Statistiques
Master Statistique et econométrie
TD - Feuille n^o 6

M. Emily, V. Monbet

Master 1 - 2011

Exercice 1

On dispose d'un n-échantillon $(X_1, \cdots, X_n)$ d'une loi de densité

$$(1-\theta)\mathbb{I}_{]-0.5,0]}(x) + (1+\theta)\mathbb{I}_{]0,0.5]}(x)$$

où θ est un paramètre réel inconnu.

1. Quelles conditions doit vérifier θ?
2. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ.
3. Donner la forme du test de rapport de vraisemblance pour $H_0 : \theta = \theta_0$ contre $H_1 : \theta = \theta_1$

Exercice 2

Soit $p > 1$ un paramètre fixé et soient $X_1, \cdots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes ayant la même loi, de densité

$$f_p(x) = \frac{p-1}{x^p}\mathbb{I}_{[1,+\infty[}(x).$$

1. Montrer qu'il existe deux constantes a et $b > 0$ telles que la suite

   $$\frac{1}{b\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}(\ln X_j - a)$$

   converge en loi vers une variable gaussienne standard.
2. On désire tester l'hypothèse $p = 2$ contre l'alternative $p = 3$. Quelle est la forme des tests de Neyman-Pearson?
3. Déduire de ce qui précède une région critique de niveau asymptotique 5% pour le test envisagé.

Exercice 3

Considérons n variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de densité

$$f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1} \text{ pour } 0 \leq x \leq 1$$

avec θ un paramètre réel positif.

1. Montrer que le test uniformément plus puissant pour tester

$$H_0 : \theta \leq 1 \text{ contre } H_1 : \theta > 1$$

   au niveau α rejette H_0 si

$$T(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) \geq k$$

2. Quelle est la distribution de $T(X_1, \cdots, X_n)$ sous H_0?
3. Supposons que $\alpha = 0.05$ et que $n = 50$. Trouver une valeur exacte ou approchée pour k.
4. Supposons maintenant que l'on utilise la statistique de test

$$S(X_1, \cdots, X_n) \sum_{i=1}^{n} \sin(\pi X_i/2)$$

   pour tester H_0 contre H_1. On rejette H_0 si $S \geq k'$. Pour $\alpha = 0.05$, trouver un valeur approchée de k' (en supposant que n est assez grand).
   Indication : Approcher la loi de S pour $\theta = 1$ en utilisant le théorème de limite centrale.
5. Supposons que $\theta = 2$. Déterminer une valeur approximative de n pour que le test de la question précédente ait une puissance égale à 0.90. Même question pour le test uniformément plus puissant.
   Indication : Approcher les lois de S et T pour $\theta = 2$ en utilisant le théorème de limite centrale.

Exercice 4

On dispose d'un n-échantillon $(X_1, \cdots, X_n)$ d'une loi gaussienne de paramètres μ et $\sigma = 1$.

1. Quelle région critique utiliseriez vous pour tester au niveau 5% l'hypothèse H_0 : $\mu = \mu_0$ contre l'alternative $\mu > \mu_0$? Rappelez quelles sont les qualités de ce test, que par la suite on notera $\mathcal{T}$.

2. En fait on a des doutes sur l'indépendance des variables X_j. Autrement dit on pense que ce sont bien des variables gaussiennes $(\mu, \sigma = 1)$, mais que leurs covariances ne sont peut être pas nulles, et on voudrait savoir si, dans ces conditions, le test $\mathcal{T}$ est bien de niveau 5%. Pour en avoir une idée on suppose que le vecteur $(X_1, \cdots, X_n)$ est gaussien et que

$$Cov(X_j, X_{j+1}) = \rho \quad \text{et} \quad Cov(X_j, X_{j+h}) = 0 \quad \text{si} \quad |h| > 1. \tag{1}$$

où $\rho \in [-1/2, 1]$ est un paramètre fixé.

(a) Calculez $Var\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right)$. Pourquoi a-t'on supposé $\rho \geq -1/2$?

(b) Quelle est l'expression, en fonction de ρ et de n, du vrai niveau du test $\mathcal{T}$? (Vous noterez Φ la fonction de répartition de la loi gaussienne standard). Etudiez ses variations en fonction de ρ. Commentez.

(c) On suppose toujours que la covariance est celle donnée en (1) et on voudrait construire un test de niveau 5%. Supposez que vous connaissez la valeur de ρ. Quel test proposez vous?

(d) En fait, on ne connait pas la valeur de ρ, mais on pense qu'elle est petite. Plus exactement on suppose que $|\rho| < 0.1$. Proposez un test $\mathcal{T}'$ dont le niveau soit $\alpha \leq 5\%$ quelle que soit la valeur de ρ dans l'intervalle considéré. Comparez les avantages des deux tests $\mathcal{T}'$ et $\mathcal{T}$.