'un groupe hyperbolique à un bout  $\Gamma$  sur un groupe virtuellement cyclique  $\Gamma(e)$ , les points de  $\Lambda\Gamma(e)$  sont deux points de coupure locale dans le bord de  $\Gamma$ .

**Définition 6.1.6.** *On dit que  $x \in \partial\Gamma$  est un point de coupure locale si l'espace connexe localement compact  $\partial\Gamma \setminus \{x\}$  a au moins deux bouts. On appelle valence de  $x$  le nombre de bouts de  $\partial\Gamma \setminus \{x\}$ , et on le note  $\text{val}(x) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ .*

*On note  $\partial\Gamma(2)$  l'ensemble des points de valence 2 de  $\partial\Gamma$  et  $\partial\Gamma(3+)$  l'ensemble des points de valence au moins 3.*

Comme  $\partial\Gamma$  n'a pas de point de coupure globale, pour tout  $x, y \in \partial\Gamma$ , toute composante  $U$  de  $\partial\Gamma \setminus \{x, y\}$  s'accumule à la fois sur  $x$  et  $y$ . En particulier, le nombre de composantes connexes de  $\partial\Gamma \setminus \{x, y\}$  est majoré par  $\text{val}(x)$  et  $\text{val}(y)$ . De plus, l'absence de points de coupure globale et la locale connexité de  $\partial\Gamma$  impliquent que pour tout ensemble fini  $F \subset \partial\Gamma$ ,  $\partial\Gamma \setminus F$  a un nombre fini de composantes connexes. En effet, dans le cas contraire, en prenant des voisinages ouverts disjoints des points de  $F$ , une composante de  $\partial\Gamma \setminus F$  ne peut pas être contenue dans la réunion  $V$  de ces voisinages. Si on considère un tel point pour chaque composante de  $\partial\Gamma \setminus F$ , un point d'accumulation n'a pas de voisinage connexe.

**Définition.** *Pour  $x, y \in \partial\Gamma(2)$ , on note  $x \sim y$  si  $x = y$  ou si  $\partial\Gamma \setminus \{x, y\}$  possède deux composantes connexes.*

**Proposition 6.1.7.** *([Bo2], lemmes et propositions 3.1, 5.15, 3.7, 5.18, 5.17). La relation  $\sim$  est une relation d'équivalence sur  $\partial\Gamma(2)$ . De plus, si  $\sigma$  est une  $\sim$ -classe d'équivalence possédant un point isolé, alors  $\#\sigma = 2$  et le stabilisateur de  $\sigma$  est virtuellement cyclique (et infini en particulier).*

*Dans le cas contraire, on dit que  $\bar{\sigma}$  est un collier. On a  $\bar{\sigma} \setminus \sigma \subset \partial\Gamma(3+)$ . En particulier, si  $\sigma'$  est une classe d'équivalence telle que  $\bar{\sigma}' = \bar{\sigma}$ , alors  $\sigma = \sigma'$ . Sauf dans le cas où  $\Gamma$  est un groupe fuchsien cocompact,  $\bar{\sigma}$  est homéomorphe à un ensemble de Cantor. La relation quaternaire sur  $\bar{\sigma}$  «  $\{x, z\}$  sépare  $y$  de  $t$  » définit un ordre cyclique sur  $\bar{\sigma}$  qui permet de le voir comme un sous-ensemble du cercle, où  $\{x, z\}$  sépare  $y$  de  $t$  si et seulement si la propriété est vraie pour les points correspondant du cercle. En particulier, dans  $\bar{\sigma}$ ,  $\{x, z\}$  sépare  $y$  de  $t$  si et seulement si  $\{y, t\}$  sépare  $x$  de  $z$ . Enfin, le stabilisateur global  $Q$  de  $\bar{\sigma}$  est quasi-convexe et  $\bar{\sigma} = \Lambda(Q)$ .*

**Définition.** *Soit  $\bar{\sigma}$  un collier. On dit que  $\{x, y\} \subset \bar{\sigma}$  est un saut si aucune paire  $\{z, t\}$  de  $\bar{\sigma} \setminus \{x, y\}$  ne sépare  $x$  de  $y$ .*

*Remarque.* Puisqu'un collier n'a pas de point isolé, deux sauts distincts ne peuvent pas s'intersecter.

**Définition.** *Soit  $\bar{\sigma}$  un collier, et  $Q$  son stabilisateur global. On appelle groupes périphériques de  $Q$  les stabilisateurs dans  $Q$  des sauts de  $\bar{\sigma}$ .*



**Proposition 6.1.8 ([Bo2], prop. 4.9, 5.21).** *Si  $\bar{\sigma}$  est un collier, alors son stabilisateur  $Q$  est égal au stabilisateur de  $\sigma$  et est conjugué à un groupe fuchsien convexe-cocompact, les groupes périphériques de  $Q$  s'envoyant sur les groupes périphériques du groupe fuchsien (ce sont donc des groupes virtuellement cycliques).*

**Définition.** *Si  $x, y \in \partial\Gamma(3+)$ , on note  $x \approx y$  si  $\text{val}(x)$  et  $\text{val}(y)$  sont toutes deux égales au nombre de composantes de  $\partial\Gamma \setminus \{x, y\}$ .*

**Proposition 6.1.9 ([Bo2], lem. 3.8, et prop. 5.13).** *Si  $x \approx y$  et  $x \approx z$  alors  $y = z$ . On dit alors que  $\{x, y\}$  est une  $\approx$ -paire. Quel que soit  $x \in \partial\Gamma(3+)$ ,  $x$  appartient à une  $\approx$ -paire, et le stabilisateur de cette paire est virtuellement cyclique (infini en particulier).*

**Proposition 6.1.10 ([Bo2], prop. 5.6 et 5.21).** *Si  $\gamma$  est d'ordre infini dans  $\Gamma$ , et si  $\gamma^+$  et  $\gamma^-$  notent ses points fixes attractif et répulsif dans  $\partial\Gamma$ , alors  $\text{val}(\gamma^+) = \text{val}(\gamma^-) = \#\pi_0(\partial\Gamma \setminus \{\gamma^+, \gamma^-\})$ . Si  $\gamma^+$  ou  $\gamma^-$  est un point de coupure locale, on a donc  $\gamma^+ \sim \gamma^-$  ou  $\gamma^+ \approx \gamma^-$ .*

*De plus, si  $J = \{a, b\}$  est un saut dans un collier  $\bar{\sigma}$ , alors  $a \sim b \in \sigma$  ou  $a \approx b \in \bar{\sigma} \setminus \sigma$ .*

Pour définir l'arbre  $S$  du scindement JSJ, on considère l'ensemble  $V_1$  des  $\sim$ -classes d'équivalences de cardinal 2 et des  $\approx$ -paires, et l'ensemble  $V_2$  des  $\sim$ -classes d'équivalences infinies. L'ensemble  $V_1$  fournira l'ensemble des sommets de type élémentaire, l'ensemble  $V_2$ , celui des sommets de type surface.

Pour contruire l'arbre  $S$ , B. Bowditch utilise une relation « entre », notée  $xyz$  dont un exemple est la relation  $y \in ]x, z[$  dans un sous-ensemble d'un arbre réel (ce type de relation a été introduit par Ward).

**Définition 6.1.11.** *La relation  $xyz$  est une relation « entre » si elle satisfait aux axiomes suivants.*

1. *Si  $xyz$ , alors  $x \neq z$*
2. *Les relations  $xyz$  et  $xzy$  ne sont jamais simultanément vraies*
3. *La relation  $xyz$  est équivalent à  $zyx$*
4. *Si  $xyz$  est vraie, et si  $w \neq y$ , alors  $xyw$  ou  $wyz$ .*

*On dit qu'un ensemble muni d'une relation entre est un pré-arbre.*

Dans un pré-arbre, on note  $]x, z[ = \{y \mid xyz\}$  et  $[x, z] = ]x, z[ \cup \{x, z\}$ . On appelle ces ensemble des intervalles. On dit qu'un pré-arbre est *médian* si pour tous points

$x, y, z$ , l'ensemble  $[x, y] \cap [y, z] \cap [z, x]$  contient exactement un point (il en contient toujours au plus un). On dit qu'un pré-arbre est discret si les intervalles sont finis. A un pré-arbre médian discret, correspond naturellement un arbre simplicial, il suffit de mettre une arête entre les points  $x, y$  tels que  $]x, y[ = \emptyset$ .

A tout pré-arbre, on peut naturellement associer un pré-arbre médian, avec la propriété que si le pré-arbre original est discret, le pré-arbre médian obtenu est discret (voir [Bo1]). Dans le cas où  $V$  est un pré-arbre discret, il suffit de rajouter à  $V$  les points correspondant aux « étoiles » de  $V$ , c'est à dire aux sous-ensembles  $E$  de  $V$  tels que

- si  $x, z \in E$  et  $y \in V$ , on n'a jamais  $xyz$
- si  $x \in V \setminus E$ , il existe  $y, z \in E$  tels que  $xyz$ .

On définit alors sur  $V_1 \cup V_2$  la relation  $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$  si  $\sigma_2$  est distincte de  $\sigma_1$  et de  $\sigma_3$  et s'il existe  $x_1 \in \sigma_1, a_2, b_2 \in \sigma_2$  et  $x_3 \in \sigma_3$  tels que  $\{a_2, b_2\}$  sépare  $x_1$  de  $x_3$ .

**Théorème 6.1.12 ([Bo2], prop. 3.20).** *La relation  $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$  sur  $V_1 \cup V_2$  fait de  $V_1 \cup V_2$  un pré-arbre discret. Il est naturellement muni d'une action de  $\Gamma$ .*

**Définition 6.1.13.** *On appelle  $S$  l'arbre simplicial correspondant à l'arbre médian associé à  $V_1 \cup V_2$ . L'ensemble de ses sommets est  $V_1 \amalg V_2 \amalg V_3$  où  $V_3$  correspond à l'ensemble des étoiles de  $V_1 \cup V_2$ .*

L'arbre ainsi construit est le scindement JSJ du groupe  $\Gamma$ . Il est invariant par tout automorphisme de  $\Gamma$  puisqu'un tel automorphisme induit un homéomorphisme de  $\partial\Gamma$ . Les sommets de  $V_1, V_2$  et  $V_3$  sont respectivement les sommets de type élémentaire, de type surface et de type rigide.

## 6.2 Petites actions de $\Gamma$ sur des arbres réels

On considère une petite action minimale d'un groupe hyperbolique à un bout  $\Gamma$  sur un arbre réel  $T$ .

**Les stabilisateurs d'arête de  $S$  sont elliptiques dans  $T$**

**Proposition 6.2.1.** *Les stabilisateurs d'arête de  $S$  sont elliptiques dans  $T$ .*

*Preuve.* Comme deux sommets adjacents de  $S$  ne sont pas du même type, toute arête  $e$  est incidente sur un sommet de type surface ou un sommet de type élémentaire. Si  $e$  est incidente sur un sommet  $v$  de type élémentaire,  $\Gamma(e)$  est d'indice fini dans

$\Gamma(v)$  et il suffit donc dans ce cas de montrer que les groupes de type élémentaire sont elliptiques dans  $T$ . Si  $e$  est incidente sur un sommet  $v$  de type surface, le stabilisateur de  $e$  est un groupe périphérique de  $\Gamma(v)$ , il suffit donc de montrer que les groupes périphériques des sommets de type surface ont un point fixe dans  $T$ . On se ramène donc aux lemmes 6.2.3 et 6.2.4.  $\square$

Nous démontrons d'abord un lemme qui nous sera utile dans la suite.

**Lemme 6.2.2 ([Bo2], lemmes 3.3 et 5.6).** *Soient  $x, y \in \partial\Gamma$  tels que  $x \sim y$  ou  $x \approx y$ , et soit  $\Gamma_0$  un sous-groupe virtuellement cyclique de  $\Gamma$ , et notons  $\{a, b\} = \Lambda\Gamma_0$ . On suppose que  $\{a, b\}$  sépare  $x$  de  $y$ .*

*Alors  $a, b, x, y \in \partial\Gamma(2)$  et  $x \sim y \sim a \sim b$ .*

*Preuve.* Comme  $\{a, b\}$  disconnecte  $\partial\Gamma$ ,  $a$  et  $b$  sont des points de coupure locale et la proposition 6.1.10 affirme que  $a \approx b$  ou  $a \sim b$ .

Supposons d'abord que  $x \approx y$ . Alors  $\partial\Gamma \setminus \{x, y\}$  contient au moins trois composantes et elles s'accablent à la fois sur  $x$  et  $y$  puisque  $\partial\Gamma$  n'a pas de point de coupure globale. Par conséquent,  $\{a, b\}$  ne peut pas séparer  $x$  de  $y$ , ce qui est contradictoire.

Si  $x \sim y$  et  $a \approx b$ , le raisonnement symétrique de celui fait au-dessus montre que  $\{x, y\}$  ne peut pas séparer  $a$  de  $b$ . Par conséquent,  $a$  et  $b$  sont dans la même composante de  $\partial\Gamma \setminus \{x, y\}$ , et l'adhérence de l'autre composante de  $\partial\Gamma \setminus \{x, y\}$  relie  $x$  à  $y$  dans  $\partial\Gamma \setminus \{a, b\}$  ce qui empêche  $\{a, b\}$  de séparer  $x$  de  $y$ .

On en déduit que  $x \sim y$  et  $a \sim b \in \partial\Gamma(2)$ . Le lemme 3.3 de [Bo2] conclut alors que  $x \sim y \sim a \sim b$ .  $\square$

**Lemme 6.2.3.** *Les stabilisateurs des sommets de type élémentaire sont elliptiques dans  $T$ .*

*Preuve.* Si  $v$  est un sommet de type élémentaire, il correspond soit à une  $\approx$ -paire, soit à une  $\sim$ -classe d'équivalence de cardinal 2 qu'on note  $\sigma$ . On sait alors que le stabilisateur de  $\sigma$  est virtuellement cyclique (voir proposition 6.1.7 et 6.1.9).

Soit  $\gamma \in \text{Stab } \sigma$  d'ordre infini de sorte que si  $\gamma^+$  et  $\gamma^-$  notent les points fixes attractif et répulsif de  $\gamma$  dans  $\partial\Gamma$ ,  $\sigma = \{\gamma^+, \gamma^-\}$ . Il suffit de montrer que  $\gamma$  est elliptique dans  $T$ .

Supposons au contraire que  $\gamma$  soit hyperbolique dans  $T$ , et approximations  $(T, \Gamma)$  par une action petite et simpliciale  $(T_0, \Gamma)$  de sorte que  $\gamma$  reste hyperbolique dans  $T_0$  (voir corollaire 2.0.1 dans le chapitre 2). Comme  $\Gamma$  a un seul bout,  $\Gamma$  ne se scinde

pas sur un groupe fini, donc toutes les arêtes de  $T_0$  ont un stabilisateur infini et donc virtuellement cyclique. Soit  $e$  une arête dans l'axe de  $\gamma$  dans  $T_0$  et notons  $\{a, b\} = \Lambda\Gamma(e)$ .

La proposition 6.1.5 affirme que  $\{a, b\}$  sépare  $\gamma^+$  de  $\gamma^-$ . Le lemme 6.2.2 montre alors que  $\gamma^+, \gamma^- \in \partial\Gamma(2)$  et  $\gamma^+ \sim \gamma^- \sim a \sim b$ , ce qui contredit que  $\sigma = \{\gamma^+, \gamma^-\}$  est une classe d'équivalence de cardinal 2 ou une  $\approx$ -paire.  $\square$

**Lemme 6.2.4.** *Soit  $v$  un sommet de type surface. Les groupes périphériques de  $v$  ont un point fixe dans  $T$ .*

*Preuve.* Soit  $\sigma$  la classe d'équivalence correspondant à  $v$ , et  $\bar{\sigma}$  le collier associé. Par définition, un groupe périphérique de  $v$  est le stabilisateur d'un saut  $\{x, y\}$  de  $\bar{\sigma}$ .

La proposition 6.1.10 implique que soit  $x \approx y$ , soit  $x \sim y \in \sigma$ . Dans le premier cas,  $\text{Stab}\{x, y\}$  est le stabilisateur d'un sommet de type élémentaire, et on a déjà vu qu'il avait un point fixe dans toute action petite de  $\Gamma$  (lemme 6.2.3).

Supposons donc qu'on ait  $x \sim y \in \sigma$ , et soit  $\gamma$  un élément du stabilisateur de  $\{x, y\}$  d'ordre infini, et supposons qu'il soit hyperbolique dans  $T$ . Notant  $\gamma^+$  et  $\gamma^-$  les points fixes attractif et répulsif de  $\gamma$  dans  $\partial\Gamma$ , on a  $\{x, y\} = \{\gamma^+, \gamma^-\}$ . On approxime  $(T, \Gamma)$  par une action petite et simpliciale  $(T_0, \Gamma)$  dans laquelle  $\gamma$  est encore hyperbolique. Comme  $\Gamma$  a un seul bout, toute arête  $e$  de l'axe de  $\gamma$  a un stabilisateur infini et donc virtuellement cyclique. La proposition 6.1.5 implique que  $\Lambda\Gamma(e)$  sépare  $\gamma^+$  de  $\gamma^-$ . Le lemme 6.2.2 montre alors que  $\Lambda\Gamma(e) \subset \sigma$  et donc que  $\{\gamma^+, \gamma^-\}$  n'est pas un saut de  $\bar{\sigma}$  puisque  $\Lambda\Gamma(e)$  sépare  $\gamma^+$  de  $\gamma^-$ , ce qui est contradictoire.  $\square$

## Actions des groupes de type surface

**Définition.** *Soit  $v$  un sommet de type surface de  $S$ , et  $\Gamma(v)$  son stabilisateur. On note  $T_v$  le sous-arbre minimal de  $\Gamma(v)$  dans  $T$ .*

*Remarque.* Le sous-arbre minimal de  $\Gamma(v)$  est bien défini car si  $\Gamma(v)$  a un point fixe global, il est unique puisque  $(T, \Gamma)$  est petite.

**Lemme 6.2.5.** *Soit  $\Gamma_0$  un sous-groupe virtuellement cyclique de  $\Gamma$ , et soit  $v$  un sommet de type surface de  $S$  associé à la classe d'équivalence  $\sigma$ . On suppose que  $\Gamma_0$  fixe un arc non dégénéré dans  $T_v$ . Alors  $\Lambda\Gamma_0 \subset \sigma$ ,  $\Gamma_0 \subset \Gamma(v)$ , et  $\Lambda\Gamma_0$  n'est pas un saut de  $\bar{\sigma}$ .*

**Corollaire 6.2.6.** *Tout sous-groupe d'indice fini dans un groupe périphérique de  $\Gamma(v)$  a un unique point fixe dans  $T_v$ .*

*Démonstration du corollaire.* On sait que les groupes périphériques de  $\Gamma(v)$  sont elliptiques, ils ont donc un point fixe dans  $T_v$ . Puisque pour tout sous-groupe d'indice fini  $\Gamma_0$  d'un groupe périphérique de  $v$ ,  $\Lambda\Gamma_0$  est un saut de  $\bar{\sigma}$ , le lemme précédant empêche que  $\Gamma_0$  fixe un arc dans  $T_v$ .  $\square$

*Preuve du lemme 6.2.5.* Supposons qu'un sous-groupe virtuellement cyclique  $\Gamma_0$  de  $\Gamma$  fixe un arc non dégénéré dans  $T_v$ . Alors, il existe  $\gamma$  hyperbolique dans  $\Gamma(v)$  tel que  $\Gamma_0$  fixe un arc non dégénéré de l'axe de  $\gamma$ .

Le théorème d'approximation 2.0.1 du chapitre 2 implique qu'on peut approximer  $(T, \Gamma)$  par une petite action simpliciale  $(T_0, \Gamma)$  telle que  $\Gamma_0$  fixe un point dans  $T_0$ . En particulier, si  $T_0$  est assez proche de  $T$ , il est facile de vérifier que  $\Gamma_0$  fixe un arc non dégénéré de l'axe de  $\gamma$  dans  $T_0$ .

Comme  $T_0$  est simplicial, on peut appliquer la proposition 6.1.5 qui affirme que  $\Lambda\Gamma_0$  sépare  $\gamma^+$  de  $\gamma^-$ , où  $\gamma^+$  et  $\gamma^-$  sont les points fixes de  $\gamma$  dans  $\partial\Gamma$ . Comme  $\gamma \in \Gamma(v)$ ,  $\gamma^+$  et  $\gamma^-$  appartiennent au collier  $\bar{\sigma}$  associé à  $v$  (prop. 6.1.7). De plus, grâce à la proposition 6.1.10, on a  $\gamma^+ \sim \gamma^-$  ou  $\gamma^+ \approx \gamma^-$  puisque  $\bar{\sigma} \subset \partial\Gamma(2) \cup \partial\Gamma(3+)$ . Le lemme 6.2.2 implique que  $\gamma^+, \gamma^- \in \partial\Gamma(2)$  donc que  $\gamma^+, \gamma^- \in \sigma$  puisque  $\bar{\sigma} \setminus \sigma \subset \partial\Gamma(3+)$  (prop. 6.1.7). Il implique aussi que  $\Lambda\Gamma_0 \subset \sigma$ .

Maintenant, comme  $\Lambda\Gamma_0$  sépare  $\gamma^+$  de  $\gamma^-$ , et puisque la relation «  $\{x, z\}$  sépare  $y$  de  $t$  » est une relation d'ordre cyclique sur  $\bar{\sigma}$ , (prop. 6.1.7),  $\{\gamma^+, \gamma^-\}$  sépare les deux points de  $\Lambda\Gamma_0$  ce qui empêche  $\Lambda\Gamma_0$  d'être un saut.  $\square$

**Lemme 6.2.7.** *Si  $v \neq v'$  sont des sommets de type surface,  $T_v$  et  $T_{v'}$  s'intersectent en au plus un point.*

*Preuve.* Dans le cas contraire, il existe des éléments hyperboliques  $\gamma$  et  $\gamma'$  de  $\Gamma(v)$  et  $\Gamma(v')$  dont les axes s'intersectent en un arc non dégénéré. Lorsqu'on approxime  $T$  par une action  $(T_0, \Gamma)$  petite et simpliciale, les axes de  $\gamma$  et  $\gamma'$  dans  $T_0$  s'intersectent encore en un arc non dégénéré. Soit  $e$  une arête appartenant à leur intersection dans  $T_0$ . Comme  $\Gamma$  a un seul bout,  $\Gamma(e)$  est infini et donc virtuellement cyclique.

Notons  $\gamma^+$  et  $\gamma^-$  (resp.  $\gamma'^+$  et  $\gamma'^-$ ) les points fixes de  $\gamma$  (resp.  $\gamma'$ ) dans  $\partial\Gamma$ . Si  $\sigma$  et  $\sigma'$  notent les classes d'équivalence associées à  $v$  et  $v'$ , on a  $\gamma^+, \gamma^- \in \bar{\sigma}$  et  $\gamma'^+, \gamma'^- \in \bar{\sigma}'$ . La proposition 6.1.5 montre que  $\Lambda\Gamma(e) = \{a, b\}$  sépare  $\gamma^+$  de  $\gamma^-$ , et le lemme 6.2.2 conclut que  $a \sim b \sim \gamma^+ \sim \gamma^-$  et que  $\gamma^+, \gamma^- \in \sigma$  puisque  $\bar{\sigma} \setminus \sigma \subset \partial\Gamma(3+)$ . Le même raisonnement appliqué à  $\gamma'^+$  et  $\gamma'^-$  conclut que  $\gamma^+ \sim \gamma^- \sim \gamma'^+ \sim \gamma'^-$  et donc que  $\sigma = \sigma'$  et  $v = v'$ .  $\square$

### Les groupes de type rigide

**Lemme 6.2.8.** *Si  $v$  est un sommet de type rigide, alors  $\Gamma(v)$  a un point fixe dans  $T$ , et il est unique.*

*Preuve.* La maximalité du scindement JSJ affirme qu'un groupe de type rigide  $\Gamma(v)$  n'admet pas de scindement non trivial sur des groupes élémentaires dans lequel les stabilisateurs des arêtes adjacentes à  $v$  sont elliptiques. Si  $\Gamma(v)$  n'avait pas de point fixe global dans  $T$ , le théorème de scindement de Rips relatif ([BF2] th. 9.5) donnerait un tel scindement, ce qui serait contradictoire.

Ce point fixe est unique car  $\Gamma(v)$  n'est pas élémentaire et  $(T, \Gamma)$  est petite.  $\square$

### Associer des parties de $T$ aux sommets et arêtes de $S$

On a déjà associé un arbre  $T_v$  aux sommets de type surface.

**Définition.** *Soit  $e$  une arête orientée de  $S$  telle que son sommet terminal  $t(e)$  ne soit pas de type élémentaire. On note  $p_e$  l'unique point fixe de  $\Gamma(t(e))$  dans  $T$  si  $t(e)$  est un sommet de type rigide, et l'unique point fixe de  $\Gamma(t(e))$  dans  $T_{t(e)}$  si  $t(e)$  est de type surface.*

*Si  $e$  est incidente sur un sommet de type élémentaire,  $\bar{e}$  est incidente sur un sommet de type rigide ou surface. On peut donc définir  $p_e = p_{\bar{e}}$ .*

**Définition.** – *Si  $e$  est une arête de  $S$ , on lui associe l'intervalle éventuellement dégénéré de  $T$  défini par*

$$I_e = [p_{\bar{e}}, p_e].$$

– *Si  $v$  est un sommet de type élémentaire, on lui associe le sous-arbre  $K_v$  de  $T$  défini par*

$$K_v = \text{Conv}\{p_e \mid o(e) = v\}.$$

– *Si  $v$  est un sommet de type rigide, on lui associe l'unique point  $r_v$  de  $T$  fixé par  $\Gamma_v$ .*

*Remarque.* Comme un sommet de type élémentaire est de valence finie dans  $S$ ,  $K_v$  est un arbre fini.

La proposition suivante montre que les parties associées à des éléments distincts de  $S$  ne peuvent pas trop se mélanger.

**Proposition 6.2.9.** *Si  $A$  est un sommet ou une arête de  $S$ , on note  $P_A$  la partie de  $T$  qui lui correspond, c'est à dire  $T_A, K_A, r_A$  ou  $I_A$  selon la nature de  $A$ .*

*Si  $P_A \cap P_{A'}$  contient un arc non dégénéré, alors  $A = A'$ .*

*Remarque.* La réunion des ensembles  $P_A$  pour  $A$  arête ou sommet de  $S$  est connexe puisque pour chaque arête orientée  $e$ ,  $I_e$  intersecte  $P_{t(e)}$ . De plus, cette réunion est  $\Gamma$ -invariante. Elle recouvre donc  $T$ .

*Démonstration de la proposition.* Le cas où  $A$  est un sommet de type rigide ou une arête incidente sur un sommet de type élémentaire est trivial car alors  $P_A$  est réduit à un point. Si  $A$  et  $A'$  sont des sommets de type surface, il suffit d'appliquer le lemme 6.2.7.

Supposons maintenant que  $A = v$  est un sommet de type surface, et que  $A'$  est soit une arête qui n'est pas adjacente à un sommet de type élémentaire, soit un sommet de type élémentaire. Dans ces deux cas, un sous-groupe d'indice fini  $\Gamma_0$  de  $\Gamma(A')$  fixe  $P_{A'}$  point par point. Notons  $\sigma$  la classe d'équivalence associée à  $v$ . Si  $T_v \cap P_{A'}$  contient un arc non dégénéré, le lemme 6.2.5 montre que  $\Lambda\Gamma(A') = \Lambda\Gamma_0 \subset \sigma$  et que  $\Lambda\Gamma(A')$  n'est pas un saut dans  $\bar{\sigma}$ . Ceci est impossible lorsque  $A'$  est un sommet de type élémentaire puisque  $\Lambda\Gamma(A')$  correspond soit à  $\sim$ -classe d'équivalence de cardinal 2, soit une  $\approx$ -paire. Lorsque  $A'$  est une arête, elle est adjacente à un sommet  $v'$  de type surface, et si  $\sigma'$  note la classe d'équivalence associée à  $v'$ ,  $\Lambda\Gamma(A')$  est un saut de  $\bar{\sigma}'$ . Comme  $\bar{\sigma}' \setminus \sigma' \subset \partial\Gamma(3+)$ , et puisque  $\Lambda\Gamma(A') \subset \sigma \subset \partial\Gamma(2)$ ,  $\Lambda\Gamma(A') \subset \sigma'$  d'où  $\sigma' \cap \sigma \neq \emptyset$  et  $v = v'$ . Mais alors le fait que  $\Lambda\Gamma(A')$  soit un saut dans  $\bar{\sigma}'$  et pas dans  $\bar{\sigma}$  donne un contradiction.

Il reste à traiter le cas où  $A$  et  $A'$  sont tous deux soit des arêtes qui ne sont pas adjacentes à des sommets de type élémentaire, soit des sommets de type élémentaire. On sait que deux arêtes de  $S$  ont des stabilisateurs commensurables si et seulement si elles sont adjacentes à un même sommet de type élémentaire (voir th. 6.1.1). En associant à  $A$  et à  $A'$  une arête adjacente lorsque  $A$  ou  $A'$  est un sommet de type élémentaire, on en déduit tout de suite que  $\Gamma(A)$  et  $\Gamma(A')$  sont commensurables si et seulement si les arêtes associées sont adjacentes à un même sommet de type élémentaire ce qui n'est possible que lorsque  $A = A'$  puisque deux sommets de  $S$  séparés par une arête sont de type différents. Comme  $P_A$  et  $P_{A'}$  sont fixés point par point par des sous-groupes d'indice fini de  $\Gamma(A)$  et  $\Gamma(A')$ , si  $P_A \cap P_{A'}$  contenait un arc non dégénéré pour  $A \neq A'$ ,  $(T, \Gamma)$  ne serait pas petite.  $\square$

### Construction du graphe d'actions

Considérons l'action  $(S', \Gamma)$  construite à partir de  $S$  et de  $T$  de la manière suivante :  $S'$  est la réunion disjointe

- des arêtes de  $S$ , auxquelles on donne une longueur égale à 1
- d'une copie de l'unique point  $r_v$  de  $T$  fixé par chaque groupe de type rigide
- d'une copie des arbres  $T_v$  pour  $v$  sommet de type surface
- d'une copie des arbres finis  $K_v$  pour  $v$  de type élémentaire

où on recolle le sommet terminal de chaque arête orientée  $e$  de  $S$  sur le point  $p_e$  vu comme élément de l'ensemble associé à  $t(e)$ .

On montre sans difficulté que  $S'$  est un arbre réel et correspond à un graphe d'actions comme dans le théorème 6.1.2. On définit maintenant une application  $f$  de  $S'$  dans  $T$  :

- $f$  est l'identité sur les ensembles  $T_v$ ,  $K_v$  et  $r_v$  pour tout sommet  $v$  de  $S$
- $f$  envoie linéairement chaque arête  $e$  de  $S$  sur le segment  $I_e = [p_e, p_{\bar{e}}]$ .

Pour démontrer le théorème 6.1.2, il suffit maintenant de montrer que  $f$  préserve l'alignement. En effet, il suffira ensuite de donner aux arêtes  $e$  de  $S$  la longueur (éventuellement nulle) du segment  $[p_{\bar{e}}, p_e]$  de  $T$  pour que  $f$  devienne une isométrie.

**Lemme 6.2.10.** *L'application  $f$  préserve l'alignement.*

*Preuve.* Pour démontrer que  $f$  préserve l'alignement, il suffit de démontrer la propriété suivante : si  $[a, a']$  est un segment de  $S'$ , et si  $[b, b'] \subset ]a, a'[$  est un sous-intervalle maximal de  $[a, a']$  tel que  $f$  soit constante en restriction à  $[b, b']$ , alors le germe de  $T$  en  $f(b)$  défini par  $f|_{[b, a]}$  est différent du germe de  $T$  en  $f(b')$  défini par  $f|_{[b', a']}$ .

En effet, supposons au contraire que  $f$  ne préserve pas l'alignement c'est à dire que l'image d'un segment  $[a, a']$  de  $S$  ne soit pas incluse dans  $[f(a), f(a')]$ . Soit  $p$  un point extrémal dans le compact  $f([a, a'])$  distinct de  $f(a)$  et  $f(a')$ . Il suffit de considérer  $b$  le point le plus proche de  $a$  dans  $[a, a']$  tel que  $f(b) = p$ , et  $b'$  le point le plus proche de  $a'$  tel que  $f$  soit constante sur  $[b, b']$  pour montrer que la propriété est fautive.

Soient donc  $[a, a']$  et  $[b, b'] \subset ]a, a'[$  des segments de  $S$  tels que  $[b, b']$  soit un sous-intervalle maximal de  $[a, a']$  tel que  $f$  soit constante en restriction à  $[b, b']$ . Quitte à remplacer  $a$  par un point de  $[a, b]$ , on peut supposer que  $[a, b]$  appartient à une partie  $P$  de  $S'$  correspondant à une arête ou à un sommet de  $S$ . On peut de même demander que  $[a', b']$  soit contenu dans une partie  $P'$  de  $S'$  correspondant à une arête ou à un sommet de  $S$ .



On applique alors la proposition 6.2.9 qui nous assure que si  $P \neq P'$ ,  $f([a, b]) \cap f([a', b']) \subset f(P) \cap f(P')$  est réduit à un point. Il nous reste donc le cas où  $P = P'$ , qui est facile car  $f$  est soit injective soit constante en restriction à  $P$ .  $\square$

### Les petites actions minimales d'un groupe hyperbolique à un bout sont géométriques

**Corollaire 6.0.1.** *Toute petite action minimale d'un groupe hyperbolique à un bout sur un arbre réel est géométrique.*

*Démonstration du corollaire.* Voici un énoncé du théorème de Skora.

**Théorème 6.2.11 ([Sko]).** *Soit  $\Gamma$  un groupe fuchsien convexe-cocompact non élémentaire. Soit  $(T, \Gamma)$  une petite action minimale telle que les groupes périphériques de  $\Gamma$  aient un point fixe dans  $T$ .*

*Alors,  $(T, \Gamma)$  est géométrique et peut être obtenue comme l'espace des feuilles d'un feuilletage mesuré  $\Gamma$ -invariant sur le cœur convexe de  $\Gamma$  tel que les composantes du bord soient incluses dans des feuilles.*

Ce théorème a été démontré par R. K. Skora dans le cadre des groupes de surfaces hyperboliques à bord. On en déduit facilement l'énoncé plus général donné plus haut. En effet, le noyau  $N$  de l'action de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{H}_2$  étant fini et normal, il est facile de voir qu'il fixe tous les points de  $T$  dans une action minimale  $(T, \Gamma)$ . On se ramène ainsi au cas où  $\Gamma$  est le groupe fondamental d'un orbifold hyperbolique à bord  $O$ . Mais on sait dans ce cas par le lemme de Selberg que  $O$  admet un revêtement fini qui est une surface hyperbolique à bord  $S$  (voir par exemple [Zie] p.132). On peut choisir ce revêtement fini galoisien de sorte que  $\pi_1(S) \triangleleft \Gamma$ . Le théorème de Skora appliqué à  $(T, \pi_1(S))$  montre que  $T$  peut être obtenue comme l'action associée à une lamination géodésique mesurée  $\Lambda$  sur  $S$ . Comme  $(T, \pi_1(S))$  est invariante par  $\Gamma/\pi_1(S)$ , on montre facilement que  $\Lambda$  est  $\Gamma/\pi_1(S)$ -invariante, et passe ainsi au quotient en une lamination géodésique sur  $O$ . L'action associée à cette lamination est bien  $(T, \Gamma)$  puisque  $S$  et  $O$  ont même revêtement universel.

Pour démontrer le corollaire, il suffit donc d'appliquer le lemme 6.2.12.  $\square$

**Lemme 6.2.12.** *Soit  $\Gamma$  un groupe de présentation finie, et  $Q$  un graphe d'actions fini dont le groupe fondamental est  $\Gamma$ . On suppose que les groupes d'arêtes de  $Q$  sont de type fini et que les actions de sommets sont géométriques.*

Alors, l'action  $(T_Q, \Gamma)$  associée à  $Q$  est géométrique.

*Remarques.*

- Comme  $\Gamma$  et les groupes d'arêtes de  $Q$  sont de type fini, les groupes des sommets de  $Q$  sont aussi de type fini ([Coh, p.218]), ce qui permet de parler d'action géométrique. En fait, comme on a supposé ici que  $\Gamma$  est de présentation finie, le fait que les groupes de sommets sont de type fini implique que les groupes d'arêtes sont de type fini.
- Dans [GL], D. Gaboriau et G. Levitt décrivent un moyen d'obtenir des action non géométriques pour  $\Gamma = F_n$  : il existe des actions  $(T, \Gamma)$  pour lesquelles le sous-arbre minimal  $T_\Gamma$  de  $T$  n'est pas fermé et telle que  $(T_\Gamma, \Gamma)$  est géométrique : on peut prendre par exemple le complété d'une action minimale géométrique pour laquelle les points de branchement sont denses. Le sous-arbre minimal ne peut pas être complet par le théorème de Baire ([GL]). Soit  $*$  un point de  $\overline{T_\Gamma} \setminus T_\Gamma$ , et considérons le graphe d'actions  $\mathcal{G}$  formé d'un seul sommet et d'une seule arête, dont l'action de sommet est  $(T, \Gamma)$ , le groupe de l'arête  $e$  est trivial, et ses points d'attache  $p_e$  et  $p_{\bar{e}}$  sont  $*$ . Le groupe fondamental de  $\mathcal{G}$  est donc  $\Gamma_{*\{1\}}$ . On note  $T_{\mathcal{G}}$  l'action associée. Dans le cas où  $\Gamma$  est un groupe libre, [GL] montre que  $T_{\mathcal{G}}$  n'est pas géométrique. Mais dans ce cas,  $(T, \Gamma)$  elle même ne peut pas être géométrique.

*Démonstration du lemme.* On démontre que  $(T_Q, \Gamma)$  n'est pas une limite forte non triviale en s'inspirant des preuves des théorèmes 2.5 et 5.2 de [GL] qui démontrent respectivement qu'une action géométrique n'est pas une limite forte non triviale et qu'une action simpliciale est géométrique si et seulement si elle est finiment supportée et a des stabilisateurs d'arêtes de type fini.

Supposons donc qu'on ait une suite d'actions  $(T_i, \Gamma)$  finiment supportées convergent fortement vers  $(T_Q, \Gamma)$ . On note  $f_{ij} : T_i \rightarrow T_j$  et  $f_i : T_i \rightarrow T_Q$  les morphismes d'arbres réels correspondant. Soit  $\tau$  un sous-arbre maximal de  $Q$ . Ceci permet de voir  $\Gamma_v$  comme un sous-groupe de  $\Gamma$ , et de voir  $T_v$  comme un sous-arbre  $\Gamma_v$ -invariant de  $(T, \Gamma)$ .

Soit  $K_v$  un sous-arbre de  $T_v$  tel que pour tout  $g$  appartenant à un ensemble fini de générateurs  $S_v$  de  $\Gamma_v$ ,  $g.K_v \cap K_v \neq \emptyset$  et tel que  $K_v$  coupe toutes les orbites de  $T_v$  (on ne suppose pas que  $(T_v, \Gamma_v)$  est minimale). Comme  $T_i$  converge fortement vers  $T_Q$ , pour  $i$  assez grand, il existe des sous-arbres finis  $K_v^i \subset T_i$  tels que  $f_i$  et  $f_{ij}$  soient des isométries de  $K_v^i \cup S_v.K_v^i$  sur  $K_v \cup S_v.K_v$  et  $K_v^j \cup S_v^j.K_v^j$  pour tout  $v$ . Notons  $T_v^i$  le sous-ensemble de  $T_i$  défini par  $T_v^i = \Gamma_v.K_v^i$ ; c'est un sous-arbre de  $T_i$  car  $K_v^i \cup S_v.K_v^i$

est connexe.

Les morphismes induits par  $f_{ij}$  et  $f_i$  en restriction à  $T_v^i$  font que  $(T_v^i, \Gamma_v)$  converge fortement vers  $(T_v, \Gamma_v)$ . Comme  $(T_v, \Gamma_v)$  est géométrique,  $f_i$  induit une isométrie de  $T_v^i$  dans  $T_v$  pour  $i$  assez grand.

Pour chaque arête  $e$  de  $\tau$ , notons  $\tilde{e}$  l'arête de  $T_Q$  qui forme le pont entre  $T_{o(\tilde{e})} = T_{o(e)}$  et  $T_{t(\tilde{e})} = T_{t(e)}$  (si c'est une arête de longueur 0,  $\tilde{e}$  s'identifie avec leur unique point d'intersection). Si  $e$  est une arête de  $Q \setminus \tau$ , on choisit une orientation de  $e$  et un relevé  $\tilde{e}$  de  $e$  dans  $T_Q$  tel que  $o(\tilde{e}) \in T_{o(e)}$ . On choisit aussi  $T_{t(\tilde{e})}$  un relevé de  $T_{t(e)}$  dans  $T_Q$  qui contient le sommet terminal de  $\tilde{e}$ . On prend comme relevé de  $\tilde{e}$  l'arête  $\tilde{\tilde{e}}$  et on prend  $T_{t(\tilde{\tilde{e}})} = T_{o(\tilde{e})}$ . Ceci permet d'identifier  $\Gamma_e$  avec le stabilisateur de  $\tilde{e}$  dans  $\Gamma$ . Chaque arbre  $T_{t(\tilde{e})}$  a naturellement un arbre correspondant  $T_{t(\tilde{\tilde{e}})}^i$  dans  $T_i$  qui s'envoie isométriquement sur  $T_{t(\tilde{\tilde{e}})}$  par  $f_i$ .

Dans le cas où  $e$  est une arête de longueur non nulle,  $T_{o(\tilde{e})}^i$  et  $T_{t(\tilde{\tilde{e}})}^i$  ne s'intersectent pas puisque leurs images par  $f_i$  ne s'intersectent pas. Dans le cas contraire,  $T_{o(\tilde{e})}^i$  et  $T_{t(\tilde{\tilde{e}})}^i$  s'intersectent en au plus au point car leurs images par  $f_i$  s'intersectent en exactement un point et car  $f_i$  est une isométrie en restriction à ces sous-arbres.

Notons  $p_e$  l'extrémité terminale de  $\tilde{e}$  dans  $T_Q$  et  $p_e^i$  l'image de  $p_e$  par l'isométrie inverse de  $(f_i)|_{T_v^i}$ . Pour  $i$  assez grand,  $f_i$  est une isométrie en restriction à  $\tilde{e}_i = [p_e^i, p_{\tilde{e}}^i]$ . On en déduit que si  $p_e = p_{\tilde{e}}$  alors  $p_e^i = p_{\tilde{e}}^i$ , et que  $\tilde{e}_i$  est le pont entre  $T_{o(\tilde{e})}^i$  et  $T_{t(\tilde{\tilde{e}})}^i$  (ou leur unique point d'intersection lorsque  $l(e) = 0$ ) puisque si  $\tilde{e}_i$  intersectait  $T_{o(\tilde{e})}^i$  en un segment non dégénéré,  $\tilde{e}$  intersecterait  $T_{o(\tilde{e})}$  en un segment non dégénéré. L'application  $f_i$  est donc une isométrie pour  $i$  assez grand en restriction à la réunion des  $\tilde{e}_i$  et des  $T_{t(\tilde{\tilde{e}})}^i$  pour  $e$  arête orientée de  $Q$ .

Si  $g$  appartient à un ensemble fini  $S_e$  de générateurs de  $\Gamma_e$ ,  $g$  fixe  $\tilde{e}_i$  pour  $i$  assez grand puisque  $f_i$  plongera isométriquement  $g \cdot \tilde{e}_i \cup \tilde{e}_i$ . On en déduit que pour  $i$  assez grand, le stabilisateur de  $\tilde{e}_i$  contient  $\Gamma_e$ . (En fait cette condition est automatique à partir du fait que  $f_i$  induit une isométrie  $\Gamma_v$ -équivariante entre  $T_v^i$  et  $T_v$ ).

Soit  $x \in T_v$ , et soit  $x_i \in T_v^i$  l'unique point tel que  $f_i(x_i) = x$ . On veut démontrer que  $\text{Stab}_\Gamma x \subset \text{Stab}_\Gamma x_i$ . Si  $x$  n'est pas dans l'orbite des points  $p_e$  pour  $e$  incidente sur  $v$ , c'est automatique puisqu'alors  $\text{Stab}_\Gamma x \subset \Gamma_v$ . Dans le cas contraire, le stabilisateur de  $x$  correspond aux mots réduits  $g = r_0 e_1 r_1 e_2 \dots e_q r_q$  de  $Q$  pour un chemin  $e_1 e_2 \dots e_q$  et des éléments  $r_k \in \Gamma_{t(e_k)} = \Gamma_{o(e_{k+1})}$  tels que  $l(e_1) = \dots = l(e_q) = 0$  et  $x = r_0 \cdot p_{\tilde{e}_1}$ ,  $p_{\tilde{e}_k} = r_k \cdot p_{\tilde{e}_{k+1}}$  et  $p_{e_q} = r_q \cdot x$  (voir section 2.4). Comme  $\tilde{e}$  est réduite à un point lorsque  $l(e) = 0$ , et comme  $p_{\tilde{e}} = r_i \cdot p_{\tilde{e}'}$  implique que  $p_e^i = r_i \cdot p_{e'}^i$ ,  $x_i$  est bien fixé par  $g$  dans  $T_i$  si  $g$  fixe  $x$  dans  $T_Q$ .

On veut maintenant définir une section  $s_i : T \rightarrow T_i$  de  $f_i$ . On définit  $s_i$  sur  $T_v$  et  $\tilde{e}$  par l'isométrie inverse de  $f_i$ . On veut la prolonger par équivariance à  $T_Q$  qui est la réunion des  $\Gamma.T_v$  et des  $\Gamma.\tilde{e}$  pour  $v, e$  dans  $Q$ . Ceci est possible car le stabilisateur d'un point de  $T_v$  ou de  $T_{\tilde{e}}$  est contenu dans le stabilisateur de son image par  $s_i$ .

Cette section est un morphisme d'arbre réels puisque elle est isométrique en restriction à la réunion des  $T_v$  et  $\tilde{e}$  pour tout sommet  $v$  et toute arête  $v$  de  $Q$ . Elle diminue donc les distances. Comme  $f_i \circ s_i = Id$ ,  $f_i$  est une isométrie en restriction à l'image de  $s_i$ . Comme  $(T_i, \Gamma)$  est finiment supportée, il existe  $i$  assez grand pour qu'un sous-arbre fini  $K_i$  de  $T_i$  rencontrant toutes les orbites soit isométriquement plongé dans  $T_Q$  par  $f_i$ . Alors, l'image de  $s_i$  est égale à  $T_i$  tout entier, et  $f_i$  est donc une isométrie.  $\square$

# Bibliographie

- [AlBa] R. ALPERIN, H. BASS. *Length functions of group actions on  $\Lambda$ -trees*, in Combinatorial group theory and topology (S. M. Gersten, J. R. Stallings éd.), Ann. Math. Studies 111 (1987), Princeton Univ. Press.
- [Bass] H. BASS. *Covering theory for graph of groups*, Journal of Pure and Applied Algebra **89** (1993), 3-47.
- [BJ] H. BASS, R. JIANG. *Automorphism groups of tree actions and of graph of groups*, J. Pure & Appl. Alg. **112**, 109-155.
- [Be] M. BESTVINA.  *$\mathbb{R}$ -trees in topology, geometry, and group theory*, Prépublication (1997).
- [BF1] M. BESTVINA & M. FEIGN. *Bounding the complexity of simplicial group actions on trees*, Invent. Math. **103** (1991) 449-469.
- [BF2] M. BESTVINA & M. FEIGN. *Stable action on  $\mathbb{R}$ -trees*, Inv. Math. **121**, (1995) 287-321
- [BF3] M. BESTVINA & M. FEIGN. *Outer limits*, prépublication, (Oct. 92).
- [BFH] M. BESTVINA, M. FEIGN, & M. HANDEL. *Laminations, trees, and irreducible automorphisms of free groups*, GAFA **7** (1997), 215-244.
- [BH] M. BESTVINA, & M. HANDEL. *Train tracks for automorphisms of free group*, Ann. Math. **135** (1992), 1-51.
- [BM] M. BESTVINA & G. MESS. *The boundary of negatively curved groups*, J. Amer. Math. Soc., **4** (1991) 469-481.
- [Bo1] B. H. BOWDITCH. *Treelike structures arising from continua and convergence groups*, prépublication 1995.
- [Bo2] B. H. BOWDITCH. *Cut points and canonical splittings of hyperbolic groups*, prépublication 1995, Southampton.
- [Bo3] B. H. BOWDITCH. *Group actions on trees and dendrons*, prépublication 1995, Southampton.

- [Bo4] B. H. BOWDITCH. *Connectedness properties of limit sets*, prépublication 1996, Melbourne.
- [Coh] D. E. COHEN *Combinatorial group theory, a topological approach*, London Math. Soc. Stud. Texts, vol. 14 (1989) Cambridge Univ. Press.
- [CL] M. COHEN & M. LUSTIG. *Very small group actions on  $\mathbb{R}$ -trees and Dehn twist automorphisms*, *Topology* **34** (1995) 575–617.
- [CuMo] M. CULLER & J.W. MORGAN. *Group actions on  $\mathbb{R}$ -trees*, *Proc. London Math. Soc.* **55** (1987), 571–604.
- [CV1] M. CULLER & K. VOGTMANN. *Moduli of graphs and outer automorphisms of free groups*, *Invent. math.* **84** (19986), 91–119.
- [CV2] M. CULLER & K. VOGTMANN. *The boundary of outer-space in rank two*, in *Arboreal group theory* (R. C. Alperin éd.) Springer-Verlag 1991.
- [Coo] D. COOPER. *Automorphisms of free groups have finitely generated fixed point set* *J. Algebra* (**111**) (1987), 453–456.
- [DaNo] C. DANTHONY & A. NOGUEIRA. *Measured foliations on nonorientable surfaces* *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, **23**, 4ème serie (1990), 469–494.
- [DiVe] W. DICKS & E. VENTURA. *The group fixed by a family of injective endomorphisms of a free group*, *Contemp. Math.* **195** (1996)
- [DuSa] M. J. DUNWOODY & M. E. SAGEEV. *JSJ-splittings for finitely presented groups over slender groups* Prépublication (1996).
- [FLP] A. FATHI, F. LAUDENBACH & V. POENARU. *Travaux de Thurston sur les surfaces*, *Astérisque* **66–67**, Soc. Math. France, 1979.
- [FuPa] K. FUJIWARA & P. PAPASOGLU. *JSJ-decompositions of finitely presented groups and complexes of groups* Prépublication (1997).
- [Gab1] D. GABORIAU. *Dynamique des systèmes d'isométries, sur les bouts des orbites*, *Invent. Math.* **126** (1996) 297–318.
- [Gab2] D. GABORIAU. *Générateurs indépendants pour les systèmes d'isométries de dimension un*, *Annales de l'institut Fourier* **47** (1997), 101-122.
- [GL] D. GABORIAU AND G. LEVITT. *Rank of actions on  $\mathbb{R}$ -trees*, *Ann. Sc. E.N.S.* **28** (1995), 549–570.
- [GLL] D. GABORIAU, G. LEVITT, & M. LUSTIG. *A dendrological proof of the scott conjecture*, à paraître dans *Proc. Edim. Math. Soc.*

- [GLP1] D. GABORIAU, G. LEVITT & F. PAULIN. *Pseudogroups of isometries of  $\mathbb{R}$ , and E. Rips' Theorem on free actions on  $\mathbb{R}$ -trees*, Israel J. Math. **87** (1994) 403–428.
- [GLP2] D. GABORIAU, G. LEVITT & F. PAULIN. *Pseudogroups of isometries of  $\mathbb{R}$  : reconstruction of free actions on  $\mathbb{R}$ -trees*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **15** (1995) 633–652.
- [GJLL] D. GABORIAU, A. JAEGER, G. LEVITT, & M. LUSTIG. *An index for counting fixed points of automorphisms of free groups* à paraître dans Duke Math. Jour.
- [GhHa] E. GHYS & P. DE LA HARPE. *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, Progr. in Math. **83**, Birkhäuser 1990.
- [Gus] P. GUSMÃO. *Groupes et feuilletages de codimension 1*, Thèse de l'université de Toulouse III (1993).
- [JaSh] W. JACO & P. B. SHALEN. *Seifert fibered spaces in 3-manifolds*, Memoirs of the AMS **220** (1979).
- [Jo] K. JOHANNSON. *Homotopy equivalence of 3-manifolds with boundary*, Springer lecture notes in mathematics **761** Springer Verlag, Berlin (1979).
- [Kea] M. KEANE. *Non-ergodic interval exchange transformations*, Israel J. Math. **26** (1977), 188–196.
- [KeNe] H. B. KEYNES & D. NEWTON. *A minimal non-uniquely ergodic interval exchange transformation*, Math. Z. **148** (1976), 101–105.
- [Lev1] G. LEVITT. *1-formes fermées singulières et groupe fondamental*, Invent. Math. **88** (1987), 635–667.
- [Lev2] G. LEVITT. *La dynamique des pseudogroupes de rotations*, Invent. Math. **113** (1992), 633–670.
- [Lev3] G. LEVITT. *Constructing free actions on  $\mathbb{R}$ -trees*, Duke mathematical journal **69** (1993) 615–633.
- [Lev4] G. LEVITT. *Graphs of actions on  $\mathbb{R}$ -trees*, Comment. Math. Helvetici **69** (1994) 28–38.
- [Lev5] G. LEVITT. *Non nesting actions on  $\mathbb{R}$ -trees*, à paraître dans Bull. Lond. Math. Soc.
- [LP] G. LEVITT & F. PAULIN. *Geometric group actions on trees*, Amer. Jour. of Math. **119** (1997), 83–102.

- [Lus1] M. LUSTIG. *Automorphisms, train track, and non simplicial  $\mathbb{R}$ -tree actions*, à paraître dans Comm. in Algebra.
- [Lus2] M. LUSTIG. En préparation.
- [Mar] R. MARTIN. *Non-uniquely ergodic foliations of thin type* Erg. Th. & Dyn. Sys. **17** (1997), 667–674.
- [Mas] H. MASUR. *Interval exchange transformations and measured foliations*, Ann. Math. **115** (1982), 169–200.
- [Mor] J. W. MORGAN.  *$\Lambda$ -trees and their applications*, Bull. AMS **26** (1992), 87–112.
- [MS1] J. W. MORGAN & P. B. SHALEN. *Valuations, trees and degeneration of hyperbolic structures I*, Ann. Math. **122** (1985), 398–476.
- [MS2] J. W. MORGAN & P. B. SHALEN. *Valuations, trees and degeneration of hyperbolic structures II, III*, Ann. Math. **126** (1988), 403–519.
- [Pau1] F. PAULIN. *Topologie de Gromov équivariante, structures hyperboliques et arbres réels*, Inv. Math. **94** (1998) 53–80.
- [Pau2] F. PAULIN. *The Gromov topology on  $\mathbb{R}$ -trees*, Topology and its applications **32** (1989) 197–221.
- [Pau3] F. PAULIN. *De la géométrie et la dynamique des groupes discrets*, Habilitation à diriger les recherches, E.N.S. Lyon, 28 juin 95.
- [Pau4] F. PAULIN. *Actions de groupes sur les arbres*, Séminaire Bourbaki **808** (Nov. 1995).
- [Pau5] F. PAULIN. *Automorphismes extérieurs des groupes hyperboliques*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. **30**, (1997), 147–167.
- [RiSe] E. RIPS & Z. SELA. *Cyclic splittings of finitely presented groups and the canonical JSJ decomposition*, prépublication.
- [Sel1] Z. SELA. *Endomorphisms of hyperbolic groups : Hopf property I*, prépublication.
- [Sel2] Z. SELA. *Structure and rigidity of hyperbolic groups and discrete groups in rank 1 Lie groups II*, GAFA **7** (1997), 561–593.
- [Sel3] Z. SELA. *Acyindrical accessibility* Invent. Math. **129** (1997), no. 3, 527–565.
- [Ser] J. P. SERRE. *Arbres, amalgames,  $SL_2$*  Astérisque **46**, Soc. Math. Franc. (1983).
- [Sha1] P. SHALEN. *Dendrology of groups, an introduction* Essays in group theory, (S. M. Gersten éd.), MSRI Publ., vol. 8, Springer-Verlag, 1987, pp. 265–319.



- [Sha2] P. SHALEN. *Dendrology and its applications*, Group theory from a geometrical viewpoint, (E. Ghys, A. Haefliger, & A. Verjovski éd.), World scientific, 1991.
- [Sko] R. K. SKORA. *Splittings of surfaces*, J. Am. Math. Soc. **9** (1996) 605–616.
- [Sta] J. R. STALLINGS. *Topology of finite graphs*, Invent. Math. **71** (1983) 551–565.
- [Swa] G. A. SWARUP. *On the cut point conjecture*, Electronic Research Announcement.
- [Vee] W. VEECH. *Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps*, Ann. Math. **115** (1982), 201–242.
- [Zie] H. ZIESCHANG, E. VOGT & H. D. COLDEWEY. *Surfaces and planar discontinuous groups* Lecture notes in Math. **835**.



## Résumé

Ce travail est essentiellement consacré à l'étude des actions de groupes sur des arbres réels. Ces objets jouent un rôle fondamental dans la théorie géométrique des groupes.

Dans la première partie, nous démontrons le raffinement suivant du théorème de scindement de Rips : toute action stable d'un groupe de présentation finie  $G$  sur un arbre réel peut être approximée par une action de  $G$  sur un arbre simplicial avec un bon contrôle sur les stabilisateurs d'arêtes.

Dans une seconde partie, nous étudions la dynamique de  $\text{Out}(F_n)$  sur la frontière  $\partial CV_n$  de l'outre-espace : nous montrons qu'il existe un fermé propre  $\mathcal{F}_n$  dans  $\partial CV_n$ , invariant par  $\text{Out}(F_n)$ , sur le complémentaire duquel  $\text{Out}(F_n)$  agit proprement discontinûment. Nous démontrons ensuite qu'il existe un unique fermé invariant non vide minimal  $\mathcal{M}_n$  contenu dans  $\mathcal{F}_n$ . Il contient toutes les actions simpliciales appartenant à  $\mathcal{F}_n$  et toutes les actions ayant au plus  $n - 1$  mesures ergodiques.

Dans une troisième partie, nous démontrons qu'on peut « lire » toute petite action d'un groupe hyperbolique à un bout dans son scindement JSJ. Comme corollaire, on obtient la généralisation suivante du théorème de Skora : toute petite action d'un groupe hyperbolique à un bout est géométrique.

Dans une quatrième partie, nous construisons un semi-flot dans l'outre-espace permettant d'obtenir des simplexes de dimension maximale dans  $\partial CV_n$ .

Enfin, dans une cinquième partie, nous démontrons la finitude de l'ensemble des pseudo-groupes d'isométries non homogènes contenant un pseudo-groupe minimal donné.

## Abstract

This work mainly deals with group actions on  $\mathbb{R}$ -trees. These objects play an important part in geometric group theory.

In the first part of this thesis, we prove the following refinement of Rips' splitting theorem for stable actions on  $\mathbb{R}$ -trees : every stable action of a finitely presented group  $G$  can be approximated by an action of  $G$  on a simplicial tree with a good control over edge stabilizers.

In a second part, we study the dynamics of  $\text{Out}(F_n)$  on the boundary  $\partial CV_n$  of outer-space : we show that there exists a proper closed  $\text{Out}(F_n)$ -invariant subset  $\mathcal{F}_n$  of  $\partial CV_n$  such that  $\text{Out}(F_n)$  acts properly discontinuously on the complementary open set. Moreover, we show that there is precisely one minimal non-empty closed invariant subset  $\mathcal{M}_n$  contained in  $\mathcal{F}_n$ . We prove that  $\mathcal{M}_n$  contains every simplicial action lying in  $\mathcal{F}_n$  and every action having at most  $n - 1$  ergodic measures.

In a third part, we show that every small action of a one ended hyperbolic group  $\Gamma$  on an  $\mathbb{R}$ -tree can be “read” from its JSJ splitting. As a corollary, we obtain a generalisation of a theorem by Skora : every small action of a one-ended hyperbolic group is geometric.

In a fourth part, we construct a semi-flow in outer-space which provides new simplices of maximal dimension in the boundary of outer-space.

Finally, in a fifth part, we prove the finiteness of the set of non-homogeneous pseudo-groups of isometries containing a given minimal pseudo-group of isometries.

**Mots-clés :** Arbres réels, approximations, actions stables, théorème de Rips, scindements, théorie de Bass-Serre, scindement JSJ, outre-espace, pseudo-groupes d'isométries.