

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE TOULOUSE
UNIVERSITÉ PAUL SABATIER

Diplôme d'habilitation à diriger des recherches

Arbres, feuilletages et espaces de déformation
en théorie géométrique des groupes

Vincent Guirardel

Soutenue 25 mai 2009 après les rapports de

Mladen Bestvina	Professeur, Salt Lake City
Martin Bridson	Professeur, Oxford
Thomas Delzant	Professeur, Strasbourg

devant le jury composé de

Martin Bridson	Professeur, Oxford
Thomas Delzant	Professeur, Strasbourg
Panagiotis Papazoglou	Professeur, Oxford
Frédéric Paulin	Professeur, École normale supérieure
Jean-Marc Schlenker	Professeur, Toulouse

Table des matières

Introduction	4
I Scindements canoniques et JSJ	9
I.1 Espaces de déformation JSJ	9
I.2 Arbre JSJ de compatibilité	12
I.3 Scindement JSJ de Bowditch	13
I.4 Scindements canoniques associés à un espace de déformation, et l'arbre des cylindres	13
I.5 Arbre des cylindres et scindement de Scott-Swarup	16
I.6 Automorphismes et scindements canoniques	18
II Outre-espace et espaces de déformation	22
II.1 Espaces de déformation de scindements	22
II.1.1 Stabilisateurs de sommets et d'arêtes	23
II.1.2 Topologie et pliages continus	24
II.1.3 Espaces de déformation non-ascendants	25
II.2 Automorphismes des produits libres	26
II.3 Dynamique dans la frontière de l'outre-espace	27
II.4 Cœur convexe et nombres d'intersection	28
II.5 Questions et perspectives	31
III Arbres réels	33
III.1 Approximation des actions sur des arbres réels	33
III.2 Borner la complexité	35
III.3 Action des groupes de type fini	37
III.4 Strates d'un arbre réel	38
IV Équations dans les groupes, et groupes limites	39
IV.1 Groupes limites et groupes marqués	39
IV.1.1 Actions sur des \mathbb{R}^n -arbres	40
IV.1.2 Second théorème de structure des groupes limites	42
IV.1.3 Présentations de groupes résiduellement libres	42
IV.2 Feuilletages et résolution d'équations dans les groupes	44
IV.3 Le problème d'isomorphie pour les groupes hyperboliques	46
V Autres projets et perspectives	52
V.1 Petite simplification dans le groupe modulaire	52
V.2 Le groupe des échanges d'intervalles	52
VI Bibliographie	54
VI.1 Travaux et publications	54
VI.2 Bibliographie	56

Introduction

Les arbres sont omniprésents en théorie géométrique des groupes et en topologie de petite dimension. La théorie de Bass-Serre et le théorème de Van-Kampen disent que le découpage d'un espace en morceaux (incompressibles) correspond à une action de son groupe fondamental sur un arbre. Le théorème de Kneser en topologie de dimension 3 a ainsi pour pendant le théorème de Grushko en théorie des groupes. Ce théorème fait partie de la famille des théorèmes dits *d'accessibilité*, qui donnent une borne supérieure à la complexité de scindements d'un certain type. Beaucoup d'autres théorèmes d'accessibilité de ce type sont connus, dans des cadres assez divers, de l'accessibilité de Linnell, Dunwoody ou Bestvina-Feighn au dessus de groupes petits, à l'accessibilité acylindrique de Sela ou Weidmann, en passant par l'accessibilité hiérarchique de Delzant-Potyagailo, qui généralise la finitude des hiérarchies de Haken en dimension 3.

L'accessibilité donnant l'existence de scindements maximaux, se pose ensuite la question de leur unicité. Par exemple, le théorème de Grushko affirme l'unicité à conjugaison près des facteurs librement indécomposable de la décomposition. Une meilleure façon d'énoncer cette unicité est de dire que l'ensemble de toutes les décomposition de Grushko forme un *espace de déformation* au sens de Forester [For02]. Un exemple prototypique d'espace de déformation est l'*oultre-espace* de Culler-Vogtmann dont les points sont des actions libres du groupe libre \mathbb{F}_n sur des arbres. Lorsqu'on considère des décompositions au-dessus de groupes finis, l'ensemble des décompositions maximales forme aussi un espace de déformation. Cela n'est par contre plus le cas dès que l'on considère des décompositions au-dessus de \mathbb{Z} , \mathbb{Z}^2 , ou de groupes plus gros. L'exemple fondamental est celui de deux scindements duaux à deux courbes fermées simples d'une surface fermée, dont le nombre d'intersection est positif. Ces deux décompositions sont incompatibles au sens où il n'existe pas de scindement qui domine ces deux décompositions : il n'y a pas d'espace de déformation maximal unique pour les scindements du groupe fondamental de la surface au dessus de \mathbb{Z} . En dimension 3, on a le même phénomène dans les variétés de Seifert, avec existence de tores incompressibles qu'on ne peut pas séparer par isotopie.

Le théorème de la sous-variété caractéristique de Jaco-Shalen et Johannson montre que dans une variété fermée de dimension 3, c'est essentiellement la seule façon d'avoir des tores incompressibles qu'on ne peut pas séparer. La théorie des scindements JSJ (pour Jaco-Shalen-Johannson) dans le cadre d'un groupe de présentation finie a été initiée par Kropholler pour les groupes à dualité de Poincaré et par Sela pour les groupes hyperboliques sans torsion [Kro90, Sel97b]. De même que la sous-variété caractéristique permet de comprendre les tores incompressibles (plongés ou immergés) dans une variété de dimension 3, la décomposition JSJ permet de comprendre les scindements sur une classe de sous-groupes donnée. Lorsqu'on considère des scindements sur des groupes sveltes (*slender*), cette théorie dit alors que la seule source d'incompatibilité de scindements vient de la présence, en un sens généralisé, de sous-variétés de Seifert [Sel97b, Bow98, DS99, FP06, SS03, DS00]. On peut donner une définition d'un scindement JSJ par une propriété universelle simple et générale [19]. L'unicité du scindement JSJ est alors la même que celle des scindements de

Grushko : l'ensemble des scindements JSJ forme un espace de déformation, appelé *espace de déformation JSJ* [For03], [19].

Il découle de la propriété universelle que le groupe $\text{Out}(G)$ des automorphismes extérieurs de G agit sur l'espace de déformation JSJ. On démontre que tout espace de déformation est contractile [10],[Cla05], ce qui permet d'obtenir des informations de nature cohomologique sur $\text{Out}(G)$ [9], généralisant les travaux de Culler-Vogtmann sur l'outre-espace [CV86]. Dans certains contextes, on a des théorèmes de point fixe, qui produisent un scindement $\text{Out}(G)$ -invariant à partir de l'espace de déformation JSJ [13]. Il s'agit de la construction de *l'arbre des cylindres* qui associe de manière fonctorielle un arbre à un espace de déformation. Cette construction permet d'obtenir des résultats de structure des groupes d'automorphismes de groupes relativement hyperboliques à un bout, ainsi que des caractérisations de l'infinitude du groupe d'automorphismes d'un groupe relativement hyperbolique [20].

En tant qu'objet universel, le groupe libre \mathbb{F}_n est un groupe tout à fait fondamental et basique en théorie des groupes. Son groupe d'automorphismes extérieurs $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ est ainsi un objet extrêmement naturel, quoique toujours mal compris. Ce groupe $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ a des relations intrigantes avec le groupe arithmétique $SL_n(\mathbb{Z})$, ainsi qu'avec le groupe modulaire d'une surface [BV06]. Ces deux groupes ont été la source d'inspiration de nombreux travaux concernant $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$. L'outre-espace de Culler-Vogtmann, analogue de l'espace symétrique de $SL_n(\mathbb{R})$ ou de l'espace de Teichmüller, est un objet fondamental dans l'étude de $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ avec des variantes comme par exemple sa bordification introduite par Bestvina-Feighn, analogue à celle de Borel-Serre de l'espace symétrique [BF00, BS73]. Mentionnons l'espace des courants mesurés, en quelque sorte dual à l'outre-espace, qui joue aussi un rôle important [BFH97, CHL08, KL07].

Morgan et Shalen ont interprété la compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller en termes d'actions sur des arbres réels. C'est en fait un cas particulier d'un théorème de compacité bien plus général [Gro81, Pau89, Bes88]. Rappelons qu'un espace δ -hyperbolique est un espace métrique géodésique qui ressemble à un arbre au sens suivant : dès qu'on se donne quatre points de cet espace, les distances mutuelles entre ces quatre points coïncident avec les distances mutuelles entre quatre points d'un arbre, modulo une erreur majorée par δ . Un arbre réel est par définition un espace métrique 0-hyperbolique. Le théorème de compacité dit que si on se donne une suite d'actions de G sur des espaces δ -hyperboliques telle que la bonne renormalisation de leurs métriques a une constante d'hyperbolicité qui tend vers zéro, il existe une sous-suite qui converge vers une action non-triviale de G sur un arbre réel pour la topologie de Gromov équivariante projectifiée.

De la même façon, Culler-Vogtmann ont défini une compactification de l'outre-espace en termes d'actions du groupe libre sur des arbres réels. Cette compactification de l'outre-espace partage un certain nombre de propriétés avec le bord de Thurston de l'espace de Teichmüller : par exemple, c'est un espace de dimension topologique finie et tout élément $\alpha \in \text{Out}(\mathbb{F}_n)$ a un point fixe dans $\overline{\text{CV}}_n$ [GL95, BH92, Pau97b]. On sait que l'action du groupe modulaire sur le bord de Thurston est minimale lorsque la surface est orientable (le cas d'une surface non-orientable reste mal compris). L'action de $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ sur le bord de l'outre-espace possède elle aussi un unique fermé non vide minimal invariant [2], mais la dynamique globale de cette action n'est pas encore complètement élucidée.

Une des questions majeures concernant le groupe $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ est sa géométrie à grande échelle. En particulier, existe-t-il un analogue du complexe des courbes pour $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$? La preuve de l'hyperbolicité du complexe des courbes utilise énormément la notion de nombre d'intersection de deux courbes [MM99, Bow06]. Ce nombre donne en effet une information globale directement accessible (par opposition à la distance de chemins

dans un graphe qui est définie comme un minimum plus difficile à appréhender), et donne un majorant de la distance dans le complexe des courbes. Scott a introduit une notion de *nombre d'intersection* de deux scindements. Ce nombre d'intersection mesure l'obstruction à la compatibilité des scindements. Dans [8], on montre que ce nombre d'intersection est réalisé géométriquement comme covolume d'un cœur convexe par fibres dans le produit de deux arbres. Ce cœur est un espace CAT(0) dans lequel les deux scindements initiaux se lisent comme des laminations combinatoires (*tracks*) horizontaux et verticaux de cet espace, ou comme espaces des feuilles de deux feuilletages mesurés transverses. En ce sens, le cœur étend la métrique plate singulière sur une surface définie par deux feuilletages mesurés transverses. Le lien entre cœur et nombre d'intersection permet un contrôle topologique du nombre d'intersection : par exemple, le nombre d'intersection de deux décompositions en produit libre de \mathbb{F}_n est le nombre minimal de points d'intersections de laminations combinatoires tracées dans un même espace représentant les deux scindements. Par des chirurgies sur les laminations, on peut alors montrer une inégalité reliant le nombre d'intersection et leur distance dans un complexe des décompositions en produits libres. La définition du cœur s'étend naturellement aux arbres réels. Elle permet notamment de construire une surface invariante dans le produit des arbres stables et instables de certains automorphismes du groupe libre.

Le problème de Tarski demande si on peut distinguer les groupes libres \mathbb{F}_2 et \mathbb{F}_3 par un énoncé du premier ordre, ou si au contraire, \mathbb{F}_2 et \mathbb{F}_3 sont *élémentairement équivalents*. Ce problème a été résolu récemment indépendamment par Sela et par Kharlampovich-Miasnikov dans une série d'articles remarquables [Sel06, KM06]. L'approche de Sela est très géométrique, et utilise de manière fondamentale l'étude des actions de groupes sur des arbres réels, et la théorie du scindement JSJ.

L'un des objets fondamentaux introduits dans cette théorie, est la notion de *groupe limite*. Ces groupes interviennent lorsqu'on veut comprendre la structure de l'ensemble des solutions d'un système d'équations dans un groupe libre \mathbb{F}_n . Chacune des solutions peut-être vue comme un sous-groupe de \mathbb{F}_n marqué par un système générateur, et l'ensemble des solutions admet ainsi une compactification dans l'espace des groupes marqués (voir [7] pour cette approche). Les groupes limites ont de multiples caractérisations : ce sont les groupes qui ont la même théorie universelle (sans constante) que \mathbb{F}_n , ce sont les groupes pleinement résiduellement libres, et, dans le langage de la géométrie algébrique sur les groupes de Baumslag-Miasnikov-Remeslennikov [BMR99], ce sont les *groupes de coordonnées* (i. e. l'analogie de l'algèbre des fonctions polynomiales) des variétés algébriques *irréductibles* sur le groupe \mathbb{F}_n . Le premier théorème de structure important des groupes limites est le fait qu'ils sont de présentation finie [KM98a, Sel01]. Dans [6], on donne une preuve de ce théorème reposant sur l'étude d'actions de groupes sur des \mathbb{R}^n -arbres. Les \mathbb{R}^n -arbres sont une sorte de version non-standard des arbres réels, avec des points à distance infiniment petite. Ces arbres s'obtiennent à partir d'ultralimites d'arbres de Bruhat-Tits de SL_2 . La classe des groupes de type fini agissant librement sur des \mathbb{R}^n -arbres est strictement plus grande que celle des groupes limites mais on démontre que les groupes de cette classe sont toujours de présentation finie, ont un espace classifiant fini, et grâce au théorème de combinaison de Dahmani [Dah03], que ce sont même des groupes relativement hyperboliques toraux.

La structure de l'ensemble des solutions dans \mathbb{F}_n d'un système d'équations peut être décrite par le diagramme de Makanin-Razborov [Sel01]. Ce diagramme décrit essentiellement un paramétrage de l'ensemble des solutions par des groupes modulaires de scindements JSJ de certains groupes limites (voir [7] ou [BF03, Pau04] pour des expositions). Le deuxième théorème de structure fondamental des groupes limites caractérise les groupes

limites comme les sous-groupes de type fini des extensions de centralisateurs itérée du groupe libre ([KM98a], ou [7] pour une preuve basée sur les techniques de Sela). Ce théorème de plongement (ou une version plus faible due à Sela) est par exemple utilisé par Alibegović-Bestvina pour montrer que les groupes limites sont $CAT(0)$, et par Wilton pour montrer qu'ils ont la propriété de rétract virtuel [AB06, Wil08].

Que peut-on dire du point de vue algorithmique ? Rappelons les trois problèmes algorithmiques posés par Dehn en 1912 [Deh12] : le problème du mot, qui consiste à décider si un mot en des générateurs représente ou non l'élément trivial ; le problème de conjugaison, qui consiste à décider si deux mots représentent des éléments conjugués ; et le problème d'isomorphie, qui consiste à décider si deux présentations finies données représentent des groupes isomorphes. Le *problème des équations* dans un groupe consiste à décider si un système d'équations possède une solution ou non. C'est donc une vaste généralisation du problème du mot et du problème de conjugaison. Dans un groupe abélien libre, le problème des équations se résout facilement par l'algèbre linéaire, mais ce problème n'a déjà pas de solution dans un groupe nilpotent libre de classe 3. Dans un groupe libre, ce problème difficile a été résolu par Makanin dans un article fondateur [Mak82]. Sur la base de ce résultat, Rips-Sela ont résolu le problème des équations dans les groupes hyperboliques sans torsion, et Dahmani a ensuite permis d'inclure les inéquations [RS95, Dah05]. Razborov a donné un algorithme donnant une paramétrisation de l'ensemble des solutions d'un système d'équations, algorithme sur la base duquel les travaux ultérieurs de Kharlampovich et Miasnikov sont fortement ancrés [Raz84, KM05a, KM05b]. Les idées de Makanin et Razborov pour traiter les équations dans le groupe libre ont été la source d'inspiration de Rips pour son théorème sur les actions de groupes sur les arbres réels. En inversant ce flot d'idées, nous avons, avec François Dahmani, donné une nouvelle preuve du théorème de Makanin reposant sur la classification de Rips des feuilletages mesurés de codimension 1. Cette preuve s'applique au cas des groupes virtuellement libres, ce qui nous permet, en étendant la théorie des représentants canoniques, de résoudre le problème des équations et inéquations dans un groupe hyperbolique, même en présence de torsion [15].

Le problème d'isomorphie dans une classe de groupes est en général très difficile. Ainsi, la solution de Sela au problème d'isomorphie dans la classe des groupes hyperboliques sans torsion rigides est impressionnante [Sel95], en particulier sachant que des problèmes proches, comme celui du calcul du rang d'un groupe hyperbolique, ne sont pas décidables [BMS94]. La solution du problème d'isomorphie a été simplifiée par Dahmani-Groves, et étendue au cas de tous les groupes relativement hyperboliques toraux (sans torsion mais sans hypothèse de rigidité) [DG08b]. Utilisant notre solution au problème des équations et inéquations dans les groupes hyperboliques, Dahmani et moi avons donné une solution au problème d'isomorphie pour la classe de tous les groupes hyperboliques, y compris en présence de torsion [18]. Comme produit dérivé, nous obtenons aussi une solution au problème de Whitehead dans un groupe hyperbolique G : on peut décider si deux uplets d'éléments sont dans la même orbite sous l'action du groupe d'automorphismes de G . La preuve repose sur l'étude de certaines actions sur des arbres réels, le calcul de scindements JSJ adaptés, ainsi que sur le théorème de Gerasimov et le calcul effectif d'espaces de déformation au dessus de groupes fini.

On voit ainsi que l'étude des actions de groupes sur les arbres réels est un outil fondamental de la théorie géométrique des groupes. Le théorème de Rips est la percée principale permettant la compréhension de ces actions de groupes sur des arbres réels [BF95, GLP94]. Il relie les actions de groupes sur les arbres réels à la structure de feuilletages mesurés de codimension 1. Ce théorème affirme que si un groupe de présentation finie G agit sur un arbre réel T avec certaines hypothèses de stabilité, G se scinde au-dessus d'un sous-groupe

contrôlé par les stabilisateurs d'arcs de T . Dans [1], j'ai démontré la densité des actions de G sur des arbres simpliciaux à stabilisateurs d'arêtes contrôlés dans l'ensemble de ces actions de G sur des arbres réels. On peut aussi démontrer une forme d'accessibilité pour les actions de groupes sur des arbres réels, c'est-à-dire une borne a priori sur le nombre d'orbites de points de branchement dits *réduits* d'une action stable à stabilisateurs d'arcs petits d'un groupe de présentation finie [17].

Sela a donné un théorème de structure pour une action d'un groupe *de type fini* librement indécomposable sur un arbre réel à stabilisateur de tripodes triviaux satisfaisant une hypothèse de stabilité forte [Sel97a] (en fait, l'énoncé de ce théorème est incorrect, voir [12] pour un contre-exemple et un énoncé correct). Ce théorème s'avère insuffisant dans un certain nombre de situations, et une version avec une hypothèse de stabilité plus faible, et sans hypothèse sur les stabilisateurs de tripode est démontrée dans [12]. Par contre, ces résultats ne disent rien sur la structure de l'arbre réel si le groupe G n'est pas librement indécomposable, et en particulier si G est un groupe libre. Dans un projet en cours avec G. Levitt, on arrive à donner une structure à l'ensemble des forêts invariantes de T , et à comprendre comment tout arbre réel s'obtient à partir de sous-arbres indécomposables (sous les bonnes hypothèses de stabilité, par exemple à stabilisateurs d'arcs triviaux), voir section III.4. Cette structure est reliée à la décomposition en strates d'un représentant ferroviaire d'un automorphisme du groupe libre.

Ce mémoire est divisé en cinq chapitres. Le premier chapitre traite de la théorie des scindements JSJ, et de la recherche de scindements canoniques. On y décrit la propriété universelle des scindements JSJ, la construction de l'arbre des cylindres, et des applications aux groupes d'automorphismes. Le second chapitre s'intéresse aux espaces de déformations plus gros, et en particulier à l'outre-espace. On y montre la contractibilité des espaces de déformation, avec des applications pour les automorphismes de produits libres. On y étudie la dynamique globale de $\text{Out}(F_n)$ sur la compactification de l'outre-espace, et on introduit le cœur du produit de deux arbres. Le troisième chapitre étudie divers aspects des actions de groupes sur les arbres réels. Le chapitre suivant traite des groupes limites, et de leur étude via les actions sur les \mathbb{R}^n -arbres. Il comprend aussi la solution au problème des équations dans un groupe hyperbolique, et la solution du problème d'isomorphie entre ces groupes. Enfin, le dernier chapitre évoque des méthodes de petite simplification dans le complexe des courbes, et une étude des sous-groupes du groupe des échanges d'intervalles.

Chapitre I

Scindements canoniques et JSJ

La théorie des scindements JSJ (pour Jaco-Shalen, et Johansson) trouve ses origines en topologie de dimension 3, avec les travaux sur la sous-variété caractéristique d'une variété fermée de dimension 3 irréductible [JS79, Joh79]. Ces idées ont été transportées en théorie des groupes par Kropholler pour certains groupes à dualité de Poincaré de dimension au moins 3 [Kro90], et par Sela pour les groupes hyperboliques à un bout sans torsion [Sel97b]. On obtient ainsi un scindement du groupe considéré dans lequel on peut *lire* tout scindement de G au dessus de ses sous-groupes polycycliques. Ce type de construction a ensuite été généralisé dans de nombreux contextes, pour des groupes de présentation finie et au dessus de classes de groupes sveltes [RS97, Bow98, DS99, FP06, DS00, SS03, PS07].

Dans ce chapitre, nous commençons par donner une *définition* (par opposition à une construction) simple de ce qu'est un scindement JSJ en théorie des groupes (section I.1). Cette définition a la forme d'une propriété universelle. Elle permet en particulier de considérer l'ensemble de tous les scindements JSJ, et de les étudier dans leur ensemble : l'ensemble obtenu est un *espace de déformation* de scindements, et existe dans une très grande généralité pour les groupes de présentation finie. Une variante de cette définition permet de définir un scindement JSJ de compatibilité, beaucoup plus rigide, et invariant par automorphismes (section I.2). Le scindement JSJ d'un groupe G hyperbolique à un bout construit par Bowditch [Bow98] à partir de la topologie de son bord satisfait à ces deux définitions. On montre que ce scindement permet aussi de lire toute action de G sur un arbre réel à petit stabilisateurs d'arcs (section I.3). Inspiré par le scindement de Bowditch, étant donné un espace de déformation \mathcal{D} (JSJ par exemple), on peut se demander s'il contient un scindement canonique (en particulier, ce scindement serait fixé par les automorphismes de G préservant \mathcal{D}). Section I.4, on introduit la notion d'*arbre des cylindres*. Cette construction permet, dans certaines situations, de construire un scindement canoniquement associé à un espace de déformation \mathcal{D} , et qui, dans les bons cas, appartient à \mathcal{D} . L'arbre des cylindres permet de retrouver le scindement canonique de Scott et Swarup à partir de l'espace de déformation JSJ usuel, permettant d'éclairer et de simplifier leur construction (section I.5). Section I.6, on utilise l'arbre des cylindres pour obtenir de nouveaux résultats sur certains groupes d'automorphismes.

I.1 Espaces de déformation JSJ

Le but de cette section est de donner une définition d'un scindement JSJ via une propriété universelle [19, 11].

Fixons-nous un groupe G . Tous les arbres considérés sont des arbres simpliciaux munis d'une action minimale de G . Grâce à la théorie de Bass-Serre, on fait l'abus d'identifier un scindement de G en graphe de groupes avec l'action de G sur l'arbre de Bass-Serre

correspondant. On dit que l'arbre T_1 *domine* T_2 s'il existe une application équivariante de T_1 dans T_2 . Sous l'hypothèse que les stabilisateurs d'arête de T_2 sont de type fini, T_1 domine T_2 si et seulement si on peut obtenir T_2 à partir de T_1 (à subdivisions près) par une suite finie de pliages et écrasements [BF91a].

Soient T, T' deux arbres, et supposons maintenant que les stabilisateurs *d'arêtes* de T soient elliptiques dans T' . On dit que T est *elliptique* dans T' ([Sel97b]). On peut alors construire un arbre \hat{T} en éclatant de manière équivariante chaque sommet $v \in T$ en un sous-arbre G_v -invariant $Y'_v \subset T'$, et en recollant de manière équivariante une arête e de T incidente sur v sur un point de $p_e \in Y'_v$ fixé par G_e . On a alors une application naturelle équivariante de $\hat{T} \rightarrow T'$, donc \hat{T} domine T' . L'arbre T' peut donc être obtenu à partir de \hat{T} par pliages et écrasements (toujours si les stabilisateurs d'arêtes de T' sont de type fini). On peut, de cette manière là, lire le scindement T' dans T . Pour résumer :

Définition I.1.1. *On dit qu'on peut lire T' dans T s'il existe un \mathcal{A} -arbre \hat{T} tel qu'on ait un diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \hat{T} & & \\ \Downarrow & \searrow & \\ T & & T' \end{array}$$

où la double flèche représente une application d'écrasement $\hat{T} \Rightarrow T$, et la flèche $\hat{T} \rightarrow T'$ est une simple domination.

L'exercice suivant montre que la condition d'ellipticité des scindements est nécessaire à l'existence d'un arbre qui domine les deux autres :

Exercice I.1.2. *Considérons deux scindements T_1, T_2 du groupe fondamental d'une surface fermée correspondant à deux courbes fermées simples dont le nombre d'intersection est non-nul.*

Alors il n'existe pas de scindement T qui domine à la fois T_1 et T_2 .

Fixons nous maintenant un groupe G et une classe \mathcal{A} de groupes d'arêtes autorisés. On demande à \mathcal{A} d'être stable par conjugaison et passage au sous-groupe. On ne considère donc que des scindements de G dont les groupes d'arêtes sont dans \mathcal{A} (on dit d'un tel scindement qu'il est *au-dessus* de \mathcal{A} , et on dit que l'arbre de Bass-Serre d'un tel scindement est un \mathcal{A} -arbre).

On dit que T est *universellement elliptique* si ses stabilisateurs d'arêtes sont elliptiques dans tout \mathcal{A} -arbre.

Définition I.1.3 ([19]). *Un \mathcal{A} -arbre T est un scindement JSJ de G au dessus de \mathcal{A} si*

- *il est universellement elliptique*
- *il est maximum pour cette propriété : il domine tout \mathcal{A} -arbre universellement elliptique.*

L'ensemble des scindements JSJ s'appelle l'espace de déformation JSJ (voir définition I.1.4).

Puisqu'un scindement JSJ est universellement elliptique, on peut donc y lire tout \mathcal{A} -arbre comme expliqué précédemment. L'intérêt d'une telle définition (par opposition à une construction) est multiple : elle permet de vérifier si un scindement construit par d'autres moyens est un scindement JSJ et cela permet d'étudier collectivement *l'ensemble* de tous les scindements JSJ qui forme un *espace de déformation* :

Définition I.1.4 ([For02]). Soit \mathcal{A}_0 une classe de sous-groupes de G , stable par passage au sous-groupe, et T un \mathcal{A}_0 -arbre.

L'espace de déformation de T au dessus de \mathcal{A}_0 est l'ensemble des \mathcal{A}_0 -arbres T' tels que T et T' se dominent l'un l'autre.

Puisque deux scindements JSJ se dominent l'un l'autre, l'ensemble de tous les scindements JSJ de G au dessus de \mathcal{A} forme un espace de déformation au dessus de la classe $\mathcal{A}_{ell} \subset \mathcal{A}$ des groupes de \mathcal{A} qui sont \mathcal{A} -universellement elliptiques.

On peut montrer que tous les scindements JSJ construits par les divers auteurs ci-dessus satisfont à cette définition, à l'exception des scindements plus rigides de Scott-Swarup et Papasoglu-Swenson [SS03, PS07].

Les groupes QH jouent un rôle fondamental dans la théorie du scindement JSJ. Un sommet v (ou son stabilisateur G_v) d'un graphe de groupes est dit QH (pour *quadratically hanging*) si G_v peut s'identifier avec une extension $1 \rightarrow F \rightarrow G_v \rightarrow \Sigma \rightarrow 1$ où Σ est le groupe fondamental d'un orbifold hyperbolique de dimension 2 à bord, de sorte que pour toute arête e incidente sur v , la projection de G_e dans Σ soit conjuguée à un sous-groupe du groupe fondamental d'une composante de bord de Σ . Le groupe F est appelé la *fibres* du groupe QH . Les groupes QH sont ainsi des analogues de sous-variétés de Seifert d'une variété de dimension trois. Les auteurs des constructions de scindements JSJ citées ci-dessus démontrent que les sous-groupes QH sont elliptiques dans l'espace de déformation JSJ. On démontre que cette propriété est tout à fait générale dès lors que la préimage $J \subset G_v$ d'un sous-groupe virtuellement cyclique de Σ est dans \mathcal{A} , et que G ne se scinde pas sur un sous-groupe d'indice infini de J [19].

Lorsque le groupe G est de présentation finie, l'espace de déformation JSJ existe quelle que soit la classe de groupes d'arêtes \mathcal{A} considérée (on n'a pas besoin d'hypothèse de petitesse en particulier).

Théorème I.1.5 ([19]). Soit G un groupe de présentation finie, et \mathcal{A} une classe de sous-groupes stable par passage au sous-groupe.

Alors l'espace de déformation JSJ de G au dessus de \mathcal{A} existe.

Le défaut majeur de cet énoncé est qu'il ne donne pas de description des sommets *flexibles* du scindement JSJ; un sommet v d'un scindement JSJ est dit *flexible* si G_v n'est pas elliptique dans au moins un scindement de G au dessus de \mathcal{A} . Au contraire, les constructions de scindements JSJ de [Sel97b, RS97, Bow98, DS99, FP06, DS00] décrivent, dans leur cadre respectif, les sommets flexibles du scindement JSJ obtenu. L'aspect fondamental de la théorie des scindements JSJ dit que ces sommets flexibles sont essentiellement des sommets QH . En d'autres termes, l'unique source de non-ellipticité entre des scindements vient de la présence de l'analogie sous-variétés de Seifert. On a par exemple, pour la classe des groupes sveltes (i. e. dont tous les sous-groupes sont de type fini) :

Théorème I.1.6 ([FP06]). Soit G de présentation finie, et \mathcal{A} la classe des groupes sveltes.

Alors tout sommet flexible v d'un scindement JSJ, G_v est un groupe QH dont la fibres est svelte.

En général, on peut démontrer que l'ensemble des sommets flexibles, muni de leur structure périphérique associée aux groupes d'arêtes incidents, est un invariant de l'espace de déformation JSJ [10]. La question suivante a donc un sens, et reste très mystérieuse :

Question I.1.7. Soit G de présentation finie, et \mathcal{A} la classe de ses groupes petits (i. e. ne contenant pas \mathbb{F}_2). Décrire les sommets flexibles de l'espace de déformation JSJ de G au-dessus de \mathcal{A} .

I.2 Arbre JSJ de compatibilité

Un défaut de la construction précédente est que l'objet canonique est un espace de déformation, et pas un scindement. En remplaçant la notion de lecture d'un scindement utilisée dans la section précédente par celle de *compatibilité* ci-dessous, on va rigidifier la situation, et obtenir un scindement invariant par automorphismes, comme dans [Bow98, SS03, PS07].

Définition I.2.1. *On dit que T_1 est compatible avec T_2 si T_1 et T_2 ont un raffinement commun. De manière équivalente, ceci revient à demander l'existence d'un arbre T tel qu'on puisse obtenir T_1 et T_2 par écrasement équivariant d'arêtes de T .*

On a la caractérisation suivante :

Proposition I.2.2 ([19]). *T_1 et T_2 deux actions irréductibles sont compatibles si et seulement si la somme de leurs fonctions longueurs est elle-même une fonction longueur.*

Étant donné une classe \mathcal{A} de sous-groupes de G stable par conjugaison et passage au sous-groupe, on dit que T est *universellement compatible* s'il est compatible avec tout \mathcal{A} -arbre.

Théorème I.2.3 ([19]). *Soit G de présentation finie. Parmi les espaces de déformation au dessus de \mathcal{A} contenant un scindement universellement compatible, il en existe un (unique) \mathcal{D} qui est maximum pour la domination.*

L'ensemble des arbres de \mathcal{D} réduits et universellement compatibles est fini, et engendre un simplexe de \mathcal{D} . On appelle arbre JSJ de compatibilité le barycentre de ce simplexe.

Un arbre $T \in \mathcal{D}$ est *réduit* (au sens de Forester ou Dunwoody [For02, Dun98]) si l'écrasement de n'importe quelle arête de T produit un arbre hors de \mathcal{D} .

La preuve de ce théorème est plus difficile que celle du théorème I.1.6.

Preuve. Listons les scindements universellement compatibles (on démontre qu'il y en a un nombre dénombrable), et considérons T_k un raffinement communs des k premiers scindements. On a ainsi une suite d'arbres $T_0 \Leftarrow T_1 \Leftarrow \dots \Leftarrow T_k \dots$ se raffinant les uns les autres.

L'accessibilité de Dunwoody montre l'existence d'un scindement S au dessus de \mathcal{A} qui domine les T_k . Mais bien sûr, S n'est pas universellement compatible. En analysant un raffinement commun de S et T_k , on construit des écrasements \overline{T}_k de T_k , dans le même espace de déformation que T_k , pour lesquels on montre que la suite \overline{T}_k converge pour la topologie de Gromov équivariante vers un scindement T_∞ au dessus de \mathcal{A} .

D'après la proposition I.2.2, la propriété d'universelle compatibilité est fermée, donc T_∞ est universellement compatible. Puisque l'espace de déformation \mathcal{D} de T_∞ domine tout arbre universellement compatible, on en déduit la première assertion du théorème.

Pour la seconde assertion, on considère $\mathcal{D}_r \subset \mathcal{D}$ le sous-complexe dont les simplexes sont ceux dont tous les sommets sont réduits. Grâce au fait que \mathcal{D} contient un scindement universellement compatible, on montre (dans un cadre plus général, voir [10]) que \mathcal{D}_r est de dimension finie (et c'est un rétract par déformation de \mathcal{D}). Puisque des scindements de \mathcal{D} réduits et universellement compatibles engendrent un simplexe de \mathcal{D}_r , la seconde assertion du théorème en découle. \square

I.3 Scindement JSJ de Bowditch

Dans [Bow98], Bowditch construit un scindement JSJ d'un groupe hyperbolique à un bout à partir de la topologie du bord. Il s'agit d'un scindement JSJ au-dessus des sous-groupes à deux bouts. De plus, du fait de sa construction à partir du bord, ce scindement est invariant par les automorphismes de G .

Théorème I.3.1 ([3]). *Soit G un groupe hyperbolique à un bout.*

Le scindement JSJ de Bowditch de G est compatible avec toute petite action de G sur un arbre réel.

Deux actions de G sur des arbres (réels) T_1, T_2 sont compatibles s'il existe une action sur un autre arbre réel $G \curvearrowright T$ et des applications continues équivariantes $T \rightarrow T_i$ préservant l'alignement (voir section II.4).

Notons que toute petite action de G sur un arbre réel est limite de petites actions simpliciales [1], voir section III.1. Il suffit donc de montrer que le scindement JSJ de Bowditch est compatible avec toute petite action simpliciale : la proposition I.2.2 montre que par passage à la limite, ce scindement sera compatible avec toute petite action de G sur des arbres réels.

En fait on peut donner un résultat plus précis :

Théorème I.3.2. *Toute petite action de G sur un arbre réel T peut-être obtenue à partir du scindement JSJ S en éclatant les sommets QH de S en une action duale à un feuilletage mesuré sur l'orbifold correspondant, en éclatant les sommets de S dont le stabilisateur est virtuellement cyclique en un arbre fini, puis en attribuant une longueur (peut-être nulle) à certaines arêtes de S .*

On peut voir ce résultat comme une généralisation du théorème de Skora qui affirme que toute petite action d'un groupe de surface sur un arbre réel est duale à un feuilletage mesuré sur cette surface. En particulier, on obtient que toute petite action de G sur un arbre réel est géométrique.

La preuve se fait en deux temps. Dans un premier temps, on démontre que tout stabilisateur d'arête H de S est elliptique dans T . Si T est simplicial, cela se démontre en examinant précisément la construction de Bowditch. Si T est un arbre réel dans lequel H est hyperbolique, on utilise le théorème d'approximation III.1.1 qui donne un petit arbre simplicial T' dans lequel H est encore hyperbolique, ce qui est contradictoire.

Dans un second temps, sachant que les groupes d'arêtes de S sont elliptiques dans T , on construit un arbre réel \hat{S} , obtenu en éclatant S et en écrasant certaines arêtes. On obtient un morphisme d'arbres réels $\hat{S} \rightarrow T$, dont on démontre ensuite qu'il est isométrique.

I.4 Scindements canoniques associés à un espace de déformation, et l'arbre des cylindres

Espaces de déformation rigides Rappelons en général qu'on a une action par précomposition de $\text{Out}(G)$ sur l'ensemble des actions minimales de G sur les arbres, modulo isomorphisme équivariant. Le groupe d'automorphismes $\text{Out}_{\mathcal{D}}(G)$ d'un espace de déformation \mathcal{D} est alors défini comme le sous-groupe de $\text{Out}(G)$ préservant \mathcal{D} . L'espace de déformation JSJ d'un groupe G étant canonique relativement à la famille \mathcal{A} de groupes d'arêtes autorisés, il est muni d'une action du sous-groupe de $\text{Out}(G)$ préservant \mathcal{A} .

Un espace de déformation étant contractile, cette action permet d'obtenir des renseignements homologiques sur $\text{Out}(G)$. Mais cette action n'est pas toujours cocompacte, et l'espace de déformation lui-même n'est même pas toujours de dimension finie. La situation est beaucoup plus satisfaisante lorsqu'on a un scindement invariant sous l'action de $\text{Out}(G)$, car on peut assez facilement analyser son groupe d'automorphismes [BJ96, Sel97b, Lev05a].

Certains espaces de déformations dits *rigides*, ont la propriété de contenir un unique scindement réduit. Bien sûr, ce scindement réduit est alors invariant par $\text{Out}_{\mathcal{D}}(G)$. Dans [For02], Forester donne un critère qui implique la rigidité :

Théorème I.4.1 ([For02]). *Soit T tel que pour tout sommet v de T et toute paire d'arêtes e_1, e_2 incidentes sur v et telles que $G_{e_1} \subset G_{e_2}$, e_1 et e_2 sont dans la même orbite sous l'action de G_v .*

Alors, T est l'unique arbre réduit dans son espace de déformation.

J'ai donné une preuve courte de ce résultat de Forester dans [5]. Elle consiste à analyser une application équivariante de T vers un arbre réduit T' dans le même espace de déformation. Cette preuve a été ensuite étendue par Levitt pour donner une caractérisation complète des arbres qui sont l'unique arbre réduit dans leur espace de déformation [Lev05b].

L'arbre des cylindres Dans [13], Levitt et moi introduisons une construction générale permettant d'associer de manière fonctorielle un scindement à un espace de déformation. En particulier, si l'espace de déformation initial est invariant par $\text{Out}(G)$, le scindement produit sera invariant par $\text{Out}(G)$. On appelle cette construction *arbre des cylindres* car elle est reliée à l'acylindricité introduite par Sela [Sel97a].

Cette construction est basée sur la décomposition d'un arbre T en sous-arbres (appelés cylindres) correspondant à une certaine relation d'équivalence entre les groupes d'arêtes. Plus précisément, on se fixe une classe \mathcal{E} de sous-groupes de G , qui est la classe des groupes d'arêtes autorisés. On demande que \mathcal{E} soit invariante par conjugaison, mais pas stable par sous-groupe (la construction devient triviale sinon). Mais dans les exemples considérés, \mathcal{E} est souvent stable par sandwich. On appelle \mathcal{E} -arbre un arbre simplicial T muni d'une action de G dont les stabilisateurs d'arêtes sont dans \mathcal{E} .

Définition I.4.2 (Relation d'équivalence admissible). *Une relation d'équivalence sur \mathcal{E} est dite admissible si pour tous $A, B \in \mathcal{E}$:*

1. *si $A \sim B$, alors pour tout $g \in G$, $A^g \sim B^g$*
2. *si $A \subset B$, alors $A \sim B$*
3. *si $A \sim B$, et si T est un \mathcal{E} -arbre tel que A et B fixent des points a et b de T , alors pour toute arête $e \subset [a, b]$, $G_e \sim A \sim B$.*

Voici des exemples de relations d'équivalence admissibles.

Exemple I.4.3.

1. *\mathcal{E} est la famille des sous-groupes à deux bouts de G , et \sim est la commensurabilité ($A \sim B$ si $A \cap B$ est d'indice fini dans A et B)*
2. *Plus généralement, soit \mathcal{E} une classe de sous-groupes stable par conjugaison et par commensurabilité, et telle que si $A, B \in \mathcal{E}$ sont tels que $A \subset B$, l'indice $[B : A]$ est fini; la relation \sim est la commensurabilité*

3. G est hyperbolique relativement à des groupes H_i à un bout, \mathcal{E} est la classe des groupes infinis élémentaires, et \sim est la co-élémentarité ($A \sim B$ si A et B sont contenus dans un même groupe parabolique ou loxodromique)
4. G est CSA, \mathcal{E} est la classe des sous-groupes abéliens non triviaux, et \sim est la relation de commutation.
5. \mathcal{E} est la classe des groupes finis de cardinal q fixé, et \sim est l'égalité.

Rappelons qu'un groupe G est CSA (pour *conjugately separated abelian*) si chaque sous-groupe abélien maximal est malnormal. C'est par exemple le cas pour les groupes hyperboliques sans torsion, ou les groupes relativement hyperboliques sans torsion relativement à des groupes abéliens (ou CSA), ou pour les limites de tels groupes dans l'espace des groupes marqués.

Si on prend un groupe relativement hyperbolique G sans hypothèse sur les groupes paraboliques, et \mathcal{E} la famille des groupes élémentaires infinis, la relation de co-élémentarité est admissible si on se restreint à des \mathcal{E} -arbres T dans lesquels les groupes paraboliques sont elliptiques.

Étant donnée un \mathcal{E} -arbre T , et une relation d'équivalence admissible \sim , on considère la relation d'équivalence sur l'ensemble des arêtes de T définie par $e \sim e'$ si $G_e \sim G_{e'}$. On appelle alors *cylindre* de T une classe d'équivalence pour cette relation. L'axiome 3 d'une relation admissible implique que chaque cylindre (qu'on voit comme un sous-graphe de T) est un sous-arbre, et deux cylindres s'intersectent en au plus un sommet. Par définition, l'*arbre des cylindres* T_c est l'arbre dual au recouvrement de T par ses cylindres : T_c est l'arbre biparti dont les sommets sont d'une part les cylindres Y de T et d'autre part les sommets x de T appartenant à plusieurs cylindres, et ses arêtes sont les couples (x, Y) avec $x \in Y$.

Théorème I.4.4 ([13]). *L'arbre des cylindres de T ne dépend que de l'espace de déformation de T .*

Plus précisément, la correspondance $T \mapsto T_c$ est fonctorielle : toute application $f : T \rightarrow T'$ équivariante entre deux \mathcal{E} -arbres (envoyant arête sur chemin d'arêtes) induit une application cellulaire naturelle $f_c : T_c \rightarrow T'_c$ (envoyant une arête sur une arête ou un sommet). De plus f_c ne dépend pas de f .

En particulier, si l'espace de déformation de T est $\text{Out}(G)$ -invariant, alors T_c est $\text{Out}(G)$ -invariant.

Pour que cette construction soit utile, il faut s'assurer que T_c n'est pas trop loin de l'espace de déformation de T , et non trivial en particulier. En effet, on peut voir que le groupe libre \mathbb{F}_n n'a pas de scindement non-trivial $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ -invariant, et une telle construction est ainsi vouée à produire un scindement trivial dans ce cas. Il faut aussi contrôler les groupes d'arêtes de T_c car ils peuvent en général sortir de \mathcal{E} . Le résultat suivant montre que pour un groupe CSA non-abélien, ou un groupe relativement hyperbolique non-élémentaire, on n'obtient jamais le scindement trivial, et les groupes d'arêtes de l'arbre des cylindres restent dans la classe \mathcal{E} .

On dit que $G \curvearrowright T$ est *k-acylindrique* (resp. *presque k-acylindrique*) si le stabilisateur de tout arc de longueur au moins $k + 1$ est trivial (resp. fini) [Sel97a].

Théorème I.4.5. *Soit G CSA (resp. G hyperbolique relativement à H_1, \dots, H_n), \mathcal{E} la classe des sous-groupes abéliens non triviaux (resp. celle des sous-groupes élémentaires infinis), et \sim la commutation (resp. la co-élémentarité). Soit T un \mathcal{E} -arbre dans lequel les groupes abéliens non cycliques (resp. les H_i) sont elliptiques. Alors*

1. *Les stabilisateurs d'arête de T_c sont dans \mathcal{E}*

2. T_c est dans le même espace de déformation que T
3. T_c est presque 2-acylindrique.

Comme corollaire, on obtient l'existence de scindements JSJ $\text{Out}(G)$ -invariants :

Corollaire I.4.6. *Supposons G hyperbolique relativement à H_1, \dots, H_n , et à un bout relativement à H_1, \dots, H_n .*

Alors G possède un scindement JSJ cyclique (resp. élémentaire) relatif à H_1, \dots, H_n invariant par le sous-groupe de $\text{Out}(G)$ préservant les classes de conjugaison des H_i .

Le scindement JSJ considéré dans cet énoncé est celui des scindements de G relatifs aux H_i (i. e. dans lesquels les H_i sont elliptiques), et à groupes d'arêtes cycliques (resp. élémentaires). De même, on a :

Corollaire I.4.7. *Soit G un groupe de présentation finie CSA, à un bout, et sans torsion.*

Alors G possède un scindement JSJ cyclique (resp. abélien) relatif à ses sous-groupes abéliens non cycliques, et invariant par $\text{Out}(G)$.

Lorsque les stabilisateurs d'arêtes de l'arbre des cylindres T_c ne sont pas dans \mathcal{E} , on peut définir un arbre T_c^* obtenu en écrasant les arêtes de T_c hors de \mathcal{E} . On remarque facilement que les cylindres de T_c^* sont de diamètre au plus 2. L'espace de déformation de T_c^* se caractérise alors par la propriété de maximalité suivante :

Proposition I.4.8. *Les cylindres de T_c^* ont un diamètre inférieur ou égal à 2.*

Si T' est un autre \mathcal{E} -arbre dominé par T est dont les cylindres sont bornés, alors T' est dominé par T_c^ .*

Dans les exemples 1, 3 et 4 ci-dessus (en supposant les groupes paraboliques petits dans l'exemple 3), T est à cylindres bornés si et seulement si cette action est presque k -acylindrique (pour un certain k). On obtient ainsi une caractérisation de l'espace de déformation de T_c^* en termes d'acylindricité.

Enfin, l'arbre des cylindres est relié à la notion de compatibilité des scindements. Par exemple, on a en général que si T domine T' , alors T_c est compatible avec T' . En construisant l'arbre des cylindres d'un espace de déformation JSJ, on obtient dans de nombreux cas un scindement universellement compatible :

Théorème I.4.9. *Supposons que l'on soit dans l'un des exemples 1,2,3,4. Supposons que G ait un seul bout, et dans l'exemple 2, que G ne se scinde pas sur un groupe d'indice infini dans un sous-groupe de \mathcal{E} . Soit T un scindement JSJ de G au-dessus de la classe des sous-groupes de \mathcal{E} .*

Alors T_c est compatible avec tout \mathcal{E} -arbre.

Ceci permet, dans un certain nombre de situations, de caractériser à l'arbre de compatibilité JSJ (défini en section I.2) en termes de l'arbre des cylindres de l'espace de déformation JSJ.

I.5 Arbre des cylindres et scindement de Scott-Swarup

Soit M une variété, et Σ une sous-variété immergée, π_1 -injective. Lorsque Σ est plongée, ceci définit un scindement de $\pi_1(\Sigma)$. La notion d'*ensemble presque-invariant* généralise celle de scindement : si Σ est seulement immergée, on construit un ensemble $\pi_1(\Sigma)$ -presque-invariant de $\pi_1(M)$ à partir d'un demi-espace de \tilde{M} bordé par un relevé de Σ . Techniquement, si $H < G$, un *ensemble H -presque invariant* de G est un sous-ensemble $X \subset G$ qui

est H -invariant à gauche, et tel que pour tout $g \in G$, la différence symétrique $X + X.g$ est H -finie (i. e. est contenu dans un nombre fini de classes à gauche modulo H).

Dans [SS03], Scott et Swarup construisent un scindement canonique d'un groupe de présentation finie. C'est un scindement qui permet *d'enclôtre* tout ensemble presque invariant au-dessus d'un groupe virtuellement polycyclique de longueur n (VPC_n). Le fait qu'un scindement Γ de G *enclôt* un ensemble presque invariant X est une notion qui généralise le fait que X est compatible avec Γ lorsque X correspond à un scindement, ou le fait que des sous-variétés de codimension 1 peuvent être disjointes par isotopie. Cette notion est ainsi très rigide, ce qui explique une des vertus majeures du scindement de Scott et Swarup : il est invariant sous l'action des automorphismes de G .

En ce sens, ce scindement est assez différent des scindements JSJ construits dans [RS94, DS99, FP06, DS00] qui ne sont invariants qu'à déformation près, et se rapproche plutôt du scindement canonique de Bowditch d'un groupe hyperbolique [Bow98], de l'arbre JSJ de compatibilité de la section I.2 ou du scindement de Papasoglu-Swenson [PS07].

D'autre part, la construction de l'arbre des cylindres permet de produire un scindement canonique à partir d'un espace de déformation. Levitt et moi démontrons que le scindement de Scott et Swarup est l'arbre des cylindres (pour la relation \sim de commensurabilité) de l'espace de déformation JSJ usuel au dessus des groupes VPC_n [14].

Théorème I.5.1. *Soit G un groupe de présentation finie qui n'est pas VPC_{n+1} , et ne se scindant pas au dessus d'un groupe VPC_{n-1} . Soit \mathcal{D} son espace de déformation JSJ au dessus des groupes VPC_n , et soit T_c l'arbre des cylindres de cet espace de déformation (pour \sim la commensurabilité).*

Alors, T_c coïncide, à subdivision près avec le scindement de Scott et Swarup.

Rappelons rapidement la construction de Scott et Swarup. La notion basique est celle de *croisement* de deux ensembles presque invariants introduite dans [Sco98]. Ceci définit une structure de graphe sur l'ensemble de tous les ensembles presque-invariants de G en connectant deux ensemble presque invariants qui se croisent. Les composantes connexes de ce graphe sont les *composantes connexes par croisement* (CCC). Scott et Swarup munissent ensuite l'ensemble \mathcal{C} des CCC d'une relation *entre*, qui permet de plonger \mathcal{C} de manière canonique dans l'ensemble des sommets d'un arbre, appelé *voisinage régulier* de \mathcal{C} . Notre construction permet de lire la relation *entre* à partir d'un scindement JSJ (au sens habituel), et semble simplifier substantiellement la construction, en particulier en évitant complètement de recourir aux diverses notions de *bonne position* [SS03].

Une étape importante de la preuve est un énoncé dû à Scott et Swarup (mais pas explicite dans leur travail) de lecture d'un ensemble presque invariant dans un scindement JSJ. Avant d'explicitier cet énoncé, on a besoin de quelques définitions.

Combinaison booléennes de scindements. Si X est un ensemble H -presque invariant, il est H' -presque invariant pour tout sous-groupe d'indice fini $H' < H$. Si X_1, X_2 sont deux ensembles presque-invariants au-dessus de groupes H_1, H_2 commensurables, $X_1 \cap X_2$ et $X_1 \cup X_2$ sont presque-invariants au-dessus de $H_1 \cap H_2$. On dit que X_1 et X_2 sont *équivalents* si leur différence symétrique est finie modulo H_1 (ou H_2 de manière équivalente [Sco98]).

Voici la première façon de lire un ensemble presque invariant dans un scindement. Étant données une action $G \curvearrowright T$ sur un arbre simplicial muni d'un point base v_0 , et une arête orientée e de T , on peut définir le sous-ensemble Z_e de G par $Z_e = \{g \in G \mid g.v_0 \in T_e\}$ où T_e est la composante connexe de $T \setminus \dot{e}$ contenant le sommet terminal de e . C'est un ensemble G_e -presque invariant, et sa classe d'équivalence ne dépend pas du choix du point

base. Si G_e et $G_{e'}$ sont commensurables, on peut ainsi produire de nouveaux ensemble presque invariants par combinaisons booléennes de Z_e et $Z_{e'}$. Ainsi, à chaque classe de commensurabilité \mathcal{C} de groupes d'arêtes de T , on peut associer l'algèbre booléenne $\mathcal{B}_{\mathcal{C}}(T)$ des classe d'équivalence d'ensembles presque invariants obtenus par combinaison booléenne des Z_e pour $G_e \in \mathcal{C}$. On a ainsi une algèbre booléenne pour chaque cylindre de T , et deux telles algèbres booléennes n'ont en commun que les classes d'équivalences des ensembles presque invariants triviaux \emptyset et G . On note $\mathcal{B}(T)$ la réunion des $\mathcal{B}_{\mathcal{C}}(T)$ pour \mathcal{C} parcourant les classes de commensurabilité de groupe d'arêtes de T .

Ensembles presque invariants des sommets QH. La seconde façon de lire un ensemble presque invariant dans un scindement est liée aux sommets QH. Soit v un sommet QH de T , qui s'écrit comme une extension $F \rightarrow G_v \rightarrow \Sigma$ avec Σ groupe Fuchsien convexe cocompact et F un groupe VPC_{n-1} . Soit H l'image réciproque dans G_v d'un sous-groupe virtuellement cyclique infini maximal non périphérique de Σ , et c la géodésique de \mathbb{H}^2 H -invariante. Un demi-espace bordé par c dans \mathbb{H}^2 permet de définir un ensemble H -presque-invariant de G_v , qu'on peut étendre de manière naturelle en un ensemble H -presque-invariant de G . On note $QH(T)$ l'ensemble des classes d'équivalences d'ensembles presque invariants de G qu'on peut obtenir à partir d'un sommet QH de T de cette manière.

Structure des ensembles presque invariants. Le théorème de structure de ensemble presque invariants, implicite dans le travail de Scott et Swarup, affirme que tout ensemble presque invariant peut être obtenu de l'une des deux façons ci-dessus :

Théorème I.5.2 ([SS03],[14]). *Soit G un groupe de présentation finie, non virtuellement polycyclique, ne se scindant pas sur un groupe VPC_{n-1} . Soit T un scindement JSJ de G au-dessus des groupes VPC_n .*

Tout ensemble H -presque invariant de G au dessus d'un groupe $H \text{ VPC}_n$, appartient à $\mathcal{B}(T) \cup QH(T)$. En d'autres termes, il peut être lu dans un cylindre ou un sommet QH de T .

Scindement de Scott et Swarup comme arbre des cylindres. Le théorème I.5.1 se déduit alors directement du théorème suivant :

Théorème I.5.3. *Soit G de type fini et \mathcal{E} une classe de sous-groupes de G stable par conjugaison et commensurabilité, et telle que deux groupes de \mathcal{E} ne sont jamais contenus l'un dans l'autre avec indice infini. Soit T un \mathcal{E} -arbre.*

Alors, le voisinage régulier de $\mathcal{B}(T) \cup QH(T)$ est isomorphe, à subdivision près, à l'arbre des cylindres de T pour la relation de commensurabilité.

La preuve consiste à démontrer que sauf cas particulier, chaque cylindre et chaque sommet QH définit une unique CCC à laquelle on peut faire correspondre le sommet correspondant de T_c . Les autres CCC (dites *périphériques*) sont faciles à analyser, et correspondent à certaines arêtes des T_c . On démontre alors que la relation *entre* de Scott et Swarup est la même que celle qu'on lit dans T_c .

I.6 Automorphismes et scindements canoniques

La construction de l'arbre des cylindres peut-être utilisée dans l'étude des automorphismes de groupes. C'est un travail commun avec Gilbert Levitt en préparation [20].

Infinitude du groupe d'automorphismes d'un groupe hyperbolique

En utilisant les actions de groupes sur les arbres réels, le théorème de Bestvina-Paulin [Pau91, Bes88] affirme qu'un groupe hyperbolique G ayant un groupe d'automorphismes infini admet une petite action sur un arbre réel, et donc, via la théorie de Rips, un scindement au dessus d'un groupe virtuellement cyclique. Réciproquement, l'existence d'un tel scindement permet souvent d'exhiber un automorphisme extérieur d'ordre infini grâce à la présence de twists de Dehn associés à ce scindement : si $G = A *_C B$, et si $z \in B$ centralise C , l'identité sur A et la conjugaison par z sur B induisent un automorphisme τ_z de G appelé twist de Dehn. Mais si z (ou une puissance de z) est dans le centre de B , τ_z (ou la puissance correspondante) est intérieur. Au contraire, si A et B ont un centre fini, alors τ_z est d'ordre infini dans $\text{Out}(G)$.

Ainsi, si G est un groupe hyperbolique sans torsion non élémentaire, l'existence d'un scindement au-dessus d'un groupe trivial ou d'un groupe cyclique maximal suffit à montrer que le groupe d'automorphismes extérieurs de G est infini. En présence de torsion, la situation est plus délicate : si C est un groupe fini non trivial, ou si C est un groupe infini diédral, il se peut que le groupes des twists de Dehn soit fini. Par exemple, certains groupes virtuellement libres ont un groupe d'automorphismes fini, caractérisés dans [Pet97].

Théorème I.6.1 ([20],[Car08]). *Soit G un groupe hyperbolique. Alors $\text{Out}(G)$ est infini si et seulement si il existe un scindement de G au dessus d'un groupe fini, ou virtuellement cyclique à centre infini, et possédant un twist de Dehn d'ordre infini.*

Cet énoncé se généralise au cadre d'un groupe relativement hyperbolique (avec des groupes paraboliques quelconques) sous la forme suivante. On note $\text{Out}(G; \{[H_1], \dots, [H_n]\})$ le groupe des automorphismes extérieurs de G préservant l'ensemble des classes de conjugaison des sous-groupes H_i . On note $\text{PMCG}(G; (H_1, \dots, H_n))$ le sous-groupe de $\text{Out}(G; \{[H_1], \dots, [H_n]\})$ formé des automorphismes dont la restriction à chacun des H_i coïncide avec la restriction d'un automorphisme intérieur de G .

Théorème I.6.2 ([20]). *Soit G un groupe hyperbolique relatif à H_i , avec H_i infini et de type fini. Supposons que $\text{PMCG}(G; (H_1, \dots, H_n))$ soit infini.*

Alors G a un scindement au dessus de groupes élémentaires, et relatif aux H_i dont le groupe de twists de Dehn est infini.

Si on fait l'hypothèse plus faible que $\text{Out}(G; \{[H_1], \dots, [H_n]\})$ est infini, alors, on peut montrer l'existence d'un scindement Γ de G ayant un groupe de twists infini, ou bien possédant un sommet v tel que G_v est un groupe parabolique H_i , et $\text{Out}(G_v; \{[G_{e_1}], \dots, [G_{e_k}]\})$ est infini (où e_1, \dots, e_k sont les arêtes de Γ incidentes sur v).

Notons qu'il existe un algorithme qui prend en entrée un groupe hyperbolique et qui ne s'arrête que si $\text{Out}(G)$ est fini (voir [Sel95] pour le cas sans torsion, [DG08b] pour les groupes relativement hyperboliques toraux, et [18] pour les groupes hyperboliques en présence de torsion). Par ailleurs, il est facile de d'énumérer les scindements de G de la forme ci-dessus, et de calculer le groupe des twists d'un tel scindement. On en déduit ainsi un algorithme permettant de décider si le groupe d'automorphismes extérieurs d'un groupe hyperbolique est infini.

Le théorème I.6.1 est connu pour un groupe hyperbolique à un bout ([Lev05a], ou [18] pour une preuve plus directe), un groupe hyperbolique sans torsion [Pau97b]. Le cœur de l'argument concerne donc les groupes ayant des scindements sur des groupes finis. On peut en donner une preuve simple basée sur l'arbre des cylindres de la façon suivante.

Soit k le cardinal minimal d'un groupe fini sur lequel G se scinde. Soit T un scindement JSJ de G sur les groupes de cardinal k , et T_c l'arbre des cylindres de ce scindement pour la

relation \sim d'égalité. Si T lui-même possède un twist de Dehn d'ordre infini, on a terminé. Sinon, on montre que T_c est à groupe d'arêtes finis ou virtuellement cycliques à centre infini. Si le groupe des twists de T_c contient un élément d'ordre infini, on a aussi terminé. Sinon, puisque T_c est $\text{Out}(G)$ -invariant, l'un des groupes $\text{PMCG}(G_\nu; (G_{\varepsilon_1}, \dots, G_{\varepsilon_k}))$, relatif aux groupes d'arêtes incidents, doit être infini. Rappelons que les sommets de T_c correspondent soit à des sommets ou des cylindres de T . Si le sommet ν de T_c correspond à un sommet de T , alors sait par récurrence (en utilisant l'accessibilité) que G_ν possède un scindement ayant twists de Dehn d'ordre infini, et en raffinant T , on peut ainsi obtenir un scindement de G ayant un twist de Dehn d'ordre infini. Si le sommet ν correspond à un cylindre, G_ν normalise les groupes d'arêtes de ce cylindre. On montre alors que quitte à écraser certaines arêtes dans ce cylindre, on obtient un scindement ayant un twist de Dehn d'ordre infini.

Automorphismes des groupes relativement hyperboliques à un bout

Théorème I.6.3 ([20]). *Soit G un groupe relativement hyperbolique sans torsion à groupes paraboliques sveltes H_1, \dots, H_n non virtuellement cycliques. Supposons que G ait un seul bout.*

Alors $\text{PMCG}(G; (H_1, \dots, H_n))$ contient un sous-groupe d'indice fini A qui est une extension d'un produit direct de groupes modulaires de surfaces par un groupe svelte.

Le groupe $\text{Out}(G; [H_1], \dots, [H_n])$ est plus gros. On en donne une description pour des groupes relativement hyperboliques toraux à un bout. Un groupe relativement hyperbolique *toral* est par définition un groupe relativement hyperbolique sans torsion dont les groupes paraboliques sont des groupes abéliens de type fini.

Théorème I.6.4 ([20]). *Soit G un groupe relativement hyperbolique toral à un bout, et H_1, \dots, H_n ses sous-groupes paraboliques.*

Alors $\text{Out}(G; [H_1], \dots, [H_n])$ est virtuellement une extension d'un produit direct de groupes modulaires de surfaces et de groupes de la forme $GL_i(\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}^j$ par un groupe abélien.

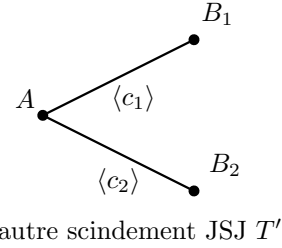
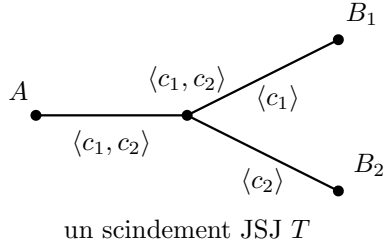
Ces résultats sont des généralisent un théorème de Sela [Sel97b] pour les groupes hyperboliques sans torsion. La preuve consiste à construire, via l'arbre des cylindres, un scindement JSJ svelte relatif aux groupes paraboliques de G , et à analyser son groupe d'automorphismes comme dans [Lev05a].

Groupe modulaire et scindements JSJ de groupes CSA

Soit G un groupe CSA sans torsion, par exemple un groupe limite, ou un groupe limite d'un groupe hyperbolique sans torsion. On suppose que G a un seul bout. Si Γ est un scindement abélien de G , le groupe *modulaire* $\text{Mod}(\Gamma)$ de Γ est le sous-groupe de $\text{Out}(G)$ engendré par les twists de Dehn de Γ , et par les (extensions à G des) automorphismes des groupes de sommets abéliens et des groupes QH de Γ préservant la structure périphérique ([Sel01]).

Bien sûr, $\text{Mod}(\Gamma)$ dépend du scindement Γ considéré. On peut alors définir le groupe modulaire $\text{Mod}(G)$ de G comme le groupe engendré par tous les groupes modulaires de tout les scindements abéliens de Γ . Pour comprendre ce groupe, on aimerait que le groupe modulaire de G coïncide avec le groupe modulaire d'un scindement particulier de G .

Bien sûr, on pense tout de suite à un scindement JSJ abélien de G . Cependant, il est facile de voir qu'il existe des scindements JSJ abéliens de G dont les groupes modulaires sont trop petits. Soit G un groupe CSA, et T, T' deux scindements comme sur la figure ci-dessous, où A, B_1, B_2 ne se scindant pas sur des groupes abéliens, A contenant un groupe abélien libre de rang 3 $\langle c_1, c_2, c_3 \rangle$.



Le twist de Dehn de T' défini comme la conjugaison par c_3 sur B_1 et l'identité sur A et B_2 n'est pas un automorphisme de T . Par contre, le groupe des automorphismes modulaires de l'arbre des cylindres du JSJ abélien possède cette propriété.

Théorème I.6.5 ([20]). *Soit T_c l'arbre des cylindres du JSJ abélien, et Γ un scindement de G au-dessus de groupes abéliens. Alors $\text{Mod}(\Gamma) \subset \text{Mod}(T_c)$.*

En d'autres termes $\text{Mod}(G) = \text{Mod}(T_c)$.

Il est commode d'appeler *sommet modulaire* d'un graphe de groupes un sommet v qui est soit QH , soit tel que G_v est abélien. Pour démontrer le théorème ci-dessus, on utilise que T_c est $\text{Out}(G)$ -invariant, et on caractérise $\text{Mod}(T_c)$ comme le sous-groupe de $\text{Out}(G)$ qui agit trivialement sur le graphe quotient T_c/G , et dont la restriction à chaque groupe d'arête, et à chaque groupe de sommet non modulaire est la restriction d'un automorphisme intérieur. On démontre ensuite que si Γ est un scindement abélien quelconque de G , chaque groupe de sommet non modulaire (resp. d'arête) H de T_c est contenu dans un groupe de sommet non modulaire (resp. ou bien dans un groupe d'arête) de Γ , ce qui montre que $\text{Mod}(\Gamma)$ agit par conjugaison sur H . Il reste alors à vérifier que l'action sur le graphe quotient T_c/G est triviale.

Chapitre II

Outre-espace et espaces de déformation

Dans le chapitre précédent, on a construit des espaces de déformation canoniques, et on a essayé d'en extraire des scindements canoniques. Dans la situation idéale, on trouvait un scindement canonique à l'intérieur de cet espace de déformation. En un certain sens, ceci impose à cet espace de déformation d'être relativement petit.

À l'opposé, l'outre-espace de Culler-Vogtmann est un gros espace de déformation, et il en va de même de beaucoup d'espaces de déformation intéressants (en particulier de groupes de Baumslag-Solitar). On s'intéresse donc à ce qu'on peut dire de ces gros espaces de déformation. On examine d'abord les propriétés générales des espaces de déformation, et on démontre en particulier qu'ils sont contractiles (section II.1). En appliquant ce résultat à l'espace de déformation de Grushko, on obtient des résultats de finitude homologiques pour les groupes d'automorphismes de groupes limites, et de groupes hyperboliques toraux (section II.2). On regarde ensuite le cas de l'outre-espace, et on étudie la dynamique de $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ sur le bord (section II.3). Enfin, on introduit le cœur du produit de deux scindements, qui permet d'avoir une mesure de leur degré d'incompatibilité (section II.4).

II.1 Espaces de déformation de scindements

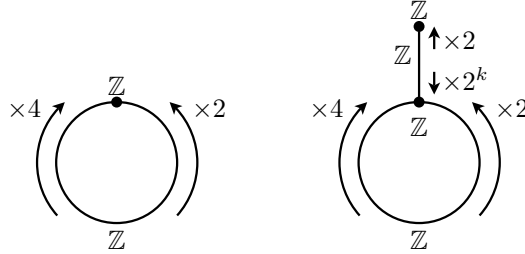
On a vu que la notion *d'espace de déformation* de scindements apparaît naturellement lorsqu'on s'intéresse aux propriétés d'unicité des scindements JSJ (section I.1). Fixons nous un groupe G ; tous les arbres considérés seront munis d'une action minimale de G . Rappelons qu'un espace de déformation est l'ensemble des arbres dont l'ensemble des sous-groupes elliptiques est imposé (avec parfois en plus une contrainte sur les stabilisateurs d'arêtes, qu'on impose à rester dans un ensemble \mathcal{A} stable par passage au sous-groupe, voir Définition I.1.4).

Il est alors naturel de se demander à quel point deux arbres d'un même espace de déformation \mathcal{D} se ressemblent. Par exemple, il est facile de voir que pour deux arbres T, T' quelconques de \mathcal{D} , les graphes quotient T/G et T'/G ont le même premier nombre de Betti. De même, le fait que T est irréductible (il existe deux éléments hyperboliques d'axes disjoints) ne dépend que de \mathcal{D} car on peut caractériser la non irréductibilité par le fait que pour tout g, h hyperbolique, $[g, h]$ est elliptique. L'acylindricité de T , ou sa finitude locale, ne dépendent pas non plus du choix de T dans \mathcal{D} (par contre, la constante k d'acylindricité, ou le degré maximal peuvent en dépendre).

II.1.1 Stabilisateurs de sommets et d'arêtes

Une autre façon de tenter de répondre à cette question, consiste à comprendre les liens entre les stabilisateurs d'arêtes et de sommet de deux arbres de \mathcal{D} distincts. La question a plus de sens si on se restreint à des arbres *réduits* au sens de Forester : on dit que $T \in \mathcal{D}$ est réduit si écraser une arête quelconque de T nous fait sortir de \mathcal{D} . En effet, si on n'impose pas à T d'être réduit, il est facile d'introduire de manière artificielle des groupes d'arêtes et de sommets relativement arbitraires en transformant un groupe de sommet A en un amalgame $A *_B B$.

On voit facilement que si un stabilisateur de sommet G_v n'est pas un groupe d'arête autorisé (i. e. $G_v \notin \mathcal{A}$), alors G_v est un stabilisateur de sommet de tout arbre $T \in \mathcal{D}$. Par contre, si $G_v \in \mathcal{A}$, les choses sont plus compliquées. Considérons par exemple le groupe de Baumslag-Solitar $G = BS(2, 4) = \langle a, t | ta^2t^{-1} = a^4 \rangle$, et \mathcal{D} son espace de déformation JSJ sur \mathbb{Z} . \mathcal{D} est l'espace de déformation contenant l'arbre de Bass-Serre du graphe de groupes représenté ci-dessous. Alors \mathcal{D} contient aussi l'arbre de Bass-Serre correspondant à la présentation $\langle a, t, b | tbt^{-1} = b^2, b^{2^k} = a^2 \rangle$, dont le graphe de groupes est représenté ci-dessous.



On voit ainsi que le nombre d'orbites de sommets, et les classes de conjugaison de stabilisateurs de sommets dépendent du choix de l'arbre réduit $T \in \mathcal{D}$.

On définit le substitut suivant aux stabilisateurs de sommet, qui est évidemment un invariant de \mathcal{D} :

Définition II.1.1. Soit \leq la relation de pré-ordre sur l'ensemble des sous-groupes elliptiques de \mathcal{D} définie par $H \leq K$ s'il existe $g \in G$ tels que $H \subset K^g$. Soit \sim la relation d'équivalence définie par $H \sim K$ si $K \leq H \leq K$. On définit alors l'ensemble vertical de \mathcal{D} comme l'ensemble \mathcal{M} des classes maximales (pour \sim) de sous-groupes elliptiques de \mathcal{D} .

Par exemple, si $G_v \notin \mathcal{A}$, alors la classe d'équivalence de G_v coïncide avec sa classe de conjugaison, et elle est maximale, donc appartient à \mathcal{M} . Les classes d'équivalences dans \mathcal{M} contenant un groupe hors de \mathcal{A} sont toutes de cette forme.

Proposition II.1.2. Soit \mathcal{D} un espace de déformation d'arbres irréductibles. Alors \mathcal{M} est un ensemble fini et pour tout T réduit au sens de Bestvina-Feighn dans \mathcal{D} on a les inégalités

$$\#\mathcal{M} \leq \#V(T/G) \leq 2\#\mathcal{M} + 2b_1(\mathcal{D}) - 2$$

On dit que T est *réduit au sens de Bestvina-Feighn* si pour tout sommet $v \in T/G$ de valence 2, les deux groupes d'arêtes adjacents sont strictement contenus dans G_v [BF91b]. En particulier, un arbre réduit au sens de Forester est réduit au sens de Bestvina-Feighn (avec une exception si T est une droite). Cette proposition donne une forme d'accessibilité à l'intérieur d'un espace de déformation : si $T_0 \in \mathcal{D}$, on a une borne sur le nombre de sommets de tout autre arbre réduit $T \in \mathcal{D}$.

Pour ce qui est des groupes d'arêtes, eux aussi dépendent de l'arbre réduit T choisi dans \mathcal{D} mais la famille des sous-groupes bi-elliptiques et celle des groupes d'arêtes généralisés définis ci-dessous n'en dépendent pas :

- on dit que $H < G$ est *bi-elliptique* s'il fixe une arête de T
- $H < G$ est un *groupe d'arête généralisé* s'il est bi-elliptique et s'il contient un stabilisateur d'arête de T .

Cette indépendance vis-à-vis du choix de T a lieu de manière plus large dans *l'espace de déformation réduit* \mathcal{D}_r : \mathcal{D}_e est l'espace de déformation avec la plus petite classe de groupes d'arêtes autorisés qui contienne un arbre de \mathcal{D} . De manière équivalente, c'est le sous-ensemble des arbres de \mathcal{D} dont les groupes d'arêtes sont des sous-groupes bi-elliptiques des arbres réduits de T . Ceci se démontre facilement après avoir remarqué que pour tout $T, T' \in \mathcal{D}_r$, il existe un *morphisme* $T \rightarrow T'$, c'est-à-dire une application équivariante qui n'écrase aucune arête.

On peut aussi définir une structure périphérique pour un groupe de sommet $G_0 \notin \mathcal{A}$, et qui ne dépend pas de $T \in \mathcal{D}_r$. On regarde sur les sous-groupes de G_0 la même relation de pré-ordre \leq que dans la définition II.1.1 (la conjugaison ayant lieu dans G_0) sur l'ensemble des sous-groupes de G_0 bi-elliptiques. L'ensemble $\mathcal{P}(G_0)$ des classes d'équivalences d'éléments maximaux ne dépend pas du choix de $T \in \mathcal{D}$. Le nombre $\#\mathcal{P}(G_0)$ est toujours un minorant de la valence du sommet fixé par G_0 dans le graphe quotient, et il existe $T \in \mathcal{D}_r$ pour lequel on a égalité. Par exemple, si v est un sommet QH dans un arbre $T \in \mathcal{D}_r$, alors ce sommet QH persiste dans tout autre arbre de \mathcal{D}_r .

II.1.2 Topologie et pliages continus

Un espace de déformation \mathcal{D} peut être vu comme un espace d'arbres simpliciaux métriques, i. e. pour lequel chaque arête est munie d'une longueur strictement positive, et invariante sous l'action du groupe. On identifie alors deux arbres s'il y a une isométrie équivariante entre les deux. Il est souvent utile de considérer l'espace de déformation *projectifié* $\mathbb{P}\mathcal{D}$, dans lequel on identifie deux arbres lorsqu'il existe une homothétie équivariante entre eux. En faisant varier les longueurs des orbites d'arêtes d'un G -arbre fixé, on obtient un simplexe ouvert $\mathbb{P}\mathcal{D}$. Lorsqu'on autorise certaines longueurs à s'annuler, on obtient un simplexe fermé, mais dont certaines faces correspondent à des arbres en dehors de $\mathbb{P}\mathcal{D}$. On appelle *cellule* de $\mathbb{P}\mathcal{D}$ l'intersection avec $\mathbb{P}\mathcal{D}$ de ce simplexe fermé. Le recouvrement de $\mathbb{P}\mathcal{D}$ par ces cellules permet de le munir de la *topologie faible*. Si on préfère, on peut remplacer $\mathbb{P}\mathcal{D}$ par son épine, qui est un vrai complexe simplicial.

Par ailleurs, \mathcal{D} est aussi muni de la topologie de Gromov équivariante. Pour cette topologie, on définit une base de voisinages de T ainsi : pour tout $\varepsilon > 0$, toute famille finie $F_T = (x_1, \dots, x_n) \in T^n$ et tout sous-ensemble fini $F_G = \{g_1, \dots, g_p\} \subset G$, on définit $V_{\varepsilon, F_T, F_G}$ comme l'ensemble des arbres T' tels qu'il existe $F_{T'} = (x'_1, \dots, x'_n) \in T'^n$ de sorte que pour tous $g, h \in F_G$ et tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $|d_T(g.x_i, h.x_j) - d_{T'}(g.x'_i, h.x'_j)| < \varepsilon$.

Lorsque \mathcal{D} n'est pas localement fini, la topologie faible n'est pas métrisable, alors que celle de Gromov l'est toujours (on montre en particulier qu'elle est toujours séparée en restriction à un espace de déformation). Cependant, on montre que les deux topologies coïncident sur toute union finie de cellules. La topologie faible est utile pour les calculs cohomologiques, mais la topologie de Gromov est adaptée pour compactifier \mathcal{D} : l'adhérence $\overline{\mathcal{D}}$ de \mathcal{D} dans l'espace des actions minimales de G sur des arbres réels muni de la topologie de Gromov est projectivement compact (mais pas toujours séparé lorsque \mathcal{D} n'est pas irréductible).

Le théorème suivant permet d'obtenir des informations cohomologiques sur le sous-groupe de $\text{Out}(G)$ préservant \mathcal{D} (voir section II.2,[9]).

Théorème II.1.3. *Tout espace de déformation \mathcal{D} est contractile pour la topologie faible.*

Si \mathcal{D} contient un arbre dont les stabilisateurs de sommets sont de type fini, alors \mathcal{D} est contractile pour la topologie de Gromov équivariante.

Si en outre \mathcal{D} est irréductible, alors $\overline{\mathcal{D}}$ est séparée et contractile.

Ces énoncés s'appliquent aussi aux espaces projectifs. La connexité d'un espace de déformation peut s'interpréter en disant qu'on peut passer d'un arbre de \mathcal{D} à un autre par une suite de mouvements d'écrasements ou d'éclatements, ce qui permet de retrouver un résultat de Forester [For02].

En interprétant l'ensemble des points fixes d'un sous-groupe de $\text{Out}(G)$ comme un espace de déformation, on obtient le corollaire suivant :

Théorème II.1.4 ([10],[Cla05]). *Soit \mathcal{D} un espace de déformation $\text{Out}(G)$ -invariant, et $F \subset \text{Out}(G)$ un sous-groupe de type fini.*

Si F fixe un arbre de \mathcal{D} , alors l'ensemble des points fixes de F dans \mathcal{D} est contractile.

La preuve du théorème II.1.3 consiste à mettre en œuvre les pliages continus de Skora [Sko89],[9]. Étant donné un morphisme d'arbres réels $f : T_0 \rightarrow T_\infty$, on définit pour tout $t > 0$ un arbre T_t avec des morphismes $T_0 \xrightarrow{g_t} T_t \xrightarrow{f_t} T_\infty$. De manière abstraite, on peut définir T_t comme le quotient de T_0 par la relation d'équivalence \sim_t engendrée par $x \sim_t y$ si $f(x) = f(y)$ et $d(x, y) \leq 2t$. On montre que T_t est bien un arbre réel, et l'argument principal consiste à montrer que T_t , f_t et g_t varient continûment en fonction de f , pour une topologie sur l'espace des morphismes d'arbres réels similaire à la topologie de Gromov. Ceci définit un semi-flot sur l'espace des morphismes. Pour en déduire la contractibilité d'un espace de déformation (pour une topologie ou l'autre), il suffit de choisir un simplexe base $\Sigma_0 \in \mathcal{D}$, et d'associer de manière continue à chaque $T \in \mathcal{D}$ un morphisme $f_T : T_0 \rightarrow T$ avec $T_0 \in \Sigma_0$.

Dans [22], j'ai étudié une idée similaire de pliage continu dans le cadre de l'outre-espace CV_n de Culler-Vogtmann, mais dans lequel la *direction à suivre* n'est pas donnée par un morphisme $f : T_0 \rightarrow T$ mais par un *système d'aiguillages* défini dans l'arbre initial. En étudiant le temps d'accès au bord de ce semi-flot, et en montrant sa continuité en particulier, on obtient des grands simplexes de dimension maximale dans le bord de l'outre-espace. D'un autre côté, on peut montrer que ces simplexes sont composés d'actions géométriques. Puisque d'après le théorème II.3.2, il existe un unique fermé minimal invariant non vide dans \mathcal{M}_n dans ∂CV_n , l'intersection de ces simplexes avec \mathcal{M}_n est d'intérieur vide pour $n \geq 3$.

Ces techniques amènent à se poser la question suivante :

Question II.1.5. *Que peut-on dire des propriétés de connexité locale et globale de ∂CV_n ?*

Les systèmes d'aiguillages ne permettent pas d'atteindre tout point du bord de l'outre-espace, mais permettent de pousser un chemin de l'intérieur vers bord. Au contraire, le semi-flot permet d'atteindre tout point du bord, mais ne permet pas facilement de pousser un chemin vers le bord. Notons que d'après [BF00], $\text{Out}(F_n)$ lui-même (et CV_n) est $(2n - 5)$ -connexe à l'infini.

II.1.3 Espaces de déformation non-ascendants

Définition II.1.6. *Une boucle strictement ascendante d'un graphe de groupes T/G est une arête e ayant ses deux extrémités égales à un même sommet v , et telle que $i_e(G_e) = G_v$ mais $i_{\bar{e}}(G_e) \neq G_v$.*

Un espace de déformation irréductible \mathcal{D} est non-ascendant s'il n'existe aucun arbre $T \in \mathcal{D}$ tel que T/G ait une boucle strictement ascendante.

Comme nous allons le voir, les espaces de déformation non-ascendants sont plus sympathiques que les autres. La définition portant sur tous les arbres de \mathcal{D} , ce n'est pas une condition qu'il est a priori facile de vérifier. On a néanmoins des conditions suffisantes : si aucun groupe de \mathcal{A} n'est conjugué à un sous-groupe strict de lui-même, ou si \mathcal{D} contient un arbre k -acylindrique, alors \mathcal{D} est non-ascendant.

Théorème II.1.7. *Soit \mathcal{D} un espace de déformation non-ascendant.*

Alors \mathcal{D} possède une rétraction par déformation naturelle vers un sous-complexe de dimension finie \mathcal{G} .

De plus, l'ensemble des arbres réduits de \mathcal{D} est connexe par glissement.

La deuxième partie du théorème ci-dessus est due à Forester pour les groupes de Baumslag-Solitar généralisés [For06].

Expliquons la notion de *glissement*. Soit $T \in \mathcal{D}$, et $e_1 = [a, b], e_2 = [b, c]$ deux arêtes non orientées qui ne sont pas dans la même orbite et telles que $G_{e_1} \subset G_{e_2}$. Soit T' l'arbre ayant le même ensemble de sommets que T , et dont les arêtes sont obtenues à partir de celles de T en remplaçant chaque arête $g.e_1 = [ga, gb]$ par une arête joignant $[ga, gc]$. Cette définition ne dépend pas du choix de g puisque $G_{e_1} \subset G_{e_2}$, et définit un nouvel arbre $T' \in \mathcal{D}$. On dit que T' est obtenu en faisant *glisser* e_1 sur e_2 .

L'énoncé de connexité par glissement découle de la connexité de \mathcal{D} , et du fait que deux arbres réduits compatibles sont connectés par un glissement si \mathcal{D} est non-ascendant. Puisqu'un glissement préserve évidemment le nombre d'orbites de sommets et d'arêtes, ainsi que les classes de conjugaisons des stabilisateurs de sommets et d'arêtes, ces données ne dépendent pas de l'arbre réduit choisi dans \mathcal{D} . C'est bien plus précis que ce que l'on peut dire dans le cas général (voir section II.1.1).

On définit ensuite \mathcal{G} comme le sous-ensemble de \mathcal{D} formé des arbres T tels que pour chaque arête e de T , il existe un écrasement réduit de T dans lequel e n'est pas écrasée. La dimension finie de \mathcal{G} vient du fait que tout $T \in \mathcal{G}$ est réduit au sens de Bestvina-Feighn et de l'accessibilité de la Proposition II.1.2.

En appliquant la théorie de Smith, on obtient :

Corollaire II.1.8. *Si \mathcal{D} est un espace de déformation non-ascendant $\text{Out}(G)$ -invariant, et si $F \subset \text{Out}(G)$ est un sous-groupe fini résoluble, alors l'ensemble des points fixes de F dans \mathcal{D} est non-vide et contractile.*

II.2 Automorphismes des produits libres

On met ici en application les idées de la section précédente pour étudier les propriétés de finitude cohomologique du groupe des automorphismes d'un produit libre [9]. L'étude de la présentation finie de ces groupes remonte à Foux-Rabinovitch [FR40, FR41] et l'étude des propriétés cohomologiques de $\text{Out}(G)$ grâce à son action sur l'outre-espace est due à Culler-Vogtmann [CV86]. Le cas des automorphismes symétriques a été traité dans [MM96].

Étant donné un groupe G de type fini, on définit son espace de déformation de Grushko comme son espace de déformation JSJ sur les groupes triviaux. En d'autres termes, c'est l'espace de déformation dont les groupes de sommet sont les facteurs libres librement indécomposables de G (bien sûr, \mathbb{Z} ne doit pas être considéré comme librement indécomposable puisqu'il admet une décomposition HNN au dessus du groupe trivial $\mathbb{Z} = \{1\} *_{\{1\}}$). En étudiant l'action de $\text{Out}(G)$ sur cet espace contractile, on obtient :

Théorème II.2.1. *Soit $G = G_1 * \dots * G_n * \mathbb{F}_r$ une décomposition de Grushko de G , et supposons que $\text{Out}(G)$ soit virtuellement sans torsion.*

Supposons que G_i et $\text{Aut}(G_i)$ sont de dimension cohomologique virtuelle finie (resp. ont un sous-groupe d'indice fini ayant un classifiant fini). Alors c'est aussi le cas pour $\text{Out}(G)$.

Lorsque G est sans torsion, on se ramène ainsi à l'étude d'automorphismes de groupes à un bout. On obtient par exemple :

Théorème II.2.2. *Soit G un groupe hyperbolique.*

Si G est sans torsion, alors $\text{Out}(G)$ a un sous-groupe d'indice fini ayant un espace classifiant fini.

Si G est virtuellement sans torsion, $\text{Out}(G)$ est de dimension cohomologique virtuelle finie.

En utilisant le théorème I.6.4, on peut généraliser cela ainsi :

Théorème II.2.3. *Si G est un groupe relativement hyperbolique toral, $\text{Out}(G)$ a un sous-groupe d'indice fini ayant un espace classifiant fini.*

II.3 Dynamique dans la frontière de l'outre-espace

Dans [2], on étudie la dynamique globale de l'action de $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ sur l'outre-espace compactifié \overline{CV}_n . En particulier, quel est le domaine de discontinuité de cette action ? Quels sont les fermés invariants minimaux ?

Examinons d'abord la situation pour la question analogue concernant l'action du groupe modulaire $\text{Mod}(\Sigma)$ d'une surface compacte Σ sur la compactification de Thurston $\overline{\mathcal{T}}_\Sigma = \mathcal{T}_\Sigma \cup \partial\mathcal{T}_\Sigma$ de l'espace de Teichmüller. Rappelons que $\partial\mathcal{T}_\Sigma$ est l'espace projectifié des feuilletages mesurés sur Σ (modulo isotopie et mouvements de Whitehead), ou de manière équivalente, l'espace projectifié des actions de $\pi_1(\Sigma)$ sur des arbres réels à petits stabilisateurs d'arcs. L'action de $\text{Mod}(\Sigma)$ sur \mathcal{T}_Σ est proprement discontinue, et lorsque Σ est orientable, $\partial\mathcal{T}_\Sigma$ est l'unique sous-ensemble fermé non-vide invariant minimal de $\overline{\mathcal{T}}_\Sigma$ [FLP79]. Par contre, lorsque Σ n'est pas orientable, $\partial\mathcal{T}_\Sigma$ contient un fermé invariant propre F de mesure nulle qui est l'ensemble des feuilletages mesurés contenant une feuille fermée régulière à un seul côté [DN90]. On voit facilement que l'action sur $\partial\mathcal{T}_\Sigma \setminus F$ n'est pas proprement discontinue car il existe des twists de Dehn d'ordre infini ayant un point fixe dans $\partial\mathcal{T}_\Sigma \setminus F$. Par contre, on ne sait pas si F est minimal ou pas :

Question II.3.1. *L'action du groupe modulaire sur l'ensemble des feuilletages mesurés sans feuille régulière à un seul côté est-elle minimale ?*

Dans l'outre-espace, l'action de $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ est proprement discontinue sur l'outre espace CV_n . Mais il existe un plus gros ouvert invariant $\mathcal{O}_n \supset CV_n$ sur lequel l'action est proprement discontinue. Il s'agit de l'espace des actions martiennes que j'ai introduit dans [2] : une action est *martienne* si tout groupe de sommet non trivial du graphe de groupes quotient est cyclique et est un groupe de sommet terminal (voir figure II.1).

Au contraire, si $T \in \overline{CV}_n$ est une action simpliciale et non martienne, son stabilisateur dans $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ est infini. Lorsque $n \geq 3$, on démontre en fait que l'orbite sous l'action de $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ de n'importe quel point $T' \in \overline{CV}_n$ s'accumule sur T . On en déduit le théorème suivant :

Théorème II.3.2. *Soit $\mathcal{M}_n \subset \overline{CV}_n$ l'adhérence de l'ensemble des actions simpliciales non martiennes. Alors \mathcal{M}_n est l'unique fermé non vide invariant minimal de \overline{CV}_n .*

Conjecture II.3.3. *\mathcal{M}_n est exactement le complémentaire dans \overline{CV}_n de l'ensemble \mathcal{O}_n des actions martiennes.*

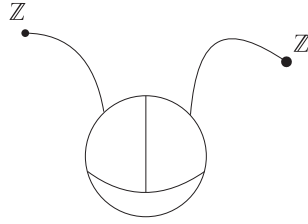


FIGURE II.1 – Un exemple d’action martienne

On a une inclusion évidente, et, en utilisant une décomposition en graphe d’actions, il n’est pas difficile de voir que la conjecture est équivalente au fait que pour toute action $T \in \overline{CV}_n$ dont les orbites sont denses appartient à \mathcal{M}_n (il s’agit ici des orbites de $\mathbb{F}_n \curvearrowright T$). A l’appui de cette conjecture, on a le résultat suivant :

Théorème II.3.4. *Soit $T \in \overline{CV}_n$ une action dont les orbites sont denses. Supposons que la mesure de Lebesgue de T soit une somme d’au plus $n - 1$ mesures ergodiques sur T . Alors $T \in \mathcal{M}_n$.*

Il faut noter que la mesure de Lebesgue est toujours somme d’au plus $3n - 4$ mesures ergodiques pour des raisons de dimension de ∂CV_n ([GL95]).

La preuve du théorème II.3.2 est la suivante. Si T est simplicial et si tous ses stabilisateurs d’arêtes sont non triviaux, on peut effectuer des twists de Dehn multiples sur T . Si $T' \in \overline{CV}_n$ est tel que les groupes d’arêtes de T sont hyperboliques dans T' , alors l’orbite de T' sous l’action de ces twists de Dehn converge vers T ([CL95]). Le bassin d’attraction de T pour l’action de ces twists de Dehn contient donc l’ensemble des T' dans lesquels les groupes d’arête de T sont hyperboliques. Si T' est hors de ce bassin d’attraction, mais si on a sur T une condition technique (les groupes d’arêtes de T sont engendrés par des conjugués mots positifs dans une certaine base), alors on peut envoyer T' dans ce bassin d’attraction par un élément de $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$. Pour démontrer le théorème, il suffit alors de montrer que tout T simplicial non martien dans \overline{CV}_n est une limite d’arbres T' dont tous les groupes d’arêtes sont non triviaux, et satisfaisant à la condition technique. Ceci se fait en utilisant une combinaison de techniques de pliages (lorsque les groupes d’arêtes sont triviaux) et de twists de Dehn (pour les groupes d’arêtes non triviaux).

II.4 Cœur convexe et nombres d’intersection

Étant données deux classes d’homotopie de courbes sur une surface, on peut définir leur nombre d’intersection géométrique comme le nombre minimal de points d’intersection de deux courbes dans ces classes d’homotopie. Dans [Sco98], Scott a défini un *nombre d’intersection* pour des ensembles presque invariants qui généralise cette notion à une paire d’ensembles presque invariants d’un groupe de type fini G , et en particulier, à une paire de scindements de G . De même que le nombre d’intersection de deux courbes mesure une obstruction à pouvoir disjointre les deux courbes, le nombre d’intersection de deux scindements mesure une obstruction à la compatibilité des deux scindements : $i(T_1, T_2) = 0$ si et seulement si T_1 et T_2 ont un raffinement commun (il faut en fait une petite hypothèse supplémentaire pour que cette équivalence soit vraie, satisfaite par exemple dès que l’un des deux arbres soit irréductible, ou lorsque que les stabilisateurs d’arêtes des deux arbres sont de type fini).

On peut voir le nombre d’intersection de Scott et Swarup comme un covolume d’un certain cœur convexe dans le produit de deux arbres, muni de l’action diagonale. La

convexité dont il s'agit ici n'est pas la convexité $CAT(0)$, (qui donnerait un ensemble beaucoup trop gros) mais une convexité par fibres : on dit que $\mathcal{C} \subset T_1 \times T_2$ est à fibres convexes si pour tout $i \in \{1, 2\}$, $x \in T_i$, $p_i^{-1}(\{x\}) \cap \mathcal{C}$ est convexe.

Théorème II.4.1 ([8]). *Soit $G \curvearrowright T_1$, $G \curvearrowright T_2$ deux minimales actions de G irréductibles sur des arbres réels. Supposons que T_1 et T_2 ne sont pas des raffinements d'un même arbre simplicial.*

Alors, $T_1 \times T_2$ contient un unique plus petit sous-ensemble non vide fermé invariant \mathcal{C} qui est connexe et à fibres convexes.

De plus, \mathcal{C} est $CAT(0)$ pour la distance de longueur induite, et $T_1 \times T_2$ se rétracte par déformation forte de manière équivariante sur \mathcal{C} .

On appelle \mathcal{C} le cœur de $T_1 \times T_2$.

Ce cœur est très lié à la compatibilité des deux actions T_1, T_2 :

Proposition II.4.2. *T_1 et T_2 sont compatibles si et seulement si le cœur de $T_1 \times T_2$ est de dimension 1.*

La compatibilité pour les actions sur les arbres réels se définit comme l'existence d'un arbre T et d'applications équivariantes préservant l'alignement $T \rightarrow T_i$. Cette notion est la généralisation naturelle du fait d'avoir un raffinement commun pour deux scindements d'un groupe. Lorsque T_1 et T_2 sont irréductibles, on peut caractériser la compatibilité par le fait que la somme des fonctions longueurs $l_{T_1} + l_{T_2}$ est elle-même une fonction longueur [19]. Le fait que \mathcal{C} est de dimension 1 signifie que \mathcal{C} ne contient pas de rectangle $I_1 \times I_2$ non dégénéré. Dans ce cas \mathcal{C} est un arbre qui est très naturellement un raffinement commun de T_1 et T_2 .

Définition II.4.3. *On définit le nombre d'intersection $i(T_1, T_2)$ de T_1 et T_2 comme le covolume de \mathcal{C} .*

Le covolume dont il s'agit ici est défini à partir du produit des mesures de Lebesgue de T_1 et T_2 . Ce covolume a surtout un sens lorsque l'action de G sur $T_1 \times T_2$ est discrète. Lorsque T_1 et T_2 sont des arbres simpliciaux avec des arêtes de longueur 1, il s'agit donc de compter le nombre d'orbites de carrés contenus dans \mathcal{C} . Dans ce cas, on montre que ce nombre d'intersection coïncide avec celui de Scott. Notons que la symétrie $i(T_1, T_2) = i(T_2, T_1)$ de ce nombre d'intersection est évidente par construction, alors que la symétrie du nombre d'intersection de Scott est un résultat non trivial.

Cette construction du cœur et du nombre d'intersection généralise et unifie plusieurs notions :

Le nombre d'intersection des courbes et le nombre d'intersection de Scott. La définition du nombre d'intersection donnée ci-dessus en terme de covolume coïncide avec le nombre d'intersection géométrique de deux courbes fermées simples sur une surface et avec le nombre d'intersection de Scott.

Nombre d'intersection de feuilletages mesurés. Étant donnés deux feuilletages mesurés transverses $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ sur une surface Σ , il y a un nombre d'intersection bien défini $i(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ qui est le volume de la métrique euclidienne singulière sur Σ définie par les mesures transverses de \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 (voir par exemple [Bon86]). Le nombre d'intersection des actions de $\pi_1(\Sigma)$ sur les arbres réels duaux à \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 coïncide avec $i(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$.

Le cœur de Culler-Levitt-Shalen. Étant donnés deux arbres T_1, T_2 duaux à des feuilletages mesurés transverses sur une surface Σ , $\mathcal{C}(T_1 \times T_2)$ est une surface qui est naturellement isomorphe au revêtement universel de Σ , muni de sa métrique euclidienne singulière. Dans ce cas, Culler-Levitt-Shalen ont caractérisé cette surface comme le plus petit sous-ensemble invariant simplement connexe de $T_1 \times T_2$ ([CLS]).

Le scindement JSJ de Fujiwara-Papasoglu. Dans leur construction du scindement JSJ, Fujiwara et Papasoglu produisent une surface dans le produit de deux arbres simpliciaux [FP06]. On montre que cette surface coïncide avec le cœur. Dans un contexte plus général, leur construction n'est pas symétrique en T_1 et T_2 et produit un cœur *asymétrique*. On montre en fait que le covolume de ce cœur asymétrique est égal au nombre d'intersection fort (asymétrique) de Scott et Swarup.

On peut utiliser le cœur comme un moyen d'estimer ce nombre d'intersection de la façon suivante. Considérons un arbre T dual à une courbe dans une surface, ou plus généralement à un track dans un 2-complexe (au sens de Dunwoody), ou encore plus généralement, à un feuilletage mesuré sur un 2-complexe (une surface par exemple). Dans cette situation, si on note X le revêtement universel de ce 2-complexe, on peut définir une application équivariante $f : X \rightarrow T$ dont les fibres sont connexes (ce sont des feuilles dans cas d'un feuilletage mesuré¹). Si T_1 et T_2 peuvent être obtenus à partir d'un même espace X de cette façon, c'est-à-dire s'il existe $f_i : X \rightarrow T_i$ à fibres connexes, alors l'image de l'application produit $F = (f_1, f_2) : X \rightarrow T_1 \times T_2$ est connexe et à fibres connexes, et contient donc le cœur dans son adhérence. Par exemple, si l'action de G sur X est cocompacte, il est raisonnable de penser que le cœur est cocompact. Cette idée est à la base des résultats suivants.

Le premier résultat montre que le nombre d'intersection a une interprétation géométrique en tant que nombre de composantes connexes d'intersection de sous-complexes de codimension 1 :

Théorème II.4.4. *Soit $Y_1, Y_2 \subset X$ deux sous-complexes à deux cotés qui s'intersectent transversalement. Soient T_1, T_2 les arbres de Bass-Serre du scindement de $\pi_1(X)$ associés. Alors $i(T_1, T_2) \leq \#\pi_0(Y_1 \cap Y_2)$.*

De plus, pour toute paire d'arbres simpliciaux T_1, T_2 , il existe X, Y_1 , et Y_2 comme au-dessus tel qu'on ait égalité.

Le théorème suivant montre comment retrouver la finitude du nombre d'intersection pour des scindements au dessus de groupes de type fini [Sco98].

Théorème II.4.5. *Si T_1 et T_2 sont géométriques (i. e. duaux à des feuilletages mesurés sur des 2-complexes compacts), alors \mathcal{C} est contenu dans l'adhérence de l'orbite d'une union finie de rectangles $I_1 \times I_2$.*

Si de plus G est finiment présenté, alors $i(T_1, T_2)$ est fini.

Étant donné un automorphisme α du groupe libre $G = \mathbb{F}_n$, on peut lui associer deux arbres dits *stables* et *instables* T_+, T_- dans la frontière de l'outre-espace. De plus l'action de G sur $T_1 \times T_2$ est discrète [LL08]. L'invariance de T_+ et T_- sous l'action de α se traduit par l'existence d'homothéties h_+, h_- de rapports $\lambda_+ \geq 1$ et $\lambda_- \leq 1$, et α -équivariantes (i. e. $h(gx) = \alpha(g)h(x)$). Par définition, le cœur de $T_1 \times T_2$ est alors invariant par l'application $H = (h_+, h_-)$. On pense à \mathcal{C}/G comme à un espace dont le groupe fondamental est \mathbb{F}_n (au sens des complexes de groupes, puisque l'action n'est pas forcément libre) et muni de deux feuilletages mesurés correspondant à T_1 et T_2 . L'action de H donne donc un homéomorphisme de \mathcal{C}/G qui dilate l'un des feuilletages mesurés et contracte l'autre.

Lorsque T_+ et T_- sont géométriques, l'application de l'idée ci-dessus permet de contrôler la topologie de \mathcal{C}/G :

Théorème II.4.6. *Avec les notations ci-dessus, supposons $\lambda_+ > 1$ et que T_+ et T_- soient géométriques. Alors \mathcal{C}/G est une surface pincée.*

1. Pour que cette assertion soit vraie, il faut une hypothèse supplémentaire, souvent vérifiée dans la pratique : que l'espace des feuilles de X soit séparé.

Si de plus α est complètement irréductible, alors, α est conjugué à un homéomorphisme pseudo-Anosov sur une surface à bord.

Dans cet énoncé, une surface pincée est une surface compacte dans laquelle on a identifié un nombre fini de points entre eux. De manière équivalente, c'est un complexe simplicial fini tel que le link en tout point est soit un cercle, soit une union disjointe de cercles.

Même lorsque les hypothèses du théorème II.4.1 ne sont pas satisfaites, on peut définir \mathcal{C} par une construction générale. Lorsque T_1 et T_2 ne sont pas irréductibles (si ce sont des HNN ascendantes par exemple), il se peut que le cœur soit vide, pathologie à l'origine d'une erreur dans [SS03] (voir [SS04] pour sa correction). Cette pathologie peut-être étudiée en détail :

Proposition II.4.7. *Le cœur de $T_1 \times T_2$ est vide si et seulement si :*

- T_1 et T_2 ont des fonctions longueurs homothétiques
- et
 - T_1 et T_2 sont tous les deux des droites (avec une action diédrale ou par translations)
 - ou il existe des bouts $\omega_1 \in \partial_\infty T_1$, $\omega_2 \in \partial_\infty T_2$, fixés par G , tel que h translate vers ω_1 dans T_1 ssi h^{-1} translate vers ω_2 dans T_2

Cette seconde situation est liée à l'invariant de Bieri-Neumann-Strebel, et ne peut arriver lorsque les deux arbres réels sont géométriques, c'est-à-dire, dans le cadre d'actions simpliciales, pour deux extensions HNN ascendantes au-dessus de groupes de type fini [Lev94b].

II.5 Questions et perspectives

On peut penser à compactifier l'outre-espace CV_n par les nombres d'intersection plutôt que par les fonction longueurs : l'application $CV_n \rightarrow \mathbb{R}^{CV_n}$ définie par $T \mapsto i(T, \cdot)$ est injective, et son adhérence est probablement projectivement compacte, ce qui donnerait ainsi une autre compactification de CV_n . La fonction nombre d'intersection $i(\cdot, \cdot)$ n'étant pas continue sur \overline{CV}_n , cette compactification est nécessairement différente de la compactification de Culler-Vogtmann.

Problème II.5.1. *Étudier la compactification de CV_n par les nombres d'intersection.*

Démontrer que $\text{Out}(F_n)$ vérifie la conjecture de Novikov.

Grâce à [Hig00], une compactification assez jolie de l'épine de l'outre-espace pourrait impliquer la conjecture de Novikov pour $\text{Out}(F_n)$.

Une des questions majeures concernant le groupe $\text{Out}(F_n)$ est de lui trouver une bonne géométrie. Une source d'inspiration est le complexe des courbes d'une surface dont Masur et Minsky ont démontré l'hyperbolicité [MM99]. Il y a plusieurs candidats à jouer ce rôle. Un premier candidat est le complexe des scindements libres (c'est-à-dire les actions de F_n sur des arbres à stabilisateurs d'arêtes triviaux). Un second est l'espace des classes de conjugaison de facteurs libres de F_n ; un ensemble de facteurs libres est dans un simplexe s'il existe un scindement libre dont ce sont les groupes de sommets.

Comme corollaire de l'interprétation topologique du nombre d'intersection, on a l'inégalité exponentielle suivante entre distance et nombre d'intersection dans le complexe des scindements libre de F_n . Elle généralise une inégalité analogue dans le complexe des courbes.

Proposition II.5.2. *Soient T, T' deux scindements libres de F_n . Alors $d(T, T') \leq 2^{i(T, T')}$.*

On démontre cette inégalité en voyant T et T' comme duaux à des laminations combinatoires sur \mathcal{C}/\mathbb{F}_n , et en faisant une opération de chirurgie sur un laminations combinatoires qui divise par 2 le nombre d'intersection.

On peut aussi, grâce au cœur, démontrer une forme faible d'acylindricité pour l'action sur le complexe des scindements libres :

Proposition II.5.3. *Soient T_1, T_2 deux décompositions en produit libre de \mathbb{F}_n , de sorte que les facteurs libres correspondant soient à distance au moins 2 dans le complexe des facteurs libres. Alors le stabilisateur dans $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ du couple (T_1, T_2) est fini.*

En effet, sous ces hypothèses, l'action de \mathbb{F}_n sur $T_1 \times T_2$ est libre, et tout automorphisme préservant T_1 et T_2 se réalise comme un homéomorphisme cellulaire du complexe fini $\mathcal{C}(T_1 \times T_2)/\mathbb{F}_n$.

Ces outils semblent être très prometteurs pour une étude du complexe des scindement libre comparable à celle du complexe des courbes par Bowditch [Bow06].

Chapitre III

Arbres réels

Les actions de groupes sur des arbres réels apparaissent naturellement en théorie géométrique des groupes comme limites d'actions sur des espaces hyperboliques. La structure des points de coupures d'un compact de Peano fait elle aussi apparaître des arbres réels. Les cônes asymptotiques de groupes relativement hyperboliques sont des espaces *gradués en arbres* dont la structure transverse est proche de celle d'un arbre réel. C'est ainsi que les arbres réels apparaissent lors de l'étude d'endomorphismes de groupes hyperboliques, ou du groupe libre en particulier. Ils sont aussi à la base de la théorie de Sela pour les groupes limites, et de sa solution du problème de Tarski. Les \mathbb{R}^n -arbres —sortes d'arbres réels non standards— et les feuilletages mesurés qui apparaissent dans l'analyse asymptotique des prélamination utilisées dans la résolution d'équations dans les groupes hyperboliques sont encore d'autres avatars des arbres réels dont l'étude est importante.

On a donc besoin de comprendre les actions de groupes sur les arbres réels. Le principal résultat permettant cette compréhension est le théorème de Rips : si un groupe de type fini G agit *librement* sur un arbre réel, alors G est un produit libre de groupes abéliens libres, et de groupes de surfaces ([BF95, GLP94]). Une autre version du théorème de Rips s'applique pour un groupe de présentation finie lorsqu'on affaiblit l'hypothèse de liberté en une hypothèse qui ne porte que sur les fixateurs d'arcs de l'action : on suppose que les stabilisateurs d'arcs vérifient la condition de la chaîne ascendante, hypothèse dite de *stabilité* (voir [BF95] pour une hypothèse légèrement plus faible). Le théorème de scindement de Rips dit que si T n'est pas une droite, G se scinde sur une extension d'un groupe cyclique par un stabilisateur d'arc de T ([BF95, Pau97a]).

III.1 Approximation des actions sur des arbres réels

Dans [Sha91, 2.5.2], Shalen demande si l'ensemble des petites actions d'un groupe de type fini G sur des arbres simpliciaux est dense dans l'ensemble de ses petites actions sur des arbres réels. Petit pour un groupe signifie ici ne pas contenir de groupe libre non-abélien, et une action sur un arbre réel est *petite* si les stabilisateurs des arcs sont petits. On note $\mathcal{S}(G)$ l'ensemble des petites actions minimales de G sur des arbres réels modulo isométrie équivariante, et $\mathbb{P}\mathcal{S}(G)$ son projectifié. L'ensemble $\mathbb{P}\mathcal{S}(G)$ est compact lorsqu'on le munit de la topologie de Gromov équivariante, ou de manière équivalente, de la topologie des longueurs de translations (ceci suppose que G n'est pas petit [CM87, Pau89]).

On peut répondre par l'affirmative à la question de Shalen lorsque G est de présentation finie, sous une hypothèse de stabilité :

Théorème III.1.1 ([1]). *Soit G de présentation finie agissant par isométries sur un arbre réel T . Supposons que les fixateurs d'arcs satisfont à la propriété de la chaîne ascendante.*

Alors il existe une suite d'actions de G sur des arbres simpliciaux T_k , convergeant vers T pour la topologie de Gromov équivariante. De plus, les fixateurs d'arêtes de T_k sont des extensions de groupes abéliens libres de type fini par des fixateurs d'arcs de T .

L'hypothèse de stabilité est automatiquement satisfaite pour une petite action si les groupes petits de G sont de type fini. C'est le cas par exemple lorsque G est un groupe hyperbolique relatif à des groupes virtuellement polycycliques.

Corollaire III.1.2 ([1]). *Soit G un groupe de présentation finie dont les sous-groupes petits sont de type fini.*

Alors, l'ensemble des petites actions simpliciales de G est dense dans $\mathbb{P}\mathcal{S}(G)$.

Ce théorème implique le théorème de scindement de Rips, et utilise les méthodes de [GLP94, Pau97a], ainsi que des idées de [BFb].

La preuve consiste d'abord à écrire l'action de G sur T comme une limite directe (limite forte plus précisément) d'actions $G \curvearrowright T_{\text{geom}}$ géométriques, c'est-à-dire duales à un 2-complexe feuilleté compact ([LP97]).

La théorie de Rips permet ensuite de décomposer ce 2-complexe feuilleté en composantes minimales (toutes les feuilles sont denses) et composantes à feuilles compactes. Cette décomposition du 2-complexe, se traduit au niveau de T_{geom} en une décomposition en *graphe d'actions*. Cela signifie que l'arbre réel T est obtenu à partir de morceaux élémentaires recollés de manière équivariante le long de points, la combinatoire du recollement étant donnée par un arbre simplicial (voir [Lev94a],[6]). Plus précisément :

Définition III.1.3. *Un graphe d'actions est la donnée d'un G -arbre simplicial S , pour chaque sommet $v \in S$, d'un arbre réel Y_v , et pour chaque arête orientée e de sommet terminal v , d'un point d'attache $p_e \in Y_v$. Ces données sont supposées G -invariantes : G agit sur l'union disjointe des Y_v , de sorte que g envoie Y_v isométriquement sur Y_{gv} , et $p_{g.e} = g.p_e$.*

L'arbre dual à ce graphe d'actions est l'arbre réel obtenu à partir de $\sqcup_v Y_v$ en identifiant les deux points d'attache de chaque arête e de S .

Ici, les actions de sommet $G_v \curvearrowright Y_v$ correspondant aux composantes à feuilles compactes sont des arcs simpliciaux, muni d'une action triviale de G_v . Les actions de sommet correspondant aux composantes minimales sont *indécomposables* au sens suivant :

Définition III.1.4. *Un sous-arbre Y de T est indécomposable si pour tous arcs $I, J \subset Y$, il existe $g_1, \dots, g_n \in G$ tels que les $g_i.I$ recouvrent J et tels que $g_i.I \cap g_{i+1}.I$ soit non réduit à un point.*

La terminologie, introduite dans [12], vient du fait qu'une action indécomposable ne peut pas se décomposer en graphe d'actions de manière non triviale.

L'hypothèse de stabilité sur T n'implique pas la stabilité de T_{geom} . Elle permet par contre d'affirmer que pour tout Y_v dual à une composante minimale, tout élément de G_v fixant un arc dans Y_v fixe point par point l'image de Y_v dans T . En notant $N_v \triangleleft G_v$ le sous-groupe engendré par les stabilisateurs d'arcs de $G_v \curvearrowright Y_v$, on se ramène à étudier l'action $G_v/N_v \curvearrowright Y_v/N_v$, qui est géométrique et à stabilisateurs d'arcs triviaux.

On distingue trois types de composantes minimales :

- *Composante homogène* (aussi appelée axiale, ou torale) : le pseudo-groupe d'holonomie associé a les mêmes orbites qu'un groupe d'isométries de \mathbb{R} . Dans ce cas, on montre que Y_v/N_v est une droite, et que G_v/N_v est un groupe d'isométries de type fini de \mathbb{R} agissant avec orbites denses.

- *surface* (ou échange d’intervalles). Dans ce cas, G_v/N_v est le groupe fondamental d’un orbifold Σ_v de dimension 2 à bord, dont les singularités sont des points coniques (il n’y a pas de miroir), et Y_v/N_v est dual à un feuilletage mesuré arationnel sur Σ_v .
- *exotique* (ou Levitt, ou *thin*). Dans ce cas, on a un processus d’élagage infini sur la composante minimale.

Dans le premier cas, il est facile d’approximer l’action $G_v/N_v \curvearrowright Y_v/N_v$ par une action de G_v/N_v à valeurs dans $\text{Isom}(\mathbb{Q})$. On obtient ainsi une action discrète sur une droite dont le noyau est abélien libre de type fini. Dans le second cas, en approximant le feuilletage mesuré de Σ_v par un feuilletage à feuilles compactes, on obtient une action de G_v/N_v sur un arbre simplicial à stabilisateurs d’arêtes cycliques. Dans le cas d’une composante minimale exotique, on modifie légèrement le complexe feuilleté obtenu après un grand nombre d’opérations d’élagages. Le nombre de bouts des feuilles singulières diminue strictement dans cette opération (ce nombre est fini d’après [Gab96]), ce qui permet, en un nombre fini d’étapes de obtenir une action sur un arbre simplicial à stabilisateurs d’arcs triviaux. On montre que si les modifications du 2-complexe feuilleté effectuées ci-dessus sont assez petites, l’action $G_v/N_v \curvearrowright Y_v/N_v$ n’est pas trop perturbée. Le théorème en découle.

Remarque. On peut se demander pour quelle raison les orbifolds à miroir n’apparaissent pas dans l’énoncé. Cela vient du fait que pour tout feuilletage mesuré sur un orbifold à miroir, l’arbre réel dual admet une décomposition non triviale en graphe d’actions (il n’est en particulier pas indécomposable). En effet, soit \mathcal{F} un feuilletage mesuré sur un orbifold Σ . Si \mathcal{F} possédait une feuille régulière transverse à un miroir, alors cette feuille et toutes les feuilles voisines seraient compactes. Par conséquent, on peut supposer que chaque composante connexe de la réunion M des miroirs de Σ est contenue dans une feuille de \mathcal{F} . Soit V_M un voisinage régulier de M . On peut alors voir le feuilletage initial comme un feuilletage défini sur le complémentaire de V_M , et l’arbre dual à \mathcal{F} se décompose en un graphe d’actions dont le graphe de groupes sous-jacent est le scindement correspondant à la courbe de bord de V_M . Cette décomposition d’un orbifold à miroir est la même que celle qui apparaît dans son scindement \mathcal{Z} -JSJ (voir remarque IV.3.4).

Lorsqu’on enlève l’hypothèse de stabilité, la question suivante est toujours ouverte :

Question III.1.5 ([Sha87, Question A]). *Un groupe de type fini ayant une action non triviale sur un arbre réel a-t-il une action non-triviale sur un arbre simplicial ?*

En d’autres termes, est-ce que $F\mathbb{R} = FA$?

Lorsque G est de présentation finie, la preuve du théorème précédent montre qu’on peut supposer que $G \curvearrowright T$ est dual à une composante minimale. Lorsque cette composante est homogène, on a un morphisme de $G \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{R})$ qui permet de voir que G n’a pas FA. Lorsque cette composante est de type surface ou exotique, il existe un quotient de G qui est le quotient du groupe fondamental d’un système d’isométries à générateurs indépendants par un nombre fini de lacets contenus dans des feuilles. On voit facilement qu’un tel quotient de G (et donc G) n’a pas FA dans le cas exotique ou lorsque la surface n’est pas une sphère trouée ou un plan projectif troué. Ce dernier cas reste ouvert.

III.2 Borner la complexité

Dans un certain nombre de situations, il est utile d’avoir une borne sur la *complexité* d’une action $G \curvearrowright T$, c’est-à-dire sur le nombre d’orbites de points de branchements et de directions. Si l’action n’est pas à orbites denses, la finitude du nombre d’orbites de points

de branchement implique que T se décompose en un graphe d'actions dont les actions de sommets sont soit simpliciales, soit à orbites denses [Lev94a]. La finitude de la complexité d'une action d'un groupe hyperbolique à stabilisateurs d'arcs finis est utilisée dans [LL00] pour montrer que le nombre de classes d'isogrédience d'un automorphisme d'un groupe hyperbolique est infini.

Définissons la complexité d'une action $G \curvearrowright T$ sur un arbre réel comme le nombre d'orbites de directions issues de points de branchement de T . Ici, on compte aussi comme point de branchement un point $x \in T$ duquel partent exactement deux directions, à condition que ces deux directions soient dans la même orbite. Dans un premier temps, il est facile d'observer que si T s'écrit comme un graphe d'actions dont les arbres de sommets ont une complexité finie, alors il en est de même pour T , et on calcule facilement un majorant de cette complexité. Comme corollaire de l'étude des petites actions d'un groupe hyperbolique à un bout sur des arbres réels [3], on obtient ainsi :

Corollaire III.2.1. *Toute action petite d'un groupe hyperbolique à un bout est de complexité finie.*

Plus généralement, toute action super-stable à stabilisateurs de tripodes triviaux d'un groupe de type fini librement indécomposable est de complexité finie. Il en est de même pour une action satisfaisant les hypothèses du Théorème III.3.1.

Il est cependant facile de construire des exemples d'actions petites de $\mathbb{F}_3 = \langle a, b, c \rangle$ ayant un nombre infini d'orbites de points de branchement : on peut en construire comme limites de graphes de groupes de la forme

$$\langle a, b \rangle *_{\langle b \rangle} \langle b \rangle *_{\langle b^2 \rangle} \langle b^2 \rangle *_{\langle b^4 \rangle} \cdots *_{\langle b^{2^n} \rangle} \langle b^{2^n} \rangle *_{\langle 1 \rangle} \langle c \rangle.$$

Cependant, ces graphes de groupes ne sont pas réduits au sens de Bestvina-Feighn. Pour ne prendre en compte que les sommets réduits au sens de Bestvina-Feighn, on introduit la notion suivante :

Définition III.2.2. *Un point de branchement $x \in T$ est non-réduit si x possède exactement deux orbites de directions, et si G_x fixe une de ces directions.*

La complexité réduite $C_r(T)$ est le nombre d'orbites de directions issues de points de branchements réduits.

Le théorème d'accessibilité de Bestvina-Feighn affirme en effet que pour tout groupe de présentation finie, il existe une borne uniforme $\gamma(G)$ à la complexité réduite de toutes les actions de G sur des arbres simpliciaux à petit stabilisateur d'arête [BF91a].

Le théorème suivant, qui généralise l'accessibilité de Bestvina-Feighn aux actions de groupes sur des arbres réels, est basé sur un manuscrit non publié de Bestvina-Feighn [BFa] :

Théorème III.2.3 ([BFa],[17]). *Soit G un groupe de présentation finie. Il existe une constante $\gamma_{\mathbb{R}}(G)$ telle que pour toute petite action $G \curvearrowright T$ vérifiant la propriété de la chaîne ascendante sur les stabilisateurs d'arcs, $C_r(T) \leq \gamma_{\mathbb{R}}(G)$.*

Pour démontrer ce théorème, on commence par montrer que la complexité d'une limite forte d'actions $G \curvearrowright T_k$ est au plus égale à la limite supérieure des complexités des $G \curvearrowright T_k$. Ceci permet de se ramener à des actions de G qui se décomposent en graphe d'actions $G_v \curvearrowright Y_v$, chacune étant soit une action sur un arbre simplicial, soit une action indécomposable, duale à un feuilletage mesuré minimal sur un 2-complexe (homogène, de type surface, ou

exotique). Il suffit donc de borner le nombre d'actions de sommet indécomposables de cette décomposition, ainsi que la complexité de chacune de ces actions $G_v \curvearrowright Y_v$.

Pour borner le nombre de composantes minimales, on modifie le graphe d'actions en remplaçant chacune des actions de sommets par une action simpliciale petite (en utilisant la version relative du théorème de Rips démontrée dans [1]). L'action simpliciale $G \curvearrowright T'$ ainsi obtenue a une complexité bornée par $\gamma(G)$, ce qui borne le nombre d'actions de sommet irréductibles.

La complexité d'une action de sommet duale à une composante homogène est bornée en termes de $H_1(G, \mathbb{Z}/2)$. Si une action de sommet $G_v \curvearrowright Y_v$ est duale à un feuilletage mesuré sur un 2-orbifold, on peut alors remplacer cette action de sommet par une action simpliciale, duale à une multicourbe sur l'orbifold, et de complexité au moins $C_r(Y_v)/3 - 6$. Cette complexité étant majorée en termes de $\gamma(G)$, ceci permet de majorer $C_r(Y_v)$. Un argument similaire s'applique pour les composantes exotiques, ce qui démontre le théorème.

Au vu de [GL95], on peut penser que le théorème III.2.3 ci-dessus permet d'attaquer le problème suivant :

Problème III.2.4. *Soit \mathcal{D} l'espace de déformation de Stallings d'un groupe de présentation finie à plusieurs bouts, en d'autres termes, son scindement JSJ sur les groupes finis. Montrer que la dimension topologique de la compactification de \mathcal{D} par les arbres réels est finie.*

III.3 Action des groupes de type fini

Le résultat précédent est insuffisant lorsqu'on considère des groupes dont on ne sait pas s'ils sont de présentation finie. Sous des hypothèses de stabilité plus fortes, et en supposant la trivialité des stabilisateurs de tripodes, Sela a démontré un théorème donnant une structure très précise d'une action d'un groupe de type fini *librement indécomposable* sur un arbre réel ([Sel97a]). Les applications incluent l'accessibilité acylindrique des groupes de type fini librement indécomposables ([Sel97a]), la propriété de Hopf des groupes hyperboliques sans torsion ([Sel99]), et l'étude des groupes limites ([Sel01, Sel02]).

Il se trouve que le résultat donné dans [Sel97a] est énoncé sous des hypothèses de stabilité trop faibles, et on peut y donner un contre-exemple (voir [12]).

Avant de donner un énoncé plus général, disons qu'un arc $I \subset T$ est *instable* s'il contient un sous-arc J tel que $\text{Fix } I \not\subseteq \text{Fix } J$. Le théorème de Sela nécessite la trivialité des fixateurs d'arcs instables et des fixateurs de tripodes. Ces hypothèses ne sont pas satisfaisantes dans un certain nombre de situations, en particulier en présence de torsion. Le résultat suivant généralise le théorème de Sela.

Théorème III.3.1 ([12]). *Soit G un groupe de type fini agissant sur un arbre réel. On fait les hypothèses suivantes :*

- les fixateurs d'arcs satisfont à la propriété de la chaîne ascendante,
- les fixateurs d'arcs instables sont de type fini,
- un fixateur d'arc instable n'est pas un conjugué d'un sous-groupe strict de lui-même.

Alors, soit G se scinde au-dessus d'un fixateur de tripode ou d'un fixateur d'arc instable, soit $G \curvearrowright T$ se décompose en graphe d'actions, chaque action de sommet étant une action simpliciale, une action à orbites denses sur une droite, ou une action duale à un feuilletage mesuré sur un 2-orbifold modulo un noyau.

Il faut remarquer que le théorème ne dit rien sur la structure de $G \curvearrowright T$ lorsque G se scinde sur un fixateur de tripode ou d'arc instable. Un exemple typique où le théorème ne dit rien est celui d'une action d'un groupe libre sur un arbre réel. Voir la section III.4

pour des informations dans cette direction.

Pour démontrer ce théorème, on écrit $G \curvearrowright T$ comme limite forte de $G_k \curvearrowright T_k$ comme dans la section III.1, et on démontre que sa structure se stabilise. Plus précisément, si chaque $G_k \curvearrowright T_k$ possède des arêtes simpliciales, alors on peut appliquer la version suivante du lemme de Scott [Sco73] disant qu'une limite directe de groupes se scindant librement possède une décomposition non triviale en produit libre.

Théorème III.3.2 ([12]). *Soit $G_k \curvearrowright S_k \rightarrow G_{k+1} \curvearrowright T_{k+1} \rightarrow \dots$ une suite d'actions de groupes de type fini sur des arbres simpliciaux, avec des épimorphismes $\varphi_k : G_k \twoheadrightarrow G_{k+1}$ et des applications φ_k -équivariantes $f_k : S_k \rightarrow S_{k+1}$ (envoyant arête sur chemin d'arêtes). Supposons que f_k n'augmente pas les fixateurs d'arêtes : $e' \subset f_k(e) \Rightarrow G_{e'} = \varphi_k(G_e)$.*

Alors $\lim_{\rightarrow} G_k$ se scinde au-dessus de l'image d'un groupe d'arête d'une action $G_k \curvearrowright T_k$.

Remarque III.3.3. Il faut penser à ce résultat comme un résultat de stabilisation des espaces de déformation \mathcal{D}_k de $G_k \curvearrowright T_k$: à partir d'un certain rang, on passe de \mathcal{D}_k à \mathcal{D}_{k+1} en tuant un sous-groupe normal engendré par des éléments elliptiques de \mathcal{D}_k .

Si au contraire, les actions $G_k \curvearrowright T_k$ sont à orbites denses à partir d'un certain rang, on montre que les 2-complexes feuilletés codant l'action $G_k \curvearrowright T_k$ se stabilisent. C'est une généralisation immédiate d'un résultat de [Lev93] qui montre la finitude des pseudo-groupes d'isométries non-homogènes d'un multi-intervalle contenant un pseudo-groupe d'isométries minimal donné [26].

III.4 Strates d'un arbre réel

Ni le théorème de structure de Sela pour les actions superstables sur des arbres réels, ni le théorème III.3.1, ne disent quoi que ce soit sur la structure de l'arbre lorsque le groupe se scinde en produit libre. Dans un travail en cours avec G. Levitt, on ne fait pas d'hypothèse de libre indécomposabilité, et on démontre que toute action $G \curvearrowright T$ d'un groupe de type fini sur un arbre réel à stabilisateur d'arcs triviaux peut s'obtenir en *combinant* des actions *indécomposables* (définition III.1.4).

Il y a deux façons de combiner des actions sur des arbres réels dans ce résultat. La première consiste à former un graphe d'actions comme en section III.1. La seconde est une version non simpliciale de la première : $Y \subsetneq T$ est une forêt G -invariante dont toutes les composantes connexes sont fermées et non réduites à un point. En écrasant en un point chacune des composantes de Y , on obtient un arbre réel topologique T/Y . On peut alors dire que T s'obtient comme extension de T/Y par Y . Lorsque T/Y est indécomposable, on démontre qu'il admet une métrique G -invariante. On démontre ainsi que tout arbre réel T s'obtient en un nombre fini d'étapes en appliquant ces deux constructions à partir d'arbres indécomposables.

Considérons un automorphisme α du groupe libre ayant un représentant ferroviaire qui possède deux strates exponentielles, et dont la strate inférieure a une valeur propre plus grande que la valeur propre de la strate supérieure. On peut alors construire un arbre α -invariant T , faisant apparaître une forêt $Y \subset T$ correspondant à la strate inférieure, et telle que T/Y est l'arbre α -invariant associé à la strate supérieure.

De manière générale, la décomposition de T ainsi définie est canonique, et est donc invariante par tout automorphisme préservant T . On peut donc l'utiliser afin d'étudier les stabilisateurs de points de l'outre-espace. C'est l'objet d'un travail en cours en collaboration avec G. Levitt et M. Lustig.

Chapitre IV

Équations dans les groupes, et groupes limites

IV.1 Groupes limites et groupes marqués

Fixons un groupe Γ . Une équation dans Γ et en un ensemble de variables X est un mot dans le produit libre $\Gamma[X] = \Gamma * \langle X \rangle$. Un uplet $\underline{\gamma} = (\gamma_x)_{x \in X}$ de valeurs dans Γ pour chacune des variables de X , définit un morphisme $\varphi_{\underline{\gamma}}$ de $\Gamma[X] \rightarrow \Gamma$, qui est l'identité sur Γ et on dit que l'équation $r \in \Gamma[X]$ est satisfaite par $\underline{\gamma}$ si $\varphi_{\underline{\gamma}}(r) = 1$.

Ainsi, si on se donne un système d'équations $\Sigma = \{r_1, \dots, r_n\}$ dans Γ , on peut définir le groupe $\Gamma_{\Sigma} = \Gamma[X] / \langle\langle r_1, \dots, r_n \rangle\rangle$ de sorte que l'ensemble des solutions de Σ s'identifie naturellement à $\text{Hom}_{\Gamma}(\Gamma_{\Sigma}, \Gamma)$, l'ensemble des morphismes de Γ_{Σ} dans Γ qui sont l'identité sur Γ .

Le diagramme de Makanin-Razborov (défini par Sela) d'un système d'équations dans un groupe libre Γ (ou plus généralement dans un groupe hyperbolique) est un diagramme qui permet de paramétrer l'ensemble des solutions d'un système d'équations Σ (voir [KM98a] pour une autre approche). La construction de ce diagramme passe par une compactification de l'ensemble des solutions, compactification que l'on peut réaliser dans l'espace des groupes marqués [7].

L'espace des groupes marqués \mathcal{G}_n est l'ensemble des groupes G munis d'une famille génératrice $S : \{1, \dots, n\} \rightarrow G$ (appelée marquage de G). On identifie deux groupes marqués $(G, S), (G', S')$ s'il existe un isomorphisme $\varphi : G \rightarrow G'$ envoyant S sur S' (i. e. $\varphi \circ S = S'$). De manière équivalente, \mathcal{G}_n s'identifie à l'ensemble des sous-groupes normaux du groupe libre \mathbb{F}_n de base $\{1, \dots, n\}$: à un sous-groupe normal $N \triangleleft \mathbb{F}_n$ on associe le groupe \mathbb{F}_n/N , le marquage étant donné par la restriction de l'application quotient à $\{1, \dots, n\} \subset \mathbb{F}_n$. Ainsi, on peut voir \mathcal{G}_n comme un sous-ensemble de l'ensemble $\{0, 1\}^{\mathbb{F}_n}$ des parties de \mathbb{F}_n . Muni de la topologie produit, $\{0, 1\}^{\mathbb{F}_n}$ munit \mathcal{G}_n d'une topologie d'espace compact.

Avec Christophe Champetier, nous avons proposé une définition des groupes limites dans le cadre des groupes marqués [7].

Définition IV.1.1. *Un groupe limite est un groupe marqué dans l'adhérence des marquages de groupes libres.*

Cette définition est équivalente à la définition de Sela, et permet de comprendre facilement certaines propriétés de finitude en terme de compacité de l'espace des groupes marqués ([7]).

IV.1.1 Actions sur des \mathbb{R}^n -arbres

Le premier théorème de structure des groupes limites affirme que ces groupes sont de présentation finie [KM98b, Sel01]. On peut démontrer ce théorème, ainsi que des propriétés de finitude plus fortes, à l'aide d'actions de groupes sur des \mathbb{R}^n -arbres ([6], voir Th. IV.1.4 ci-dessous pour un énoncé détaillé). Commençons par introduire ces objets.

Comme \mathbb{R} , le groupe additif \mathbb{R}^n muni de l'ordre lexicographique, est un exemple de groupe abélien totalement ordonné. Si on se donne un groupe abélien totalement ordonné Λ , on peut parler d'espace Λ -métrique : c'est un ensemble muni d'une application $d : X \times X \rightarrow \Lambda$ à valeurs positives, et vérifiant les trois axiomes habituels d'une métrique : séparation, symétrie, et inégalité triangulaire. Lorsque $\Lambda = \mathbb{R}^n$, on peut penser à X comme à un espace métrique (ou plutôt pseudo-métrique, la métrique n'étant pas séparée), avec des corrections infinitésimales (à valeurs dans \mathbb{R}^{n-1}). Comme on va le voir, la notion d'espace Λ -métrique apparaît naturellement lorsqu'on passe à la limite dans une suite d'espaces métriques, et si $\Lambda = \mathbb{R}^n$, cela signifie qu'on a gardé l'information sur ce qu'il se passe à n échelles à la fois.

Définissons maintenant la notion de Λ -arbre. L'exemple le plus simple est Λ lui-même, muni de la Λ -distance $d(x, y) = |x - y| = \max(x - y, y - x) \in \Lambda$. Une géodésique de X est une application isométrique d'un segment $[0, l] \subset \Lambda \rightarrow X$, et on dit que X est géodésique si toute paire de points est reliée par au moins une géodésique. Étant donné $\delta \in \Lambda$, on peut définir un espace Λ -métrique δ -hyperbolique par l'inégalité

$$d(x, y) + d(z, t) \leq \max\{d(x, z) + d(y, t), d(x, t) + d(y, z)\} + \delta$$

pour tous x, y, z, t dans X . Un Λ -arbre est un espace Λ -métrique géodésique 0-hyperbolique. Lorsque $\Lambda = \mathbb{R}$, on retrouve la notion d'arbre réel, et lorsque $\Lambda = \mathbb{Z}$, celle d'arbre simplicial (ou plus précisément, d'ensemble des sommets d'un arbre simplicial muni de sa métrique combinatoire).

Il est immédiat de remarquer qu'un ultra-produit $*T$ de Λ_k -arbres T_k est lui-même un $*\Lambda$ -arbre où $*\Lambda$ est l'ultra-produit correspondant des Λ_k . Il est alors facile d'en déduire que l'ensemble des groupes marqués ayant une action libre sur un Λ -arbre est un sous-ensemble fermé de l'espace des groupes marqués. En particulier, tout groupe limite possède une action libre sur un $*\mathbb{Z}$ -arbre. Si à la place de cette construction d'ultra-produit, on prend une limite au sens de Gromov-Hausdorff, on obtient une action sur un arbre réel, mais on perd de l'information : on a négligé ce qu'il se passait aux échelles plus petites que l'échelle dominante, et l'action obtenue à la limite n'est plus libre. Par contre, on peut retrouver l'arbre réel limite au sens de Gromov-Hausdorff à partir du $*\mathbb{Z}$ -arbre [Chi92].

L'inconvénient est que le groupe abélien $\Lambda = *\mathbb{Z}$ est énorme (c'est un ensemble d'entiers non-standard). L'argument de Chiswell utilise le fait que le groupe est de type fini, et permet de supposer que $\Lambda = \mathbb{R} \oplus \Lambda_0$ muni de l'ordre lexicographique qui fait de Λ_0 un sous-groupe convexe (d'infiniment petits), avec des éléments ayant des longueurs de translations hors de Λ_0 . En utilisant la linéarité des groupes libres, la théorie des valuations, et les arbres de Bruhat-Tits associés, Remeslennikov a démontré qu'on pouvait supposer $\Lambda = \mathbb{R}^n$ ([Rem92], voir [6] pour un énoncé rectifié).

Théorème IV.1.2 ([Rem92],[6]). *Un groupe limite L possède une action libre sur un \mathbb{R}^n -arbre, avec $n \leq 3\text{Rg}(L) + 1$.*

Les groupes ayant une action libre sur un \mathbb{R}^n -arbre partagent beaucoup des propriétés des groupes limites : ils sont sans torsion, ils ont la propriété CSA, tout sous-groupe non-abélien de rang 2 est libre [Chi94]. Réciproquement, il n'est pas vrai que tout groupe agissant librement sur un \mathbb{R}^n -arbre est un groupe limite, l'exemple le plus simple étant le

groupe fondamental de la surface fermée non-orientable de caractéristique d'Euler -1 (ce groupe possède une action libre sur un $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ -arbre).

La question suivante reste troublante :

Question IV.1.3 (Remeslennikov). *Soit G un groupe de type fini agissant librement sur un Λ -arbre. Le groupe G se plonge-t-il dans $SL_2(k)$ pour un certain corps k ?*

Le théorème principal de [6], démontré indépendamment par Gross [Gro98], est le suivant :

Théorème IV.1.4. *Soit G un groupe de type fini ayant une action libre sur un \mathbb{R}^n -arbre (en particulier, G un groupe limite). Alors :*

- G est de présentation finie, et possède un espace classifiant fini,
- G a un nombre fini de classes de conjugaison de groupes abéliens maximaux non cycliques, et ces sous-groupes sont de type fini. On a plus précisément la borne suivante :

$$\sum_A rk(A) - 1 \leq b_1(G) - 1$$

la somme étant prise sur les classes de conjugaisons de sous-groupes abéliens maximaux de G

- *la dimension cohomologique de G est au plus $\max(2, r)$ où r est le rang maximal de ses sous-groupes abéliens*

En utilisant le théorème de combinaison de Dahmani [Dah03], on obtient en outre que G est un groupe relativement hyperbolique par rapport à ses sous-groupes abéliens maximaux non cycliques.

Ce théorème s'obtient par récurrence comme corollaire du résultat de dévissage :

Théorème IV.1.5. *Soit G de type fini, librement indécomposable, muni d'une action libre sur un \mathbb{R}^n -arbre, $n \geq 2$. Alors G est le groupe fondamental d'un graphe de groupes dont les groupes d'arêtes sont cycliques et les groupes de sommets sont des groupes de type fini agissant librement sur des \mathbb{R}^{n-1} -arbres.*

La preuve se fait en deux étapes. La première étape consiste à utiliser le théorème de Sela de structure d'une action superstable d'un groupe de type fini sur un arbre réel. Ceci donne une décomposition de G en graphe de groupes dont les groupes d'arêtes sont abéliens (mais a priori pas de type fini) et les groupes de sommet agissent librement sur des \mathbb{R}^{n-1} -arbres (mais ne sont pas non plus de type fini).

La deuxième étape consiste à modifier T afin d'obtenir un nouvel arbre T' tel que la décomposition obtenue à la première étape se fasse au-dessus de groupe cycliques, cette décomposition étant triviale si T' est un \mathbb{R}^{n-1} -arbre.

La situation principale à comprendre est la suivante : le groupe $G = A *_C B$ agit sur le \mathbb{R}^n -arbre T , avec A, B préservant chacun un \mathbb{R}^{n-1} -arbre $Y_A, Y_B \subset T$. Le sous-groupe C est un groupe abélien non cyclique (peut-être de type infini), C possède un axe l , la longueur de l est non infinitésimale, et C agit sur l par translations de longueurs infinitésimales (infinitésimal signifiant l'appartenance au sous-groupe convexe \mathbb{R}^{n-1}). Notons δ_A, δ_B l'intersection de l avec Y_A et Y_B . Étant donnée une isométrie entre δ_A et δ_B , on peut alors construire un \mathbb{R}^{n-1} -arbre T' à partir de $Y_A \sqcup Y_B$ en recollant δ_A sur δ_B , et en rendant cette opération équivariante. En choisissant cette isométrie de manière générique, on démontre qu'on obtient une action *libre* sur T' . C'est là que le fait que C est non cyclique intervient car l'intersection de deux translatés de δ_A dans Y_A est alors très petite (deux points dans une telle intersection ont une distance dans \mathbb{R}^{n-2}). Le nouvel arbre construit T' dans cette situation est un \mathbb{R}^{n-1} -arbre sur lequel G agit librement, ce qui conclut la preuve dans ce cas.

IV.1.2 Second théorème de structure des groupes limites

On peut, en utilisant les techniques de Sela, donner la caractérisation suivante des groupes limites, dûe à Kharlampovich-Myasnikov :

Théorème IV.1.6 ([KM98b],[7]). *Un groupe L est un groupe limite si et seulement si c'est un sous-groupe d'une extension de centralisateurs itérée d'un groupe libre.*

Si L est un groupe limite, une extension de centralisateurs de L est un amalgame $L*_A(A\oplus\mathbb{Z})$ où A est le centralisateur d'un élément non trivial de L . Un tel groupe est encore un groupe limite par un résultat de Baumslag [Bau67]. Une extension de centralisateurs itérée d'un groupe libre est un groupe limite obtenu à partir d'un groupe libre en appliquant cette construction un nombre fini de fois.

On a une autre caractérisation des groupes limites qui ne nécessite pas de passage au sous-groupe, qui est une reformulation de l'existence de MR-resolution pour un groupe limite [Sel01]. On dit que $L = A *_C B$ (resp. $L = A *_C$) est un double généralisé au dessus d'un groupe limite L' si

- A, B sont de type fini, et les images de C par les deux plongements sont des sous-groupes abéliens maximaux des groupes de sommets correspondant
- il existe un morphisme $\varphi : L \rightarrow L'$ qui est injectif en restriction à A , et en restriction à B .

Théorème IV.1.7 ([Sel01], [7]). *La classe des groupes limites coïncide avec le plus petit ensemble de classe d'isomorphismes de groupes \mathcal{L} contenant les groupes libres, et stable par les opérations de produit libre et de double généralisé : si L_1, L_2 sont dans \mathcal{L} , alors $L_1 * L_2$ est dans \mathcal{L} ainsi que tout double généralisé au-dessus de L_1 .*

IV.1.3 Présentations de groupes résiduellement libres

Un groupe G est *résiduellement libre* si pour tout $g \in G \setminus \{1\}$, il existe un morphisme h de G vers un groupe libre F tel que $h(g) \neq 1$. Tout groupe G possède un plus gros quotient résiduellement libre $RF(G)$: c'est le quotient de G par l'intersection des noyaux de tous les morphismes de G à valeurs dans un groupe libre.

L'équationnelle noetherianité des groupes libres signifie que pour tout groupe G résiduellement libre, il existe une présentation finie de groupe $\langle S|R \rangle$ telle que $G = RF(\langle S|R \rangle)$. On dit alors que R est un *système d'équations définissant G* puisque les solutions dans \mathbb{F} du système d'équations associé à R sont en bijection avec $\text{Hom}(G, \mathbb{F})$. Par ailleurs, on sait que tout groupe résiduellement libre se plonge dans un produit direct de groupes limites [Sel01, KM98a], et qu'on peut calculer un tel plongement de manière explicite [KM98a, GW09, BHMS08, KM05b].

Pour définir explicitement un groupe résiduellement libre G , on a donc le choix entre trois possibilités :

1. donner une présentation de G (si G est de présentation finie)
2. donner un système d'équations définissant G
3. donner un plongement de G dans un produit direct de groupes limites (en donnant des présentations de ces groupes limites, et un système de générateur de l'image de G)

On s'intéresse aux possibilités de va-et-vient algorithmiques entre ces façons de représenter un groupe résiduellement libre. Une présentation de G est bien sûr un cas particulier d'un système d'équations définissant G . On peut donc passer algorithmiquement d'une représentation de G du second type à une du troisième par [KM98a, GW09, BHMS08,

KM05b]. On va examiner la question réciproque, c'est-à-dire, étant donné un sous-groupe d'un produit direct de groupes limites donné par ses générateurs, peut-on déterminer de façon algorithmique un système d'équations le définissant.

Avant de répondre à cette question, il est intéressant d'introduire une notion très proche.

Définition IV.1.8. *On dit que G est résiduellement non-abélien libre, si pour tout $g \in G \setminus \{1\}$, il existe un morphisme h de G vers un groupe libre, et d'image non-abélienne, tel que $h(g) \neq 1$.*

On note $RF_{na}(G)$ le plus gros quotient de G résiduellement non-abélien libre, c'est-à-dire, le quotient de G par tous les morphismes de G vers un groupe libre et d'image non-abélienne.

En d'autres termes, la différence avec la notion habituelle de groupe résiduellement libre est qu'on ne s'intéresse pas aux morphismes vers \mathbb{Z} . On démontre facilement qu'un groupe est résiduellement non-abélien libre si et seulement s'il est résiduellement libre et de centre trivial. Par exemple, un groupe limite est résiduellement non-abélien libre si et seulement s'il est non-abélien.

Si G est résiduellement non-abélien libre, il existe une présentation finie de groupe $\langle S|R \rangle$ telle que $G = RF_{na}(\langle S|R \rangle)$. On dit alors que R est un système de na -équations pour G .

Théorème IV.1.9 ([16]). – *Il existe un algorithme qui prend en entrée un groupe résiduellement libre G représenté par un système de générateurs dans un produit de groupes limites (i. e. une représentation du troisième type de G), et qui calcule un système de na -équations pour $RF_{na}(G)$.*

– *si on connaît $b_1(G)$, on peut on peut calculer un système d'équations le définissant G .*

Comme on ne peut pas calculer $b_1(\langle S \rangle)$ à partir de $S \subset \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ [BM07], il est par contre impossible de calculer un système d'équations définissant $\langle S \rangle$.

On peut aussi se demander si on peut déterminer algorithmiquement si le groupe résiduellement libre ainsi défini est de présentation finie. En utilisant [Gru78], et le théorème IV.1.9, on obtient :

Théorème IV.1.10. *Il n'y a pas d'algorithme qui prend en entrée une présentation finie de groupe $\langle S|R \rangle$ et qui décide si le groupe résiduellement libre $RF(\langle S|R \rangle)$ est de présentation finie ou non.*

Remarque IV.1.11. On montre que $RF(G)$ est de présentation finie si et seulement si $RF_{na}(G)$ l'est aussi. Il n'y a donc pas d'algorithme décidant de la présentation finie de $RF_{na}(G)$ non plus.

La preuve des résultats d'indécidabilité est basée sur les résultats de Grunewald portant sur l'étude des sous-groupes de type fini de $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ [Gru78], voir aussi [BR84].

Le résultat de calculabilité d'un ensemble de na -équations définissant $\langle S \rangle \subset L_1 \times \cdots \times L_n$ est un calcul explicite à partir de la présentation des images de G dans L_i . Ces présentations sont calculables d'après [Wil08]. La propriété CSA des groupes libres permet ensuite de trouver des na -équations de $RF_{na}(G)$ à partir de commutateurs itérés de relateurs (ces idées apparaissent déjà dans [BHMS08]). Par exemple, supposons que $G = \langle S \rangle \subset L_1 \times L_2$ où $L_1 = \langle S|R_1 \rangle$ et $L_2 = \langle S|R_2 \rangle$ sont deux groupes limites non-abéliens, que G ne se plonge ni dans L_1 ni dans L_2 , et se surjecte sur L_1 et sur L_2 . Alors $G = RF_{na}(\langle S|[R_1, R_2^{S \cup \{1\}}] \rangle)$, où $[R_1, R_2^{S \cup \{1\}}]$ représente l'ensemble fini des commutateurs entre des mots de R_1 et des mots de R_2 conjugués par un élément de $S \cup \{1\}$.

IV.2 Feuilletages et résolution d'équations dans les groupes

Le *problème des équations* dans un groupe G consiste à décider algorithmiquement si un système d'équations donné admet une solution ou non. On parle du problème des équations et inéquations lorsqu'on considère aussi des inéquations $a_1 x_{i_1}^{\pm 1} \cdots a_k x_{i_k}^{\pm 1} \neq 1$ dans le système. De manière équivalente, le problème des équations et inéquations est résoluble dans un groupe G si et seulement si sa théorie existentielle (avec constantes dans G) est décidable.

Le problème des équations dans un groupe de présentation finie arbitraire n'est bien sûr pas résoluble puisqu'il généralise largement le problème du mot ou le problème de conjugaison. Par contre, l'algèbre linéaire permet de résoudre ce problème dans un groupe virtuellement abélien de type fini. Mais déjà, ce problème n'est pas résoluble dans des groupes libres nilpotents de classe au moins 3, et dans un groupe nilpotent de classe 2, ce problème est équivalent à la résolubilité des équations polynomiales sur \mathbb{Q} [Rom79, Tru95].

Le problème des équations dans un groupe libre a suscité l'intérêt de nombreuses personnes, en particulier Lyndon, Appel, Lorens (voir par exemple [Lyn60, App68, Lor68]). En 1982, un résultat fondamental de Makanin a donné une solution positive au problème des équations dans le groupe libre ([Mak82], avec des corrections dans [Mak84]). Ce résultat, prolongé par les travaux de Razborov [Raz84], a été une source d'inspiration de Rips pour son étude des actions sur des arbres réels [BF95, GLP94]. Il est le point de départ des travaux profonds de Sela et Kharlampovich-Miasnikov aboutissant à la solution du problème de Tarski [Sel06, KM06]. Enfin, Rips et Sela ont réussi à ramener le problème des équations dans un groupe hyperbolique sans torsion au problème des équations dans le groupe libre.

Avec François Dahmani, nous montrons que le problème des équations est résoluble dans tout groupe hyperbolique :

Théorème IV.2.1 ([15]). *Il existe un algorithme qui prend en entrée*

- *une présentation finie d'un groupe hyperbolique G ,*
- *un système d'équations et d'inéquations avec des contraintes rationnelles quasi-isométriquement plongeables,*

et qui décide s'il y a une solution ou non dans G .

Voir ci-dessous pour les définitions concernant les contraintes rationnelles. Le but de ce travail est triple : dans un premier temps, démontrer le théorème ci-dessus en se ramenant au cas de groupes virtuellement libres, ensuite, ramener le cas de groupes virtuellement libres à un problème d'équations tordues dans un groupe libre, et finalement, donner une solution au problème des équations tordues dans le groupe libre en donnant une nouvelle preuve du théorème de Makanin, basée sur la théorie de Rips classifiant les feuilletages mesurés sur des 2-complexes.

Une contrainte rationnelle sur un système d'équations consiste à imposer que chaque variable $x \in X$ reste dans un sous-ensemble rationnel $\mathcal{R}_x \subset G$. Par définition, la classe des sous-ensembles *rationnels* de G est la plus petite classe contenant les ensembles finis, et stable par union finie $A \cup B$, par produit $A \cdot B$, et par semi-groupe engendré A^* . De manière équivalente, un sous-ensemble \mathcal{R} de G muni d'un système générateur S est rationnel si et seulement s'il existe un automate reconnaissant un langage \mathcal{L} contenu dans le monoïde libre $(S \cup S^{-1})^*$, et tel que l'image de \mathcal{L} dans G soit précisément \mathcal{R} .

Lorsque G est hyperbolique, on introduit la notion d'ensemble rationnel \mathcal{R} *quasi-isométriquement plongeable* qui signifie qu'il existe un tel automate et des constantes λ, μ tels que l'ensemble des mots de \mathcal{L} soient tous (λ, μ) -quasi-géodésiques. On démontre que

l'ensemble des ensembles rationnels quasi-isométriquement plongeables forme une algèbre booléenne (alors que ce n'est a priori pas le cas de l'ensemble de tous les sous-ensembles rationnels). Ainsi, une inégalité $z \neq 1$ peut être remplacée par une contrainte rationnelle quasi-isométriquement plongeable $z \in G \setminus \{1\}$. L'appartenance (ou la non-appartenance) à un sous-groupe quasi-convexe est aussi une contrainte rationnelle quasi-isométriquement plongeable. Par exemple, on peut coder la malnormalité d'un sous-groupe quasi-convexe H par la non-existence de solution au système d'équations avec contraintes rationnelles :

$$z = xyx^{-1}, \quad y, z \in H \setminus \{1\}, \quad x \notin H.$$

La théorie des représentants canoniques de Rips et Sela [RS95] leur a permis de montrer que le problème des équations était résoluble dans un groupe hyperbolique sans torsion. Nous adaptons cette construction à la présence de torsion, et au lieu de relever le système d'équations dans un groupe libre, on le relève dans un groupe virtuellement libre qui paramètre les chemins dans une subdivision barycentrique d'un complexe de Rips de G . On est ainsi amenés à décider de l'existence de solutions d'un système d'équations avec contraintes rationnelles dans un groupe virtuellement libre.

Théorème IV.2.2 ([15]). *Il existe un algorithme qui prend en entrée*

- *une présentation finie d'un groupe virtuellement libre G ,*
- *un système d'équations avec des contraintes rationnelles,*

et qui décide s'il y a une solution ou non dans G .

Ce théorème a été obtenu indépendamment, et de manière un peu plus générale par Lohrey-Sénizergues [LS06]. Un argument simple montre que ce problème est équivalent à un problème d'équations tordues dans un groupe libre F . Une équation tordue dans F est une équation de la forme $a_1\varphi_1(x_{i_1}^{\pm 1})a_2\varphi_2(x_{i_2}^{\pm 1})\dots a_k\varphi_k(x_{i_k}^{\pm 1}) = 1$ où les φ_i sont des automorphismes fixés de F , dits de *twist*. Ici, les automorphismes de twist engendrent un groupe fini dans $\text{Out}(F)$, et on est ramené à résoudre le problème des équations tordues de ce type dans le groupe libre.

Théorème IV.2.3 ([15]). *Il existe un algorithme qui prend en entrée un système d'équations tordues avec contraintes rationnelles dans un groupe libre F , dont les automorphismes de twist engendrent un sous-groupe fini de $\text{Out}(F)$, et qui décide s'il y a une solution ou non dans G .*

Plus généralement, Makanin a posé le problème suivant, qui reste ouvert :

Question IV.2.4 (Makanin). *Le problème des équations tordues est-il résoluble dans un groupe libre (sans hypothèse de finitude sur les automorphismes tordant les équations) ?*

Lorsque le groupe engendré par les automorphismes de twist est fini dans $\text{Out}(F)$, une astuce, liée au théorème de Zimmermann-Culler (disant qu'un tel sous-groupe fini de $\text{Out}(F)$ peut être représenté comme groupe d'homéomorphismes d'un graphe fini [Zim81, Cul84]), permet de supposer que les automorphismes de twist préservent une base $S \cup S^{-1}$ du groupe libre.

Comme Makanin, on traduit un système d'équations dans un groupe libre par un complexe de bandes Σ : c'est une union disjointe d'intervalles D , sur laquelle on recolle un nombre fini de rectangles appelés *bandes*. Chaque bande porte en outre un automorphisme de twist. Les intervalles de D comportent aussi des langages rationnels. Une solution d'un

complexe de bande Σ est un étiquetage de D par un mot de $\langle S \rangle$ qui soit dans le langage rationnel correspondant, de sorte que les deux cotés opposés d'une bande soient étiquetés des mots qui sont image l'un de l'autre par l'automorphisme de twist. Une solution définit une lamination de Σ qui indique quels sous-mots se correspondent de chaque côté d'une bande.

Si on veut savoir s'il existe une solution ou non, il suffit de chercher la solution la plus courte. On sait qu'une solution σ d'un système d'équations (non tordues) Σ correspond à un morphisme $h_\sigma : G_\Sigma \rightarrow F$, où G_Σ est un groupe de présentation finie associé à Σ . Ce morphisme permet de définir une action de G_Σ sur l'arbre T qui est le graphe de Cayley de F . Si on se donne une suite infinie σ_i de solutions de Σ , les actions de G_Σ sur le graphe de Cayley de F convergent vers une action sur un arbre réel. Sous les bonnes hypothèses, l'argument de raccourcissement de Sela permet de raccourcir les longueurs de translations des générateurs de G_Σ . Si on cherche la solution la plus courte, on peut donc ignorer les solutions σ_i pour i assez grand.

Mais puisqu'on ne sait pas à l'avance si Σ a des solutions ou non, on ne peut pas appliquer cet argument directement car on ne connaît pas à l'avance de solution de Σ . C'est pourquoi on travaille avec des solutions *potentielles*, les *pré-laminations*. Le complexe de bande correspond à un 2-complexe de présentation X de G_Σ . Lorsqu'on a un tel complexe X , une solution de Σ est représentée par une application continue f de X dans un bouquet de cercles Y . L'application f , choisie en position générale, définit une lamination de X dont les feuilles sont les composantes connexes de la préimage des milieux arêtes de Y . Nos solutions potentielles sont des *pré-laminations*, dont les feuilles sont des sous-ensembles de la lamination induite par une éventuelle solution.

Ce qui fait marcher l'algorithme, est que si une pré-lamination devient très longue, toute solution qui induirait cette pré-lamination pourrait être raccourcie. On peut ainsi ignorer cette pré-lamination lorsqu'on recherche une pré-lamination induite par une solution la plus courte. La preuve de l'existence de ce raccourcissement consiste à construire un feuilletage mesuré limite d'une suite de pré-laminations donnée, et à lui appliquer la théorie de Rips. Comme dans l'argument de raccourcissement de Sela, on peut lire dans ce feuilletage mesuré une façon de raccourcir d'éventuelles solutions qui induiraient les pré-laminations considérées.

Problème IV.2.5. *Calculer le diagramme de Makanin-Razborov d'un système d'équations à valeurs dans un groupe hyperbolique.*

L'algorithme de Razborov permet de déterminer algorithmiquement un paramétrage de l'ensemble des solutions d'un système d'équations dans un groupe libre [Raz84]. Avec François Dahmani, nous travaillons à améliorer notre algorithme de résolution d'équations, afin d'en déduire une méthode de calcul du diagramme de Makanin-Razborov pour les groupes hyperboliques. L'une des étapes importantes consiste à s'affranchir du lemme de Bulitko, car ce raccourcissement donné par ce lemme n'est pas engendré par un automorphisme du groupe à la source. Des résultats préliminaires encourageants ont été obtenus dans le cadre d'équations dans le groupe libre.

IV.3 Le problème d'isomorphie pour les groupes hyperboliques

Le problème d'isomorphie pour une classe de groupes, est le troisième des grands problèmes algorithmiques posé par Dehn. Il consiste à décider algorithmiquement si deux

présentations de groupes de cette classe définissent des groupes isomorphes. Dans un article fondateur, Sela a démontré que le problème d'isomorphie était résoluble pour la classe des groupes hyperboliques sans torsion rigides (i. e. dont le groupe d'automorphismes extérieur est fini). L'existence d'un tel algorithme est d'autant plus remarquable qu'il n'existe pas d'algorithme permettant de calculer le rang d'un groupe hyperbolique [BMS94].

L'algorithme de Sela a été simplifié et étendu à la classe des groupes hyperboliques non rigides sans torsion, et des groupes relativement hyperboliques toraux par Dahmani et Groves [DG08b]. Les simplifications de l'argument sont permises par l'utilisation des contraintes rationnelles dans les systèmes d'équations et inéquations [Dah05]. Grâce à la solution du problème des équations en présence de torsion, François Dahmani et moi montrons qu'on peut gérer la torsion dans le problème d'isomorphie :

Théorème IV.3.1 ([18]). *Le problème d'isomorphie est résoluble pour la classe des groupes hyperboliques (avec torsion).*

De plus, on peut trouver algorithmiquement un système de générateurs du groupe $\text{Out}(G)$ d'un groupe hyperbolique G .

La preuve se fait par étapes, en commençant par le cas des groupes rigides, puis des groupes à un bout. La deuxième assertion de l'énoncé est utilisée à plusieurs niveaux pour se ramener à un cas traité précédemment.

On obtient aussi, comme extension de ce résultat :

Théorème IV.3.2 ([18]). *Le problème de Whitehead est résoluble dans les groupes hyperboliques : il existe un algorithme qui décide si deux n -uplets d'éléments sont images l'un de l'autre par un automorphisme de G .*

Avant d'expliquer le principe de la preuve, rappelons que les groupes virtuellement cycliques infinis sont de deux sortes : ceux qui se surjectent sur \mathbb{Z} , et ceux qui se surjectent sur le groupe diédral infini. Pour les distinguer, on peut aussi dire que le centre des premiers est infini. On dira qu'un groupe virtuellement cyclique à centre infini est un \mathcal{Z} -groupe. Si G est un groupe hyperbolique, on note \mathcal{Z}_{\max} la classe des \mathcal{Z} -groupes maximaux dans G . Ces groupes jouent un rôle particulier car les scindements au-dessus de groupes \mathcal{Z}_{\max} ont des twists de Dehn d'ordre infini.

La structure globale de la preuve est la suivante. On démontre d'abord le théorème pour les groupes hyperboliques *rigides*, i. e. les groupes à un bout n'ayant pas de scindement sur un sous-groupes \mathcal{Z}_{\max} . Cet argument est la généralisation directe de l'argument de Sela simplifié par Dahmani-Groves, en utilisant la solution du problème des équations en présence de torsion (th. IV.2.1), et une analyse un peu plus fine d'un arbre réel limite obtenu. On traite ensuite le cas des groupes hyperboliques à un bout. L'algorithme est basé sur le calcul d'une décomposition canonique spécifique $T_{\mathcal{Z}_{\max}}$ au-dessus de groupes \mathcal{Z}_{\max} , liée au \mathcal{Z} -JSJ du groupe considéré. Ses groupes flexibles ont une structure particulière dite *d'orbichaussette*. On se ramène ainsi au problème d'isomorphie entre groupes hyperboliques rigides (mais relativement à une structure périphérique), ainsi qu'au problème d'isomorphie entre orbichaussettes. Finalement, le cas des groupes à plusieurs bouts utilise le théorème de Gerasimov [DG08a] pour calculer une décomposition de Stallings d'un groupe hyperbolique G , c'est-à-dire un scindement au-dessus de groupes d'arête finis dont les groupes de sommet ont un seul bout. On montre qu'on peut calculer le quotient fini $\mathcal{D}/\text{Out}(G)$ où \mathcal{D} est l'espace de déformation \mathcal{D} des scindements de Stallings, et on se ramène au problème d'isomorphie entre groupes hyperboliques à un bout.

Les groupes hyperboliques rigides. Supposons que G_1, G_2 soient deux groupes hyperboliques. Se donner un morphisme de $h : G_1 \rightarrow G_2$ revient à se donner une solution

dans G_2 du système d'équations défini par une présentation de G_1 : les variables sont les images par h des générateurs de G_1 , et les équations sont les relateurs de G_1 . Le fait que ce morphisme est injectif sur la boule de rayon R de G_1 se traduit par un ensemble fini d'inéquations. Le fait que h est (presque) le plus court dans sa classe de conjugaison se traduit par un ensemble de contraintes rationnelles quasi-isométriquement plongées. Le fait que h est distinct d'un ensemble fini h_1, \dots, h_n de morphismes de $G_1 \rightarrow G_2$ se traduit aussi par des inéquations. Ainsi, comme dans [DG08b] mais en utilisant le problème des équations donné par le théorème IV.2.1, s'il existe $R > 0$ tel qu'il n'y ait qu'un nombre fini de classes de conjugaison de morphismes $h : G_1 \rightarrow G_2$ injectifs sur la boule de rayon R , on pourra attester que h_1, \dots, h_n est une liste complète des représentants de ces morphismes en construisant un système d'équations et d'inéquations avec contraintes rationnelles qui n'a pas de solution.

Si au contraire, pour chaque $R > 0$ l'ensemble des classes de conjugaisons de morphismes de G_1 dans G_2 injectif sur la boule de rayon R est infini, alors l'argument de Bestvina-Paulin permet de construire une action de G_1 sur un arbre réel, et le théorème de Rips permet d'en déduire un scindement de G_1 au-dessus d'un sous-groupe fini ou virtuellement cyclique. La présence de 2-torsion complique le lien entre scindements virtuellement cycliques et automorphismes (voir [MNS99] pour une discussion de ce point). Mais une analyse un peu plus fine de l'arbre réel limite obtenu montre en fait que si G_1 a un seul bout, il se scinde au-dessus d'un groupe \mathcal{Z}_{\max} .

On obtient de cette manière une solution au problème d'isomorphie entre deux groupes à un bout n'ayant pas de scindement au-dessus de groupes \mathcal{Z}_{\max} (on dit qu'un tel groupe est *rigide*). On peut en effet calculer une liste finie de morphismes $h_1, \dots, h_n : G_1 \rightarrow G_2$ contenant un représentant de toutes les classes de conjugaisons de monomorphismes de $G_1 \rightarrow G_2$, et une liste analogue $h'_1, \dots, h'_n : G_2 \rightarrow G_1$. Il suffit alors de regarder s'il existe i, j tels que $h_i \circ h'_j$ et $h'_j \circ h_i$ soient des automorphismes intérieurs.

L'algorithme précédent permet en outre de décider si un groupe hyperbolique à un bout G possède ou non un scindement au dessus d'un groupe \mathcal{Z}_{\max} , puisqu'on a l'alternative exclusive suivante : soit le nombre de classes de conjugaison de morphismes $G \rightarrow G$ injectif sur une certaine boule est fini, soit il existe un tel scindement.

Une *structure périphérique marquée* $(G; \mathcal{P})$ d'un groupe G est la donnée d'une famille ordonnée $\mathcal{P} = (S_1, \dots, S_n)$, où chaque S_i est elle-même une famille ordonnée d'éléments de G , S_i étant définie modulo conjugaison par un élément $g_i \in G$. Notons que les groupes $\langle S_i \rangle$ sont bien définis à conjugaison près, on les appelle les groupes périphériques. On dit que la structure périphérique est virtuellement cyclique (resp. finie, etc.) si les $\langle S_i \rangle$ sont virtuellement cyclique (resp. finis, etc.). Un morphisme entre $(G_1; (S_1, \dots, S_n))$ et $(G_2; (S'_1, \dots, S'_n))$ est un morphisme $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ tel qu'il existe des éléments $g_i \in G_2$ tels que $\varphi(S_i) = S'_i{}^{g_i}$. Lorsqu'un groupe est muni d'une structure périphérique, on considère les scindements *relatifs* à cette structure périphérique : on demande que les groupes périphériques soient elliptiques dans l'arbre de Bass-Serre correspondant.

On montre de la même façon que le problème d'isomorphie est résoluble pour des groupes hyperboliques munis de structures périphériques virtuellement cycliques, et rigides relativement à cette structure périphérique (i. e. n'ayant pas de scindement relatif au dessus d'un groupe fini ou \mathcal{Z}_{\max}). De même, si $(G; \mathcal{P})$ n'a pas de scindement relatif sur un groupe fini, l'algorithme précédent permet de décider si $(G; \mathcal{P})$ possède un scindement relatif au dessus d'un groupe \mathcal{Z}_{\max} ou non. Comme corollaire, on obtient comme dans [DG08b] :

Corollaire IV.3.3. *Étant donné un groupe hyperbolique à un bout G , on peut construire algorithmiquement un scindement Γ de G maximal (pour la domination) au-dessus de groupes \mathcal{Z}_{\max} .*

En effet, si une décomposition au-dessus de groupes \mathcal{Z}_{\max} est déjà calculée, on peut décider si un groupe de sommet se scinde au dessus d'un groupe \mathcal{Z}_{\max} , relativement aux groupes d'arêtes incidents. S'il a un tel scindement, on pourra en trouver un par énumération, et donc raffiner le graphe de groupes. L'accessibilité de Bestvina-Feighn montre que ceci doit s'arrêter, et la décomposition ainsi obtenue est maximale.

\mathcal{Z} -JSJ et le scindement canonique $T_{\mathcal{Z}_{\max}}$. Par définition, l'espace de déformation \mathcal{Z} -JSJ d'un groupe hyperbolique à un bout est l'espace de déformation JSJ au-dessus de la classe \mathcal{Z} des groupes virtuellement cycliques à centre infini.

Remarque IV.3.4. Il est intéressant de noter que le groupe fondamental d'un orbifold à miroirs Σ peut posséder un \mathcal{Z} -JSJ non trivial. Si par exemple, le sous-espace topologique sous-jacent à Σ n'est pas un disque, le scindement de $\pi_1(\Sigma)$ le long des courbes de bord d'un voisinage régulier de la réunion des miroirs définit un scindement universellement elliptique dans la classe des scindements au-dessus de \mathcal{Z} -groupes. En effet, tout 1-sous-orbifold simple de Σ dont le groupe fondamental est un \mathcal{Z} -groupe ne rencontre pas les miroirs. Le scindement ci-dessus est donc compatible avec tous les \mathcal{Z} -scindements de $\pi_1(\Sigma)$.

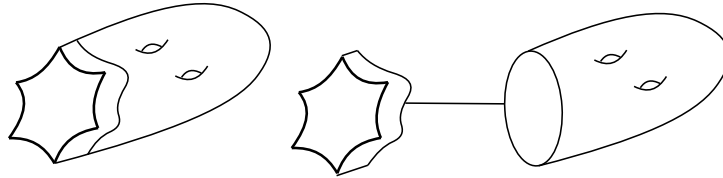


FIGURE IV.1 – Le \mathcal{Z} -JSJ d'un orbifold à miroirs

A partir de ce \mathcal{Z} -JSJ, on peut démontrer l'existence d'un scindement au-dessus de groupes \mathcal{Z}_{\max} , et elliptique relativement à tout \mathcal{Z} -scindement. On appelle $T_{\mathcal{Z}_{\max}}$ l'arbre des cylindres de l'espace de déformation correspondant pour la relation \sim de commensurabilité. Chaque groupe flexible de $T_{\mathcal{Z}_{\max}}$ est une *orbichaussette*, i. e. un amalgame multiple $O = \Sigma *_{B_i} S_i$ d'un groupe Fuchsien borné Σ sans réflexion, avec des \mathcal{Z} -groupes S_i (les chaussettes), le long des groupes de bord B_i de Σ . Un groupe Fuchsien borné sans réflexion est un groupe de type fini agissant proprement discontinûment sur \mathbb{H}^2 sans élément parabolique et sans réflexion (cette action peut avoir un noyau fini). De manière équivalente, c'est une extension par un groupe fini du groupe fondamental d'un orbifold hyperbolique compact à bord sans miroir. La chaussette S_i est dite *propre* si $B_i \subsetneq S_i$, et *impropre* sinon. Une orbichaussette est munie d'une structure périphérique (non marquée), qui consiste en toutes les chaussettes impropres, et en un sous-ensemble des chaussettes propres.

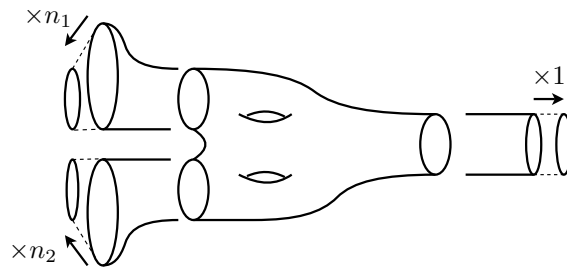


FIGURE IV.2 – Une orbichaussette, avec deux chaussettes propres, et une impropre.

Calcul du scindement canonique $T_{\mathcal{Z}_{\max}}$. L'arbre des cylindres d'un scindement au dessus de groupes virtuellement cycliques se calcule de manière algorithmique. Pour calculer $T_{\mathcal{Z}_{\max}}$, il suffit donc de calculer un scindement Γ_0 au-dessus de groupes \mathcal{Z}_{\max} , \mathcal{Z} -universellement elliptique, et maximal pour ces propriétés. Le corollaire IV.3.3 permet de trouver un scindement maximal Γ de G au-dessus de groupes \mathcal{Z}_{\max} . On démontre qu'on obtient un tel scindement Γ_0 en écrasant dans Γ (ou plus précisément, dans son arbre des cylindres modulo suppression de sommets de valence 2) toutes les arêtes *annulaires*, i. e. joignant deux orbichaussettes le long de chaussettes impropres (figure IV.3).

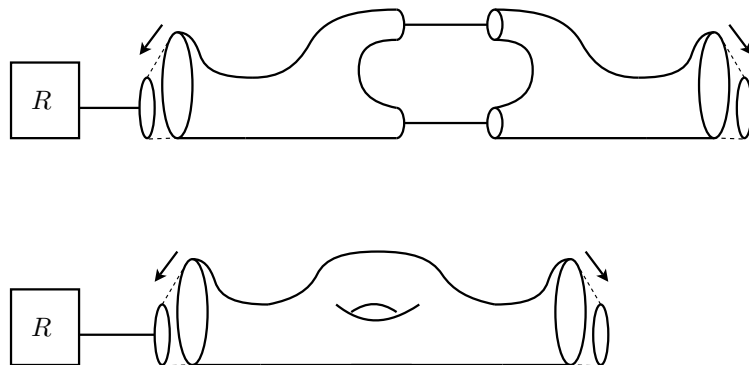


FIGURE IV.3 – Une décomposition maximale Γ ayant deux arêtes annulaires, et le scindement Γ_0 obtenu en écrasant ces deux arêtes. La décomposition finale contient un sommet rigide R , et une orbichaussette.

Il s'agit alors de reconnaître parmi les groupes de sommets de Γ munis de leur structure périphérique, ceux qui sont des orbichaussettes, et quelles sont les caractéristiques de cette orbichaussette (nature de l'orbifold, de l'extension de cet orbifold par un groupe fini, plongement des groupes de bords dans les chaussettes). Pour faire cela, on utilise un argument un peu technique basé sur l'étude de l'espace déformation de Stallings du groupe de sommet considéré en oubliant sa structure périphérique (voir plus bas pour le calcul de cet espace de déformation). Notons qu'on ne peut pas utiliser le problème d'isomorphie pour les groupes hyperboliques rigides car le nombre de candidats orbichaussettes est infini en l'absence de borne a priori sur l'indice des chaussettes. Une fois qu'on a reconnu quels sont les sommets orbichaussettes avec leurs caractéristiques, il est facile de reconnaître les arêtes annulaires.

Problème d'isomorphie pour les orbichaussettes. Une fois qu'on a calculé les scindements canoniques $T_{\mathcal{Z}_{\max}}$ des groupes G_1 et G_2 , il suffit de savoir s'il existe un isomorphisme entre les graphes de groupes calculés. Cela se ramène à résoudre le problème d'isomorphie entre les groupes de sommets munis de structures périphériques marquées issue des scindements. Puisqu'on sait déjà résoudre le problème d'isomorphie entre les groupes de sommets rigides, il reste à résoudre le problème d'isomorphie entre orbichaussettes.

La décomposition définissant une orbichaussette comme amalgame d'un groupe Fuchsien borné avec les chaussettes S_i est un scindement canonique dès lors qu'il n'y a pas de chaussette d'indice 2 consistant à attacher un ruban de Möbius à l'orbifold sous-jacent. C'est en effet l'arbre des cylindres de sa décomposition \mathcal{Z} -JSJ. De plus, on connaît cette décomposition par construction de l'orbichaussette à l'étape précédente. On se ramène ainsi à décider si deux extensions $F_i \rightarrow G_i \rightarrow \mathcal{O}_i$ d'un groupe fondamental d'orbifold par un groupe fini sont isomorphes.

Rappelons que deux extensions $F \rightarrow G_i \rightarrow \mathcal{O}$ sont dites *équivalentes* s'il existe un isomorphisme $G_1 \rightarrow G_2$ dont la restriction à F est l'identité, et qui induit l'identité sur \mathcal{O} .

Il est facile de décider si deux extensions de \mathcal{O} par F sont équivalentes car on n'a qu'un nombre fini d'isomorphismes candidats. Soit $\mathcal{E}(\mathcal{O}, F)$ l'ensemble des classes d'équivalence d'extensions de \mathcal{O} par F . Cet ensemble est muni d'une action de $\text{Out}(\mathcal{O})$ par postcomposition avec l'épimorphisme $G \rightarrow \mathcal{O}$. $\mathcal{E}(\mathcal{O}, F)$ est un ensemble fini car une classe d'équivalence d'extensions est caractérisée par le morphisme $\psi : \mathcal{O} \rightarrow \text{Out}(F)$ induit l'action par conjugaison, ainsi que par un élément de cohomologie dans $H^2(\mathcal{O}, Z(F))$ (qui caractérise plutôt la *différence* entre deux extensions induisant le même ψ).

Comment savoir si les groupes G_1, G_2 apparaissant dans extensions $F_1 \rightarrow G_1 \rightarrow \mathcal{O}_1$ et $F_2 \rightarrow G_2 \rightarrow \mathcal{O}_2$ sont isomorphes? Une fois choisis un isomorphismes entre F_1 et F_2 (on peut les essayer tous), et un isomorphisme permettant d'identifier $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2 = \mathcal{O}$, il s'agit de savoir si les extensions G_1 et G_2 sont dans la même orbite sous l'action de $\text{Out}(\mathcal{O})$. Il est bien connu qu'on peut déterminer de manière algorithmique un système générateur de $\text{Out}(\mathcal{O})$. Puisqu'on sait décider si deux extensions sont équivalentes, on peut calculer de proche en proche le graphe de Schreier de l'action de $\text{Out}(\mathcal{O})$ sur l'orbite de G_1 dans $\mathcal{E}(\mathcal{O}, F)$. Puisque ce graphe est fini, ceci permet finalement de décider si G_2 est dans l'orbite de G_1 .

Ceci permet de conclure le problème d'isomorphie entre groupes hyperboliques à un bout.

Les groupes à plusieurs bouts Grâce au théorème de Gerasimov [DG08a], on peut calculer une décomposition d'un groupe hyperbolique G au dessus de groupes finis telle que les groupes de sommets aient au plus un bout. L'espace de déformation \mathcal{D} de ces scindements est connexe par glissements, et cocompact pour l'action de $\text{Out}(G)$ (voir section II.1.3). On peut alors construire de manière algorithmique le 1-squelette de l'espace $\mathcal{D}/\text{Out}(G)$ (ou plus précisément, de son épine).

On se ramène ainsi au problème de vérifier si deux graphes de groupes de $\mathcal{D}_1/\text{Out}(G_1)$ et de $\mathcal{D}_2/\text{Out}(G_2)$ sont isomorphes. Ceci revient à déterminer s'il existe des isomorphismes entre les groupes de sommets, respectant les inclusions des groupes d'arêtes (finis). Il s'agit donc du problème d'isomorphie pour deux groupes hyperboliques à un bout, munis de structures périphériques marquées finies. La finitude des classes de conjugaison des sous-groupes finis et la connaissance d'un système générateur du groupe d'automorphismes permet de déduire cet énoncé du problème d'isomorphie entre groupes hyperboliques à un bout sans structure périphérique.

Chapitre V

Autres projets et perspectives

V.1 Petite simplification dans le groupe modulaire

L'hyperbolicité du complexe des courbes permet d'appliquer certaines méthodes de groupes hyperboliques à l'étude du groupe modulaire. En particulier, la notion de petite simplification pour une famille d'éléments pseudo-Anosov a un sens dans le groupe modulaire vis-à-vis de l'action sur le complexe des courbes. Une propriété essentielle de l'action du groupe modulaire sur le complexe des courbes étant son acylindricité [Bow08]. Dans un travail en cours avec François Dahmani, nous avons montré que les techniques de petite simplification s'appliquent à une action acylindrique sur un espace hyperbolique [24].

Delzant a montré que dans cette situation, on obtient des sous-groupes libres normaux [Del96]. En utilisant les techniques plus géométriques des familles rotatrices de Gromov [Gro01], nous en donnons une autre preuve, et montrons que le sous-groupe normal engendré par une famille à petite simplification d'éléments pseudo-Anosov est un sous-groupe libre normal composé d'éléments pseudo-Anosov. Ceci répond à une question des années 80 sur l'existence de sous-groupes normaux purement pseudo-Anosov. En fait, on montre qu'il existe N tel que la famille des puissances N -ième des éléments pseudo-Anosov de longueur stable de translation R est à petite simplification.

Les corollaires attendus sont la SQ-universalité du groupe modulaire, l'existence d'un quotient du groupe modulaire dans lequel le stabilisateur d'une courbe se plonge, mais dans lequel l'image de tout élément pseudo-Anosov est d'ordre fini. L'abondance d'éléments à petite simplification implique aussi que tout sous-groupe du groupe modulaire possède beaucoup de quotients. On en déduit une nouvelle preuve que tout morphisme d'un réseau dans un groupe de Lie simple de rang supérieur à valeurs dans le groupe modulaire est d'image finie [FM98].

V.2 Le groupe des échanges d'intervalles

Le groupe IET des échanges d'intervalles est le groupe des bijections de l'intervalle $[0, 1[$ continues à droite, qui sont des translations par morceaux.

Problème V.2.1 (Franks, Katok). *Que peut-on dire des sous-groupes de type fini de IET . En particulier, IET contient-il un sous-groupe libre ?*

Cette question est assez intrigante. En effet, si $\Gamma < IET$ est un sous-groupe de type fini, il est facile de voir que l'orbite sous Γ de tout point de l'intervalle est à croissance polynomiale. Ceci n'implique cependant pas la croissance polynomiale de Γ , et on peut donner des exemples de groupes Γ qui ne sont pas à croissance polynomiale. Grigorchuk a suggéré que IET contenait peut-être des groupes à croissance intermédiaires.

François Dahmani, Koji Fujiwara et moi, avons commencé à étudier ce problème. S'il existe des groupes libres, on peut imaginer qu'en prenant deux éléments *au hasard* dans IET , ils engendreront un groupe libre. En fait, après quelques expérimentations sur ordinateur, nous n'avons pas réussi à trouver de groupe libre. Par contre, nous avons fréquemment trouvé des relations impliquant des commutateurs des générateurs considérés. De tels commutateurs produisent souvent des éléments dont le support est petit, et qui ont donc un commutant assez gros.

Grâce à cette observation, nous avons pu démontrer que si $\Gamma < IET$ est un groupe libre, aucun de ses éléments n'est une rotation (ni une rotation multiple). Ceci nous permet de résoudre un problème posé par Franks du plongement de $SO(3)$ dans IET , en démontrant que tout groupe de Lie connexe plongé (algébriquement, sans hypothèse de continuité) dans IET est nécessairement abélien.

Plus généralement, on démontre qu'il existe un G_δ -dense U_3 de l'ensemble des échanges de 3 intervalles, et pour tout n , un G_δ -dense U_n de l'ensemble des échanges de n intervalles, tel que aucun couple d'éléments dans $U_3 \times U_n$ n'engendre de groupe libre [25].

Chapitre VI

Bibliographie

VI.1 Travaux et publications

Publications

- [1] Vincent GUIARDEL : Approximations of stable actions on \mathbb{R} -trees. *Comment. Math. Helv.*, 73(1):89–121, 1998.
- [2] Vincent GUIARDEL : Dynamics of $\text{Out}(F_n)$ on the boundary of outer space. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 33(4):433–465, 2000.
- [3] Vincent GUIARDEL : Reading small actions of a one-ended hyperbolic group on \mathbb{R} -trees from its JSJ splitting. *Amer. J. Math.*, 122(4):667–688, 2000.
- [4] Vincent GUIARDEL : Une alternative sur l’entropie des groupes. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 334(9):743–746, 2002.
- [5] Vincent GUIARDEL : A very short proof of Forester’s rigidity result. *Geometry and Topology*, 7, 2003.
- [6] Vincent GUIARDEL : Limit groups and groups acting freely on \mathbb{R}^n -trees. *Geom. Topol.*, 8:1427–1470 (electronic), 2004.
- [7] Christophe CHAMPETIER et Vincent GUIARDEL : Limit groups as limits of free groups. *Israel J. Math.*, 146:1–75, 2005.
- [8] Vincent GUIARDEL : Cœur et nombre d’intersection pour les actions de groupes sur les arbres. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 38(6):847–888, 2005.
- [9] Vincent GUIARDEL et Gilbert LEVITT : The outer space of a free product. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 94(3):695–714, 2007.
- [10] Vincent GUIARDEL et Gilbert LEVITT : Deformation spaces of trees. *Groups Geom. Dyn.*, 1(2):135–181, 2007.
- [11] Vincent GUIARDEL et Gilbert LEVITT : A general construction of JSJ decompositions. In G.N. ARZHANTSEVA, L. BARTHOLDI, Burillo J. et E. VENTURA, éditeurs : *Geometric Group Theory, Geneva and Barcelona Conferences*, pages 65–74. Birkhäuser, 2007.
- [12] Vincent GUIARDEL : Actions of finitely generated groups on \mathbb{R} -trees. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 58(1):159–211, 2008.
- [13] Vincent GUIARDEL et Gilbert LEVITT : Trees of cylinders and canonical splittings. arXiv:0811.2383 [math.GR], 2008.
- [14] Vincent GUIARDEL et Gilbert LEVITT : Scott and Swarup’s regular neighbourhood as a tree of cylinders. arXiv:0811.2389v1 [math.GR], To appear in *Pacific Journal of Math.*, 2009.

- [15] François DAHMANI et Vincent GUIARDEL : Foliations for solving equations in groups: free, virtually free and hyperbolic groups. arXiv:0901.1830v1 [math.GR], 2009.
- [16] Vincent GUIARDEL et Gilbert LEVITT : Computing equations for residually free groups. arXiv:0902.2119v1 [math.GR], 2009.
- [17] Vincent GUIARDEL : Bounding the complexity of group actions on \mathbb{R} -trees. <http://math.univ-toulouse.fr/~guirardel>.
- [18] François DAHMANI et Vincent GUIARDEL : The isomorphism problem for hyperbolic groups. In preparation.
- [19] Vincent GUIARDEL et Gilbert LEVITT : JSJ decompositions: definitions, existence and uniqueness. In preparation.
- [20] Vincent GUIARDEL et Gilbert LEVITT : Automorphisms and canonical splittings. In preparation.
- [21] Vincent GUIARDEL et Gilbert LEVITT : Strata and canonical subtrees of \mathbb{R} -trees. In preparation.
- [22] Vincent GUIARDEL : Following train tracks towards the boundary of outer-space. In preparation.
- [23] Vincent GUIARDEL, Peter SCOTT et Gadde A. SWARUP : Adapted almost-invariant sets and splittings of groups. In preparation.
- [24] François DAHMANI et Vincent GUIARDEL : Small cancellation in the mapping class group. In preparation.
- [25] François DAHMANI, Koji FUJIWARA et Vincent GUIARDEL : Groups of interval exchange transformations. In preparation.

Autres travaux

- [26] Vincent GUIARDEL : *Actions de groupes sur des arbres réels et dynamique dans la frontière de l'outre-espace*. Thèse de doctorat, Université Toulouse III, janvier 1998.
- [27] Christophe CHAMPETIER et Vincent GUIARDEL : Monoïdes libres dans les groupes hyperboliques. In *Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie, Vol. 18, Année 1999–2000*, volume 18 de *Sémin. Théor. Spectr. Géom.*, pages 157–170. Univ. Grenoble I, Saint-Martin d'Hères, 2000. Notes d'exposé.

VI.2 Bibliographie

- [AB06] Emina ALIBEGOVIĆ et Mladen BESTVINA : Limit groups are CAT(0). *J. London Math. Soc. (2)*, 74(1):259–272, 2006.
- [App68] K. I. APPEL : One-variable equations in free groups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 19:912–918, 1968.
- [Bau67] Benjamin BAUMSLAG : Residually free groups. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 17:402–418, 1967.
- [Bes88] Mladen BESTVINA : Degenerations of the hyperbolic space. *Duke Math. J.*, 56(1):143–161, 1988.
- [BFa] Mladen BESTVINA et Mark FEIGN : Bounding the complexity of group actions on real trees. Manuscript.
- [BFb] Mladen BESTVINA et Mark FEIGN : Outer limits. Preprint.
- [BF91a] Mladen BESTVINA et Mark FEIGN : Bounding the complexity of simplicial group actions on trees. *Invent. Math.*, 103(3):449–469, 1991.
- [BF91b] Mladen BESTVINA et Mark FEIGN : Bounding the complexity of simplicial group actions on trees. *Invent. Math.*, 103(3):449–469, 1991.
- [BF95] Mladen BESTVINA et Mark FEIGN : Stable actions of groups on real trees. *Invent. Math.*, 121(2):287–321, 1995.
- [BF00] Mladen BESTVINA et Mark FEIGN : The topology at infinity of $\text{out}(F_n)$. *Invent. Math.*, 140(3):651–692, 2000.
- [BF03] Mladen BESTVINA et Mark FEIGN : Notes on sela’s work: Limit groups and makanin-razborov diagrams. arXiv:0809.0467v1 [math.GR], to appear in ”Geometry and Cohomology in Group Theory (Durham 2003)”, 2003.
- [BFH97] M. BESTVINA, M. FEIGN et M. HANDEL : Laminations, trees, and irreducible automorphisms of free groups. *Geom. Funct. Anal.*, 7(2):215–244, 1997.
- [BH92] Mladen BESTVINA et Michael HANDEL : Train tracks and automorphisms of free groups. *Ann. of Math. (2)*, 135(1):1–51, 1992.
- [BHMS08] Martin R. BRIDSON, James HOWIE, Charles F. MILLER, III et Hamish SHORT : Finitely presented residually free groups, 2008. arXiv:0809.3704v1 [math.GR].
- [BJ96] Hyman BASS et Renfang JIANG : Automorphism groups of tree actions and of graphs of groups. *J. Pure Appl. Algebra*, 112(2):109–155, 1996.
- [BM07] Martin R. BRIDSON et Charles F. MILLER, III : Structure and finiteness properties of subdirect products of groups, 2007. arXiv:0708.4331 [math.GR].
- [BMR99] Gilbert BAUMSLAG, Alexei MYASNIKOV et Vladimir REMESLENNIKOV : Algebraic geometry over groups. I. Algebraic sets and ideal theory. *J. Algebra*, 219(1):16–79, 1999.
- [BMS94] G. BAUMSLAG, C. F. MILLER, III et H. SHORT : Unsolvable problems about small cancellation and word hyperbolic groups. *Bull. London Math. Soc.*, 26(1): 97–101, 1994.
- [Bon86] Francis BONAHO : Bouts des variétés hyperboliques de dimension 3. *Ann. of Math. (2)*, 124(1):71–158, 1986.
- [Bow98] Brian H. BOWDITCH : Cut points and canonical splittings of hyperbolic groups. *Acta Math.*, 180(2):145–186, 1998.
- [Bow06] Brian H. BOWDITCH : Intersection numbers and the hyperbolicity of the curve complex. *J. Reine Angew. Math.*, 598:105–129, 2006.

- [Bow08] Brian H. BOWDITCH : Tight geodesics in the curve complex. *Invent. Math.*, 171(2):281–300, 2008.
- [BR84] Gilbert BAUMSLAG et James E. ROSEBLADE : Subgroups of direct products of free groups. *J. London Math. Soc. (2)*, 30(1):44–52, 1984.
- [BS73] A. BOREL et J.-P. SERRE : Corners and arithmetic groups. *Comment. Math. Helv.*, 48:436–491, 1973. Avec un appendice: Arrondissement des variétés à coins, par A. Douady et L. Hérault.
- [BV06] Martin R. BRIDSON et Karen VOGTMANN : Automorphism groups of free groups, surface groups and free abelian groups. *In Problems on mapping class groups and related topics*, volume 74 de *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 301–316. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [Car08] Mathieu CARETTE : The automorphism group of accessible groups, 2008. arXiv:0810.0043v1 [math.GR].
- [Chi92] I. M. CHISWELL : Nontrivial group actions on Λ -trees. *Bull. London Math. Soc.*, 24(3):277–280, 1992.
- [Chi94] I. M. CHISWELL : Harrison’s theorem for Λ -trees. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 45(177):1–12, 1994.
- [CHL08] Thierry COULBOIS, Arnaud HILION et Martin LUSTIG : \mathbb{R} -trees and laminations for free groups. I. Algebraic laminations. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 78(3):723–736, 2008.
- [CL95] Marshall M. COHEN et Martin LUSTIG : Very small group actions on \mathbb{R} -trees and Dehn twist automorphisms. *Topology*, 34(3):575–617, 1995.
- [Cla05] Matt CLAY : Contractibility of deformation spaces of G -trees. *Algebr. Geom. Topol.*, 5:1481–1503 (electronic), 2005.
- [CLS] Marc CULLER, Gilbert LEVITT et Peter SHALEN : Unpublished manuscript.
- [CM87] Marc CULLER et John W. MORGAN : Group actions on \mathbb{R} -trees. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 55(3):571–604, 1987.
- [Cul84] Marc CULLER : Finite groups of outer automorphisms of a free group. *In Contributions to group theory*, volume 33 de *Contemp. Math.*, pages 197–207. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984.
- [CV86] Marc CULLER et Karen VOGTMANN : Moduli of graphs and automorphisms of free groups. *Invent. Math.*, 84(1):91–119, 1986.
- [Dah03] François DAHMANI : Combination of convergence groups. *Geometry and Topology*, 7:933–963, 2003.
- [Dah05] François DAHMANI : Existential questions in (relatively) hyperbolic groups, 2005. arXiv:math.GR/0505345, to appear in Israel Journal of Math.
- [Deh12] M. DEHN : Über unendliche diskontinuierliche Gruppen. *Math. Ann.*, 71:116–144, 1912.
- [Del96] Thomas DELZANT : Sous-groupes distingués et quotients des groupes hyperboliques. *Duke Math. J.*, 83(3):661–682, 1996.
- [DG08a] François DAHMANI et Daniel GROVES : Detecting free splittings in relatively hyperbolic groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 360(12):6303–6318, 2008.
- [DG08b] François DAHMANI et Daniel GROVES : The isomorphism problem for toral relatively hyperbolic groups. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (107):211–290, 2008.

- [DN90] Claude DANTHONY et Arnaldo NOGUEIRA : Measured foliations on nonorientable surfaces. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 23(3):469–494, 1990.
- [DS99] M. J. DUNWOODY et M. E. SAGEEV : JSJ-splittings for finitely presented groups over slender groups. *Invent. Math.*, 135(1):25–44, 1999.
- [DS00] M. J. DUNWOODY et E. L. SWENSON : The algebraic torus theorem. *Invent. Math.*, 140(3):605–637, 2000.
- [Dun98] M. J. DUNWOODY : Folding sequences. In *The Epstein birthday schrift*, pages 139–158 (electronic). *Geom. Topol.*, Coventry, 1998.
- [FLP79] Albert FATHI, François LAUDENBACH et Valentin POÉNARU : *Travaux de Thurston sur les surfaces*. Société Mathématique de France, Paris, 1979. Séminaire Orsay, With an English summary.
- [FM98] Benson FARB et Howard MASUR : Superrigidity and mapping class groups. *Topology*, 37(6):1169–1176, 1998.
- [For02] Max FORESTER : Deformation and rigidity of simplicial group actions on trees. *Geom. Topol.*, 6:219–267 (electronic), 2002.
- [For03] Max FORESTER : On uniqueness of JSJ decompositions of finitely generated groups. *Comment. Math. Helv.*, 78:740–751, 2003.
- [For06] Max FORESTER : Splittings of generalized Baumslag-Solitar groups. *Geom. Dedicata*, 121:43–59, 2006.
- [FP06] K. FUJIWARA et P. PAPASOGLU : JSJ-decompositions of finitely presented groups and complexes of groups. *Geom. Funct. Anal.*, 16(1):70–125, 2006.
- [FR40] D. I. FOUXE-RABINOVITCH : Über die Automorphismengruppen der freien Produkte. I. *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.*, 8 (50):265–276, 1940.
- [FR41] D. I. FOUXE-RABINOVITCH : Über die Automorphismengruppen der freien Produkte. II. *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N. S.*, 9 (51):183–220, 1941.
- [Gab96] Damien GABORIAU : Dynamique des systèmes d’isométries: sur les bouts des orbites. *Invent. Math.*, 126(2):297–318, 1996.
- [GL95] Damien GABORIAU et Gilbert LEVITT : The rank of actions on \mathbb{R} -trees. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 28(5):549–570, 1995.
- [GLP94] D. GABORIAU, G. LEVITT et F. PAULIN : Pseudogroups of isometries of \mathbb{R} and Rips’ theorem on free actions on \mathbb{R} -trees. *Israel J. Math.*, 87(1-3):403–428, 1994.
- [Gro81] Mikhael GROMOV : *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, volume 1 de *Textes Mathématiques [Mathematical Texts]*. CEDIC, Paris, 1981. Edited by J. Lafontaine and P. Pansu.
- [Gro98] Shalom GROSS : *Group actions on Λ -trees*. Thèse de doctorat, Hebrew University, Jerusalem, 1998.
- [Gro01] M. GROMOV : $CAT(\kappa)$ -spaces: construction and concentration. *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)*, 280(Geom. i Topol. 7):100–140, 299–300, 2001.
- [Gru78] Fritz J. GRUNEWALD : On some groups which cannot be finitely presented. *J. London Math. Soc. (2)*, 17(3):427–436, 1978.
- [GW09] Daniel GROVES et Henry WILTON : Enumerating limit groups. *Groups Geom. Dyn.*, 3(3):389–399, 2009.
- [Hig00] N. HIGSON : Bivariant K -theory and the Novikov conjecture. *Geom. Funct. Anal.*, 10(3):563–581, 2000.

- [Joh79] Klaus JOHANNSON : *Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries*, volume 761 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1979.
- [JS79] William H. JACO et Peter B. SHALEN : Seifert fibered spaces in 3-manifolds. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 21(220):viii+192, 1979.
- [KL07] Ilya KAPOVICH et Martin LUSTIG : The actions of $\text{Out}(F_k)$ on the boundary of outer space and on the space of currents: minimal sets and equivariant incompatibility. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 27(3):827–847, 2007.
- [KM98a] O. KHARLAMPOVICH et A. MYASNIKOV : Irreducible affine varieties over a free group. I. Irreducibility of quadratic equations and Nullstellensatz. *J. Algebra*, 200(2):472–516, 1998.
- [KM98b] O. KHARLAMPOVICH et A. MYASNIKOV : Irreducible affine varieties over a free group. II. Systems in triangular quasi-quadratic form and description of residually free groups. *J. Algebra*, 200(2):517–570, 1998.
- [KM05a] Olga KHARLAMPOVICH et Alexei MYASNIKOV : Implicit function theorem over free groups. *J. Algebra*, 290(1):1–203, 2005.
- [KM05b] Olga KHARLAMPOVICH et Alexei G. MYASNIKOV : Effective JSJ decompositions. In *Groups, languages, algorithms*, volume 378 de *Contemp. Math.*, pages 87–212. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [KM06] Olga KHARLAMPOVICH et Alexei MYASNIKOV : Elementary theory of free non-abelian groups. *J. Algebra*, 302(2):451–552, 2006.
- [Kro90] P. H. KROPHOLLER : An analogue of the torus decomposition theorem for certain Poincaré duality groups. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 60(3):503–529, 1990.
- [Lev93] Gilbert LEVITT : La dynamique des pseudogroupes de rotations. *Invent. Math.*, 113(3):633–670, 1993.
- [Lev94a] Gilbert LEVITT : Graphs of actions on \mathbb{R} -trees. *Comment. Math. Helv.*, 69(1):28–38, 1994.
- [Lev94b] Gilbert LEVITT : \mathbb{R} -trees and the Bieri-Neumann-Strebel invariant. *Publ. Mat.*, 38(1):195–202, 1994.
- [Lev05a] Gilbert LEVITT : Automorphisms of hyperbolic groups and graphs of groups. *Geom. Dedicata*, 114:49–70, 2005.
- [Lev05b] Gilbert LEVITT : Characterizing rigid simplicial actions on trees. In *Geometric methods in group theory*, volume 372 de *Contemp. Math.*, pages 27–33. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [LL00] Gilbert LEVITT et Martin LUSTIG : Most automorphisms of a hyperbolic group have very simple dynamics. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 33(4):507–517, 2000.
- [LL08] Gilbert LEVITT et Martin LUSTIG : Automorphisms of free groups have asymptotically periodic dynamics. *J. Reine Angew. Math.*, 619:1–36, 2008.
- [Lor68] A. A. LORENC : Representations of sets of solutions of systems of equations with one unknown in a free group. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 178:290–292, 1968.
- [LP97] Gilbert LEVITT et Frédéric PAULIN : Geometric group actions on trees. *Amer. J. Math.*, 119(1):83–102, 1997.
- [LS06] Markus LOHREY et Gérard SENIZERGUES : Equations in hnn extensions, 2006. short version in proceedings ICALP’06, p. 504-515.

- [Lyn60] Roger C. LYNDON : Equations in free groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 96:445–457, 1960.
- [Mak82] G. S. MAKANIN : Equations in a free group. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 46(6):1199–1273, 1344, 1982.
- [Mak84] G. S. MAKANIN : Decidability of the universal and positive theories of a free group. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 48(4):735–749, 1984.
- [MM96] Darryl McCULLOUGH et Andy MILLER : Symmetric automorphisms of free products. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 122(582):viii+97, 1996.
- [MM99] Howard A. MASUR et Yair N. MINSKY : Geometry of the complex of curves. I. Hyperbolicity. *Invent. Math.*, 138(1):103–149, 1999.
- [MNS99] C. F. MILLER, III, Walter D. NEUMANN et G. A. SWARUP : Some examples of hyperbolic groups. *In Geometric group theory down under (Canberra, 1996)*, pages 195–202. de Gruyter, Berlin, 1999.
- [Pau89] Frédéric PAULIN : The Gromov topology on \mathbb{R} -trees. *Topology Appl.*, 32(3):197–221, 1989.
- [Pau91] Frédéric PAULIN : Outer automorphisms of hyperbolic groups and small actions on \mathbb{R} -trees. *In Arboreal group theory (Berkeley, CA, 1988)*, pages 331–343. Springer, New York, 1991.
- [Pau97a] Frédéric PAULIN : Actions de groupes sur les arbres. *Astérisque*, 1995/96(241): Exp. No. 808, 3, 97–137, 1997. Séminaire Bourbaki.
- [Pau97b] Frédéric PAULIN : Sur les automorphismes extérieurs des groupes hyperboliques. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 30(2):147–167, 1997.
- [Pau04] Frédéric PAULIN : Sur la théorie élémentaire des groupes libres (d’après Sela). *Astérisque*, (294):ix, 363–402, 2004.
- [Pet97] Martin R. PETTET : Virtually free groups with finitely many outer automorphisms. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 349(11):4565–4587, 1997.
- [PS07] Panos PAPASOGLU et Eric SWENSON : Boundaries and JSJ decompositions of $\text{cat}(0)$ -groups, 2007. arXiv:math/0701618v1 [math.GR].
- [Raz84] A. A. RAZBOROV : Systems of equations in a free group. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 48(4):779–832, 1984.
- [Rem92] V. N. REMESLENNIKOV : \exists -free groups as groups with a length function. *Ukrainian Math. J.*, 44(6):733–738, 1992. Translation (1993) from *Ukrain. Mat. Zh.* 44(6):813–818, 1992.
- [Rom79] V. A. ROMAN’KOV : Universal theory of nilpotent groups. *Mat. Zametki*, 25(4):487–495, 635, 1979.
- [RS94] E. RIPS et Z. SELA : Structure and rigidity in hyperbolic groups. I. *Geom. Funct. Anal.*, 4(3):337–371, 1994.
- [RS95] E. RIPS et Z. SELA : Canonical representatives and equations in hyperbolic groups. *Invent. Math.*, 120(3):489–512, 1995.
- [RS97] E. RIPS et Z. SELA : Cyclic splittings of finitely presented groups and the canonical JSJ decomposition. *Ann. of Math. (2)*, 146(1):53–109, 1997.
- [Sco73] G. P. SCOTT : Finitely generated 3-manifold groups are finitely presented. *J. London Math. Soc. (2)*, 6:437–440, 1973.
- [Sco98] Peter SCOTT : The symmetry of intersection numbers in group theory. *Geom. Topol.*, 2:11–29 (electronic), 1998.

- [Sel95] Z. SELA : The isomorphism problem for hyperbolic groups. I. *Ann. of Math.* (2), 141(2):217–283, 1995.
- [Sel97a] Z. SELA : Acylindrical accessibility for groups. *Invent. Math.*, 129(3):527–565, 1997.
- [Sel97b] Z. SELA : Structure and rigidity in (Gromov) hyperbolic groups and discrete groups in rank 1 Lie groups. II. *Geom. Funct. Anal.*, 7(3):561–593, 1997.
- [Sel99] Z. SELA : Endomorphisms of hyperbolic groups. I. The Hopf property. *Topology*, 38(2):301–321, 1999.
- [Sel01] Zlil SELA : Diophantine geometry over groups. I. Makanin-Razborov diagrams. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 93:31–105, 2001.
- [Sel02] Zlil SELA : Diophantine geometry over groups VII: The elementary theory of a hyperbolic group. <http://www.ma.huji.ac.il/~zlil>, 2002.
- [Sel06] Z. SELA : Diophantine geometry over groups. VI. The elementary theory of a free group. *Geom. Funct. Anal.*, 16(3):707–730, 2006.
- [Sha87] Peter B. SHALEN : Dendrology of groups: an introduction. *In Essays in group theory*, pages 265–319. Springer, New York-Berlin, 1987.
- [Sha91] Peter B. SHALEN : Dendrology and its applications. *In Group theory from a geometrical viewpoint (Trieste, 1990)*, pages 543–616. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1991.
- [Sko89] Richard SKORA : Deformations of length functions in groups. preprint, 1989.
- [SS03] Peter SCOTT et Gadde A. SWARUP : Regular neighbourhoods and canonical decompositions for groups. *Astérisque*, (289):vi+233, 2003.
- [SS04] Peter SCOTT et Gadde SWARUP : Errata for “regular neighbourhoods and canonical decompositions for groups”. <http://www.math.lsa.umich.edu/~pscott/>, 2004.
- [Tru95] J. K. TRUSS : Equation-solving in free nilpotent groups of class 2 and 3. *Bull. London Math. Soc.*, 27(1):39–45, 1995.
- [Wil08] Henry WILTON : Hall’s theorem for limit groups. *Geom. Funct. Anal.*, 18(1):271–303, 2008.
- [Zim81] Bruno ZIMMERMANN : Über Homöomorphismen n -dimensionaler Henkelkörper und endliche Erweiterungen von Schottky-Gruppen. *Comment. Math. Helv.*, 56(3):474–486, 1981.