

Core and intersection number for group actions on trees. Cœur et nombre d'intersection pour les actions de groupes sur les arbres.

Vincent Guirardel

3 juillet 2006

Résumé

On construit une sorte de *cœur convexe* pour le produit de deux actions d'un groupe sur des arbres réels. Cette construction géométrique généralise et unifie le nombre d'intersection de deux courbes ou de deux feuilletages mesurés sur une surface, le nombre d'intersection de Scott de deux scindements, et l'apparition de surfaces dans la construction du scindement JSJ de Fujiwara-Papasoglu. En particulier, cette construction donne une interprétation topologique du nombre d'intersection analogue à la définition du nombre d'intersection de deux courbes sur une surface. Comme application, on démontre qu'un automorphisme irréductible du groupe libre dont les arbres stables et instables sont géométriques est en fait induit par un homéomorphisme pseudo-Anosov d'une surface.

Abstract

We present the construction of a kind of *convex core* for the product of two actions of a group on \mathbb{R} -trees. This geometric construction allows one to generalize and unify the intersection number of two curves or of two measured foliations on a surface, Scott's intersection number of two splittings, and the appearance of surfaces in Fujiwara-Papasoglu's construction of the JSJ splitting. In particular, this construction allows a topological interpretation of the intersection number analogous to the definition for curves in surfaces. As an application of this construction, we prove that an irreducible automorphism of the free group whose stable and unstable trees are geometric, is actually induced by a pseudo-Anosov homeomorphism of a surface.

Soit Σ une surface fermée et c_1, c_2 deux classes d'isotopie de courbes fermées simples. Soit $i(c_1, c_2)$ leur nombre d'intersection géométrique. Ce nombre est nul si et seulement si on peut isotoper les deux courbes de manière à ce qu'elles soient disjointes. En termes de scindements en produit amalgamé ou extension HNN, $i(c_1, c_2) = 0$ si et seulement si les deux scindements de $\pi_1(\Sigma)$ définis par c_1 et c_2 sont *compatibles*, i. e. ont un raffinement commun (voir section 1.1).

Dans [Sco98] (voir aussi [SS00, SS03]), Scott a généralisé cette notion de nombre d'intersection à une paire quelconque de scindements d'un groupe de type fini G . Ce nombre d'intersection est symétrique en les deux scindements. De plus, si les groupes d'arêtes des deux scindements sont de type fini, ce nombre d'intersection est fini, et il s'annule si et seulement si les deux scindements sont compatibles.

D'après la théorie de Bass-Serre, deux scindements d'un groupe G en graphes de groupes correspondent à deux actions de G sur des arbres simpliciaux T_1, T_2 (voir [Ser77]). Cet article introduit une construction géométrique d'une sorte de *cœur convexe* pour l'action diagonale de G sur $T_1 \times T_2$ qui permet de retrouver le nombre d'intersection des scindements correspondants. Grâce à sa nature géométrique, cette construction se généralise naturellement dans le cadre des arbres réels. La convexité en question ici n'est pas la convexité CAT(0), car elle définirait un cœur beaucoup trop gros. La notion utile dans ce

contexte est la *convexité par fibres* : un sous-ensemble $E \subset T_1 \times T_2$ est à fibres convexes si pour $i \in \{1, 2\}$ et pour tout $x \in T_i$, $E \cap p_i^{-1}(x)$ est convexe (où $p_i : T_1 \times T_2 \rightarrow T_i$ est la projection canonique).

Théorème principal. *Soient T_1, T_2 deux actions minimales d'un groupe de type fini G sur des arbres réels. On suppose que les fonctions longueurs de T_1 et T_2 ne sont pas homothétiques, ou que l'un au moins des arbres est irréductible. On suppose aussi que T_1 et T_2 ne sont pas des raffinements d'un arbre simplicial commun.*

Alors il existe un sous-ensemble $\mathcal{C} \subset T_1 \times T_2$ qui est le plus petit sous-ensemble non vide fermé invariant qui soit connexe et à fibres convexes. De plus, \mathcal{C} est $CAT(0)$ pour la distance de longueur induite, et $T_1 \times T_2$ se rétracte par déformation forte de manière équivariante sur \mathcal{C} .

On appelle \mathcal{C} le cœur de $T_1 \times T_2$.

Par définition, \mathcal{C} est unique ; il est donc invariant sous l'action des automorphismes des actions de G sur T_1 et T_2 .

Les hypothèses du théorème principal sont très générales, et l'énoncé donné ci-dessus n'est pas optimal pour des raisons de simplicité (voir la proposition 5.1 et le corollaire 5.2 pour plus de détails). Si T_1 et T_2 sont duaux à un produit amalgamé ou à une extension HNN, l'hypothèse que T_1 et T_2 ne sont pas des raffinements d'un même arbre simplicial est vraie dès que les fonctions longueur de T_1 et T_2 ne sont pas homothétiques. Sans ces hypothèses, on peut toujours donner une construction d'un ensemble \mathcal{C} , mais deux pathologies peuvent se présenter : \mathcal{C} peut être vide, et il peut ne pas être connexe. On donne des caractérisations simples de ces pathologies (voir les sections 3 et 4). On peut remédier à la non-connexité de \mathcal{C} : il existe un sous-ensemble canonique $\hat{\mathcal{C}}$ (le *cœur augmenté*) contenant \mathcal{C} , qui est connexe et à fibres connexes (voir section 4.4).

On définit ensuite le nombre d'intersection de T_1 et T_2 comme le covolume de \mathcal{C} (voir la définition 2.3). Si T_1 et T_2 sont deux arbres simpliciaux munis de leur distance combinatoire, ce covolume est simplement le nombre d'orbites de 2-cellules de \mathcal{C} . Dans le cas où l'action de G sur $T_1 \times T_2$ n'est pas discrète, l'utilité de la définition du nombre d'intersection n'est pas claire. Notons cependant qu'il y a des cas intéressants où l'action de G sur $T_1 \times T_2$ est discrète alors que l'action de G sur chacun des deux arbres ne l'est pas (voir par exemple l'application aux automorphismes du groupe libre en section 9).

La construction du cœur étant symétrique par définition, on a immédiatement que $i(T_1, T_2) = i(T_2, T_1)$. Par contre, la symétrie du nombre d'intersection de Scott est un fait non trivial qui ne découle pas directement de sa définition.

Dans le cas simplicial, la nullité du nombre d'intersection correspond à la compatibilité des scindements. Dans le cas général (en particulier si l'action de G sur $T_1 \times T_2$ n'est pas discrète), la bonne notion est plutôt le fait que \mathcal{C} est de dimension 1, c'est-à-dire ne contient pas le produit $I_1 \times I_2$ de deux arcs non dégénérés :

Théorème 6.1 (voir aussi [SS00]). *Soient T_1, T_2 deux actions minimales de G sur des arbres réels telles que $\mathcal{C}(T_1 \times T_2) \neq \emptyset$.*

Alors, T_1 et T_2 ont un raffinement commun si et seulement si \mathcal{C} est de dimension 1.

La preuve de ce résultat est très naturelle car dans ce cas, le cœur lui-même est un arbre réel qui est un raffinement commun de T_1 et T_2 .

Notre construction du cœur et du nombre d'intersection généralise et unifie plusieurs notions :

Le nombre d'intersection des courbes et le nombre d'intersection de Scott. Notre définition du nombre d'intersection coïncide avec le nombre d'intersection géométrique de deux courbes fermées simples sur une surface et avec le nombre d'intersection de Scott (exemple 3 section 2.2 et section 10). Cependant, contrairement à Scott, notre approche ne permet pas de traiter les ensembles presque-invariants puisqu'on a besoin

de partir d'actions sur des arbres. Mais il est probable que l'on puisse faire une théorie similaire pour les complexes cubiques de Sageev [Sag95, NSSS].

Nombre d'intersection de feuilletages mesurés. Étant donnés deux feuilletages mesurés transverses $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ sur une surface Σ , il y a un nombre d'intersection bien défini $i(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ qui est le volume de la métrique euclidienne singulière sur Σ définie par les mesures transverses de \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 (voir par exemple [Bon86]). Le nombre d'intersection des actions de $\pi_1(\Sigma)$ sur les arbres réels duaux à \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 coïncide avec $i(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ (voir exemple 4, section 2.3).

Le cœur de Culler-Levitt-Shalen. Étant donnés deux arbres T_1, T_2 duaux à des feuilletages mesurés transverses sur une surface Σ , $\mathcal{C}(T_1 \times T_2)$ est une surface qui est naturellement isomorphe au revêtement universel de Σ , muni de sa métrique euclidienne singulière. Dans ce cas, Culler-Levitt-Shalen ont caractérisé cette surface comme le plus petit sous-ensemble invariant simplement connexe de $T_1 \times T_2$ ([CLS]).

Le scindement JSJ de Fujiwara-Papasoglu. Dans leur construction du scindement JSJ, Fujiwara et Papasoglu produisent une surface dans le produit de deux arbres simpliciaux [FP98]. Cette surface coïncide avec le cœur (proposition 12.1). Dans un contexte plus général, leur construction n'est pas symétrique en T_1 et T_2 et produit un *cœur asymétrique* (voir section 11).

En général, ce cœur asymétrique est fortement relié au *nombre d'intersection fort* (asymétrique) de Scott et Swarup : le nombre d'intersection fort est le nombre d'orbites de 2-cellules dans le cœur asymétrique (corollaire 11.4).

Une première application de notre construction est une interprétation topologique du nombre d'intersection analogue à la définition du nombre d'intersection de deux courbes sur une surface : le nombre d'intersection de deux scindements est essentiellement le nombre minimal de composantes connexes de $Y_1 \cap Y_2$ où Y_1, Y_2 sont deux sous-complexes d'un complexe X représentant les deux scindements considérés.

Théorème 7.1. *Soient $Y_1, Y_2 \subset X$ deux sous-complexes à deux côtés qui s'intersectent transversalement. Soient T_1, T_2 les arbres duaux munis de l'action du groupe $G = \pi_1(X)$. Alors*

$$i(T_1, T_2) \leq \#\pi_0(Y_1 \cap Y_2).$$

De plus, étant données deux actions non triviales d'un groupe sur des arbres simpliciaux T_1, T_2 , il existe un complexe X et $Y_1, Y_2 \subset X$ deux sous-complexes à deux côtés s'intersectant transversalement tels que T_i soit dual à $Y_i \subset X$ et

$$i(T_1, T_2) = \#\pi_0(Y_1 \cap Y_2).$$

Le nombre d'intersection de deux courbes fermées simples sur une surface X peut être atteint sans changer l'espace ambiant X . Dans [FHS83, Th. 6.7], ce résultat a été étendu à des scindements duaux à des tores ou à des bouteilles de Klein dans une variété de dimension 3 en montrant que le nombre d'intersection de deux telles surfaces coïncide avec le nombre de courbes d'intersection de deux surfaces minimales représentant les surfaces considérées. Cependant, en général, il peut être nécessaire de changer l'espace ambiant X pour réaliser géométriquement le nombre d'intersection.

Une question naturelle à propos du cœur est sa cocompacité. Dans [Sco98], Scott démontre que le nombre d'intersection de deux scindements d'un groupe de type fini au dessus de groupes de type fini est fini. Cependant, il y a des exemples de scindements d'un groupe de présentation finie (un groupe libre) au dessus de groupes non de type fini qui ont un nombre d'intersection infini (voir le lemme 8.4). Ceci répond à une question de Scott et Swarup ([SS00]).

En termes d'actions de groupes sur des arbres, le fait que les groupes d'arêtes d'un scindement soient de type fini signifie plus géométriquement que les arbres de Bass-Serre

correspondant sont *géométriques*, c'est-à-dire duaux à des feuilletages mesurés sur des 2-complexes finis ([LP97]).

Dans ce cadre, on obtient le critère de finitude suivant :

Théorème 8.1. *Soient T_1, T_2 deux actions géométriques d'un groupe de type fini sur des arbres réels.*

Alors il existe un sous-ensemble $D \subset T_1 \times T_2$ qui est la réunion d'un nombre fini de rectangles compacts, tel que $\mathcal{C}(T_1 \times T_2) \subset \overline{G.D}$.

Ceci n'implique pas la cocompacité en général à cause de la nécessité de prendre l'adhérence de $G.D$. Cependant, si T_1 et T_2 sont simpliciaux, $G.D$ est automatiquement fermé, ce qui montre donc que le cœur est cocompact et que $i(T_1, T_2)$ est fini (corollaire 8.2). On peut aussi en déduire que le nombre d'intersection de deux actions géométriques d'un groupe de *présentation finie* est fini (proposition 8.3).

Finalement, nous donnons une application aux automorphismes du groupe libre. L'argument central consiste à démontrer que le cœur du produit des arbres stable et instable est essentiellement une surface. Ce résultat a été obtenu indépendamment par Handel et Mosher par d'autres méthodes ([HM]).

Corollaire 9.3. *Soit $\alpha \in \text{Out}(F_n)$ un automorphisme complètement irréductible. Soient T_1, T_2 les arbres stable et instable correspondant à α .*

Si T_1 et T_2 sont tous deux géométriques, alors α est induit par un homéomorphisme pseudo-Anosov d'une surface à bord.

L'organisation du papier est la suivante. Les définitions de base et les préliminaires sont en section 1. La définition générale du cœur est donnée en section 2. En section 3, on étudie les cas où le cœur est vide, et on donne une condition nécessaire et suffisante. En section 4, on démontre que le cœur est contractile dès qu'il est connexe, et on prouve qu'il est connexe dès que T_1 et T_2 ne sont pas des raffinement d'un même arbre simplicial. De plus, quand le cœur n'est pas connexe, on explicite une façon canonique de l'agrandir pour obtenir un cœur augmenté $\hat{\mathcal{C}}$ qui est contractile, à fibres convexes. On démontre aussi la propriété CAT(0) à la fin de cette section. En section 5, on démontre la caractérisation du cœur comme plus petit fermé invariant connexe à fibres convexes. On démontre que la nullité du nombre d'intersection est essentiellement équivalente à la compatibilité des arbres en section 6. La section 7 contient l'interprétation topologique du nombre d'intersection de deux scindements. La section 8 est consacrée au résultat de finitude pour le cœur d'actions géométriques. L'application aux automorphismes du groupe libre est contenue en section 9. L'égalité avec le nombre d'intersection de Scott est traitée en section 10. En section 11, on introduit le cœur asymétrique de Fujiwara-Papasoglu et on le relie au nombre d'intersection fort de Scott et Swarup. Finalement, la section 12 donne une condition similaire à celle de Fujiwara et Papasoglu impliquant que le cœur asymétrique coïncide avec le cœur.

Ce papier a été très inspiré par les travaux de Scott et Swarup sur les nombres d'intersection [Sco98, SS00]. La construction du cœur est issue d'une tentative de comprendre géométriquement leur définition. Une version du papier en anglais est disponible sur arxiv [Gui].

1 Définitions et préliminaires

1.1 Vocabulaire de base

Un *arbre réel* est un espace métrique dans lequel toute paire de points distincts est reliée par un unique arc (c'est-à-dire homéomorphe à $[0, 1]$), et cet arc est en fait une géodésique. De manière équivalente, un arbre réel est un espace métrique géodésique qui

ne contient aucun cercle topologique plongé. La géodésique joignant deux points a, b est notée $[a, b]$. On dit aussi que $[a, b]$ est un segment. Un *intervalle* d'un arbre réel est un sous-ensemble isométrique à un sous-ensemble convexe de \mathbb{R} (pas forcément borné, ni fermé). Dans un arbre réel, un sous-ensemble est connexe si et seulement s'il est convexe; un tel sous-ensemble est un *sous-arbre*. Un sous-arbre est *non dégénéré* s'il contient une infinité de points. Le *pont* entre deux sous-arbres disjoints non vides est le segment défini comme l'intersection de tous les segments reliant un sous-arbre à l'autre.

Un arbre simplicial T (i. e. un graphe connexe et simplement connexe) peut être muni de sa *distance combinatoire* qui donne la longueur 1 à chacune de ses arêtes. Cette distance fait de T un arbre réel, appelé par abus *arbre simplicial* (combinatoire). Plus généralement, on peut attribuer une longueur strictement positive à chacune des arêtes de T et obtenir un arbre réel. Un tel arbre réel sera appelé *arbre simplicial métrique*.

Soit T un arbre réel. Une *direction* en un point $x \in T$ est une composante connexe de $T \setminus \{x\}$. Notons que y, z sont dans la même direction issue de x si et seulement si $[x, y]$ et $[x, z]$ partagent un segment initial commun non dégénéré (i. e. non réduit à un point). Un *point de branchement* de T est un point duquel sont issues au moins 3 directions.

Un *rayon* de T est un plongement isométrique de \mathbb{R}_+ dans T . Un *bout* de T est une classe d'équivalence de rayons pour la relation *être à distance de Hausdorff finie*. Si S est un sous-arbre de T (une direction par exemple), on notera $\partial_\infty S \subset \partial_\infty T$ l'ensemble des bouts de S .

Un *scindement* d'un groupe G est la donnée d'un isomorphisme entre G et le groupe fondamental d'un graphe de groupes. Un scindement de G comme amalgame ou extension HNN sera appelé *scindement à une arête*.

Une isométrie d'un arbre réel est *elliptique* si elle a un point fixe. Dans ce cas, l'ensemble de ses points fixes est un sous-arbre. Sinon, elle est *hyperbolique*, et elle a un axe sur lequel elle agit par translation. Si h, h' sont deux isométries hyperboliques dont les axes se rencontrent en un intervalle non dégénéré $I = [a, b]$, on dit que h et h' *translatent dans la même direction* si pour tout $c \in]a, b[$, $c \notin [h(c), h'(c)]$. On note $\text{Axe}_T(h)$ l'axe d'une isométrie hyperbolique (c'est-à-dire non elliptique) h de T . Un *demi-axe positif* de h est un rayon $A \subset \text{Axe}(h)$ tel que $h.A \subset A$. Si h est une isométrie hyperbolique de T , on note $\omega_T(h)$ le bout de T défini par un quelconque de ses demi-axes positifs.

Un groupe G agissant sur un arbre réel T est *elliptique* s'il fixe un point de T . Une action d'un groupe G sur T est dite *triviale* si chacun des éléments de G est elliptique. Cette terminologie n'est pas tout à fait standard car la convention usuelle est de dire qu'une action est triviale si elle a un point fixe. Cependant, pour un groupe de type fini, l'action est triviale si et seulement si elle a un point fixe. C'est une conséquence du lemme de Serre qui dit que si S est un ensemble fini d'isométries elliptiques tel que pour tout $a, b \in S$, ab soit elliptique, alors les éléments de S ont un point fixe commun. En général, si l'action de G est triviale mais pas elliptique, alors G fixe un point du complété de T , ou un bout de T . Toutes les actions de G considérées seront supposées non triviales.

Une action de G sur un arbre réel T est *minimale* si T n'a pas de sous-arbre invariant propre. Quand l'action est non-triviale, il y a un unique sous-ensemble G -invariant minimal non vide, c'est la réunion des axes de translation des éléments hyperboliques de G . Ce sous-arbre minimal est noté $\min_T(G)$.

On note $l_T(g) = \min\{d(x, g.x) | x \in T\}$ la longueur de translation d'un élément $g \in G$. Considérons une action non triviale d'un groupe de type fini G sur un arbre réel T . L'action est dite *abélienne* s'il existe un morphisme $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $l_T(g) = |\varphi(g)|$. De manière équivalente, une action est abélienne si et seulement si G fixe un bout de T . L'action est dite *diédrale* si T contient une droite G -invariante sur laquelle un élément agit par réflexion. L'action est dite *irréductible* si elle n'est ni abélienne, ni diédrale; c'est le cas si et seulement s'il existe deux éléments hyperboliques dont les axes ont une intersection

compacte (ou vide).

Un *morphisme d'arbres réels* est une application 1-lipschitzienne $f : T \rightarrow T'$ telle que tout arc $I \subset T$ puisse être subdivisé en un nombre fini de sous-intervalles de sorte que f soit un plongement isométrique en restriction à chacun d'eux.

Une application *préservant l'alignement* est une application continue $f : T \rightarrow T'$ telle que $x \in [y, z]$ implique $f(x) \in [f(y), f(z)]$.

Lemme 1.1. *Soit $f : T \rightarrow T'$ une application continue. Les énoncés suivants sont équivalents :*

1. f préserve l'alignement
2. l'image réciproque d'un convexe est convexe
3. l'image réciproque d'un point est connexe.

Démonstration. Clairement, 1 implique 2 qui implique 3. Supposons donc 3. Soit $x \in [y, z]$, et supposons que $f(x) \notin [f(y), f(z)]$. Soit p le point de $[f(y), f(z)]$ le plus proche de $f(x)$. Soit $y' \in [y, x]$ un point tel que $f(y') = p$ (y' existe parce que si $p \neq f(y)$, p sépare $f(x)$ de $f(y)$). On définit $z' \in [z, x]$ de manière analogue. On a $y', z' \in f^{-1}(p)$ et $x \notin f^{-1}(p)$, ce qui contredit la connexité de $f^{-1}(p)$. \square

La notion suivante de raffinement généralise aux arbres réels la notion habituelle de raffinement d'un scindement.

Définition 1.2 (raffinement). *Soient T, T' deux arbres réels munis d'actions de G . On dit que T est un raffinement de T' s'il existe une application équivariante préservant l'alignement de T vers T' .*

1.2 Énoncés techniques de minimalité

Dans ce qui suit, étant donné $A \subset G$, on note $\langle A \rangle$ le groupe engendré par A .

Lemme 1.3. *Considérons une action d'un groupe G sur un arbre réel T , et $S \subset G$ un semi-groupe de type fini agissant non trivialement sur T de sorte que le sous-arbre minimal $\langle S \rangle$ -invariant ne soit pas une droite. Soit I un arc contenu dans l'axe d'un élément hyperbolique $h \in S$.*

Alors, il existe un semi-groupe de type fini $S' \subset S$ tel que

- $\langle S' \rangle = \langle S \rangle$
- tout élément $g \in S' \setminus \{1\}$ est hyperbolique dans T , son axe contient I , et g translate dans la même direction que h .

Corollaire 1.4. *Soient T_1, T_2 deux actions non triviales d'un groupe G sur un arbre réel telles que le sous-arbre minimal de T_i soit dense dans T_i pour $i \in \{1, 2\}$.*

Alors, pour toute direction δ_1 de T_1 , il existe un élément h qui est hyperbolique dans T_1 et T_2 ayant un demi-axe positif contenu dans δ_1 .

Preuve du corollaire 1.4. Supposons d'abord que T_1 contienne une droite invariante, ce qui implique que T_1 est une droite et que δ_1 est une demi-droite. Soit G_+ le sous-groupe d'indice au plus 2 de G dont tous les éléments préservent l'orientation. Soit $G_0 \triangleleft G_+$ le noyau de l'action sur T_1 . Les éléments de $G_+ - G_0$ sont hyperboliques dans T_1 . Supposons que tous ces éléments soient elliptiques dans T_2 . Soit $h \in G_0$ hyperbolique dans T_2 , et $g \in G_+ - G_0$. Les éléments g, hgh^{-1} et leur produit $g.hgh^{-1}$ ne sont pas dans G_0 et sont donc elliptiques dans T_2 . Donc g et hgh^{-1} ont un point fixe commun dans T_2 , et g fixe un intervalle non-trivial dans l'axe de h . On en déduit que $gh \notin G_0$ est hyperbolique dans T_2 (voir le fait 1.5 ci-dessous), contradiction. On a donc trouvé un élément h' hyperbolique dans T_1 et T_2 . Quitte à changer h' en h'^{-1} , ceci prouve le corollaire.

Supposons maintenant qu'il n'y ait pas de droite invariante dans T_1 . Par densité, δ_1 intersecte le sous-arbre minimal de T_1 . Soit I_1 un arc non dégénéré contenu dans l'intersection de δ_1 avec l'axe d'un élément $h \in G$ hyperbolique dans T_1 . Quitte à changer h en

h^{-1} , on peut supposer que $\omega_{T_1}(h) \in \partial_\infty \delta_1$. Puisque T_1 n'a pas de droite invariante, il existe $h' \in G$ dont l'axe dans T_1 est distinct de celui de h . Soit $h_2 \in G$ un élément hyperbolique dans T_2 .

En appliquant le lemme 1.3 dans T_1 à $S = \langle h, h', h_2 \rangle$, I_1 et h , on obtient un semi-groupe S' tel que $\langle S' \rangle = S$ et dont les éléments sont hyperboliques dans T_1 , dont les axes contiennent I_1 , et qui translatent dans la même direction que h . Ceci implique que pour tout $g \in S'$, $\omega_{T_1}(g) \in \partial_\infty(\delta_1)$. Puisque $\langle S' \rangle = \langle S \rangle$, le lemme de Serre implique que S' contient au moins un élément hyperbolique dans T_2 . \square

Preuve du lemme 1.3. Soit A un ensemble fini engendrant S comme semi-groupe, et contenant l'élément hyperbolique h . On va modifier A de sorte qu'à chaque étape, le semi-groupe engendré par A décroisse, mais que $\langle A \rangle$ reste constant.

Étape 1 : remplacer A par des éléments hyperboliques. On veut remplacer A par un ensemble dont tous les éléments sont hyperboliques. La preuve du fait suivant est laissée au lecteur (le cas où l'intersection est vide est prouvée dans [Chi01, Lem. 3.2.2]) :

Fait 1.5. *Soient a, b deux isométries d'un arbre réel T , avec b hyperbolique, et a elliptique. Si $\#(\text{Fix } a \cap \text{Axe}(b)) \neq 1$, alors ab est hyperbolique.*

S'il existe $a \in A$ elliptique et $b \in A$ hyperbolique avec $\#(\text{Fix } a \cap \text{Axe}(b)) \neq 1$, on modifie A en remplaçant a par ab . Si $\#(\text{Fix } a \cap \text{Axe}(b)) = 1$ pour tout $a \in A$ elliptique et tout $b \in A$ hyperbolique, c'est plus délicat.

Cas 1 : il existe $a \in A$ elliptique et $b \in A$ hyperbolique tels que $a \cdot \text{Axe}(b) \neq \text{Axe}(b)$.

Sous-cas 1.a : $a \cdot \omega_T(b) \neq \omega_T(b^{-1})$. Dans ce cas, on vérifie facilement que $b^k a$ est hyperbolique pour $k \geq 0$ assez grand ; on remplace alors a par $b^k a$ dans A .

Sous-cas 1.b : $a \cdot \omega_T(b) = \omega_T(b^{-1})$. On a alors $a^2 \cdot \omega_T(b) \neq \omega_T(b^{-1})$ et $a^3 \cdot \omega_T(b) \neq \omega_T(b^{-1})$. On remplace a par $\{a^2, a^3\}$ dans A , ce qui permet de conclure puisque a^2 et a^3 ou bien satisfont le sous-cas 1.a, ou bien fixent un demi-axe de b auquel cas le fait 1.5 s'applique.

Cas 2 : pour tout élément elliptique $a \in A$ et tout élément hyperbolique $b \in A$, $a \cdot \text{Axe}(b) = \text{Axe}(b)$. Puisque $\langle S \rangle$ n'a pas de droite invariante, les éléments hyperboliques de A ne peuvent pas tous avoir le même axe. Soient donc $b, b' \in A$ dont les axes sont distincts. Alors $b^k a$ et ab^k agissent sur l'axe de b comme des réflexions pour tout k , et quand k tend vers $+\infty$, leurs points fixes convergent respectivement vers $\omega_T(b)$ et $\omega_T(b^{-1})$. On en déduit qu'au moins un de ces points fixes n'est pas sur l'axe de b' . D'après le fait 1.5 ci-dessus, au moins un des éléments $b'(b^k a)$, $b'(ab^k)$ est hyperbolique, et on peut alors modifier A en remplaçant a par cet élément.

Étape 2 : remplacer A par un ensemble cohérent d'éléments hyperboliques.

On veut maintenant que l'axe de chaque élément de A contienne I , et translate dans le même sens que h . Le lemme en découlera puisque si g_1, g_2 satisfont cette propriété, il en est de même de $g_1 g_2$.

Si aucun élément de a n'envoie $\omega_T(h)$ sur $\omega_T(h^{-1})$, le résultat découle directement du fait suivant. Si $a \cdot \omega_T(h) = \omega_T(h^{-1})$, alors $a^2 \omega_T(h)$ et $a^3 \omega_T(h)$ sont tous deux distincts de $\omega_T(h^{-1})$, et on peut remplacer $\{a\}$ par $\{a^2, a^3\}$ dans A puis conclure avec le fait suivant. \square

Fait. *Soient h, a des éléments hyperboliques tels que $a \cdot \omega_T(h) \neq \omega_T(h^{-1})$, et I un arc contenu dans $\text{Axe}(h)$.*

Alors pour $k \geq 0$ assez grand, $h^k a h^k$ est hyperbolique d'axe contenant I , et il translate dans la même direction que h .

Démonstration. Le fait est évident si a et h ont le même axe.

Si a fixe $\omega_T(h)$, alors pour tout $p \in \text{Axe}(h)$, $h^k.p$, $ah^k.p$, et $h^k ah^k.p$ sont sur $\text{Axe}(h)$ pour k assez grand, et le fait en découle facilement. Sinon, l'hypothèse signifie que si p est assez loin sur un demi-axe positif de h , alors $a.p \notin \text{Axe}(h)$. Le résultat en découle. \square

2 Définition principale et exemples

2.1 Quadrant légers et cœur

Rappelons qu'une *direction* basée en un point $x \in T$ est une composante connexe de $T \setminus \{x\}$. Un *quadrant* dans $T_1 \times T_2$ est le produit $\delta_1 \times \delta_2$ de deux directions $\delta_1 \subset T_1$ et $\delta_2 \subset T_2$. On dit que ce quadrant est basé au point (x_1, x_2) où x_i est le point base de la direction δ_i .

Considérons deux actions d'un groupe de type fini G sur des arbres réels T_1, T_2 , et choisissons un point base $* = (*_1, *_2) \in T_1 \times T_2$.

Définition (quadrant lourd). *Considérons un quadrant $Q = \delta_1 \times \delta_2 \subset T_1 \times T_2$. On dit que Q est lourd s'il existe une suite d'éléments $g_k \in G$ telle que*

- $g_k.* \in Q$
- $d(g_k.*_1, *_1) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$ et $d(g_k.*_2, *_2) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$

Si Q n'est pas lourd, on dit qu'il est léger.

Remarque. Cette définition ne dépend pas du choix du point base.

Le cœur de $T_1 \times T_2$ est ce qu'il reste lorsqu'on a enlevé les quadrant légers :

Définition. *Le cœur \mathcal{C} de $T_1 \times T_2$ est le sous-ensemble*

$$\mathcal{C} = T_1 \times T_2 \setminus \left[\bigcup_{Q \text{ quadrant léger}} Q \right].$$

S'il y a une ambiguïté, on écrit $\mathcal{C}(T_1 \times T_2)$ au lieu de \mathcal{C} .

La définition de quadrant léger peut sembler un peu arbitraire. On peut donner deux autres définitions qui sont en fait équivalentes sous l'hypothèse assez faible que \mathcal{C} est non vide (voir la remarque 2.2 ci-dessous, et le corollaire 3.8).

Définition 2.1 (variations sur la légèreté des quadrants).

- Un quadrant Q est faiblement lourd si l'orbite de tout point de $T_1 \times T_2$ rencontre Q .
- Un quadrant $Q = \delta_1 \times \delta_2$ est rendu lourd par un élément hyperbolique s'il existe un élément $h \in G$ hyperbolique dans T_1 et T_2 , et tel que pour tout $i \in \{1, 2\}$, $\omega_{T_i}(h) \in \partial_\infty \delta_i$.

Remarque 2.2. Il est clair qu'un quadrant rendu lourd par un élément hyperbolique est lourd, et qu'un quadrant lourd est faiblement lourd. Si \mathcal{C} est non-vide, alors tout quadrant Q faiblement lourd est lourd. En effet, Q contient alors un point x de \mathcal{C} (puisque \mathcal{C} est G -invariant). Mais si Q était léger, x ne serait pas dans \mathcal{C} .

2.2 Exemples

Exemple 1 : $T_1 = T_2 = T$, l'action de G sur T est minimale, et l'ensemble des points de branchements est dense. Un quadrant $Q = \delta_1 \times \delta_2$ est léger si et seulement si $\delta_1 \cap \delta_2 = \emptyset$. En effet, si $\delta_1 \cap \delta_2$ est vide, alors Q ne rencontre l'orbite d'aucun point sur la diagonale, et Q est donc léger. Réciproquement, si $\delta_1 \cap \delta_2 \neq \emptyset$, $\delta_1 \cap \delta_2$ contient un point de branchement, et il existe donc un élément hyperbolique h dont l'axe rencontre $\delta_1 \cap \delta_2$ en au moins un demi-axe. Donc Q est rendu lourd par h ou h^{-1} . On en déduit que $\mathcal{C}(T \times T)$ est exactement la diagonale de $T \times T$.

Exemple 2 : $T_1 = T_2 = T$ est un arbre simplicial sans sommet de valence 2, et l'action de G sur T est minimale. L'argument ci-dessus s'étend pour montrer qu'un quadrant $\delta_1 \times \delta_2$ est léger si et seulement si $\delta_1 \cap \delta_2$ est contenu dans une arête. On en déduit que $\mathcal{C}(T \times T) = \{(v, v) | v \text{ sommet de } T\}$. Cet exemple illustre la situation typique où \mathcal{C} est disconnexe (voir section 4).

Exemple 3 : T_1 et T_2 sont les arbres duaux à deux courbes sur une surface. Soit Σ une surface fermée hyperbolique, et c_1, c_2 deux géodésiques fermées simples distinctes. Pour $i \in \{1, 2\}$, on peut définir T_i ainsi : soit $p : \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ le revêtement universel de Σ ; les sommets de T_i sont les composantes connexes de $\tilde{\Sigma} \setminus p^{-1}(c_i)$ et ses arêtes non-orientées sont les composantes connexes de $p^{-1}(c_i)$. L'action de $G = \pi_1(\Sigma)$ sur $\tilde{\Sigma}$ induit une action de G sur T_i .

On définit une application équivariante $f_i : \tilde{\Sigma} \rightarrow T_i$ ainsi : soit $A_i \simeq c_i \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ un petit voisinage tubulaire ouvert de c_i , feuilleté par des courbes parallèles à c_i . Ceci peut être fait de sorte que les deux feuilletages des anneaux soient transverses sur $A_1 \cap A_2$. Soit $\tilde{A}_i = p^{-1}(A_i)$, et définissons f_i de sorte que f_i envoie une composante de \tilde{A}_i sur l'arête correspondante de T_i , et envoie une composante de $\tilde{\Sigma} \setminus \tilde{A}_i$ sur le sommet correspondant. Pour toute direction δ de T_i , $f_i^{-1}(\delta)$ est à distance de Hausdorff finie d'un demi-plan U_δ de $\tilde{\Sigma}$ bordé par une géodésique de $p^{-1}(c_i)$.

Soit $F = (f_1, f_2) : \tilde{\Sigma} \rightarrow T_1 \times T_2$. On va démontrer que $\mathcal{C} = F(\tilde{\Sigma})$ en montrant qu'un quadrant $Q = \delta_1 \times \delta_2$ est léger si et seulement si $f_1^{-1}(\delta_1) \cap f_2^{-1}(\delta_2) = \emptyset$. Il est clair que si $f_1^{-1}(\delta_1) \cap f_2^{-1}(\delta_2) = \emptyset$, alors Q est léger puisque pour tout point $* \in \tilde{\Sigma}$, l'orbite de $(f_1(*), f_2(*))$ ne rencontre pas Q . Réciproquement, si $f_1^{-1}(\delta_1)$ rencontre $f_2^{-1}(\delta_2)$, alors U_{δ_1} et U_{δ_2} se rencontrent, et il existe un élément $h \in G$ dont l'axe dans $\tilde{\Sigma}$ rencontre les géodésiques qui bordent U_{δ_1} et U_{δ_2} . Il est alors clair que h est hyperbolique dans T_1 et T_2 et que h ou h^{-1} rend Q lourd.

Par conséquent, F induit une bijection entre les 2-cellules de \mathcal{C} et les points de $p^{-1}(c_1) \cap p^{-1}(c_2)$. En d'autres termes, le nombre de 2-cellules de \mathcal{C}/G est égal au nombre d'intersection des deux courbes c_1, c_2 .

Ceci motive la définition qui suit.

2.3 Nombre d'intersection

Soient K_1, K_2 deux sous-arbres finis de T_1 et T_2 (un sous-arbre fini est l'enveloppe convexe d'un ensemble fini). Soit μ_{K_1, K_2} le produit des mesures de Lebesgue sur K_1 et K_2 . Si $E \subset T_1 \times T_2$ est un borélien, on définit alors

$$\mu(E) = \sup_{K_1, K_2} \mu_{K_1, K_2}(E \cap (K_1 \times K_2)).$$

Le covolume d'un borélien invariant \mathcal{C} est alors

$$\inf \left\{ \mu(E) \mid G.E \supset \mathcal{C}, E \text{ borélien} \right\}$$

Définition 2.3. Soient T_1, T_2 deux arbres réels munis d'une action d'un groupe G de type fini. Le nombre d'intersection $i(T_1, T_2)$ est par définition le covolume de \mathcal{C} .

Quand T_1 et T_2 sont des arbres simpliciaux avec des arêtes de longueur 1, $i(T_1, T_2)$ est donc le nombre de 2-cellules de \mathcal{C}/G .

Notons qu'un ensemble compact peut être de mesure infinie : considérer une union de segments de longueur $1/n$ issus d'un sommet de valence infinie d'un arbre simplicial par exemple. On peut bien sûr obtenir un exemple bidimensionnel en prenant un produit avec un intervalle.

Exemple 4 : arbres duaux à des feuilletages mesurés sur une surface. Soient $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ deux feuilletages mesurés transverses sur une surface fermée Σ (voir [FLP79]). On peut définir un arbre réel T_i dual à \mathcal{F}_i en relevant \mathcal{F}_i au revêtement universel $\tilde{\Sigma}$ de Σ , et en prenant pour T_i l'espace des feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}_i$ muni de la distance induite par l'intégration de la mesure transverse. L'action de $G = \pi_1(\Sigma)$ sur T_i est induite par l'action de G sur $\tilde{\Sigma}$.

Soit $f_i : \tilde{\Sigma} \rightarrow T_i$ l'application quotient, et soit $F = (f_1, f_2) : \tilde{\Sigma} \rightarrow T_1 \times T_2$. L'argument de l'exemple 3 s'étend facilement à cette situation et permet de montrer que $\mathcal{C}(T_1 \times T_2) = F(\tilde{\Sigma})$. En particulier, \mathcal{C}/G est isométrique à Σ muni de la métrique euclidienne singulière définie par \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 . Puisque le nombre d'intersection de \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 est le volume de cette métrique euclidienne singulière, on obtient que $i(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = i(T_1, T_2)$.

2.4 Propriétés de base du cœur

Définition 2.4 (fibres convexes). On dit qu'un ensemble $C \subset T_1 \times T_2$ est à fibres convexes (ou connexes) si pour tout $i \in \{1, 2\}$ et tout $x \in T_i$, $p_i^{-1}(x) \cap C$ est convexe (éventuellement vide).

Les propriétés suivantes du cœur sont immédiates :

Proposition 2.5. Soient T_1, T_2 deux arbres réels munis d'une action non triviale d'un groupe G , et soit \mathcal{C} le cœur de $T_1 \times T_2$. Alors

- \mathcal{C} est fermé
- \mathcal{C} est à fibres convexes
- $\mathcal{C} \subset \overline{\text{Min}_{T_1}(G)} \times \overline{\text{Min}_{T_2}(G)}$
- si T_1 et T_2 sont des arbres simpliciaux métriques, alors \mathcal{C} est un sous-complexe $T_1 \times T_2$

Démonstration. Le cœur est fermé parce qu'un quadrant est ouvert. Puisque \mathcal{C} peut s'écrire comme l'intersection des complémentaires des quadrants légers, les fibres de \mathcal{C} sont convexes car le complémentaire d'un quadrant est à fibres convexes.

Pour le troisième point, supposons par exemple que $x_1 \notin \overline{\text{Min}_{T_1}(G)}$. Il existe une direction δ_1 contenant x_1 et qui ne rencontre pas $\overline{\text{Min}_{T_1}(G)}$. Pour toute direction δ_2 de T_2 , le quadrant $Q = \delta_1 \times \delta_2$ est donc léger puisque pour tout point $(*_1, *_2) \in \overline{\text{Min}_{T_1}(G)} \times T_2$, Q ne rencontre pas l'orbite de $(*_1, *_2)$.

Finalement, soient T_1, T_2 deux arbres simpliciaux métriques. Soit Q un quadrant et soit \hat{Q} la réunion des cellules ouvertes de $T_1 \times T_2$ qui rencontrent Q . Il est clair que \hat{Q} est un quadrant et que le complémentaire de \hat{Q} est un sous-complexe de $T_1 \times T_2$. Puisque \hat{Q} est à distance de Hausdorff bornée de Q , \hat{Q} est léger si et seulement si Q l'est. On en déduit que \mathcal{C} est un sous-complexe comme intersection de sous-complexes. \square

3 Le cœur est-il vide ?

Proposition 3.1. Soient T_1, T_2 deux arbres réels munis d'actions non triviales d'un groupe de type fini G . Alors $\mathcal{C}(T_1 \times T_2)$ est vide si et seulement si T_1 et T_2 ont des fonctions longueur homothétiques, et

- soit T_1 est diédral (ce qui implique que T_2 est aussi diédral)
- soit il existe deux bouts $\omega_1 \in \partial_\infty T_1$, $\omega_2 \in \partial_\infty T_2$ fixés par G et tels que tout h translate en direction de ω_1 dans T_1 si et seulement si h^{-1} translate en direction de ω_2 dans T_2 .

En particulier, si l'un des deux arbres est irréductible, \mathcal{C} est non vide.

Remarque. Un exemple particulier du second cas arrive lorsque T_1 ou T_2 est une droite, et que T_1 et T_2 ont des fonctions longueurs homothétiques.

Si T_1 et T_2 sont géométriques (i. e. si les stabilisateurs d'arête sont de type fini dans le cas simplicial) alors le second cas ne peut arriver que si T_1 et T_2 ont tous deux une droite

invariante sur laquelle G agit par translation (voir l'avant-dernier corollaire de [Lev94]). En particulier, si T_1 et T_2 sont minimaux et géométriques, et si $\mathcal{C}(T_1 \times T_2) = \emptyset$, alors il y a une homothétie équivariante entre T_1 et T_2 .

Nous allons utiliser le critère suivant.

Critère 3.2. *Supposons que $a, b, c \in G$ soient hyperboliques dans T_1 et T_2 , et que pour tout $i \in \{1, 2\}$, les trois bouts $\omega_{T_i}(a), \omega_{T_i}(b)$ et $\omega_{T_i}(c)$ soient distincts.*

Soit x_i le centre du triangle $\{\omega_{T_i}(a), \omega_{T_i}(b), \omega_{T_i}(c)\}$. Alors, tout quadrant contenant le point $x = (x_1, x_2)$ est rendu lourd par un élément hyperbolique.

En particulier $x \in \mathcal{C}$ et $\mathcal{C} \neq \emptyset$.

Démonstration. Considérons un quadrant $\delta_1 \times \delta_2$ contenant x . Puisque le complémentaire ${}^c\delta_i$ de δ_i est convexe, $\partial_\infty \delta_i$ contient au moins deux des trois bouts $\{\omega_{T_i}(a), \omega_{T_i}(b), \omega_{T_i}(c)\}$ puisque sinon ${}^c\delta_i$ contiendrait x_i . Donc au moins un élément $\gamma \in \{a, b, c\}$ est tel que pour tout $i \in \{1, 2\}$, $\omega_{T_i}(\gamma) \in \partial_\infty \delta_i$. Cet élément γ rend $\delta_1 \times \delta_2$ lourd. \square

Critère 3.3. *Supposons que $a, b \in G$ soient hyperboliques dans T_1 et T_2 , et que l'une des hypothèses suivantes soit vraie :*

1. *les axes de a et b s'intersectent en au plus un point dans un des T_i ;*
2. *ou bien les axes de a et b s'intersectent en plus d'un point dans T_1 et T_2 , et*
 - *a et b traduisent dans la même direction dans T_1*
 - *a et b traduisent dans des directions opposées dans T_2 .*

Alors, il existe un point $x \in T_1 \times T_2$ tel que tout quadrant contenant x soit rendu lourd par un élément hyperbolique.

En particulier $x \in \mathcal{C}$ et $\mathcal{C} \neq \emptyset$.

Démonstration. Considérons le point $x = (x_1, x_2)$ défini ainsi : si $\text{Axe}_{T_i}(a) \cap \text{Axe}_{T_i}(b) \neq \emptyset$, prenons x_i dans cette intersection, et sinon, soit x_i le point de $\text{Axe}_{T_i}(a)$ le plus proche de $\text{Axe}_{T_i}(b)$. Pour toute direction δ de T_i , notons $E_i(\delta) = \{\gamma \in \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\} \mid \omega_{T_i}(\gamma) \in \partial_\infty \delta\}$. On va montrer que pour tout quadrant $Q = \delta_1 \times \delta_2$ contenant x , $E_1(\delta_1) \cap E_2(\delta_2) \neq \emptyset$. Ceci impliquera que Q est rendu lourd par un élément de $E_1(\delta_1) \cap E_2(\delta_2)$.

Pour toute direction δ_i contenant x_i , le choix de x_i implique que si $\text{Axe}_{T_i}(a) \cap \text{Axe}_{T_i}(b)$ est réduit à un point, alors $E_i(\delta_i)$ contient trois éléments. Si $\text{Axe}_{T_i}(a) \cap \text{Axe}_{T_i}(b) = \emptyset$, $E_i(\delta_i)$ contient $\{a, a^{-1}\}$, $\{a, b, b^{-1}\}$ ou $\{a^{-1}, b, b^{-1}\}$. Si $\text{Axe}_{T_i}(a) \cap \text{Axe}_{T_i}(b) \neq \emptyset$ et si a et b traduisent dans la même direction, alors $E_i(\delta_i)$ contient $\{a, b\}$ ou $\{a^{-1}, b^{-1}\}$. Si $\text{Axe}_{T_i}(a) \cap \text{Axe}_{T_i}(b) \neq \emptyset$ et si a et b traduisent dans des directions opposées, alors $E_i(\delta_i)$ contient $\{a, b^{-1}\}$ ou $\{a^{-1}, b\}$.

Le critère s'en déduit facilement : puisque $\#E_i(\delta_i) \geq 2$, la seule possibilité autorisant $E_1(\delta_1) \cap E_2(\delta_2) = \emptyset$ est que $E_1(\delta_1)$ et $E_2(\delta_2)$ aient chacun deux éléments et soient complémentaires l'un de l'autre. Ceci ne peut arriver que si les axes de a et b ont une intersection non dégénérée dans T_1 et T_2 . L'hypothèse sur les directions de translations empêche alors $E_1(\delta_1) \cap E_2(\delta_2)$ d'être vide. \square

Preuve de la proposition 3.1. Montrons d'abord l'implication directe.

Fait 3.4. *Supposons que T_1 soit irréductible. Alors il existe un point $x \in T_1 \times T_2$ tel que tout quadrant contenant x soit rendu lourd par un élément hyperbolique. En particulier $\mathcal{C} \neq \emptyset$.*

Démonstration. Si T_1 est irréductible, on peut trouver $a, b \in G$ hyperboliques dans T_1 et dont les axes sont disjoints. Si a et b sont hyperboliques dans T_2 , le critère 3.3 conclut. Sinon, le corollaire 1.4 appliqué aux sous-arbre minimaux dit qu'on peut trouver un élément h hyperbolique dans T_1 et T_2 . Il est maintenant facile de vérifier qu'il existe des conjugués de h par des puissances de a et b dont les axes sont disjoints dans T_1 : soit p le milieu du pont

joignant $\text{Axe}_{T_1}(a)$ à $\text{Axe}_{T_1}(b)$, et soit δ_a, δ_b les directions basées en p contenant les axes de a et b ; il y a au plus deux entiers k tels que $a^k \cdot \text{Axe}(h) \not\subset \delta_a$ (resp. tels que $b^k \cdot \text{Axe}(h) \not\subset \delta_b$). Le critère 3.3 s'applique donc à une paire de la forme $a^k h a^{-k}, b^{k'} h b^{-k'}$. \square

Fait 3.5. *Supposons que T_1 et T_2 soient réductibles (i. e. diédraux ou abéliens) et que les fonctions longueurs l_1 et l_2 de T_1 et T_2 ne sont pas homothétiques.*

Alors il existe un point $x \in T_1 \times T_2$ tel que tout quadrant contenant x soit rendu lourd par un élément hyperbolique. En particulier $\mathcal{C} \neq \emptyset$.

Démonstration. Soit G' un sous-groupe d'indice au plus 4 de G tel que G' fixe un bout dans T_1 et T_2 . Il est clair qu'un quadrant lourd pour l'action de G' est lourd pour l'action de G ; il suffit donc de montrer que le cœur pour l'action de G' est non vide. On se ramène ainsi à deux actions abéliennes. Puisqu'une fonction longueur vérifie $l(g^2) = 2l(g)$, les fonctions longueur restreintes à G' ne sont pas homothétiques. Soit $\varphi_i : G' \rightarrow \mathbb{R}$ un morphisme dont l_i est la valeur absolue en restriction à G' . Notons que deux éléments a, b traduisent dans la même direction dans T_i si et seulement si $\varphi_i(a)$ et $\varphi_i(b)$ sont de même signe. Puisque l_1 et l_2 ne sont pas homothétiques, considérons $g, h \in G'$ tels que $|\frac{\varphi_1(g)}{\varphi_1(h)}| \neq |\frac{\varphi_2(g)}{\varphi_2(h)}|$. Il est facile de trouver de tels g, h qui soient hyperboliques dans T_1 et T_2 . Si les signes à l'intérieur des valeurs absolues sont opposés, alors g, h satisfont les hypothèses 3.3 et on a terminé. Sinon, quitte à échanger les rôles de T_1 et T_2 , on peut trouver $p, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tels que $0 < \frac{\varphi_1(g)}{\varphi_1(h)} < p/q < \frac{\varphi_2(g)}{\varphi_2(h)}$. On a donc $\frac{\varphi_1(g^q)}{\varphi_1(h^p)} < 1 < \frac{\varphi_2(g^q)}{\varphi_2(h^p)}$, et $\frac{\varphi_1(g^q h^{-p})}{\varphi_1(h^p)} < 0 < \frac{\varphi_2(g^q h^{-p})}{\varphi_2(h^p)}$, donc le deuxième point du critère 3.3 s'applique à $a = h^p, b = g^q h^{-p}$. \square

Fait 3.6. *Supposons que T_1 et T_2 soient réductibles et que T_1 et T_2 n'ont pas de droite invariante (i. e. que T_i a un unique bout fixe ω_i). Supposons que les fonctions longueurs l_1 et l_2 de T_1 et T_2 soient homothétiques, et que pour tout $g \in G$, g translate vers ω_1 dans T_1 si et seulement si g translate vers ω_2 dans T_2 .*

Alors il existe un point $x \in T_1 \times T_2$ tel que tout quadrant contenant x soit rendu lourd par un élément hyperbolique. En particulier $\mathcal{C} \neq \emptyset$.

Remarque. Étant données deux actions abéliennes T_1, T_2 ayant des fonctions longueur homothétiques, et des bouts fixes ω_1, ω_2 , s'il existe g hyperbolique dans T_1 et T_2 traduisant vers ω_1 et ω_2 dans T_1 et T_2 , alors tout $h \in G$ translate vers ω_1 dans T_1 si et seulement si h translate vers ω_2 dans T_2 . En effet, il existe deux morphismes homothétiques $\varphi_i : G \rightarrow \mathbb{R}$ dont les valeurs absolues sont les fonctions longueurs correspondantes, et tels que g translate vers ω_i si et seulement si $\varphi_i(g) > 0$.

Démonstration. On trouve facilement $g, h \in G$ dont les axes sont distincts dans T_1 et dans T_2 . Quitte à changer g et h en leur inverse, on peut supposer que $\omega_{T_1}(g) = \omega_{T_1}(h)$. Par hypothèse, $\omega_{T_2}(g) = \omega_{T_2}(h)$. Le critère 3.2 s'applique donc à $a = g, b = g^{-1}, c = h^{-1}$. \square

Ceci termine la preuve du sens direct de la proposition. Il reste à démontrer que \mathcal{C} est vide dans les cas exceptionnels.

Pour commencer, si T_1 est diédral et si l_1 et l_2 sont homothétiques, alors T_2 est aussi diédral, et on vérifie sans peine que $\mathcal{C} = \emptyset$. Soient donc ω_1, ω_2 des bouts de T_1 et T_2 fixés par G et tels que h translate en direction de ω_1 dans T_1 si et seulement si h^{-1} translate en direction de ω_2 dans T_2 . En d'autres termes, $\omega_{T_1}(h) = \omega_1$ si et seulement si $\omega_{T_2}(h^{-1}) = \omega_2$. Démontrons que tout quadrant $Q = \delta_1 \times \delta_2$ tel que $\omega_i \notin \partial_\infty \delta_i$ est léger. Cela implique clairement que $\mathcal{C} = \emptyset$. Soit x_i le point où δ_i est basée, et prenons $x = (x_1, x_2)$ comme point base. Soit $g \in G$ tel que $g.x_1 \in \delta_1$, et soit $\text{Car}(g)$ son ensemble caractéristique, c'est-à-dire l'ensemble de ses points fixes ou son axe. Puisque $\omega_1 \in \partial_\infty \text{Car}(g)$, on a que $x_1 \in \text{Car}(g)$ car sinon le sous-arbre $\overline{\delta_1}$ ne rencontrerait pas $\text{Car}(g)$, et serait donc disjoint de son image par g . En particulier, g est hyperbolique et translate dans la direction opposée de ω_1 . L'argument symétrique dans T_2 dit que si $g.x_2 \in \delta_2$, g translate dans la direction opposée de ω_2 . Par hypothèses, ces deux situations ne peuvent pas arriver simultanément, donc $\delta_1 \times \delta_2$ ne rencontre pas l'orbite du point x , et $\delta_1 \times \delta_2$ est léger. \square

Remarque 3.7. Si T_1 et T_2 sont deux arbres simpliciaux, étant donnée une arête orientée e de T_i , soit $\delta(e)$ la direction basée à l'origine de e et contenant e . La fin de la preuve de la proposition démontre que si T_1 et T_2 satisfont la seconde hypothèse, alors pour toute paire d'arêtes non-orientées e_1, e_2 , il existe un choix d'orientations de e_1, e_2 (celle qui ne pointe pas vers ω_i) et un choix de point base $*$ (défini par l'origine de e_1 et de e_2) tel que l'orbite de $*$ ne rencontre pas $\delta(e_1) \times \delta(e_2)$. Ce fait implique que le nombre d'intersection de Scott est nul dans ce cas (voir section 10).

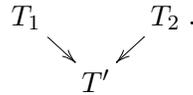
Corollaire 3.8. *Soient T_1, T_2 deux actions non triviales d'un groupe de type fini G sur des arbres réels. Supposons que $\mathcal{C}(T_1 \times T_2) \neq \emptyset$.*

Alors, tout quadrant faiblement lourd est rendu lourd par un élément hyperbolique.

Démonstration. D'après la proposition 3.1, les hypothèses de l'un des trois faits ci-dessus sont satisfaites, donc il existe $x \in \mathcal{C}$ tel que chaque quadrant contenant x soit rendu lourd par un élément hyperbolique. Soit Q un quadrant faiblement lourd. Il contient donc un point $g.x$ de l'orbite de x . Le quadrant $g^{-1}Q$ est donc rendu lourd par un élément hyperbolique, et il en est donc de même de Q . \square

4 Contractibilité du cœur

Dans toute cette section, on suppose, sans perte de généralité que T_1 et T_2 ont un sous-arbre minimal dense. Le but de la section est de comprendre quand le cœur peut être non connexe. On a vu dans l'exemple 2 que c'était le cas lorsque $T_1 = T_2$ est un arbre simplicial puisqu'alors $\mathcal{C} = \{(v, v) | v \text{ sommet } T\}$. Nous allons montrer que c'est le cas essentiel où cela arrive : la proposition 4.14 montre que \mathcal{C} est non connexe si et seulement si T_1 et T_2 sont des raffinements d'un même arbre simplicial T' comme dans le diagramme suivant



On démontrera qu'en dehors de ce cas pathologique, \mathcal{C} est contractile ; il y a même une rétraction par déformation forte équivariante de $T_1 \times T_2$ sur \mathcal{C} (proposition 4.16). Dans le cas pathologique où \mathcal{C} est non connexe, on construira un *cœur augmenté* canonique $\hat{\mathcal{C}}$ obtenu en adjoignant à \mathcal{C} des *diagonales*, et on montrera que $\hat{\mathcal{C}}$ est contractile.

4.1 Rectangles doublement légers

On s'intéresse au cas où un point de $T_1 \times T_2$ est *enlevé deux fois* dans la construction de \mathcal{C} , comme sur la figure 1. On démontrera que le cœur est connexe si et seulement s'il n'y a pas de rectangle doublement léger.

On aura besoin d'un peu de terminologie.

Définition 4.1 (directions et quadrants face à face). *On dit que deux directions $\delta, \delta' \subset T$, basées en des points distincts $x \neq x'$ de T sont face à face si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :*

1. $\delta \cup \delta' = T$
2. ${}^c\delta \cap {}^c\delta' = \emptyset$
3. $]x, x'[\subset \delta \cap \delta'$

On dit que les quadrants $Q = \delta_1 \times \delta_2 \subset T_1 \times T_2$ et $Q' = \delta'_1 \times \delta'_2 \subset T_1 \times T_2$ sont face à face si pour tout $i \in \{1, 2\}$, δ_i fait face à δ'_i .

La preuve de l'équivalence est immédiate.

Définition 4.2 (rectangles doublement légers). *Soient Q, Q' deux quadrants légers face à face. On dit alors que $Q \cap Q'$ est un rectangle doublement léger.*

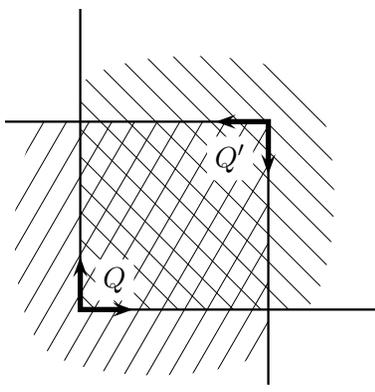


FIG. 1: Deux quadrants légers face à face s'intersectent en un rectangle doublement léger

Dans $T_1 \times T_2$, un *rectangle* est le produit de deux intervalles $I_1 \times I_2$.

Proposition 4.3 (un rectangle doublement léger est un rectangle). *Supposons que les sous-arbres minimaux de T_1 et T_2 soient denses dans T_1 et T_2 .*

Soient Q, Q' deux quadrants légers face à face basés en $x = (x_1, x_2)$ et $x' = (x'_1, x'_2)$, et soit R le rectangle $]x_1, x'_1[\times]x_2, x'_2[$.

Alors $R = Q \cap Q'$, et aucun des intervalles $]x_i, x'_i[= p_i(R)$ ne contient de point de branchement.

Démonstration. Puisque Q et Q' se font face, il est clair que $R \subset Q \cap Q'$.

Soit $(t_1, t_2) \in R$, et supposons par l'absurde que t_1 soit un point de branchement. Soit η_1 une direction issue de t_1 qui ne contient ni x_1 ni x'_1 . On a que $\eta_1 \subset \delta_1 \cap \delta'_1$. Puisque le sous-arbre minimal de T_1 est dense, le corollaire 1.4 dit qu'il existe $h \in G$ hyperbolique dans T_1 et T_2 tel que $\omega_{T_1}(h) \in \partial_\infty \eta_1$. Puisque $\delta_2 \cup \delta'_2 = T_2$, $\omega_{T_2}(h) \in \partial_\infty \delta_2 \cup \partial_\infty \delta'_2$. Donc l'un au moins des deux quadrants Q, Q' est rendu lourd par h , contradiction. L'argument symétrique montre que $]x_2, x'_2[$ ne contient pas de point de branchement.

On en déduit que $\delta_i \cap \delta'_i =]x_i, x'_i[$ et que $R = Q \cap Q'$. \square

4.2 Connexité en l'absence de rectangle doublement léger

Remarquons tout d'abord que s'il y a des rectangles doublement légers, alors \mathcal{C} ne peut pas être connexe (du moins s'il est non vide). En effet, soient Q, Q' deux quadrants légers se faisant face, basés en $x = (x_1, x_2)$ et $x' = (x'_1, x'_2)$. Alors $Q \cup Q'$ contient $]x_1, x'_1[\times T_2$, de sorte que $p_1(\mathcal{C})$ ne rencontre pas $]x_1, x'_1[$. Cependant, si \mathcal{C} était connexe, alors $p_1(\mathcal{C})$ serait un sous-ensemble connexe et G -invariant de T_1 , qui serait donc dense par hypothèse, contradiction.

Montrons maintenant la réciproque.

Proposition 4.4. *Soient T_1, T_2 deux actions non triviales de G sur des arbres réels dont les sous-arbres minimaux sont denses, et tels que $\mathcal{C}(T_1 \times T_2) \neq \emptyset$.*

S'il n'y a pas de rectangle doublement léger alors \mathcal{C} est connexe (et la réciproque est vraie).

De plus, pour tout rectangle $R = I_1 \times I_2$, $\mathcal{C} \cap R$ est soit vide soit connexe.

Démonstration. Nous avons déjà démontré que \mathcal{C} est non connexe en présence de rectangle doublement léger. Il suffit en fait de démontrer la dernière partie de l'énoncé. Soient $x = (x_1, x_2)$, et $x' = (x'_1, x'_2) \in R \cap \mathcal{C}$, et soit $R_0 = [x_1, x'_1] \times [x_2, x'_2] \subset R$ le rectangle dont x et x' sont des coins. Il nous suffit de montrer que $R_0 \cap \mathcal{C}$ est connexe.

Soient $a = (x_1, x'_2)$ et $b = (x'_1, x_2)$ les deux autres coins de R_0 . Soit Q un quadrant léger qui rencontre R_0 . Puisque Q ne contient ni x ni x' , sa trace sur R_0 est un rectangle

ouvert contenant a ou b . Puisqu'il n'y a pas de rectangle doublement léger, un quadrant léger contenant a ne peut pas rencontrer un quadrant léger contenant b .

Soit $A \subset R_0$ (resp. B) la réunion des traces sur R_0 des quadrants légers contenant a (resp. b). On peut écrire A comme une union croissante $A = \cup_k A_k$ où A_k est une union finie de trace de quadrants légers contenant a . On écrit de même $B = \cup_k B_k$, et pour tout k on a $A_k \cap B_k = \emptyset$. Les ensembles $R_0 \setminus A_k$ et $R_0 \setminus B_k$ sont contractiles car étoilés, donc $R_0 \setminus A_k \cup B_k$ est connexe (et même contractile). L'ensemble $R_0 \setminus A \cup B$ est donc connexe comme intersection décroissante de compact connexes. \square

On peut reformuler la proposition dans un cadre plus général qui sera utile plus loin.

Définition 4.5 (famille de quadrants cohérente et son cœur). *Une famille de quadrants \mathcal{Q} de $T_1 \times T_2$ est cohérente si elle ne contient pas de paire de quadrants se faisant face.*

Son cœur $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$ est $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}} = T_1 \times T_2 \setminus \cup_{Q \in \mathcal{Q}} Q$.

Proposition 4.6. *Le cœur d'une famille cohérente \mathcal{Q} de quadrants est connexe (ou vide). De plus, pour tout rectangle R de $T_1 \times T_2$, la trace de $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$ sur R est connexe ou vide.*

4.3 Les coins d'un rectangle doublement léger

Lemme 4.7. *Supposons que $\mathcal{C}(T_1 \times T_2) \neq \emptyset$. Alors tout rectangle doublement léger est contenu dans un unique rectangle doublement léger maximal.*

Démonstration. On écarte le cas où l'un des arbres est une droite car l'existence de rectangles doublement légers implique que le cœur est vide.

Soit $R =]x_1, x'_1[\times]x_2, x'_2[$ un rectangle doublement léger. Soit $]y_i, y'_i[\subset T_i$ l'intervalle ouvert maximal contenant $]x_i, x'_i[$ et ne contenant pas de point de branchement (de manière équivalente, y_i et y'_i sont des points de branchements, mais $]y_i, y'_i[$ n'en contient pas). Cet intervalle existe parce que l'enveloppe convexe des points de branchements est dense car le sous-arbre minimal est dense. Il est alors clair que $]y_1, y'_1[\times]y_2, y'_2[$ est doublement léger et qu'il est maximal pour cette propriété à cause de la proposition 4.3. \square

Définition 4.8. *Deux quadrants $Q = \delta_1 \times \delta_2$ et $Q' = \delta'_1 \times \delta'_2$ sont faiblement face à face si δ_1 fait face à δ'_1 ou δ_2 fait face à δ'_2 .*

Lemme 4.9. *Soient Q, Q' deux quadrants légers qui se rencontrent. Si Q et Q' sont faiblement face à face, alors Q et Q' sont face à face.*

Démonstration. Soit $Q = \delta_1 \times \delta_2$ et $Q' = \delta'_1 \times \delta'_2$, et supposons que δ_1 soit face à δ'_1 . Si δ_2 et δ'_2 ne sont pas face à face, δ_2 et δ'_2 seraient emboîtées puisque $\delta_2 \cap \delta'_2 \neq \emptyset$. Supposons par exemple $\delta_2 \subset \delta'_2$. Soit $\gamma \in G$ hyperbolique dans T_1 et T_2 et tel que $\omega_{T_2}(\gamma) \in \partial_\infty \delta_2$ (corollaire 1.4). Puisque $\delta_1 \times \delta_2$ et $\delta'_1 \times \delta'_2$ sont légers, $\omega_T(\gamma) \notin \partial_\infty \delta_1$ et $\omega_T(\gamma) \notin \partial_\infty \delta'_1$. Ceci contredit l'égalité $\delta_1 \cup \delta'_1 = T_1$. \square

Lemme 4.10. *Supposons $\mathcal{C} \neq \emptyset$. Soit R l'adhérence d'un rectangle doublement léger maximal. Alors, $\mathcal{C} \cap R$ est constitué d'exactly deux points, et ces points sont deux coins diamétralement opposés de R .*

Démonstration. Soient $Q = \delta_1 \times \delta_2$ et $Q' = \delta'_1 \times \delta'_2$ deux quadrants légers face à face dont l'intersection est l'intérieur de R . Soient $x = (x_1, x_2)$ et $x' = (x'_1, x'_2)$ les points bases de Q et Q' , et $a = (x_1, x'_2)$ et $b = (x'_1, x_2)$ les deux autres coins de R .

Il est clair que $R \cap \mathcal{C} \subset \{a, b\}$ puisque $R \setminus (Q \cup Q') = \{a, b\}$. Montrons l'inclusion inverse. Si $a \notin \mathcal{C}$, soit $P = \eta_1 \times \eta_2$ un quadrant léger contenant a . Puisque R est maximal, les deux coordonnées de a et b sont des points de branchement. En particulier, P et Q ne peuvent être face à face car sinon, $P \cap Q$ serait doublement léger, mais $p_2(P \cap Q)$ contiendrait le point de branchement $p_2(a)$, contradiction. De même P et Q' ne sont pas face à face.

Par ailleurs, nous allons montrer que η_1 fait face à δ_1 ou δ'_1 . On aura la contradiction cherchée car P fait alors faiblement face à Q ou Q' , contredisant le lemme 4.9. On a

${}^c\delta_1 \cap {}^c\delta'_1 = \emptyset$ car δ_1 et δ'_1 sont face à face. Si η_1 ne fait face ni à δ_1 ni à δ'_1 , ${}^c\eta_1$ rencontre les deux sous-arbres ${}^c\delta_1$ et ${}^c\delta'_1$, et doit donc contenir le pont les joignant, ce qui contredit le fait que P contient a . \square

4.4 Le cœur augmenté

Définition 4.11. Soient T_1, T_2 deux actions de G sur des arbres réels telles que $\mathcal{C} \neq \emptyset$. Soit R un rectangle doublement léger maximal. La diagonale principale Δ_R de R est la diagonale de R joignant ses deux coins appartenant à \mathcal{C} .

Le cœur augmenté $\hat{\mathcal{C}}$ de $T_1 \times T_2$ est l'union de \mathcal{C} et des diagonales principales des rectangles doublement légers maximaux.

Proposition 4.12. Soient T_1, T_2 deux actions de G sur des arbres réels telles que $\mathcal{C} \neq \emptyset$.

Alors $\hat{\mathcal{C}}$ est le cœur d'une famille cohérente de quadrants. En particulier $\hat{\mathcal{C}}$ est connexe, et il intersecte chaque rectangle de $T_1 \times T_2$ en un ensemble connexe (peut-être vide).

Démonstration. Soit \mathcal{Q} la famille des quadrants de $T_1 \times T_2$ qui ne rencontrent pas $\hat{\mathcal{C}}$. Chaque quadrant de \mathcal{Q} est léger puisqu'il ne rencontre pas \mathcal{C} .

Montrons que \mathcal{Q} est cohérent. En effet, si $Q, Q' \in \mathcal{Q}$ sont face à face, $Q \cap Q'$ est un rectangle doublement léger ; soit R le rectangle doublement léger maximal contenant $Q \cap Q'$. Puisque la trace de $Q \cup Q'$ sur R sépare ses deux coins appartenant à \mathcal{C} , $Q \cup Q'$ rencontre la diagonale principale de R , contradiction.

Il reste à voir que $\hat{\mathcal{C}}$ est le cœur de \mathcal{Q} . L'inclusion $\hat{\mathcal{C}} \subset \mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$ est claire par définition de \mathcal{Q} .

Il est clair que si $R = Q \cap Q'$ est un rectangle doublement léger maximal, tout élément $x \in \overline{R} \setminus \Delta_R$ appartient à un quadrant contenu dans Q ou Q' et qui ne rencontre pas Δ_R . Donc $\hat{\mathcal{C}}$ et $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$ ont la même trace sur \overline{R} .

Soit $x \notin \hat{\mathcal{C}}$ un point n'appartenant pas à l'adhérence d'un rectangle doublement léger maximal, et montrons que $x \notin \mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$. Soit $Q = \delta_1 \times \delta_2$ un quadrant léger contenant x . On va prouver que x appartient à un quadrant léger qui ne rencontre aucun rectangle doublement léger. Supposons que Q rencontre un rectangle doublement léger maximal R . Le fait suivant sera prouvé plus loin.

Fait 4.13. Un quadrant léger Q rencontre au plus un rectangle doublement léger maximal. De plus dans ce cas, le point base de Q appartient à l'adhérence de ce rectangle.

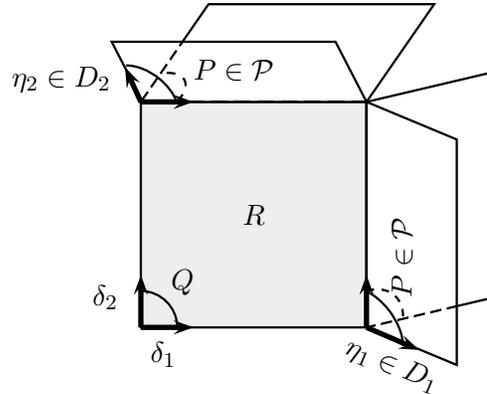


FIG. 2: La famille de quadrants \mathcal{P} .

Le point base de Q appartient donc à \overline{R} . Puisque R ne contient pas de point de branchement, $Q \setminus \overline{R}$ s'écrit comme une union de quadrants

$$Q \setminus \overline{R} = \bigcup_{P \in \mathcal{P}} P$$

où \mathcal{P} est défini ainsi (figure 2) : soit D_i l'ensemble des composantes connexes de $\delta_i \setminus p_i(\overline{R})$ (ces composantes sont en fait des directions) et soit \mathcal{P} l'ensemble des quadrants définis par

$$\mathcal{P} = \{\delta_1 \times \eta_2, \eta_1 \times \delta_2 \mid \eta_1 \in D_1, \eta_2 \in D_2\}.$$

Ces quadrants sont légers car contenus dans Q . Puisque $x \in P$ pour un certain $P \in \mathcal{P}$, il reste à vérifier que les quadrants de \mathcal{P} ne rencontrent aucun rectangle doublement léger. C'est une conséquence du fait que Q ne peut pas rencontrer plus d'un rectangle doublement léger maximal. On a ainsi $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$, et $x \notin \mathcal{C}_Q$. \square

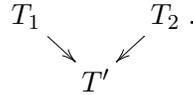
Preuve du fait 4.13. Soit R un rectangle doublement léger maximal rencontrant un quadrant léger $Q = \delta_1 \times \delta_2$. Il suffit de prouver que le point base $b = (b_1, b_2)$ de Q appartient à \overline{R} . En effet, ceci implique que deux rectangles doublement légers maximaux contenus dans Q s'intersectent (ils définissent le même germe en b puisqu'ils intersectent le même quadrant), et coïncident donc.

On veut montrer que pour tout $i \in \{1, 2\}$, $b_i \in p_i(\overline{R})$. Supposons par exemple que $b_1 \notin p_1(\overline{R})$. Par connexité, ou bien $p_1(\overline{R}) \subset \delta_1$ ou bien $p_1(\overline{R}) \subset {}^c\delta_1$. Le second cas est impossible car R rencontre Q , donc $p_1(R) \subset \delta_1$. L'une au moins des extrémités de $p_2(R)$ appartient à δ_2 , notons la a_2 . Le segment $p_1(R) \times \{a_2\}$ est contenu dans Q et contient une des extrémités de la diagonale principale. Puisque cette extrémité appartient à \mathcal{C} , ceci contredit que Q est léger. \square

4.5 Caractérisation de la connexité du cœur

Proposition 4.14 (caractérisation de la connexité du cœur.). *Soient T_1, T_2 deux actions non triviales d'un groupe G de type fini sur des arbres réels, dont les sous-arbres minimaux sont denses, et telles que $\mathcal{C}(T_1 \times T_2) \neq \emptyset$.*

Alors, $\mathcal{C}(T_1 \times T_2)$ est non connexe si et seulement si T_1 et T_2 raffinent une même action de G non triviale sur arbre simplicial T' :



Lemme 4.15. *Étant donné $x_1 \in T_1$, il y a au plus un rectangle doublement léger maximal R tel que $x_1 \in p_1(R)$.*

En particulier, $p_{1|\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}}$ est injective.

Démonstration. Soient $R =]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[$ et $R' =]a'_1, b'_1[\times]a'_2, b'_2[$ deux rectangles doublement légers maximaux qui contrediraient le lemme. Soient P et Q deux quadrants légers tels que $R = P \cap Q$. On a $]a_1, b_1[\cap]a'_1, b'_1[\neq \emptyset$ mais ces deux intervalles ne contiennent pas de point de branchement, et les quatre points a_1, b_1, a'_1, b'_1 sont des points de branchements. On en déduit que $]a_1, b_1[=]a'_1, b'_1[$.

Si $]a_2, b_2[$ rencontre $]a'_2, b'_2[$, l'argument symétrique montre que $R = R'$, et on a terminé. Sinon, $]a'_2, b'_2[$ est contenu dans $p_2(P)$ ou dans $p_2(Q)$, donc R' est contenu dans P ou Q . Le fait 4.13 conclut que $R = R'$. \square

Preuve de la proposition 4.14. Supposons que T_1 et T_2 raffinent un arbre simplicial T' . On va utiliser un argument similaire à l'exemple 2 (section 2.2) pour démontrer qu'il existe des rectangles doublement légers. Soit $e =]a, a'[$ une arête ouverte de T' , et soit $I_i = f_i^{-1}(e)$. Puisque f_i préserve l'alignement, I_i est connexe.

Montrons que I_i ne contient pas de point de branchement, et que c'est donc un intervalle ouvert. Supposons par l'absurde que $b_i \in I_i$ soit un point de branchement, et soit δ_i une direction basée en b_i qui ne rencontre ni $f_i^{-1}(a)$ ni $f_i^{-1}(a')$. On a $f_i(\delta_i) = \{f_i(b_i)\}$ car sinon, l'image réciproque d'un point de e ne serait pas connexe. Par densité du sous-arbre

minimal, on peut trouver $h \in G$ hyperbolique dans T_i tel que $\omega_{T_i}(h) \in \partial_\infty(\delta)$. L'image de toute paire de points par une puissance suffisamment grande de h est contenue dans δ . Puisque f_i est constante sur δ , on en déduit que f_i est constante sur T_i , ce qui contredit la non-trivialité de l'action de G sur T' .

Soient a_i et a'_i les extrémités de \bar{T}_i qui sont envoyées par f_i sur a et a' respectivement. Soient δ_i et δ'_i les directions de T_i basées en a_i et a'_i et contenant I_i . Soient $Q = \delta_1 \times \delta'_2$ et $Q' = \delta'_1 \times \delta_2$. Ces deux quadrants se font face. Soit $*$ = $(*_1, *_2)$ tel que $f_1(*_1) = f_2(*_2) \in e$. Le quadrant Q est léger car si $g.* \in Q$, alors $g.f_1(*_1) = g.f_2(*_2) \in f_1(\delta_1) \cap f_2(\delta'_2) = e$ donc $g.* \in I_1 \times I_2$ ne peut aller à l'infini. De même, Q' est léger, et $Q \cap Q'$ est doublement léger.

Pour prouver la réciproque, l'idée est d'obtenir T' à partir de $\hat{\mathcal{C}}$ en écrasant tout sauf les diagonales principales. Soit T' le graphe dont les sommets sont les composantes connexes de \mathcal{C} , et dont les arêtes sont les diagonales principales. Le graphe T' est connexe parce que $\hat{\mathcal{C}}$ l'est. Le lemme 4.15 implique que chaque diagonale principale ouverte Δ disconnecte $\hat{\mathcal{C}}$ $p_1(\hat{\mathcal{C}} \setminus \Delta)$ ne rencontre pas $p_1(\Delta)$ et ne peut donc pas être connexe. Chaque arête disconnecte donc T' , donc T' est un arbre. On définit $f_i : T_i \rightarrow T'$ ainsi : si $x \in p_i(\mathcal{C})$, alors $p_i^{-1}(x)$ est connexe et définit donc un sommet de T' . On définit $f_i(x)$ comme étant ce sommet. Si $x \in p_i(R)$ pour un rectangle doublement léger maximal R , alors R est unique, et on envoie x sur le point de T' correspondant au point y de Δ_R tel que $p_i(y) = x$. L'application f_i est ainsi définie sur $p_i(\mathcal{C})$ qui est un sous-arbre dense de T_i (il contient le sous-arbre minimal). Si on munit T' de sa distance combinatoire, f_i est Lipschitzienne et s'étend donc de manière unique à T_i . Il est clair que f_i préserve l'alignement en restriction à $p_i(\mathcal{C})$ car la préimage d'un point est connexe. On vérifie sans peine que ceci implique que f_i préserve l'alignement. \square

4.6 Flot et contractibilité du cœur

Proposition 4.16. *Soient T_1, T_2 deux actions minimales non triviales d'un groupe de type fini G sur des arbres réels dont le cœur est non vide. Soit $\hat{\mathcal{C}}$ le cœur augmenté.*

Alors, il existe une rétraction par déformation forte de $T_1 \times T_2$ sur $\hat{\mathcal{C}}$. Cette rétraction est équivariante et lipschitzienne. En particulier, $\hat{\mathcal{C}}$ est contractile. De plus, pour tout rectangle $R \subset T_1 \times T_2$, $R \cap \hat{\mathcal{C}}$ est soit vide, soit contractile.

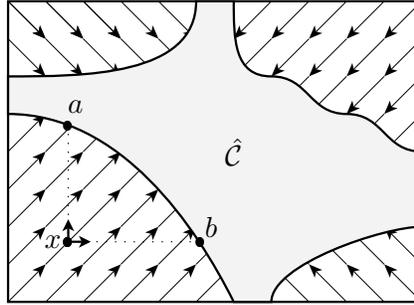


FIG. 3: Le semi-flot φ_t

Remarque. La minimalité dans la proposition ci-dessus peut être remplacée par l'hypothèse plus faible que $T_i = p_i(\hat{\mathcal{C}})$. En particulier, la contractibilité de $\hat{\mathcal{C}}$ reste vraie sans hypothèse de minimalité car la proposition implique que $\hat{\mathcal{C}}$ est un rétract par déformation forte de $p_1(\hat{\mathcal{C}}) \times p_2(\hat{\mathcal{C}})$.

On va en fait montrer l'énoncé plus général suivant :

Lemme 4.17. *Soit \mathcal{Q} une famille G -invariante de quadrants dont le cœur $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$ est connexe, et telle que $p_i(\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}) = T_i$ pour $i \in \{1, 2\}$.*

Alors, il existe un semi-flot lipschitzien G -équivariant φ_t sur $T_1 \times T_2$ dont la restriction à \mathcal{C}_Q est l'identité, et tel que pour tout $x \in T_1 \times T_2$, il existe $t \in [0, +\infty[$ tel que $\varphi_t(x) \in \mathcal{C}_Q$.

De plus, pour tout rectangle R tel que $p_i(R \cap \mathcal{C}_Q) = p_i(R)$ pour $i \in \{1, 2\}$, R est invariant sous φ_t .

Preuve de la proposition à partir du lemme. La minimalité et la connexité de $\hat{\mathcal{C}}$ impliquent que $p_i(\hat{\mathcal{C}}) = T_i$. Les hypothèses du lemme sont donc satisfaites. Le semi-flot φ_t est la rétraction par déformation forte cherchée.

Il reste à vérifier que la trace de $\hat{\mathcal{C}}$ sur un rectangle R est vide ou contractile. Si $R \cap \hat{\mathcal{C}}$ est non vide, soit $R_0 = p_1(R \cap \hat{\mathcal{C}}) \times p_2(R \cap \hat{\mathcal{C}})$ le plus petit rectangle contenant $R \cap \hat{\mathcal{C}}$ (c'est un rectangle car $R \cap \hat{\mathcal{C}}$ est connexe d'après la proposition 4.12). Le lemme dit que R_0 est invariant sous le semi-flot, donc $R \cap \hat{\mathcal{C}}$ est un rétract par déformation forte de R_0 . \square

Preuve du lemme. Pour tout $t \in [0, \infty[$ et $x \in T_1 \times T_2$, on veut définir $\varphi_t(x)$ (voir figure 3). Si $x \in \mathcal{C}_Q$, on définit $\varphi_t(x) = x$ pour tout $t \geq 0$. Sinon, puisque $p_i(\mathcal{C}_Q) = T_i$, soient $a, b \in \mathcal{C}$ tels que $p_1(a) = p_1(x)$ et $p_2(b) = p_2(x)$ et soit $R = [x_1, b_1] \times [x_2, a_2]$ le plus petit rectangle contenant a et b (avec les notations $a_i = p_i(a)$ et $b_i = p_i(b)$). La proposition 4.6 montre que $\mathcal{C}_Q \cap R$ est connexe. De plus, $R \setminus \mathcal{C}_Q$ a au plus deux composantes connexes : la composante R_x contenant x , et la composante contenant le coin opposé (b_1, a_2) , cette deuxième composante n'existant que si $(b_1, a_2) \notin \mathcal{C}_Q$. En effet, les deux composantes sont les unions des traces des quadrants contenant x et (b_1, a_2) respectivement.

On dit qu'un rectangle R est une *carte* pour x si x est un coin de R , et s'il existe deux points $a, b \in R \cap \mathcal{C}_Q$ tels que $p_1(a) = p_1(x)$ et $p_2(b) = p_2(x)$. Étant donnée une carte R pour x , on l'identifie isométriquement avec $[0, l_1] \times [0, l_2] \subset \mathbb{R}^2$ en envoyant x, a et b sur $(0, 0), (l_1, 0), (0, l_2)$ respectivement où $l_1 = d(x_1, b_1)$ et $l_2 = d(x_2, a_2)$. Les lignes de flot seront parallèles au vecteur $\vec{v} = (1, 1)$. Grâce à cette identification, étant donné $y \in R$ et $t \in [0, \min(l_1, l_2)]$ pas trop grand, l'écriture $y + t\vec{v}$ a un sens dans R .

Puisque $R \cap \mathcal{C}_Q$ est connexe, il existe $t \leq \min(l_1, l_2)$ tel que $x + t\vec{v} \in \mathcal{C}_Q$ car sinon, ce segment séparerait a de b , contredisant la connexité de $\mathcal{C}_Q \cap R$. De même, pour tout $y \in R_x$, il existe $t \in [0, \min(l_1, l_2)]$ tel que $y + t\vec{v} \in \mathcal{C}_Q$. Ainsi, pour tout choix de R , on peut définir $\tau_R(y)$ comme le plus petit $s \geq 0$ tel que $y + s\vec{v} \in \mathcal{C}_Q$. Pour $y \in R_x$, on définit alors le semi-flot par $\varphi_t^R(y) = y + \min(t, \tau_R(y))\vec{v}$.

La définition du semi-flot ne change pas si l'on change une carte R en une carte plus petite R' . En effet, pour tout $y \in R'_x$, le point $y + \tau_R(y)\vec{v}$ appartient aussi à R' car sinon, il n'y aurait pas de s tel que $y + s\vec{v} \in \mathcal{C}_Q \cap R'$. Ceci implique que les définitions de τ_R et $\tau_{R'}$ coïncident, et donc que les semi-flot φ_t^R et $\varphi_t^{R'}$ coïncident. Puisque pour tout x , il y a une carte contenue dans toutes les autres, la définition du semi-flot ne dépend d'aucun choix.

Notons que par définition, $\varphi_t(x)$ reste dans toute carte pour x . Or si R est un rectangle tel que $p_i(R \cap \mathcal{C}_Q) = p_i(R)$ pour $i \in \{1, 2\}$, alors R contient une carte pour chacun de ses points. En particulier, R est invariant sous φ_t .

Il nous reste à prouver que $\varphi : \mathbb{R}_+ \times T_1 \times T_2 \rightarrow T_1 \times T_2$ est lipschitzien ; il suffit de le faire par rapport à chaque variable séparément. Sur $T_1 \times T_2$, on utilise la distance $d(x, y) = \max_{i \in \{1, 2\}} d_{T_i}(x_i, y_i)$. Il est clair que $t \mapsto \varphi_t(x)$ est 1-lipschitzienne. Considérons $x_1 \mapsto \varphi_t(x_1, x_2)$ où t et x_2 sont fixés. Soit $b_1 \in T_1$ tel que $b = (b_1, x_2) \in \mathcal{C}_Q$. Soient $x_1, x'_1 \in T_1$, et notons $x = (x_1, x_2)$ et $x' = (x'_1, x_2)$. Soit $l = d(x_1, x'_1)$.

1er cas : $x \notin \mathcal{C}_Q$ et $x' \in \mathcal{C}_Q$. Dans ce cas, on choisit la carte $R = [x_1, x'_1] \times [x_2, a_2]$ où $(x_1, a_2) \in \mathcal{C}_Q$. Alors, $d(\varphi_t(x), \varphi_t(x')) = d(\varphi_t(x), x') \leq l$. En effet, soit $\lambda = \min(t, \tau(x))$, on a $\lambda \leq l$ car $\varphi_t(x) \in R$. Donc $d(\varphi_t(x), x') = \|x + \lambda\vec{v} - x'\| = \max(|\lambda|, |\lambda - l|) \leq l$.

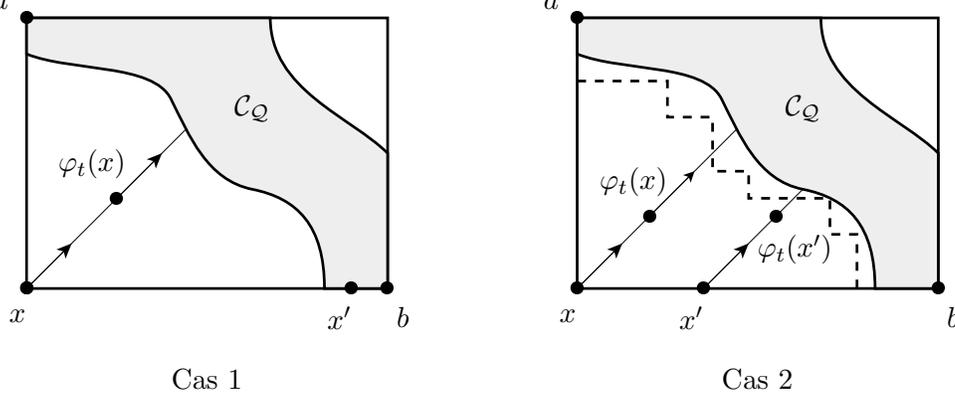


FIG. 4: Le semi-flot est lipschitzien

2ème cas : x et x' ne sont pas dans \mathcal{C}_Q , et $x'_1 \in [x_1, b_1]$ (rappelons que b_1 est tel que $(b_1, x_2) \in \mathcal{C}_Q$). Dans ce cas, on se place dans la carte $R = [x_1, b_1] \times [x_2, a_2]$ où $a = (x_1, a_2) \in \mathcal{C}_Q$. L'arc $[x_1, x'_1] \times \{x_2\}$ ne rencontre pas \mathcal{C}_Q car les fibres sont convexes et que $(b_1, x_2) \in \mathcal{C}_Q$. Ainsi, x et x' sont dans la même composante R_x de $R \setminus \mathcal{C}_Q$. Soit $\lambda = \min(t, \tau(x))$ et $\lambda' = \min(t, \tau(x'))$. On a $d(\varphi_t(x), \varphi_t(x')) = \|(\lambda, \lambda) - (\lambda' + l, \lambda')\| \leq l + |\lambda - \lambda'|$. Il reste à prouver que $z_1 \mapsto \tau(z_1, x_2)$ est lipschitzienne en restriction à R_x . Écrivons R_x comme une union croissante d'ensembles R_k où chacun des R_k est une union finie de traces de quadrants de \mathcal{Q} sur R . On vérifie facilement que l'application linéaire par morceaux τ_k obtenue en remplaçant R_x par R_k est $\sqrt{2}$ -lipschitzienne. La fonction τ étant la borne supérieure des fonctions τ_k , elle est $\sqrt{2}$ -lipschitzienne.

On peut ensuite déduire les cas restant des deux premiers cas. Supposons que $x, x' \notin \mathcal{C}_Q$. Considérons la fibre $\mathcal{F}_1 = \{b_1 \in T_1 \mid (b_1, x_2) \in \mathcal{C}_Q\}$. Si \mathcal{F}_1 rencontre $[x_1, x'_1]$ en un point b'_1 , on peut appliquer le 1er cas aux points x, b'_1 puis aux points b'_1, x' et appliquer l'inégalité triangulaire. Si \mathcal{F}_1 ne rencontre pas $[x_1, x'_1]$, soit x''_1 le centre du triangle (x_1, x'_1, b_1) . On peut alors appliquer le second cas aux points x, x''_1 puis aux points x''_1, x' . \square

4.7 Le cœur est CAT(0).

Soit d la distance CAT(0) usuelle sur $T_1 \times T_2$ définie par

$$d((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = \sqrt{d_{T_1}(a_1, b_1)^2 + d_{T_2}(a_2, b_2)^2}.$$

Soit $d_{\hat{\mathcal{C}}}$ la distance de longueur induite par d sur $\hat{\mathcal{C}}$

$$d_{\hat{\mathcal{C}}}(x, y) = \inf\{\text{longueur}(c) \mid c \text{ chemin joignant } x \text{ à } y \text{ dans } \hat{\mathcal{C}}\}$$

où la longueur d'un chemin est mesurée par rapport à d .

Notons que $d_{\hat{\mathcal{C}}}$ est bien définie (et finie) car deux points quelconques de $\hat{\mathcal{C}}$ sont joints par un chemin lipschitzien (proposition 4.16). Cette distance n'est en général pas complète car T_1 et T_2 ne sont pas complets en général.

Proposition 4.18. *L'espace $\hat{\mathcal{C}}$ muni de la distance $d_{\hat{\mathcal{C}}}$ est CAT(0).*

Démonstration. Dans le cas où T_1 et T_2 sont des arbres simpliciaux métriques, le résultat est clair car $\hat{\mathcal{C}}$ est un complexe carré simplement connexe et le link à chaque sommet ne contient pas de courbe fermée non triviale de longueur strictement inférieure à 2π parce que c'est déjà le cas dans $T_1 \times T_2$ (voir [BH99]).

Pour des arbres réels, on va procéder par approximations. Soient K_1, K_2 deux sous-ensembles convexes fermés T_1 et T_2 . Pour tout chemin lipschitzien $c : [0, 1] \rightarrow \hat{\mathcal{C}}$ joignant deux points de $K_1 \times K_2 \cap \hat{\mathcal{C}}$, il y a un chemin plus court contenu dans $(K_1 \times K_2) \cap \hat{\mathcal{C}}$ les

joignant : En effet, pour chaque composante $]a, b[$ de $[0, 1] \setminus (p_1 \circ c)^{-1}(K_1)$, on a $p_1(c(a)) = p_1(c(b)) \in K_1$, et on peut redéfinir c sur $]a, b[$ par la géodésique dans la fibre de $p_1(c(a))$ et obtenir ainsi un chemin plus court c' dans \hat{C} ayant la même constante de Lipschitz. En faisant cela pour chaque composante, on obtient un chemin plus court dans $\hat{C} \cap (K_1 \times T_2)$. En effectuant l'opération symétrique sur c' , on obtient un chemin plus court dans $(K_1 \times K_2) \cap \hat{C}$.

Étant donnés $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in \hat{C}$ et $K_i = [a_i, b_i]$, la compacité de $(K_1 \times K_2) \cap \hat{C}$ implique que la distance de a à b est atteinte par un certain chemin. En d'autres termes, \hat{C} est un espace géodésique, et les ensembles de la forme $(K_1 \times K_2) \cap \hat{C}$ sont convexes.

De plus, il y a une unique géodésique entre deux points. Sinon, on pourrait trouver deux points a, b et deux géodésiques les joignant telles que $c_1 \cap c_2 = \{a, b\}$. Le fait que l'intersection d'un rectangle avec \hat{C} est convexe implique que c_1 et c_2 sont les graphes de deux fonctions monotones dans le plus petit rectangle contenant $\{a, b\}$. Supposons, avec ce point de vue que $c_1 \leq c_2$. Puisque l'ensemble contenu entre c_1 et c_2 est contenu dans \hat{C} , si c_1 n'était pas concave, on pourrait la raccourcir. De même, c_2 est convexe. On en déduit $c_1 = c_2$.

Puisque tout triangle géodésique de \hat{C} est contenu dans le produit de deux tripodes, il suffit de montrer que $X = (K_1 \times K_2) \cap \hat{C}$ est CAT(0) pour toute paire de tripodes K_1, K_2 . Il est facile de voir que X est obtenu à partir de $K_1 \times K_2$ en enlevant un nombre dénombrable de quadrants. Écrivons donc X comme l'intersection décroissante d'ensembles X_k obtenus en enlevant un nombre fini de quadrants à $K_1 \times K_2$. L'argument dans le cas simplicial montre que X_k est CAT(0). Considérons une suite de géodésiques de X_k paramétrées linéairement $c_k : [0, 1] \rightarrow X_k$, joignant deux points $a, b \in X$. Quitte à extraire une sous-suite, c_k converge vers une courbe c joignant a à b dans X . Un argument général montre que $\text{longueur}(c) \leq \lim \text{longueur}(c_k)$ et puisque $X \subset X_k$, $\text{longueur}(c) \geq \text{longueur}(c_k)$, donc la distance de longueur de X_k converge vers la distance de longueur de X . On en déduit que X est CAT(0). \square

5 Caractérisation du cœur

Proposition 5.1 (caractérisation du cœur). *Soient T_1, T_2 deux actions non triviales d'un groupe G de type fini sur des arbres réels telles que $\mathcal{C} \neq \emptyset$.*

Soit $F \subset T_1 \times T_2$ un fermé non-vide G -invariant, connexe, à fibres convexes. Alors F contient $\mathcal{C}(T_1 \times T_2)$.

De plus, \mathcal{C} est l'intersection de tous les ensembles F de cette forme.

Si T_1 et T_2 ne raffinent pas un même arbre simplicial, alors \mathcal{C} est lui-même un fermé connexe à fibres convexes. On obtient donc :

Corollaire 5.2. *Soient T_1, T_2 deux actions non triviales d'un groupe G de type fini sur des arbres réels dont les sous-arbres minimaux sont denses. Supposons que $\mathcal{C} \neq \emptyset$, et que T_1 et T_2 ne raffinent pas un même arbre simplicial.*

Alors \mathcal{C} est le plus petit fermé non vide invariant connexe à fibres convexes dans $T_1 \times T_2$.

On utilisera souvent cette caractérisation du cœur sous la forme suivante :

Corollaire 5.3. *Soient T_1, T_2 deux actions d'un groupe G sur des arbres réels. Soit X un espace connexe non vide muni d'une action de G et deux applications continues équivariantes f_1, f_2 de X dans T_1 et T_2 telles que l'image réciproque de tout point soit connexe. Soit $F = \overline{(f_1, f_2)} : X \rightarrow T_1 \times T_2$.*

Alors $F(X)$ contient \mathcal{C} .

Preuve du corollaire 5.3. Puisque $\overline{F(X)}$ est un sous-ensemble fermé connexe, il suffit de montrer que ses fibres sont convexes. D'après le corollaire 5.5 ci-dessous, il suffit de vérifier que $F(X)$ est à fibres convexes. Mais une fibre de $F(X)$ s'écrit $F(X) \cap p_1^{-1}(x_1) = F(f_1^{-1}(x_1))$, elle est donc connexe car $f_1^{-1}(x_1)$ l'est. \square

Le résultat technique principal de cette section est le suivant :

Lemme 5.4. *Soient T_1, T_2 deux arbres réels et $F \subset T_1 \times T_2$ un sous-ensemble connexe à fibres convexes.*

Alors, le complémentaire de \overline{F} est une union de quadrants.

On en déduit immédiatement :

Corollaire 5.5. *Si F est connexe à fibres convexes, \overline{F} aussi.*

Remarque. Ceci est bien sûr faux sans hypothèse de connexité, comme le montre l'ensemble $E = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{Q}\} \cup \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$ dans \mathbb{R}^2 .

Preuve de la proposition à partir du lemme 5.4. Soit \mathcal{Q} la famille des quadrants ne rencontrant pas F . D'après le lemme 5.4, $F = (T_1 \times T_2) \setminus \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Q$. Pour montrer que F contient \mathcal{C} , il suffit de voir que chaque quadrant $Q \in \mathcal{Q}$ est léger, ce qui est clair car il ne rencontre l'orbite d'aucun point de F . \square

On va utiliser la terminologie suivante : si $Q = \delta_1 \times \delta_2$ est un quadrant basé en $x = (x_1, x_2)$, on note $\partial_1 Q = \{x_1\} \times \delta_2$ (resp. $\partial_2 Q = \delta_1 \times \{x_2\}$) la frontière *verticale* (resp. *horizontale*) de Q . On a ainsi $\partial Q = \partial_1 Q \sqcup \partial_2 Q \sqcup \{x\}$. On dit que deux quadrants $\delta_1 \times \delta_2$ et $\delta'_1 \times \delta'_2$ basés au même point sont *opposés* si $\delta_1 \neq \delta'_1$ et $\delta_2 \neq \delta'_2$.

Fait 5.6. *Soient T_1, T_2 deux arbres et $F \subset T_1 \times T_2$ un sous-ensemble connexe à fibres convexes. Soit $x \notin F$.*

1. *Si F rencontre deux quadrants opposés basés en x , alors il existe un quadrant P basé en x tel que F rencontre les frontières verticales et horizontales de P .*
2. *Soit P un quadrant basé en x tel que F rencontre les frontières horizontales et verticales de P . Alors l'adhérence d'aucun quadrant opposé à P n'intersecte F . De plus, F rencontre P .*

Preuve du fait. 1. Soit $Q = \delta_1 \times \delta_2$, $Q' = \delta'_1 \times \delta'_2$ deux quadrants opposés basés en x et rencontrant F . Puisque F est connexe et ne contient pas x , F rencontre $\partial Q \setminus \{x\} = \partial_1 Q \cup \partial_2 Q$. Supposons par exemple que F rencontre $\partial_1 Q = \{x_1\} \times \delta_2$. Pour les mêmes raisons, F rencontre $\partial_1 Q'$ ou $\partial_2 Q'$. Puisque les fibres de F sont convexes et que $x \notin F$, F ne peut pas rencontrer $\partial_1 Q'$. Donc F rencontre les frontières verticales et horizontales du quadrant $P = \delta'_1 \times \delta_2$.

2. Soit $P = \rho_1 \times \rho_2$ un quadrant basé en (x_1, x_2) tel que F rencontre $\partial_1 P$ et $\partial_2 P$. La convexité des fibres implique que F ne rencontre pas l'ensemble $A = ({}^c \rho_1 \times \{x_2\}) \cup (\{x_1\} \times {}^c \rho_2)$. Soit Q un quadrant opposé à P . Puisque $\partial Q \subset A \cup \{x\}$, la connexité de F empêche F d'intersecter \overline{Q} .

Pour montrer que F rencontre P , il suffit de noter que $A \cup P \cup \{x\}$ sépare $\partial_1 P$ de $\partial_2 P$. \square

Preuve du lemme 5.4. Soit $x = (x_1, x_2) \notin \overline{F}$. On cherche un quadrant Q contenant x et disjoint de F . Soit $V = V_1 \times V_2$ un voisinage ouvert de x ne rencontrant pas F . Si F ne rencontre aucun quadrant basé en x , on peut par exemple supposer que F est contenu dans $\{x_1\} \times \delta_2$ pour une certaine direction δ_2 issue de x_2 , et le résultat est clair.

Soit $a = (a_1, a_2) \in F$ appartenant à un quadrant basé en x . Soit $y \in V \cap]x_1, a_1[\times]x_2, a_2[$, et Q_y le quadrant basé en y contenant x (voir figures 5 et 6). Si $Q_y \cap F = \emptyset$, on a fini. Sinon, F rencontre deux quadrants opposés basés en y : Q_y et le quadrant contenant a . D'après le fait 5.6 ci-dessus, il existe un quadrant $P_y = \rho_1 \times \rho_2$ basé en y dont F rencontre les frontières horizontales et verticales. D'après la deuxième partie du fait 5.6, P_y a une frontière (horizontale ou verticale) commune avec chaque quadrant basé en y rencontrant F . On peut donc supposer par exemple que P_y et Q_y ont en commun leur frontière verticale. Soit $v = (y_1, v_2) \in F \cap \partial_1 P_y$, et $u = (u_1, y_2) \in F \cap \partial_2 P_y$. On distingue deux cas :

1. soit $x_2 \notin [v_2, y_2]$
2. soit $x_2 \in [v_2, y_2]$

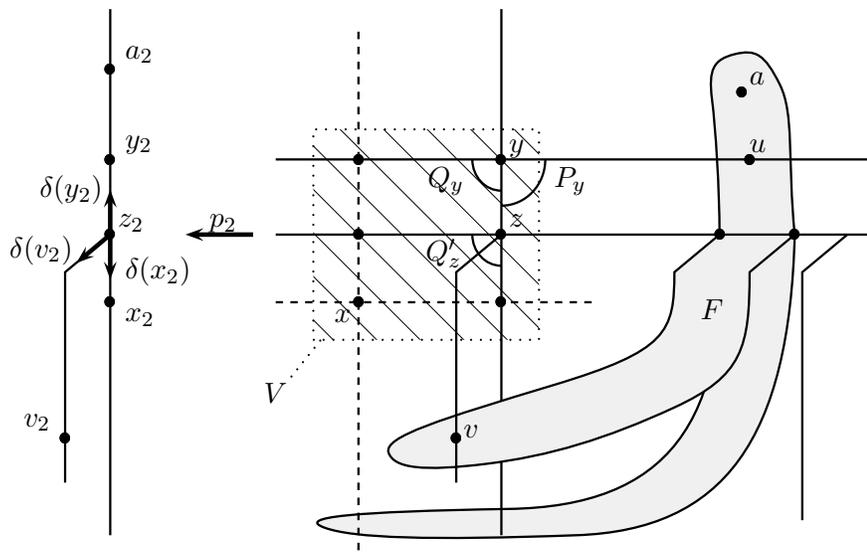


FIG. 5: Preuve du lemme 5.4, cas 1

Plaçons nous d'abord dans le cas 1 (figure 5). Puisque $x \in Q_y$, x_2 et v_2 sont dans une même direction issue de y_2 (la direction verticale de Q_y). Donc $[y_2, v_2]$ et $[y_2, x_2]$ ont un segment initial non dégénéré en commun $[y_2, z_2]$. On a $z_2 \neq x_2$ car sinon, le cas 2 aurait lieu et on a $z_2 \neq v_2$ car F ne rencontre pas V . Ceci signifie que les trois directions $\delta(y_2)$, $\delta(x_2)$ et $\delta(v_2)$ basées en z_2 et contenant respectivement y_2 , x_2 , et v_2 sont distinctes. Puisque x_2, z_2, y_2, a_2 sont alignés dans cet ordre, $a_2 \in \delta(y_2)$.

Considérons maintenant le point $z = (y_1, z_2) \in V$. En particulier $z \notin F$. Soit $Q'_z = \delta_1 \times \delta(x_2)$ le quadrant basé en z et contenant x . Si Q'_z ne rencontre pas F , on a terminé. Sinon, il y a deux quadrants opposés, basés en z qui rencontrent F : Q'_z et le quadrant contenant a , noté $\eta_1 \times \delta(y_2)$. Le quadrant P'_z donné par le point 1 du fait 5.6 est l'un des deux quadrants $\delta_1 \times \delta(y_2)$ ou $\eta_1 \times \delta(x_2)$. Puisque F intersecte la frontière verticale de P'_z , F contient un point dans $\{y_1\} \times \delta(y_2)$ ou dans $\{y_1\} \times \delta(x_2)$. Puisque $v \in \{y_1\} \times \delta(v_2)$ appartient aussi à F , la convexité des fibres contredit le fait que $z \notin F$. Ceci conclut le cas 1.

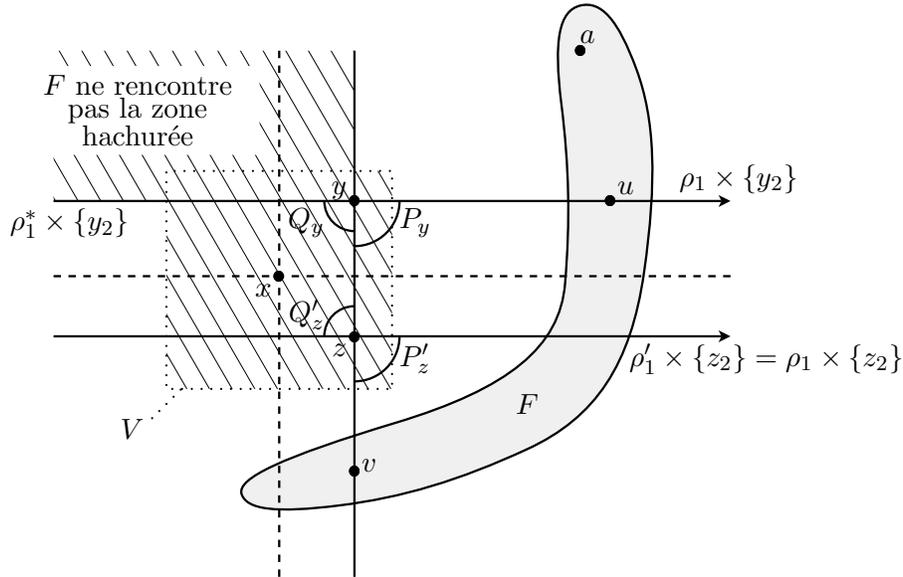


FIG. 6: Preuve du lemme 5.4, cas 2

On se place maintenant dans le cas où $x_2 \in [v_2, y_2]$ (figure 6). Soit $z = (y_1, z_2)$ où

$z_2 \in V_2 \cap]x_2, v_2[$. On va montrer que le quadrant Q'_z basé en z et contenant x ne rencontre pas F en trouvant un quadrant P'_z opposé à Q'_z et rencontrant F en ses deux frontières. Le fait 5.6 permet alors de conclure.

Soit ρ'_2 la direction issue de z_2 contenant v_2 , et soit $\rho'_1 = \rho_1$. Puisque $x_2 \in [v_2, y_2]$, $P'_z = \rho'_1 \times \rho'_2$ est opposé à Q'_z . De plus, le choix de ρ'_2 implique que F rencontre la frontière verticale de P'_z . De plus, ${}^c\rho_1 \times \{y_2\}$ ne rencontre pas F puisque cet ensemble est contenu dans l'adhérence de l'union des quadrants opposés à P_y , et V n'intersecte pas F non plus (zone hachurée de la figure). Or ${}^c\rho_1 \times \{y_2\} \cup V \cup \rho_1 \times \{z_2\}$ sépare u de v . Ainsi, puisque F contient u et v , F intersecte $\rho_1 \times \{z_2\}$, c'est-à-dire la frontière horizontale de P'_z . Donc F rencontre les deux frontières de P'_z , ce qui implique que F ne rencontre pas Q'_z . Le quadrant Q'_z convient donc. \square

6 Compatibilité d'actions sur les arbres

Disons que \mathcal{C} est de *dimension* 1 s'il ne contient aucun rectangle $I_1 \times I_2$ où I_1 et I_2 sont deux arcs non dégénérés. La preuve montrera que quand \mathcal{C} est de dimension 1, \mathcal{C} (ou le cœur augmenté $\hat{\mathcal{C}}$ si \mathcal{C} n'est pas connexe) a une structure naturelle d'arbre réel qui est un raffinement commun de T_1 et T_2 .

Théorème 6.1 (comparer avec [SS00]). *Soient T_1, T_2 deux actions minimales de G sur des arbres réels telles que $\mathcal{C}(T_1 \times T_2) \neq \emptyset$.*

Alors T_1 et T_2 ont un raffinement commun si et seulement si \mathcal{C} est de dimension 1.

Remarque. Ce résultat est faux si l'on ne suppose pas $\mathcal{C} \neq \emptyset$: une action abélienne sans droite invariante et l'action correspondante sur \mathbb{R} n'ont pas de raffinement commun.

Démonstration. Supposons d'abord que T_1 et T_2 ont un raffinement commun T_0 , et soit $f_i : T_0 \rightarrow T_i$ une application équivariante préservant l'alignement. Soit $F = (f_1, f_2) : T_0 \rightarrow T_1 \times T_2$. D'après le corollaire 5.3, $\overline{F(T_0)}$ contient \mathcal{C} .

Montrons que $F(T_0)$ est de dimension 1. Dans le contexte simplicial, ce serait clair. En général, soient $a = (a_1, a_2)$, $b = (a_1, c_2)$, $c = (c_1, c_2)$, $d = (c_1, a_2)$ les coins d'un rectangle non aplati contenu dans $F(T_0)$, et soit a_0, b_0, c_0, d_0 des antécédents dans T_0 . Soit $K_0 \subset T_0$ l'enveloppe convexe de $\{a_0, b_0, c_0, d_0\}$. On a soit $[a_0, b_0] \cup [c_0, d_0] = K_0$, soit $[b_0, c_0] \cup [d_0, a_0] = K_0$. Supposons par exemple que $[a_0, b_0] \cup [c_0, d_0] = K_0$. Puisque $f_1(a_0) = f_1(b_0)$, f_1 est constante sur $[a_0, b_0]$. De même, f_1 est constante sur $[c_0, d_0]$. Donc f_1 est constante sur K_0 , contradiction. On en déduit que $\overline{F(T_0)}$ est aussi de dimension 1 : soit $R \subset \overline{F(T_0)}$ un rectangle non dégénéré, et soit $x \in R$ n'appartenant pas au bord de R . Alors les quatre quadrants basés en x et contenant les quatre coins de R rencontrent $F(T_0)$, ce qui implique, d'après le fait 5.6, que $x \in F(t_0)$.

Réciproquement, supposons que \mathcal{C} et donc $\hat{\mathcal{C}}$ soit de dimension 1. Si T_1 et T_2 sont des arbres simpliciaux, alors $\hat{\mathcal{C}}$ est un graphe contractile, donc un arbre. Ainsi, $\hat{\mathcal{C}}$ est un raffinement de T_1 et T_2 car l'application $p_i : \hat{\mathcal{C}} \rightarrow T_i$ préserve l'alignement car $\hat{\mathcal{C}}$ est à fibres convexes.

Dans le cas général, il reste à montrer que $\hat{\mathcal{C}}$ est un arbre réel. On a déjà montré que $\hat{\mathcal{C}}$ était CAT(0), et en particulier géodésique. Supposons que $\hat{\mathcal{C}}$ contienne un cercle topologique plongé $c = (c_1, c_2) : S^1 \rightarrow \hat{\mathcal{C}}$. Alors c_1 ne peut pas être constante, donc il existe un intervalle non dégénéré $[a, b] \subset S^1$ avec $c_1(a) = c_1(b) \notin c_1(]a, b[)$. Le segment $\{c_1(a)\} \times [c_2(a), c_2(b)]$ est contenu dans $\hat{\mathcal{C}}$ car les fibres sont convexes. Or $c_1(]a, b[)$ est contenu dans une direction basée en $c_1(a)$, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a' \in]a, b[$ proche de a et $b' \in]a, b[$ proche de b tels que $c_1(a') = c_1(b')$, $d(c_2(a), c_2(a')) < \varepsilon$ et $d(c_2(b), c_2(b')) < \varepsilon$. Si ε est assez petit comparé à $d(c_2(a), c_2(b))$, les segments $[c_2(a), c_2(b)]$ et $[c_2(a'), c_2(b')]$ de T_2 doivent se rencontrer en un intervalle non dégénéré, appelons le I_2 .

Les segments $\{c_1(a)\} \times I_2$ et $\{c_1(a')\} \times I_2$ sont contenus dans \hat{C} par convexité des fibres, ce qui implique que le rectangle $[c_1(a), c_1(a')] \times I_2$ est contenu dans \hat{C} , contradiction. \square

7 Interprétation topologique du nombre d'intersection

Nous allons donner une interprétation topologique du nombre d'intersection de deux scindements.

Commençons par quelques définitions. Étant donné un CW -complexe X et un sous-complexe (pas forcément connexe) $Y \subset X$, on dit que Y est à *deux côtés* si Y a un voisinage dans X homéomorphe à $Y \times [-\varepsilon, \varepsilon]$. Soit \tilde{X} le revêtement universel de X , et \tilde{Y} l'image réciproque de Y dans \tilde{X} . L'*arbre dual* à $Y \subset X$ est le graphe T_Y dont les sommets sont les composantes connexes de $\tilde{X} \setminus \tilde{Y}$ et les arêtes sont les composantes connexes de \tilde{Y} , une arête e étant adjacente à un sommet v si $e \subset \bar{v}$. La simple connexité de \tilde{X} implique que T_Y est un arbre. L'action de $G = \pi_1(\Sigma)$ sur \tilde{X} induit clairement une action sur T_Y .

Étant donnés Y_1, Y_2 deux sous-complexes à deux côtés de X , on dit que Y_1 et Y_2 s'intersectent transversalement si $Y_1 \cap Y_2$ possède un voisinage N homéomorphe à $(Y_1 \cap Y_2) \times [-\varepsilon, \varepsilon]^2$ où $Y_i \cap N$ correspond à $(Y_1 \cap Y_2) \times p_i^{-1}(0)$ où $p_i : [-\varepsilon, \varepsilon]^2 \rightarrow [-\varepsilon, \varepsilon]$ est la projection canonique.

Dans la proposition suivante, $\#\pi_0(Y_1 \cap Y_2)$ représente le nombre de composantes connexes de $Y_1 \cap Y_2$.

Théorème 7.1. *Supposons que $Y_1, Y_2 \subset X$ soient des sous-complexes à deux côtés s'intersectant transversalement. Soient T_1, T_2 les arbres duaux, munis de l'action de $G = \pi_1(X)$. Alors $i(T_1, T_2) \leq \#\pi_0(Y_1 \cap Y_2)$.*

De plus, étant donnés deux actions non triviales d'un groupe sur des arbres simpliciaux T_1, T_2 , il existe un complexe X et $Y_1, Y_2 \subset X$ des sous-complexes à deux côtés s'intersectant transversalement tels que T_i soit dual à $Y_i \subset X$ et

$$i(T_1, T_2) = \#\pi_0(Y_1 \cap Y_2).$$

Démonstration. Considérons l'arbre T_Y dual à $Y \subset X$. Alors, il existe une application continue équivariante naturelle $f : \tilde{X} \rightarrow T_Y$ définie en envoyant chaque composante connexe de $\tilde{Y} \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ sur une arête et en envoyant chaque composante connexe de $(\tilde{X} \setminus \tilde{Y}) \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ sur un sommet. L'observation principale ici est que l'image réciproque par f de tout point de T_Y est connexe.

Dans notre contexte, notons $f_i : \tilde{X} \rightarrow T_i$ les applications définies ci-dessus, et $F = (f_1, f_2)$. D'après le corollaire 5.3, $F(\tilde{X})$ contient \mathcal{C} car $F(\tilde{X})$ est fermé (c'est un sous-complexe de $T_1 \times T_2$). Puisque Y_1 et Y_2 s'intersectent transversalement, $Y_1 \cap Y_2$ a un voisinage homéomorphe à $(Y_1 \cap Y_2) \times [-\varepsilon, \varepsilon]^2$, donc F envoie chaque composante connexe de $(\tilde{Y}_1 \cap \tilde{Y}_2) \times [-\varepsilon, \varepsilon]^2$ sur une 2-cellule de $T_1 \times T_2$. De plus, l'image réciproque du centre d'une 2-cellule de $T_1 \times T_2$ est une composante connexe de $\tilde{Y}_1 \cap \tilde{Y}_2$. Ainsi, le nombre d'orbites de 2-cellules de $F(\tilde{X})$ est borné par le nombre d'orbites de composantes connexes de $\tilde{Y}_1 \cap \tilde{Y}_2$. On a donc

$$\begin{aligned} i(T_1, T_2) &= \#\{2\text{-cellules de } \mathcal{C}/G\} \leq \#\{2\text{-cellules de } F(\tilde{X})/G\} \\ &\leq \#\pi_0(\tilde{Y}_1 \cap \tilde{Y}_2)/G = \#\pi_0(Y_1 \cap Y_2). \end{aligned}$$

Prouvons maintenant qu'on peut avoir l'égalité en construisant X, Y_1, Y_2 à partir de \hat{C} . Soit $\tilde{X} = \hat{C}$, et E_i l'ensemble des milieux d'arêtes de T_i , et soit $\tilde{Y}_i = \hat{C} \cap p_i^{-1}(E_i)$. Dans la catégorie des complexes de groupes, on pourrait essentiellement prendre $Y_i = \tilde{Y}_i/G$ et $X = \tilde{X}/G$. Ici, on doit modifier cette construction pour avoir des actions libres. Soit A un complexe simplement connexe sur lequel G agit librement (un 2-complexe de Cayley par exemple). Soit $\tilde{X}' = \hat{C} \times A$ muni de l'action diagonale de G , et $\tilde{Y}'_i = \tilde{Y}_i \times A$. Les

composantes connexes de $\tilde{Y}'_1 \cap \tilde{Y}'_2$ sont de la forme $x \times A$ où x est soit le centre d'une 2-cellule de \mathcal{C} , soit le milieu d'une diagonale principale de $\hat{\mathcal{C}}$. Ainsi, en présence de rectangles doublement légers, on a besoin de changer E_i pour que $\tilde{Y}'_1 \cap \tilde{Y}'_2$ ne contienne pas de point correspondant aux diagonales principales de $\hat{\mathcal{C}}$. Pour cela, on peut garder E_1 inchangé, et prendre pour E_2 , un ensemble de points G -invariant de T_2 , rencontrant chaque arête en un point, mais ne contenant pas de milieu d'arête. Une fois cette modification faite, on a une bijection entre les composantes connexes de $\tilde{Y}'_1 \cap \tilde{Y}'_2$ et les 2-cellules de \mathcal{C} . En particulier, $\#\pi_0(\tilde{Y}'_1 \cap \tilde{Y}'_2)/G = i(T_1, T_2)$.

Soit $X' = \tilde{X}'/G$ et $Y'_i = \tilde{Y}'_i/G$. Puisque \tilde{X}' est simplement connexe, et puisque l'action de G sur \tilde{X}' est libre, X' est un revêtement universel de X et $G \simeq \pi_1(\Sigma)$. Ainsi, T_i est dual à $Y'_i \subset X'$, et $i(T_1, T_2) = \#\pi_0(Y'_1 \cap Y'_2)$. \square

8 Cœur d'actions géométriques

Notre but est de produire un domaine fondamental pour le cœur de deux actions géométriques dans le sens faible suivant :

Théorème 8.1. *Soient T_1, T_2 des actions géométriques d'un groupe de type fini G sur des arbres réels.*

Alors, il existe $D \subset T_1 \times T_2$ une union finie de rectangles compacts telle que $\mathcal{C}(T_1 \times T_2) \subset \overline{G.D}$.

Rappelons qu'une action minimale d'un groupe de type fini sur un arbre métrique simplicial est géométrique si et seulement si les stabilisateurs d'arêtes sont de type fini ([LP97]). On obtient ainsi :

Corollaire 8.2 ([Sco98]). *Soient T_1, T_2 deux actions d'un groupe de type fini G sur des arbres simpliciaux T_1, T_2 .*

Si les stabilisateurs d'arête de T_1 et T_2 sont de type fini, alors $\mathcal{C}(T_1 \times T_2)/G$ est compact. En particulier, $i(T_1, T_2)$ est fini.

Pour des arbres réels, nous avons besoins de supposer que G est de présentation finie pour montrer la finitude du nombre d'intersection.

Proposition 8.3. *Soient T_1, T_2 deux actions géométriques d'un groupe G de présentation finie sur des arbres réels.*

Alors $i(T_1, T_2)$ est fini.

La philosophie de la preuve est la suivante : on construit un 2-complexe X avec une action cocompacte de G et deux feuilletages mesurés $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ tels que T_1 et T_2 soient les espaces des feuilles rendus séparés de ces feuilletages (voir ci-dessous pour le rappel des définitions). Soient $f_i : X \rightarrow T_i$ les projections canoniques et $F = (f_1, f_2) : X \rightarrow T_1 \times T_2$. Il est clair que $F(X)$ est contenu dans l'orbite d'un nombre fini de rectangles. Si les points de T_i coïncident exactement avec les feuilles de \mathcal{F}_i , les fibres de f_i sont connexes (ce sont les feuilles) et le corollaire 5.3 implique que $\overline{F(X)}$ contient \mathcal{C} . Le problème technique ici est qu'en général, les fibres de f_i peuvent ne pas être connexes.

8.1 Un exemple de nombre d'intersection infini

En guise de motivation, voici un exemple d'actions du groupe libre F_3 sur deux arbres simpliciaux dont le nombre d'intersection est infini. Ceci répond à une question posée par Scott et Swarup dans [SS00].

Lemme 8.4. *Soit T_1 une action libre minimale du groupe libre $G = \langle a, b, c \rangle$ sur un arbre simplicial, par exemple son graphe de Cayley. Soit H un sous-groupe de type infini de $\langle a, b \rangle$, et soit T_2 l'arbre de Bass-Serre de l'amalgame $G = \langle a, b \rangle *_H (H * \langle c \rangle)$.*

Alors $i(T_1, T_2) = \infty$.

Démonstration. D'abord, \mathcal{C} est non vide d'après la proposition 3.1. Les arbres T_1 et T_2 ne raffinent pas un arbre commun T' non trivial parce que tout stabilisateur d'arête de T' devrait être à la fois un stabilisateur d'arête de T_1 et de T_2 . D'après la proposition 4.14, \mathcal{C} est connexe. Soit e_2 une arête de T_2 fixée par H , et soit $A = \mathcal{C} \cap p_2^{-1}(e_2)$. Par minimalité, $p_i(\mathcal{C}) = T_i$, donc $A \neq \emptyset$. Puisque les fibres sont convexes, A est de la forme $A_1 \times e_2$ où A_1 est un sous-arbre non vide de T_1 . On a que A_1 est H -invariant et que deux arêtes de A_1 sont dans la même H -orbite si et seulement si les rectangles correspondants de A sont dans la même G -orbite. Pour montrer que $i(T_1, T_2) = \infty$, il suffit donc de montrer que A_1/H a un nombre infini d'arêtes. L'action de H sur A_1 étant libre, H est le groupe fondamental de graphe A_1/H . Puisque H n'est pas de type fini, A_1/H ne peut pas être fini. \square

8.2 Préliminaires sur les actions géométriques

Le matériel de cette section est emprunté à [LP97] où on trouvera plus de détails. Un feuilletage mesuré \mathcal{F} sur un 2-complexe simplicial X est la donnée, pour chaque simplexe σ de X d'une application affine (ici éventuellement constante, contrairement à [LP97]) $f_\sigma : \sigma \rightarrow \mathbb{R}$, définie à post-composition près par une isométrie de \mathbb{R} . On suppose que cette donnée est consistante relativement à la restriction à une face : si τ est une face de σ , alors $f_\tau = \varphi \circ (f_\sigma)|_\tau$ pour une certaine isométrie φ de \mathbb{R} . Les lignes de niveaux de f_σ définissent un feuilletage de σ . On appelle simplement *2-complexe feuilleté* un 2-complexe muni d'un feuilletage mesuré. Les feuilles sont les classes pour la relation d'équivalence engendrée par la relation *x, y sont dans le même simplexe fermé σ et $f_\sigma(x) = f_\sigma(y)$* . La mesure transverse $\mu(c)$ d'un chemin $c : [0, 1] \rightarrow \sigma$ est la longueur du chemin $f_\sigma \circ c([0, 1])$ dans \mathbb{R} . Ceci permet de définir la mesure transverse d'un chemin $c : [0, 1] \rightarrow X$ en le découpant en un nombre fini de chemins à valeurs dans un simplexe fermé. La mesure transverse est invariante par l'holonomie le long des feuilles, et définit une distance sur chaque arête transverse au feuilletage.

On dit qu'une application f d'un simplexe σ vers un arbre réel T est *affine* si $f = i \circ a$ où $a : \sigma \rightarrow \mathbb{R}$ est une application affine, et $i : I \rightarrow T$ est une isométrie définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ contenant $a(\sigma)$. Étant donné un 2-complexe mesuré X et une application $f : X \rightarrow T$ affine en restriction à chaque simplexe, il y a un feuilletage mesuré naturel \mathcal{F} sur X défini par les restrictions de f aux simplexes de X . On appelle \mathcal{F} *le feuilletage mesuré induit par f* .

La pseudo-métrique

$$\delta(x, y) = \inf\{\mu(c) \text{ pour } c \text{ joignant } x \text{ à } y\}$$

est nulle sur chaque feuille de X . Par définition, *l'espace des feuilles rendu séparé* X/\mathcal{F} de X est l'espace métrique obtenu en rendant δ séparée, i. e. en identifiant les points à pseudo-distance nulle.

Théorème 8.5 ([LP97]). *Soit (X, \mathcal{F}) un 2-complexe feuilleté. Supposons que $\pi_1(X)$ soit normalement engendré par des classes d'homotopies libres de courbes contenues dans des feuilles.*

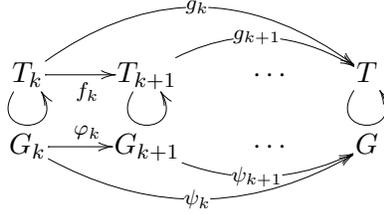
Alors X/\mathcal{F} est un arbre réel.

Remarque. Si f_σ est constante sur σ , alors σ est contenue dans une feuille ; cette situation n'est pas autorisée dans [LP97]. En enlevant l'intérieur de ces 2-simplexes, ce qui ne change pas l'espace des feuilles rendu séparé, on se ramène au cas considéré par [LP97]. Lorsqu'on traite deux feuilletages mesurés simultanément, interdire ces simplexes introduirait des complications techniques inutiles.

Définition 8.6 (arbre dual à un 2-complexe, action géométrique). *Soit G un groupe de type fini agissant sur un arbre réel. On dit que T est dual à un 2-complexe feuilleté X muni d'une action de G s'il existe une isométrie équivariante entre T et X/\mathcal{F} et si chaque arête transverse de X se plonge isométriquement dans X/\mathcal{F} .*

On dit que T est géométrique s'il est dual à un 2-complexe feuilleté X tel que l'action de G sur X soit libre et cocompacte (et donc proprement discontinue).

Un système inductif d'actions sur des arbres réels est une suite d'actions de groupes de type fini $G_k \curvearrowright T_k$ et une action $G \curvearrowright T$, avec des épimorphismes $\varphi_k : G_k \rightarrow G_{k+1}$ et $\psi_k : T_k \rightarrow T$, et des morphismes d'arbres réels φ_k -équivariants (resp. ψ_k -équivariants) $f_k : T_k \rightarrow T_{k+1}$ (resp. $g_k : T_k \rightarrow T$) de sorte que les diagrammes suivants commutent :



On utilisera la notation $f_{kk'} = f_{k'-1} \circ \dots \circ f_k : T_k \rightarrow T_{k'}$.

Définition 8.7 (convergence forte). Un système inductif d'actions minimales de groupes de type fini sur des arbres réels converge fortement vers T si

- G est la limite inductive des groupes G_k
- pour tout sous-arbre fini $K \subset T_k$, il existe $k' \geq k$ tel que $g_{k'}$ soit une isométrie en restriction à $f_{kk'}(K)$.

Rappelons maintenant la définition d'une convergence forte *triviale*. Si H est un groupe dénombrable agissant par isométries sur un espace métrique T , on note $\widehat{T/H}$ l'espace métrique obtenu en rendant séparée la pseudo-métrique naturelle portée par T/H . Une limite forte est *triviale* si pour k assez grand, l'espace $\widehat{T_k/\ker \psi_k}$ (qui est naturellement muni d'une action de G) est équivariamment isométrique à T .

Théorème 8.8 ([LP97, corollaire 0.3]). Une action d'un groupe de type fini G sur un arbre réel T est géométrique si et seulement si tout système inductif convergeant fortement vers T converge trivialement.

8.3 Lemme technique d'extension de feuilletage

Le lemme suivant est une petite amélioration du théorème de caractérisation des actions géométriques de [LP97] cité ci-dessus.

Lemme 8.9. Considérons une action géométrique d'un groupe de type fini sur un arbre réel T , et X un 2-complexe muni d'une action libre et cocompacte de G . Soit \mathcal{F} un feuilletage mesuré G -invariant sur X . Soit $f : X \rightarrow T$ une application constante sur les feuilles de \mathcal{F} et isométrique en restriction aux arêtes transverses de X .

Alors il existe

- un 2-complexe feuilleté $(\hat{X}, \hat{\mathcal{F}})$ contenant X , muni d'une action libre et cocompacte de G étendant l'action sur X ,
- et une application équivariante $\hat{f} : \hat{X} \rightarrow T$ étendant f , constante sur les feuilles, et qui induit une isométrie entre $\hat{X}/\hat{\mathcal{F}}$ et T .

De plus, l'inclusion $X \subset \hat{X}$ induit un épimorphisme au niveau des groupes fondamentaux. Si G est de présentation finie, on peut aussi imposer que \hat{X} soit simplement connexe.

Démonstration. La preuve est une reformulation de [LP97]. On choisit un gros sous-graphe connexe fini K dans le 1-squelette de X , et on va construire un complexe feuilleté (X_K, \mathcal{F}_K) contenant X et tel que $X_K/\mathcal{F}_K \rightarrow T$ soit une isométrie en restriction à l'image de K .

Notons d'abord que l'ensemble $K_0 = f(K)$ est un arbre fini, c'est-à-dire l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points. Il a donc une structure simpliciale naturelle. On peut subdiviser cette structure de sorte que pour tout sommet v de K , $f(v)$ soit un sommet

de K_0 . Soit C_K l'espace obtenu par recollement de $K \times [0, 1]$ sur K_0 via l'application $K \times \{1\} \rightarrow K_0$ envoyant $(x, 1)$ sur $f(x)$. Il y a un feuilletage mesuré naturel sur C_K induit par le feuilletage de $K \times [0, 1]$ par $\{*\} \times [0, 1]$. L'espace C_K peut être facilement muni d'une structure de complexe simplicial sans subdiviser $K \times \{0\}$. De plus, l'application $f : X \rightarrow T$ s'étend de manière unique en une application $f_K : X_K \rightarrow T_K$ constante sur les feuilles, et isométrique en restriction aux arêtes transverses. Par construction, l'image de K dans X_K/\mathcal{F}_K se plonge isométriquement dans T .

Soit (X_K, \mathcal{F}_K) le 2-complexe feuilleté obtenu en collant sur X l'espace $G \times C_K$ via l'application $G \times K \times \{0\} \rightarrow X$ envoyant $(g, (x, 0))$ sur $g.x$. Il se pourrait que X_K/\mathcal{F}_K ne soit pas un arbre réel (pour appliquer le théorème 8.5, on aurait besoin que $\pi_1(X_K)$ soit engendré par des classes d'homotopie libres de courbes contenues dans des feuilles). On va prendre un revêtement de X_K , muni d'une action d'un groupe G_K pour y remédier. Le but est ensuite de faire grossir K pour appliquer la caractérisation des actions géométriques du théorème 8.8.

L'ensemble X_K est muni d'une action libre de G , donc X_K est un revêtement de $\overline{X}_K = X_K/G$. Soit N_K l'image de $\pi_1(X_K)$ dans $\pi_1(\overline{X}_K)$ de sorte que $G \simeq \pi_1(\overline{X}_K)/N_K$. Si G est de présentation finie, on peut choisir K assez grand de sorte que $\pi_1(K)$ engendre normalement $\pi_1(X)$, ce qui signifie que X_K est simplement connexe et que $N_K = \{1\}$. Dans ce cas, on peut directement appliquer le théorème 8.5 et obtenir que X_K/\mathcal{F}_K est un arbre réel.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G}_K = \pi_1(\overline{X}_K)/\tilde{N}_K & \circlearrowleft & \tilde{X}_K \\ \downarrow & & \downarrow \\ G = \pi_1(\overline{X}_K)/N_K & \circlearrowleft & X_K \\ & & \downarrow \\ & & \overline{X}_K \end{array}$$

Soit $\tilde{N}_K \subset N_K$ le sous-groupe distingué de $\pi_1(\overline{X}_K)$ engendré par les classes d'homotopie libre de courbes contenues dans une feuille et représentant un élément de N_K . Soit \tilde{X}_K le revêtement galoisien de \overline{X}_K dont le groupe de transformations est $G_K = \pi_1(\overline{X}_K)/\tilde{N}_K$. Soit $\tilde{\mathcal{F}}_K$ le relevé du feuilletage mesuré à \tilde{X}_K . D'après le théorème 8.5, l'espace $T_K = \tilde{X}_K/\tilde{\mathcal{F}}_K$ est un arbre réel. Soit $\varphi_K : \tilde{G}_K \rightarrow G$ l'épimorphisme naturel et $g_K : T_K \rightarrow T$ l'application naturelle φ_K -équivariante.

La construction est naturelle relativement aux inclusions $K \subset K'$: si $K \subset K'$, il y a un morphisme $\varphi_{KK'} : G_K \rightarrow G_{K'}$, et un morphisme d'arbres réels $\varphi_{KK'}$ -équivariant $g_{KK'} : T_K \rightarrow T_{K'}$.

Il est clair que G est la limite inductive de G_K (relativement à $\varphi_{KK'}$ et à φ_K) puisque toute relation de G est tuée lors de l'opération de cône dans X_K pour K assez gros. De plus, par construction, T_K converge fortement vers T quand K devient de plus en plus gros (on peut prendre une exhaustion du 1-squelette de X par des graphes finis).

D'après le théorème 8.8, cette convergence est triviale. Cela signifie que pour K assez grand, l'application naturelle $T_K/\ker \varphi_K \rightarrow T$ est une isométrie. Mais puisque $\tilde{X}_K/\ker \varphi_K = X_K$, on a $T_K/\widehat{H}_K = X_K/\mathcal{F}_K$, donc $g_K : X_K/\mathcal{F}_K \rightarrow T$ est une isométrie. \square

8.4 Deux feuilletages sur un complexe.

Proposition 8.10. *Soit G un groupe de type fini, et T_1, T_2 deux actions géométriques de G sur des arbres réels.*

Alors il existe un 2-complexe feuilleté X muni d'une action libre et cocompacte de G , et deux feuilletages mesurés $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ sur X tels que T_1 et T_2 soient duaux à $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ au sens de la définition 8.6.

De plus, si G est de présentation finie, on peut supposer X simplement connexe.

Rappelons qu'une application f d'un simplexe vers un arbre réel est affine si c'est la composée d'une application affine vers \mathbb{R} suivie par une isométrie vers T .

Le fait suivant est standard.

Fait 8.11. Soit X un 2-complexe simplicial, T un arbre réel, et $f : X_0 \rightarrow T$ une application définie sur un sous-complexe X_0 contenant le 1-squelette de X , de sorte que f soit affine en restriction à chaque arête.

Alors, il existe une extension naturelle $\hat{f} : X \rightarrow T$ de f , et une subdivision naturelle de X qui ne change pas la structure simpliciale sur X_0 , telles que pour chaque simplexe $\sigma \subset X_0 \setminus X$ de la nouvelle subdivision, $f|_\sigma$ soit affine.

Si un groupe G agit sur X et T et si f est équivariante, alors la subdivision et \hat{f} sont équivariantes.

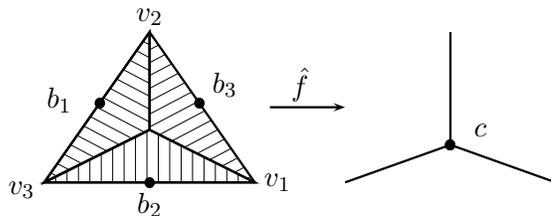


FIG. 7: Extension de f

Preuve du fait. Voir figure 7. Soit τ un simplexe de $X_0 \setminus X$. Soient e_1, e_2, e_3 les côtés de τ , et v_1, v_2, v_3 ses sommets de sorte que $v_i \notin e_i$. Si $f(\partial\tau)$ ne contient pas de tripode (i. e. $f(\partial\tau)$ contenu dans un arc T), alors f peut être étendue de manière unique en une application affine sur τ (sans subdivision). Sinon, soit c le centre du tripode $f(\partial\tau)$, et pour $i \in \{1, 2, 3\}$, soit b_i son unique antécédent dans e_i . On subdivise τ en introduisant b le barycentre de $\{b_1, b_2, b_3\}$, et en coupant τ le long des trois segments $[v_i, b]$. On définit $\hat{f}(b) = c$ et on étend \hat{f} de manière affine aux trois nouvelles arêtes. Maintenant, \hat{f} envoie le bord de chaque nouveau triangle sur un intervalle, donc \hat{f} s'étend de manière unique aux nouveaux triangles en une application affine. \square

Preuve de la proposition 8.10. Puisque T_1 est géométrique, soit X un 2-complexe feuilleté tel que T_1 soit dual à X . Plus précisément, X est muni d'une action libre cocompacte de G et d'un feuilletage mesuré \mathcal{F}_1 , tel que T_1 soit l'espace des feuilles rendu séparé de \mathcal{F}_1 , et tel que les arêtes transverses se plongent isométriquement dans T_1 . Soit $f_1 : X \rightarrow T_1$ l'application canonique.

Notons que si G est de présentation finie, on peut supposer que $\pi_1(X)$ est engendré par les classes d'homotopie libre de courbes contenues dans des feuilles ([LP97, Remark 2.3]), et même que X est simplement connexe (en appliquant le lemme 8.9).

Définissons maintenant une application équivariante $f : X \rightarrow T_2$. On définit d'abord de manière arbitraire une application équivariante sur le 0-squelette (on peut car l'action sur X est libre). On étend ensuite f affinement au 1-squelette, et on utilise le fait ci-dessus pour étendre f au 2-squelette, après avoir éventuellement subdivisé X . Soit \mathcal{F}_2 le feuilletage mesuré sur X induit par f .

Le lemme 8.9 montre qu'on peut agrandir X en un 2-complexe feuilleté $(\hat{X}, \hat{\mathcal{F}}_2)$ de sorte que T_2 soit dual à $(\hat{X}, \hat{\mathcal{F}}_2)$. Si G est de présentation finie, \hat{X} est simplement connexe.

On étend maintenant f_1 et \mathcal{F}_1 à \hat{X} : on définit \hat{f}_1 sur l'ensemble des sommets de $\hat{X} \setminus X$ de n'importe quelle manière équivariante, on étend \hat{f}_1 aux arêtes de $\hat{X} \setminus X$ affinement ; puis au 2-squelette grâce au fait 8.11 ; on définit $\hat{\mathcal{F}}_1$ comme le feuilletage mesuré induit par \hat{f}_1 . Puisqu'on a des applications naturelles 1-lipschitziennes $X/\mathcal{F}_1 \rightarrow \hat{X}/\hat{\mathcal{F}}_1 \rightarrow T_1$, et puisque $X/\mathcal{F}_1 \rightarrow T_1$ est une isométrie, on obtient une isométrie équivariante entre $\hat{X}/\hat{\mathcal{F}}_1$ et T_1 . \square

8.5 Un domaine faiblement fondamental

Preuve du théorème 8.1. Soient $X, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ un 2-complexe muni de deux feuilletages mesurés comme dans la proposition 8.10 ci-dessus. Soit $f_i : X \rightarrow T_i$ l'application naturelle, et $F = (f_1, f_2) : X \rightarrow T_1 \times T_2$. Il est clair que $F(X)$ est connexe et G -invariant. L'image de chaque simplexe est contenue dans un rectangle. Puisque X a un nombre fini d'orbites de simplexes, $F(X)$ est contenu dans $G.D$ où D est une union finie de rectangles.

L'idée est que $F(X)$ devrait être à fibres connexes car les fibres devraient coïncider avec l'image d'une feuille. Ceci n'est pas tout à fait vrai car les points de X/\mathcal{F}_i ne coïncident pas toujours avec les feuilles de X . Cependant, par définition de la distance sur X/\mathcal{F}_i , on a une propriété plus faible :

Définition 8.12 (faible connexité des fibres). *On dit qu'un sous-ensemble $F \subset T_1 \times T_2$ est à fibres faiblement connexes si pour tout $a, b \in F$ tels que $p_i(a) = p_i(b)$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe un chemin $c : [0, 1] \rightarrow F$ joignant a à b dans F tel que $p_i \circ c([0, 1])$ soit contenu dans le ε -voisinage de $p_i(a)$.*

La preuve du théorème 8.1 se termine avec le fait qui suit. □

Fait 8.13. *Soit $F \subset T_1 \times T_2$ un ensemble connexe à fibres faiblement connexes. Alors \overline{F} est à fibres convexes.*

Démonstration. Soit F_V la réunion des enveloppes convexes des fibres verticales de F . Par définition, les fibres verticales de F_V sont convexes. On a $F_V \subset \overline{F}$. En effet, soit $x \in F_V \setminus F$ de sorte que x appartienne à un segment vertical $\{x_1\} \times [a_2, b_2]$ dont les extrémités sont dans F . Soit $\varepsilon > 0$ et c un chemin de F joignant (x_1, a_2) à (x_1, b_2) , et tel que $p_1 \circ c$ soit contenu dans le ε -voisinage de $\{x_1\}$. Alors $p_2 \circ c([0, 1])$ contient x_2 . Ceci implique que x appartient à l'adhérence de sa fibre horizontale $(F \cap T_1) \times \{x_2\}$, et en particulier que $F_V \subset \overline{F}$. Ceci implique aussi que les fibres de F qui étaient connexes restent connexes dans F_V , que F_V est connexe, et est à fibres horizontales faiblement connexes.

Soit $F_{V,H}$ la réunion des enveloppes convexes des fibres horizontales de F_V . L'argument symétrique montre que les fibres horizontales et verticales de $F_{V,H}$ sont convexes, et que $F_{V,H} \subset \overline{F}$. Le corollaire 5.5 conclut que \overline{F} est à fibres convexes. □

8.6 Finitude du nombre d'intersection

Preuve de la proposition 8.3. Soit G de présentation finie. Soient $X, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ un 2-complexe muni de deux feuilletages mesurés comme dans la proposition 8.10 avec X simplement connexe. Soit $f_i : X \rightarrow T_i$ l'application naturelle, et $F = (f_1, f_2) : X \rightarrow T_1 \times T_2$.

D'après le lemme 3.4 de [LP97], l'application naturelle de l'espace des feuilles de \mathcal{F}_i (non rendu séparé) vers X/\mathcal{F}_i est injective à l'extérieur d'un ensemble dénombrable. En particulier, il y a au plus un nombre dénombrable de fibres de $F(X)$ qui ne sont pas connexes. Puisque $F(X)$ est connexe, G -invariant, et contenu dans $G.D$ où D est une union finie de rectangles de $T_1 \times T_2$, le lemme suivant permet de conclure. □

Lemme 8.14. *Soit $F \subset T_1 \times T_2$ un ensemble connexe, à fibres faiblement connexes, tel qu'un nombre au plus dénombrable de feuilles horizontales et verticales ne soient pas convexes.*

Alors \overline{F} est à fibres convexes et $\overline{F} \setminus F$ est de mesure nulle.

Démonstration. La première assertion découle du fait 8.13. Soit F_V la réunion des enveloppes convexes des fibres verticales de F . Clairement, $F_V \setminus F$ est de mesure nulle. De plus, la preuve du fait 8.13 montre que les fibres horizontales de F qui étaient convexes restent convexes, l'ensemble des fibres horizontales de F_V non convexes est au plus dénombrable. L'argument symétrique montre que $F_{V,H}$ est à fibres convexes. Puisque $F_{V,H} \setminus F$ est de mesure nulle, la preuve découle du lemme suivant. □

Lemme 8.15. *Soit $F \subset T_1 \times T_2$ un ensemble convexe à fibres convexes. Alors $\overline{F} \setminus F$ est de mesure nulle.*

Démonstration. Il suffit de montrer que la trace de $\overline{F} \setminus F$ sur chaque rectangle est de mesure nulle. Soit R_0 un rectangle et $J_i = p_i(\overline{F} \cap R_0)$. Soit $R = J_1 \times J_2$. Puisque $\overline{F} \cap R_0 \subset R$, on veut montrer que $(\overline{F} \setminus F) \cap R$ est de mesure nulle. D'après le lemme 5.4, \overline{F} est le complémentaire d'une union de quadrants. Quitte à changer T_1 et T_2 en $p_1(\overline{F})$ et $p_2(\overline{F})$, on peut aussi supposer que $p_i(\overline{F}) = T_i$. D'après le lemme 4.17, on a un semi-flot φ_t lipschitzien qui rétracte $T_1 \times T_2$ sur \overline{F} pour lequel R est φ_t -invariant.

On va montrer que $\overline{F} \setminus F$ est contenu dans $\varphi_\infty(\partial R)$. Le fait que φ est lipschitzien conclura le lemme. Soit $x = (x_1, x_2) \in (\overline{F} \setminus F) \cap R$. On peut supposer $x \notin \partial R$. Considérons les quatre rectangles ouverts obtenus en subdivisant R verticalement et horizontalement en x . Au moins un de ces rectangles ne rencontre pas \overline{F} (d'après les points 1 et 2 du fait 5.6), appelons le S . Partant de x , on peut alors suivre le semi-flot dans S en remontant le temps, jusqu'à atteindre le bord de R en un point x_0 . On a $\varphi_{t_0}(x_0) = x$ pour un certain $t_0 \in \mathbb{R}_+$, et $\varphi_\infty(x_0) = \varphi_\infty(x) = x$ car $x \in \overline{F}$. \square

9 Application aux automorphismes du groupe libre

Dans cette section, on étudie plus en détail le cas des arbres attractif et répulsif d'un automorphisme extérieur du groupe libre.

Notre point de départ est le résultat suivant dû à Levitt et Lustig :

Théorème 9.1 ([LL]). *Soit α un automorphisme d'un groupe libre de type fini G . Alors il existe deux actions de G sur des arbres réels T_1, T_2 et deux homothéties $h_1 : T_1 \rightarrow T_1$, et $h_2 : T_2 \rightarrow T_2$ ayant pour constante de dilatation λ_1, λ_2 telles que*

- h_i est α -équivariant (i. e. $h_i(g.x) = \alpha(g).h_i(x)$)
- $\lambda_1 \geq 1, \lambda_2 \leq 1$
- l'action de G sur T_i est à stabilisateurs d'arcs triviaux
- $g \in G$ est elliptique dans T_1 si et seulement s'il est elliptique dans T_2
- il existe $\eta > 0$ tel que si $l_{T_1}(g) + l_{T_2}(g) \leq \eta$ alors g est elliptique dans T_1 et T_2 .

Ceci implique que l'action de G sur $T_1 \times T_2$ est discrète. On dit qu'un automorphisme α est *complètement irréductible* s'il n'y a pas de facteur libre de G qui soit périodique sous l'action de α à conjugaison près. Le théorème ci-dessus a été démontré pour les automorphismes complètement irréductibles dans [Lus] et [BFH97b, BFH97a]. De plus, dans ce cas, l'action de G sur $T_1 \times T_2$ est libre, sauf si α est induit par un homéomorphisme pseudo-Anosov sur une surface à bord.

Le but de cette section est le résultat suivant.

Théorème 9.2. *Soit α un automorphisme d'un groupe libre de type fini G , et soient T_1, T_2 comme ci-dessus.*

Supposons que T_1 et T_2 soient des actions géométriques et que $\lambda_1 > 1$. Alors, il existe un sous-ensemble G -invariant, cofini (discret) $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$ du cœur tel que

- \mathcal{C} admet une structure de complexe simplicial et $\mathcal{C} \setminus \mathcal{S}$ est une surface
- le link de \mathcal{C} en chacun des points de \mathcal{S} est une union disjointe de cercles et de droites
- l'action de G sur \mathcal{C} est discrète et cocompacte, et elle est proprement discontinue sur $\mathcal{C} \setminus \mathcal{S}$
- $\Sigma = \mathcal{C}/G$ est une surface pincée, et $\Sigma \setminus (\mathcal{S}/G)$ est une surface compacte avec un nombre fini de trous
- Σ est muni de deux feuilletages mesurés transverses $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$, et l'application $H = (h_1, h_2)$ induit un homéomorphisme de Σ préservant les deux feuilletages, et multipliant la mesure transverse de \mathcal{F}_i par λ_i ; de plus $\lambda_2 = 1/\lambda_1$.

Dans ce théorème, une *surface pincée* est un espace obtenu à partir d'une surface compacte en écrasant en un point un nombre fini de sous-ensembles finis non vides. De manière équivalente, c'est un 2-complexe fini dans lequel le link en tout sommet est une union disjointe de cercles.

Corollaire 9.3. *Supposons que α soit complètement irréductible. Si T_1 et T_2 sont tous deux géométriques, alors α est induit par un homéomorphisme pseudo-Anosov sur une surface à bord.*

9.1 Une structure de 2-complexe

D'après le théorème 8.1, on a un domaine fondamental faible pour \mathcal{C} : il existe un ensemble fini de rectangles \mathcal{D} telle que l'adhérence de l'ensemble $X = \bigcup_{R \in \mathcal{D}, g \in G} g.R$ soit connexe à fibres connexes, ce qui implique que $\mathcal{C} \subset \overline{X}$

Notre premier objectif est de prouver que X est fermé et possède une structure de 2-complexe G -invariante, et que l'action de G est proprement discontinue en dehors d'un ensemble \mathcal{S}_0 (corollaire 9.11).

Tout d'abord, \mathcal{C} est non vide puisque T_1 et T_2 sont irréductibles. De plus, il ne peut y avoir de rectangle doublement léger car sinon, il y aurait un arc dans T_1 ne contenant pas de point de branchement, et les images de cet arc par des puissances de h_1 donneraient des arcs arbitrairement grands sans point de branchement ce qui est impossible car par minimalité, il existe un arbre fini dont les translatés par G recouvrent T_1 . On a donc $\mathcal{C} = \hat{\mathcal{C}}$.

Sur $T_1 \times T_2$, on utilise la distance $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_{T_1}(x_1, y_1) + d_{T_2}(x_2, y_2)$. On note aussi $l(g) = l_{T_1}(g) + l_{T_2}(g)$. Soit η tel que $l(g) < \eta \Rightarrow l(g) = 0$, et soit $\mathcal{S}_0 \subset T_1 \times T_2$ l'ensemble des points de $T_1 \times T_2$ dont le stabilisateur est non trivial.

Lemme 9.4. *Deux points distincts $x, x' \in \mathcal{S}_0$ sont à distance au moins $\eta/2$.*

Démonstration. Soient $g, g' \in G \setminus \{1\}$ fixant x et x' . Puisque les stabilisateurs d'arcs sont triviaux, $\text{Fix } g$ et $\text{Fix } g'$ sont réduits à un point dans T_1 et T_2 . Mais la longueur de translation de gg' dans T_i est donnée par $2d_{T_i}(\text{Fix } g, \text{Fix } g')$. Donc $l(gg') = 2d(x, x')$, donc $d(x, x') = 0$ ou $d(x, x') > \eta/2$. \square

Lemme 9.5. *Si $d(x, g.x) < \eta$ alors g a un point fixe y tel que $d(x, y) = d(x, g.x)/2$.*

Démonstration. Puisque $d(x, g.x) < \eta$, $l(g) < \eta$ donc g est elliptique dans T_1 et T_2 . Ceci implique que g fixe le milieu de $[x_i, g.x_i]$ dans T_i . \square

Lemme 9.6. *L'ensemble X est fermé dans $T_1 \times T_2$.*

On en déduit que X est à fibres connexes et contient \mathcal{C} .

Démonstration. Soit $x \in \overline{X}$, et considérons une suite (x_i) dans $\bigcup_{R \in \mathcal{D}} R$, et une suite $g_i \in G$ tels que $g_i.x_i$ converge vers x . Quitte à passer à une sous-suite, on peut supposer que x_i converge vers un point a . Ceci implique que $g_i.a$ converge vers x . Si pour un certain i et une infinité de $j > i$, $g_j.g_i^{-1} = 1$, alors $x \in X$, et on a terminé. Sinon, étant donné $\varepsilon > 0$, pour i assez grand et tout $j > i$, $g_j.g_i^{-1}$ déplace le point $g_i.a$, et donc x de moins de ε . Par conséquent, tous les éléments $g_j.g_i^{-1}$ ont un point fixe commun b tel que $d(b, x) \leq \varepsilon$. En faisant tendre ε vers 0, on obtient $b = x$, donc $d(g_j.a, x)$ est constante. Cette constante doit être nulle donc $x \in X$. \square

A partir de maintenant, on subdivise \mathcal{D} de sorte que chaque rectangle $R \in \mathcal{D}$ soit de diamètre au plus $\eta/10$, et que $R \cap \mathcal{S}_0$ soit vide ou constitué seulement d'un coin de R .

Lemme 9.7. *L'espace $X \setminus \mathcal{S}_0$ est localement compact, et G agit proprement discontinûment sur $X \setminus \mathcal{S}_0$.*

Plus précisément, tout point de $X \setminus \mathcal{S}_0$ possède un voisinage V tel que pour tout $R \in \mathcal{D}$, il y a au plus un élément $g \in G$ tel que $g.R$ rencontre V .

Démonstration. Il suffit de prouver la seconde partie de l'énoncé. Soit $x \notin \mathcal{S}_0$ et $V = V_1 \times V_2$ le produit de deux boules autour de x de rayon au plus $\eta/10$, et tel que V ne rencontre pas \mathcal{S}_0 . Fixons un rectangle $R \in \mathcal{D}$ et supposons que $g_1.R, g_2.R$ intersecte V pour $g_1 \neq g_2 \in G$. Alors $h = g_2 g_1^{-1}$ déplace un certain point de $g_2.R \cap V$ d'au plus $\eta/2$, donc h a un point fixe $y = (y_1, y_2)$ à distance au plus $\eta/2$ de x . Puisque R rencontre \mathcal{S}_0 seulement aux coins de R , $g_1.R$ est contenu dans un quadrant $\delta_1 \times \delta_2$ basé en y . Puisque $y \notin V$, on peut supposer que $y_1 \notin V_1$, donc que V_1 est contenu dans δ_1 . Puisque l'action de $\text{Stab}\{y_1\}$ sur l'ensemble des directions issues de y_1 est libre, $p_1(h.R) \subset h.\delta_1$ implique que $h.R$ ne rencontre pas V . \square

Lemme 9.8. *Il existe une subdivision de \mathcal{D} et un ensemble cofini G -invariant \mathcal{S} tels que*

- *deux rectangles distincts de $G.\mathcal{D}$ s'intersectent en un segment (peut-être un point ou l'ensemble vide) contenu dans un côté de R , et dont les extrémités sont dans \mathcal{S} ;*
- *pour tout rectangle $R \in \mathcal{D}$, $\overset{\circ}{R}$ est ouvert dans X*

De plus, X a une structure G -invariante de complexe simplicial avec un nombre fini d'orbites de cellules ayant \mathcal{S} pour ensemble de sommets.

Dans l'énoncé, $\overset{\circ}{R}$ signifie R privé de son bord.

Remarque. Les rectangles de \mathcal{D} ne font pas de X un complexe rectangulaire. Il n'y a en général pas de décomposition de X en complexe rectangulaire à côtés horizontaux ou verticaux comme le montre l'exemple d'un tore muni de deux feuilletages irrationnels.

Démonstration. Pour tout rectangle $R = I_1 \times I_2 \in \mathcal{D}$, soit $\mathcal{I}(R)$ l'ensemble fini des translates des rectangles $R' \in \mathcal{D}$ qui intersectent R en un rectangle non dégénéré. Soit $\mathcal{I}_i(R) \subset \mathcal{I}(R)$ l'ensemble fini des extrémités des projections sur I_i des rectangles $R \cap R'$ pour $R' \in \mathcal{I}(R)$. En subdivisant chaque rectangle $R = I_1 \times I_2 \in \mathcal{D}$ le long de $\mathcal{I}_1(R) \times I_2 \cup I_1 \times \mathcal{I}_1(R)$, on obtient que $g.R' \cap R$ est au plus un segment dès que $g.R' \neq R$.

Soit \mathcal{S} l'ensemble des points de X qui sont une extrémité (ou un coin) de l'intersection de deux éléments de $G.\mathcal{D}$. On a clairement $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$, et \mathcal{S} rencontre chaque rectangle de \mathcal{D} en un ensemble fini, donc \mathcal{S}/G est fini.

Le fait que $\overset{\circ}{R}$ (i. e. un rectangle privé de son bord) est ouvert dans X se déduit du fait que deux rectangles ne s'intersectent que le long de leur bord, et qu'un point de $\overset{\circ}{R}$ a un voisinage ne rencontrant qu'un nombre fini de rectangles.

Enfin, on triangule X ainsi : étant donné $R \in \mathcal{D}$, on choisit une triangulation de R dont l'ensemble des sommets est $R \cap \mathcal{S}$ (il contient les coins de R). Puisqu'étant donné $R, R' \in \mathcal{D}$ il y a au plus un élément $g \in G$ tel que $g.R = R'$, on peut étendre cette triangulation de manière équivariante à X . \square

9.2 Le cœur comme sous-complexe

On va maintenant montrer que quitte à subdiviser notre structure de 2-complexe sur X , \mathcal{C} est un sous-complexe de X .

Lemme 9.9. *Soit $R \in \mathcal{D}$, $x \in \overset{\circ}{R}$, et soit Q un quadrant basé en x et ne rencontrant pas R . Alors, Q ne rencontre pas X .*

Démonstration. Supposons au contraire qu'il existe $y = (y_1, y_2) \in X \cap Q$. Soit $Q = \delta_1 \times \delta_2$, et (b_1, b_2) le point base de Q . Soit $c = (c_1, c_2) : [0, 1] \rightarrow X$ un chemin reliant y à x dans X , et soit t_0 le premier instant pour lequel une coordonnée de $c(t_0)$ est égale à b_1 ou b_2 . Pour $t < t_0$, on a $c(t) \notin R$. Puisque $\overset{\circ}{R}$ est ouvert dans X , $c(t_0) \neq (b_1, b_2)$. Supposons donc que $c_1(t_0) = b_1$ et $c_2(t_0) \in \eta_2$. Puisque les fibres de X sont convexes, $\{b_1\} \times [b_2, c_2(t_0)] \subset X$, ce qui contredit le fait que $\overset{\circ}{R}$ est ouvert dans X . \square

Lemme 9.10. *Il existe une subdivision équivariante de chaque rectangle de \mathcal{D} en sous-rectangles telle que pour tout $R \in \mathcal{D}$, $R \subset \mathcal{C}$ ou $R \cap \mathcal{C} \subset \partial R$.*

Démonstration. Soit $R \in \mathcal{D}$ un rectangle non contenu dans \mathcal{C} . On va démontrer que $\mathcal{C} \cap R$ peut être obtenu à partir de R en enlevant un nombre fini de quadrants. Le lemme en découle facilement.

Soit Q un quadrant léger. On a une des situations suivantes :

1. $\overset{\circ}{R} \subset Q$, ou $R \cap Q = \emptyset$;
2. ou $R \cap Q$ est un demi-rectangle ouvert ;
3. ou $R \cap Q$ contient exactement un coin de R .

Les quadrants de type 1 ne posent pas de problème. Quitte à subdiviser R , on peut éviter les quadrants de type 2. En effet, soit I un côté de R , et soit $L_I \subset R$ l'union des traces sur R de tous les quadrants légers de type 2 contenant I . Si L_I contient $\overset{\circ}{R}$, alors \mathcal{C} ne rencontre pas $\overset{\circ}{R}$ et on a fini. Sinon, on peut découper R en \overline{L}_I et $R \setminus L_I$. En effectuant cette opération pour les quatre côtés de R , on évite l'occurrence de quadrants de type 2.

Un quadrant de type 3 est nécessairement basé en un point $x \in R$. Soit $c = (c_1, c_2)$ un coin de R , et L_c la réunion des traces sur R des quadrants légers de type 3 contenant c , et supposons que $L_c \neq \emptyset$. On va montrer que L_c est lui-même la trace d'un quadrant léger de type 3. Le lemme s'en déduira puisque $R \cap \mathcal{C}$ sera obtenu en enlevant au plus 4 quadrants à R .

Soit $]a, c] =]a_1, c_2] \times \{c_2\}$ et $]b, c] = \{c_1\} \times]b_2, c_2]$ l'intersection de L_c avec les deux côtés de R contenant c . Soit $P = \rho_1 \times \rho_2$ le quadrant basé en (a_1, b_2) contenant c . Il est clair que tout quadrant léger $Q = \delta_1 \times \delta_2$ de type 3 contenant c est contenu dans P : en effet, $a \notin Q$ et $c \in Q$ impliquent $\delta_1 \subset \rho_1$; on a donc $L_c \subset P$.

Montrons l'autre inclusion. Soit $x = (x_1, x_2) \in P$. Puisque $x_1 \in]a_1, c_1]$, par définition de a , il existe un quadrant léger $Q = \delta_1 \times \delta_2$ tel que $x_1 \in \delta_1$. De même, il existe un quadrant léger tel que $Q' = \delta'_1 \times \delta'_2$ avec $x_2 \in \delta'_2$. Il suffit de prouver que le quadrant $Q'' = \delta_1 \times \delta'_2$ est léger. On choisit un point base $* \in X$, et considérons une suite $g_k.* \in Q''$ rendant Q'' lourd. Pour k assez grand, $g_k.* \notin Q$, $g_k.* \notin Q'$ et $g_k.* \notin R$. On en déduit que $g_k.*$ est dans un quadrant basé en R et disjoint de R comme dans le lemme 9.9. Puisque $g_k.* \in X$, on a une contradiction. \square

On en déduit facilement une triangulation de X pour laquelle \mathcal{C} est un sous-complexe. On obtient ainsi le lemme suivant :

Corollaire 9.11. *Le cœur \mathcal{C} de $T_1 \times T_2$ a une structure G -invariante de 2-complexe, $\mathcal{C} \setminus \mathcal{S}_0$ est localement compact, et l'action de G sur $\mathcal{C} \setminus \mathcal{S}_0$ est proprement discontinue.*

9.3 Points singuliers du cœur

Montrons que le 2-complexe $\Sigma = \mathcal{C}/G$ est une surface pincée. Ceci conclura la preuve du théorème 9.2. On va utiliser l'application $H = (h_1, h_2) : T_1 \times T_2 \rightarrow T_1 \times T_2$.

Lemme 9.12. *Le cœur \mathcal{C} est H -invariant. De plus, H induit un homéomorphisme \overline{H} de Σ , et $\lambda_1 \lambda_2 = 1$.*

Les deux projections $p_i : \mathcal{C} \rightarrow T_i$ induisent deux feuilletages mesurés sur \mathcal{C} et Σ , qui sont préservés par H et \overline{H} respectivement. De plus, \overline{H} multiplie les mesures transverses par λ_2 et λ_1 respectivement.

Démonstration. L'invariance de \mathcal{C} est une conséquence directe de sa caractérisation comme plus petit fermé connexe à fibres connexes, ou du fait que H envoie quadrant sur quadrant. De plus, x et y sont dans la même G -orbite si et seulement si $H(x)$ et $H(y)$ le sont. Les mesures transverses des deux feuilletages sur Σ induisent une mesure non nulle sur Σ : si cette mesure était nulle, alors \mathcal{C} serait un arbre simplicial, ce qui implique que T_1 et

T_2 seraient simpliciaux, ce qu'interdit $\lambda_1 \neq 1$. Cette mesure est finie car Σ est une union finie de rectangles. Puisque \overline{H} multiplie cette mesure par un facteur $\lambda_1 \lambda_2$, on a donc $\lambda_1 \lambda_2 = 1$. \square

Notons \mathcal{S}' l'ensemble des sommets d'une triangulation de \mathcal{C} , et $\overline{\mathcal{S}'}$ l'image de \mathcal{S}' dans Σ .

Lemme 9.13. *L'espace $\mathcal{C} \setminus \mathcal{S}'$ est une surface, et le link dans \mathcal{C} en chacun des points de \mathcal{S}' est une union disjointe de cercles et droites. De plus, $\Sigma \setminus \overline{\mathcal{S}'}$ est une surface fermée avec un nombre fini de trous, et Σ est une surface pincée.*

Démonstration. Chaque point de $\mathcal{C} \setminus \mathcal{S}'$ possède un voisinage de la forme $I_1 \times K_2$ ou $K_1 \times I_2$ où $K_i \subset T_i$ est un sous-arbre fini, et $I_i \subset T_i$ est un segment. Soit \mathcal{S}'_H (resp. \mathcal{S}'_V) l'ensemble singulier horizontal (resp. vertical) défini comme l'ensemble des points $x \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{S}'$ ayant un voisinage de la forme $K_1 \times I_2$ (resp. $I_1 \times K_2$) mais aucun voisinage de la forme $I_1 \times I_2$.

On veut démontrer que \mathcal{S}'_H et \mathcal{S}'_V sont vides. L'image $\overline{\mathcal{S}'_H}$ de \mathcal{S}'_H dans Σ est une union finie d'arêtes horizontales qui a donc une mesure transverse horizontale finie, et non nulle si $\mathcal{S}'_H \neq \emptyset$. L'homéomorphisme \overline{H} préserve \mathcal{S}'_H et multiplie sa mesure transverse horizontale par $\lambda_1 > 1$. Ceci contraint donc $\mathcal{S}'_H = \emptyset$. De même, $\mathcal{S}'_V = \emptyset$, donc $\mathcal{C} \setminus \mathcal{S}'$ est une surface.

Puisque l'action de G sur $\mathcal{C} \setminus \mathcal{S}'$ est libre et proprement discontinue, ceci implique que $\Sigma \setminus \overline{\mathcal{S}'}$ est une surface. De plus, le link en tout point de $\overline{\mathcal{S}'}$ est un graphe n'ayant que des sommets de valence 2. Puisqu'il est compact, c'est une union finie de cercles disjoints. Par conséquent, $\Sigma \setminus \overline{\mathcal{C}}$ est une surface fermée avec un nombre fini de trous, et Σ est une surface pincée. De même, le link dans \mathcal{C} de tout point de \mathcal{S}' est une union disjointe de cercles et de droites. \square

Le théorème 9.2 en découle.

9.4 Cas d'un automorphisme complètement irréductible

Nous démontrons ici le corollaire 9.3 affirmant que si α est complètement irréductible, et si T_1 et T_2 sont géométriques, alors α est induit par un homéomorphisme pseudo-Anosov.

Preuve du corollaire 9.3. On utilise le fait que si α n'est pas induit par un homéomorphisme pseudo-Anosov d'une surface à bord, alors les actions de G sur T_1 et T_2 sont libres ([BH92]). Supposons alors T_1 et T_2 géométriques et cherchons une contradiction. Puisque l'action de G sur $T_1 \times T_2$ est libre, \mathcal{C} est le revêtement universel de Σ , et $G \simeq \pi_1(\Sigma)$.

Si Σ n'a pas de point singulier, c'est une surface compacte, ce qui contredit que G n'est pas le groupe fondamental d'une surface.

Soit $\hat{\Sigma}$ le 2-complexe obtenu en éclatant Σ de la façon suivante. Fixons v un sommet singulier de Σ . On remplace v par l'arbre T_v défini comme le cône sur $C(v)$, où $C(v)$ possède un sommet v_C par composante connexe C du link de v . Plus précisément, si une cellule de Σ était collée sur v , elle définit une composante $C \in C(v)$, et on la colle maintenant sur $v_C \in T_v$. On obtient ainsi un complexe ayant la même homotopie que Σ , et qui peut être décrit comme une surface (a priori non connexe), sur laquelle on a attaché un nombre fini d'arbres finis. Puisque G ne contient pas de groupe de surface non trivial (G est libre), toutes ces surfaces sont des sphères. Ceci contredit la contractibilité du revêtement universel \mathcal{C} de Σ . \square

10 Égalité avec le nombre d'intersection de Scott et Swarup

Soient T_1 et T_2 deux actions d'un groupe de type fini G sur des arbres simpliciaux avec une seule orbite d'arêtes. Scott a défini dans [Sco98] le nombre d'intersection de T_1 et T_2 . On peut reformuler sa définition comme suit. Soient e_1, e_2 deux arêtes orientées de T_1 et T_2 . Soit $\delta(e_i) \subset T_i$ la direction basée à l'origine de e_i , et contenant e_i . Soit H_i le

stabilisateur de e_i qui est aussi le stabilisateur de $\delta(e_i)$. Fixons un point base $*_i \in T_i$. Soit $X_{e_i} = \{g \in G \mid g.*_i \in \delta(e_i)\}$. L'ensemble X_{e_i} est invariant par l'action à gauche de H_i . Soit \mathcal{C} un graphe de Cayley de G . Dans la terminologie de Scott, X_{e_i} est un ensemble H_i -presque invariant, ce qui signifie que X_{e_i}/H_i a un cobord fini dans le graphe \mathcal{C}/H_i . Notons qu'un changement de point base ne change X_{e_i}/H_i que par un ensemble fini, ce qui sera sans importance dans les définitions qui suivent.

Scott dit que X_{e_1} et X_{e_2} *se croisent* si les quatre ensembles $X_{e_1} \cap X_{e_2}$, ${}^c X_{e_1} \cap X_{e_2}$, $X_{e_1} \cap {}^c X_{e_2}$, ${}^c X_{e_1} \cap {}^c X_{e_2}$ ont une image infinie dans \mathcal{C}/H_1 . Il démontre que ceci arrive si et seulement si ces quatre ensembles ont aussi une image infinie dans \mathcal{C}/H_2 . Il faut remarquer que le fait que X_{e_1} croise X_{e_2} ne change pas si l'on remplace une des arêtes par l'arête ayant l'orientation opposée. De plus, X_{e_1} croise X_{e_2} si et seulement si $X_{g.e_1}$ croise $X_{g.e_2}$. Enfin, $i(T_1, T_2)$ est défini comme le nombre de double classes $H_1 g H_2$ telles que X_{e_1} croise $g.X_{e_2}$.

Proposition 10.1. *Notre définition du nombre d'intersection coïncide avec celle de Scott.*

Démonstration. L'ensemble des doubles classes est en bijection avec l'ensemble des orbites de couples d'arêtes non-orientées dans $T_1 \times T_2$. En d'autres termes, $i(T_1, T_2)$ est le nombre d'orbites de couples d'arêtes non orientées (e_1, e_2) de $T_1 \times T_2$ telles que X_{e_1} croise X_{e_2} .

Pour montrer l'équivalence des définitions, il suffit donc de démontrer qu'un rectangle $e_1 \times e_2$ est contenu dans \mathcal{C} si et seulement si X_{e_1} et X_{e_2} se croisent. Soit $Q(e_1, e_2)$ le quadrant $\delta(e_1) \times \delta(e_2)$.

Supposons d'abord que X_{e_1} ne croise pas X_{e_2} , et montrons que $e_1 \times e_2$ n'est pas dans \mathcal{C} . En choisissant convenablement les orientations de e_1 et e_2 , l'hypothèse dit que l'image de $X_{e_1} \cap X_{e_2}$ se projette sur un ensemble fini dans G/H_1 . Ceci signifie que l'ensemble $Z = \{g.*_1 \mid g.(*_1, *_2) \in Q(e_1, e_2)\}$ ne rencontre qu'un nombre fini de H_1 -orbites. En particulier, Z est borné, donc $Q(e_1, e_2)$ est léger. Puisque le rectangle ouvert $e_1 \times e_2$ est contenu dans $Q(e_1, e_2)$, on obtient que $e_1 \times e_2$ n'est pas dans \mathcal{C} .

Réciproquement, supposons que X_{e_1} croise X_{e_2} , et montrons que le rectangle $e_1 \times e_2$ est dans \mathcal{C} . Considérons d'abord le cas où \mathcal{C} est non vide, et choisissons un point base $* \in \mathcal{C}$. Supposons par l'absurde qu'il y a un quadrant léger Q contenant $e_1 \times e_2$. On peut choisir les orientations de e_1 et e_2 de sorte que Q contienne $Q(e_1, e_2)$. En particulier, $Q(e_1, e_2)$ est léger, et ne rencontre donc pas \mathcal{C} , ni l'orbite de $*$. Ceci contredit le fait que X_{e_1} croise X_{e_2} .

Il reste à vérifier que si \mathcal{C} est vide, alors le nombre d'intersection de Scott est nul. On veut prouver que pour toute paire d'arêtes non orientées (e_1, e_2) , X_{e_1} ne croise pas X_{e_2} . C'est facile pour deux actions homothétiques sur une droite. Sinon, la remarque 3.7 montre qu'il y a un bon choix d'orientations de (e_1, e_2) , et un choix de point base $*$ tels que l'orbite de $*$ ne rencontre pas $Q(e_1, e_2)$; ceci implique que X_{e_1} ne croise pas X_{e_2} . \square

11 Nombre d'intersection forte, et cœur asymétrique

11.1 Cœur asymétrique

On introduit ici un *cœur asymétrique* (ou plutôt deux cœurs asymétriques $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$), pour deux actions de G sur des arbres simpliciaux. La construction est celle de Fujiwara et Papasoglu [FP98]. Notons qu'il n'y a pas de généralisation évidente de \mathcal{A}_1 quand T_1 est un arbre réel.

Dans tout ce qui suit, étant donnée une action de G sur un arbre T , on notera G_x le stabilisateur d'un point ou d'une arête x .

Définition 11.1 (cœur asymétrique [FP98]). *Considérons deux actions minimales d'un groupe G sur deux arbres simpliciaux T_1, T_2 , et supposons que le stabilisateur de chaque arête de T_1 agisse non trivialement sur T_2 . Alors le cœur asymétrique gauche*

$\mathcal{A}_1(T_1 \times T_2)$ est défini par

$$\mathcal{A}_1 = \bigcup_{x_1 \in T_1} \{x_1\} \times \text{Min}_{T_2}(G_{x_1}).$$

Le cœur asymétrique droit $\mathcal{A}_2(T_1 \times T_2)$ est défini de manière symétrique sous les hypothèses symétriques.

Remarque 11.2. Il est clair que \mathcal{A}_1 est le plus petit sous-ensemble invariant de $T_1 \times T_2$ dont les p_1 -fibres sont connexes et non vides. Les hypothèses de la définition impliquent que le cœur symétrique \mathcal{C} est non vide et connexe. En particulier, \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 sont contenus dans \mathcal{C} d'après la proposition 5.2. De plus, \mathcal{A}_1 est contractile puisqu'il s'envoie continûment sur un arbre avec fibres contractiles.

Plus généralement, si l'on suppose seulement que les stabilisateurs d'arêtes ou de sommets de T_1 agissent soit non-trivialement, soit avec un point fixe dans T_2 , on peut faire une construction similaire mais non canonique : pour chaque sommet ou arête $x_1 \in T_1$ tel que G_{x_1} agisse non trivialement sur T_2 , on impose toujours que $\mathcal{A}_1 \cap p_1^{-1}(x_1) = \{x_1\} \times \text{Min}_{T_2}(G_{x_1})$; pour $x_1 \in V(T_1)$ tel que G_{x_1} fixe un point de T_2 , on choisit un tel point fixe x_2 , et on impose que $\mathcal{A}_1 \cap p_1^{-1}(x_1) = \{(x_1, x_2)\}$; pour chaque arête $e_1 \in E(T_1)$ d'extrémité a_1, b_1 telle que G_{e_1} soit elliptique dans T_2 , on choisit un segment I dans $p_1^{-1}(e_1)$ joignant un point fixe de G_{e_1} dans $p_1^{-1}(a_1)$ à un point fixe de G_{e_1} dans $p_1^{-1}(b_1)$ (ce segment peut être oblique, et donc \mathcal{A}_1 n'est pas, en général, un sous-complexe de $T_1 \times T_2$). Dans cette situation plus générale, il reste vrai que \mathcal{A}_1 est contractile, mais \mathcal{A}_1 dépend de choix. Notons cependant que les 2-cellules de \mathcal{A}_1 sont indépendantes des choix.

11.2 Nombre d'intersection forte.

Soient T_1 et T_2 deux actions d'un groupe de type fini G sur des arbres simpliciaux avec une seule orbite d'arêtes. Scott et Swarup ont défini un nombre d'intersection forte, dont on peut reformuler la définition ainsi.

Rappelons quelques notations : étant donnée une arête orientée $e_i \in T_i$, on note $\delta(e_i)$ la direction basée à l'origine de e_i et contenant e_i , $X_{e_i} = \{g \in G \mid g.*_i \in \delta(e_i)\}$, et ∂X_{e_i} le cobord de X_{e_i} dans un graphe de Cayley C de G relativement à une partie génératrice finie S i. e.

$$\partial X_{e_i} = \{g \in X_{e_i} \mid \exists s \in S \cup S^{-1} \text{ } gs \notin X_{e_i}\}.$$

Scott et Swarup disent que X_{e_1} croise fortement X_{e_2} si les deux ensembles $\partial X_{e_1} \cap X_{e_2}$ et $\partial X_{e_1} \cap {}^c X_{e_2}$ ont des projections infinies dans C/G_{e_2} . Cette notion est indépendante du choix de S .

Lemme 11.3. *Soient T_1, T_2 deux arbres simpliciaux munis d'une action de G ayant une seule orbite d'arête. Soient e_1, e_2 deux arêtes de T_1 et T_2 .*

Alors X_{e_1} croise fortement X_{e_2} si et seulement si G_{e_1} agit non trivialement sur T_2 et $e_2 \subset \text{Min}_{T_2}(G_{e_1})$.

Démonstration. Puisque l'action de G sur T_1 induit une décomposition de G comme amalgame ou extension HNN, G est engendré par des éléments envoyant e_1 sur une arête ayant (au moins) un sommet commun avec e_1 . On peut donc choisir S parmi ces éléments. Pour ce choix de S , on a $G_{e_1} = \partial X_{e_1}$: en effet, tout $g \in G_{e_1}$ appartient à ∂X_{e_1} car on peut choisir $s \in S \cup S^{-1}$ envoyant e_1 dans ${}^c \delta(e_1)$, ce qui implique que $gs \notin X_{e_1}$; pour l'autre inclusion, si $g.e_1 \in \delta(e_1)$ et $gs.e_1 \in {}^c \delta(e_1)$, puisque $g.e_1$ et $gs.e_1$ sont adjacentes, on a nécessairement $g.e_1 = e_1$.

On en déduit que X_{e_1} croise fortement X_{e_2} si et seulement si $G_{e_1} \cap X_{e_2}$ et $G_{e_1} \cap {}^c X_{e_2}$ ont une projection infinie dans G/G_{e_2} . Puisqu'il y a une bijection naturelle entre G/G_{e_2} et $G.e_2$, ceci revient à dire que $G_{e_1}.e_2 \cap \delta(e_2)$ et $G_{e_1}.e_2 \cap {}^c \delta(e_2)$ sont tous deux infinis.

Ceci ne peut clairement pas arriver si G_{e_1} fixe un point de T_2 car une isométrie fixant un point $x \in T_2$ ne peut pas envoyer e_2 dans la composante connexe de $T \setminus \{e_2\}$ qui ne contient pas x . Si G_{e_1} ne fixe pas de point de T_2 , mais que chacun de ses éléments est elliptique, alors G_{e_1} fixe un bout ω de T_2 , et un argument similaire s'applique : toute isométrie elliptique fixant ω ne peut envoyer e_2 dans la composante de $T \setminus \{e_2\}$ ne contenant pas ω dans son bord à l'infini. Enfin, si G_{e_1} agit non trivialement sur T_2 , et si $e_2 \notin \text{Min}_{T_2}(G_{e_1})$, on a de même qu'aucun élément de G_{e_1} ne peut envoyer e_2 dans la composante de $T_2 \setminus \{e_2\}$ ne contenant pas $\text{Min}_{T_2}(G_{e_1})$. On a donc montré que si X_{e_1} croise fortement X_{e_2} , alors G_{e_1} agit non trivialement sur T_2 et $e_2 \in \text{Min}_{T_2}(G_{e_1})$.

Réciproquement, supposons que $e_2 \in \text{Min}_{T_2}(G_{e_1})$. Considérons alors un élément $h \in G_{e_1}$ dont l'axe dans T_2 contient e_2 . Alors clairement, $\{h^k.e_2 | k \in \mathbb{Z}\}$ rencontre $\delta(e_2)$ et ${}^c\delta(e_2)$ un nombre infini de fois. \square

Comme corollaire, on obtient immédiatement l'interprétation suivante du nombre d'intersection forte. Ceci généralise le corollaire 3.16 de [SS00] qui demande que le nombre d'intersection forte coïncide avec le nombre d'intersection usuel.

Corollaire 11.4. *Soient T_1, T_2 deux arbres simpliciaux avec une action de G ayant une seule orbite d'arête.*

Alors le nombre (asymétrique) d'intersection forte de Scott et Swarup $si(T_1, T_2)$ est le nombre de 2-cellules de $\mathcal{A}_1(T_1 \times T_2)/G$. Ce nombre peut aussi être vu comme le nombre d'arêtes de $\text{Min}_{T_2}(G_{e_1})/G_{e_1}$ (où $e_1 \in E(T_1)$ est une arête quelconque).

12 Groupes d'enfermement de Fujiwara et Papasoglu

Proposition 12.1 ([FP98]). *Soient T_1 et T_2 deux actions minimales d'un groupe de type fini G sur des arbres simpliciaux telles que pour tout $i \in \{1, 2\}$,*

- *le stabilisateur de toute arête de T_i agisse non trivialement sur l'autre arbre*
- *G ne se scinde pas sur un sous-groupe d'indice infini du stabilisateur d'une arête de T_i .*

Alors $\mathcal{C} = \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$.

De plus, si pour chaque arête e_i de T_i , le sous-arbre minimal de G_{e_i} dans l'autre arbre est une droite (si G_{e_i} est svelte par exemple), alors $\mathcal{C} \setminus V(\mathcal{C})$ est une surface.

Démonstration. La preuve suit celle de Fujiwara et Papasoglu.

Considérons le cœur asymétrique $\mathcal{A}_1 = \cup_{x_1 \in T_1} \{x_1\} \times \text{min}_{T_2}(G_{x_1})$ défini ci-dessus. On a vu que $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{C}$ et que \mathcal{A}_1 est contractile. Les fibres verticales de \mathcal{A}_1 sont connexes par définition.

Montrons que la fibre horizontale d'une arête de T_2 est connexe. Supposons donc par l'absurde que pour une arête e_2 de T_2 , $F = p_2^{-1}(e_2) \cap \mathcal{A}_1$ n'est pas connexe. Il y a au plus une composante de F qui soit G_{e_2} -invariante puisqu'une telle composante contient $\text{min}_{T_1}(G_{e_2}) \times \{e_2\}$. Considérons donc une autre composante $F_0 = K_0 \times \{e_2\}$ de F . Son stabilisateur H est d'indice infini dans G_{e_2} car si H était d'indice fini, il aurait le même sous-arbre minimal que G_{e_2} . Puisque \mathcal{A}_1 est simplement connexe et que F_0 disconnecte localement \mathcal{A}_1 , F_0 disconnecte \mathcal{A}_1 en deux composantes. Cela signifie qu'il y a un arbre T_{F_0} dual à $G.F_0$ dont les arêtes sont les composantes connexes de $G.F_0$ et les sommets sont les composantes connexes de $\mathcal{A}_1 \setminus G.F_0$. Ceci définit un scindement de G au dessus de H . Ce scindement est non trivial car on voit facilement qu'un élément $h \in G_{e_1}$ dont l'axe passe par e_2 est hyperbolique dans T_{F_0} . On a donc un scindement non trivial au-dessus de H , en contradiction avec les hypothèses.

Déduisons-en que la fibre horizontale d'un sommet $x_2 \in T_2$ est connexe. Considérons deux sommets $a, b \in p_2^{-1}(x_2)$, et considérons un chemin linéaire par morceaux $c : [0, 1] \rightarrow \mathcal{A}_1$ joignant a à b . Soit $c_2 = p_2 \circ c$. Si c_2 est constant, on a terminé. Sinon, considérons une

composante connexe $]s, t[$ de $[0, 1] \setminus c_2^{-1}(v_2)$. Alors $c_2(]s, s + \varepsilon])$ et $c_2([t - \varepsilon, t])$ sont contenus dans la même arête e_2 . Puisque $p_2^{-1}(e_2)$ est connexe, on peut connecter $c(s + \varepsilon)$ à $c(t - \varepsilon)$ par un chemin dans $p_2^{-1}(e_2)$, et on peut le pousser dans $p_2^{-1}(x_2)$ pour obtenir un chemin de $c(s)$ à $c(t)$ dans $p_2^{-1}(x_2)$. En remplaçant $c_{[s,t]}$ par un tel chemin et en effectuant cette opération pour toute composante connexe de $[0, 1] \setminus c_2^{-1}(x_2)$, on obtient un chemin dans $p_2^{-1}(x_2)$ joignant a à b .

Puisque \mathcal{A}_1 est connexe et à fibres convexes, on a $\mathcal{A}_1 \supset \mathcal{C}$, et donc $\mathcal{A}_1 = \mathcal{C}$. De même, $\mathcal{A}_2 = \mathcal{C}$.

Il est maintenant facile de montrer que $\mathcal{C} \setminus V(\mathcal{C})$ est une surface sous l'hypothèse supplémentaire car le link de chaque point dans une arête horizontale $e_1 \times \{x_2\}$ de \mathcal{A}_1 est un cercle car $\min_{T_2}(G_{x_1})$ est une droite, et le même argument s'applique pour un point dans une arête verticale. \square

Références

- [BFH97a] M. Bestvina, M. Feighn, and M. Handel. Erratum to : “Laminations, trees, and irreducible automorphisms of free groups” [Geom. Funct. Anal. **7** (1997), no. 2, 215–244 ; MR 98c :20045]. *Geom. Funct. Anal.*, 7(6) :1143, 1997.
- [BFH97b] M. Bestvina, M. Feighn, and M. Handel. Laminations, trees, and irreducible automorphisms of free groups. *Geom. Funct. Anal.*, 7(2) :215–244, 1997.
- [BH92] Mladen Bestvina and Michael Handel. Train tracks and automorphisms of free groups. *Ann. of Math. (2)*, 135(1) :1–51, 1992.
- [BH99] Martin R. Bridson and André Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [Bon86] Francis Bonahon. Bouts des variétés hyperboliques de dimension 3. *Ann. of Math. (2)*, 124(1) :71–158, 1986.
- [Chi01] Ian Chiswell. *Introduction to Λ -trees*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 2001.
- [CLS] Marc Culler, Gilbert Levitt, and Peter Shalen. Unpublished manuscript.
- [FHS83] Michael Freedman, Joel Hass, and Peter Scott. Least area incompressible surfaces in 3-manifolds. *Invent. Math.*, 71(3) :609–642, 1983.
- [FLP79] Albert Fathi, François Laudenbach, and Valentin Poénaru. *Travaux de Thurston sur les surfaces*. Société Mathématique de France, Paris, 1979. Séminaire Orsay, With an English summary.
- [FP98] Koji Fujiwara and Panos Papasoglu. JSJ decomposition of finitely presented groups and complexes of groups. <http://topo.math.u-psud.fr/~papazog/preprints.html>, 1998.
- [Gui] Vincent Guirardel. Core and intersection number for group actions on \mathbb{R} -trees. Available on arXiv at <http://arxiv.org/abs/math.GR/0407206>.
- [HM] Michael Handel and Lee Mosher. in preparation.
- [Lev94] Gilbert Levitt. \mathbb{R} -trees and the Bieri-Neumann-Strebel invariant. *Publ. Mat.*, 38(1) :195–202, 1994.
- [LL] Gilbert Levitt and Martin Lustig. Asymptotic periodicity for automorphisms of free groups and hyperbolic groups. In preparation.
- [LP97] Gilbert Levitt and Frédéric Paulin. Geometric group actions on trees. *Amer. J. Math.*, 119(1) :83–102, 1997.

- [Lus] Martin Lustig. A discrete action on the product of two non-simplicial \mathbb{R} -trees. Unpublished manuscript.
- [NSSS] Graham Niblo, Michah Sageev, Peter Scott, and Gadde Swarup. Minimal cubings. <http://arxiv.org/abs/math.GR/0401133>.
- [Sag95] Michah Sageev. Ends of group pairs and non-positively curved cube complexes. *Proc. London Math. Soc.* (3), 71(3) :585–617, 1995.
- [Sco98] Peter Scott. The symmetry of intersection numbers in group theory. *Geom. Topol.*, 2 :11–29 (electronic), 1998.
- [Ser77] Jean-Pierre Serre. *Arbres, amalgames, SL_2* . Société Mathématique de France, Paris, 1977. Avec un sommaire anglais, Rédigé avec la collaboration de Hyman Bass, Astérisque, No. 46.
- [SS00] Peter Scott and Gadde A. Swarup. Splittings of groups and intersection numbers. *Geom. Topol.*, 4 :179–218 (electronic), 2000.
- [SS03] Peter Scott and Gadde A. Swarup. Regular neighbourhoods and canonical decompositions for groups. *Astérisque*, (289) :vi+233, 2003.

Vincent Guirardel
 Laboratoire Émile Picard
 UFR MIG,
 Université Paul Sabatier
 31062 Toulouse cedex 9.
 France.
courriel : guirardel@math.ups-tlse.fr