

Statistiques
Master Statistique et économétrie
TD - Feuille n° 4

M. Emily, V. Monbet

Master 1 - 2011

Exercice 1

On considère une variable aléatoire X dont la loi a pour densité :

$$f(x) = \left((1 - \theta) + \frac{\theta}{2\sqrt{x}} \right) \mathbb{I}_{[0,1]}(x), \quad \theta \in [0, 1]$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une densité et calculer l'espérance mathématique de X .
2. Soit (X_1, \dots, X_n) un échantillon de X . En utilisant la méthode des moments, proposer un estimateur $\hat{\theta}$ de θ . Cet estimateur est-il sans biais ?
3. Calculer l'erreur quadratique moyenne.

Exercice 2

Des insomniaques avaient une durée de sommeil médiane de 2 heures par nuit avant d'être traités par un nouveau médicament. On sait que si ce médicament agit, ce ne peut être qu'en augmentant la durée de sommeil, mais de nombreux médecins doutent qu'il agisse réellement. Leurs doutes sont-ils justifiés si nos insomniaques, après avoir pris le médicament, ont les durées de sommeil nocturne suivantes :

3.1 1.8 2.7 2.4 2.9 0.2 3.7 5.1 8.3 2.1 2.4

On fixera le niveau du test à 5%.

1. Poser les hypothèses de test.
2. Choisir une statistique de test et donner sa loi sous l'hypothèse nulle.
3. Définir la région critique et conclure.

4. Quel est le degré de signification réel de la région critique?
5. Peut-on calculer la puissance du test? Proposer une méthode.

Exercice 3

Dans un petit sondage d'opinion pilote, 18 électeurs d'une circonscription ont été choisis au hasard, et on leur a demandé s'ils pensaient que le Premier Ministre faisait du bon travail. Six ont répondu 'oui' et 12 'non'. Est-ce une présomption suffisante pour rejeter l'hypothèse que 50% de l'électorat pense que le ministre fait du bon travail?

Exercice 4

Un jury d'examen national attribue des notes sur cent dans chaque matière, et publie l'information que "trois quart des candidats ont obtenu une note d'au moins égale à 40" (dans une matière donnée). Une école a présenté 32 candidats parmi lesquels 13 ont obtenu moins de 40. Le président des parents d'élèves soutient que cela démontre que les résultats de l'école sont inférieurs aux standards nationaux. Le directeur réplique en avançant que, même si la proportion nationale est $\frac{1}{4}$, il n'est pas invraisemblable que 13 candidats parmi les 32 d'un échantillon aléatoire aient une note inférieure à 40. Cette affirmation est-elle justifiée?

Exercice 5

Le Ministère du Commerce américain publie des estimations, obtenues sur des échantillons indépendants, des distances parcourues chaque année aux Etats-Unis par des véhicules de diverses catégories. Les chiffres pour les voitures et les camions sont donnés dans le tableau ci-dessous (en millier de miles), pour les années 1970 à 1983, dans cet ordre. Prouvent-ils une tendance monotone positive pour l'une ou l'autre catégorie?

Voitures

9.8 9.9 10 9.8 9.2 9.4 9.5 9.6 9.8 9.3 8.9 8.7 9.2 9.3

Camions

11.5 11.5 12.2 11.5 10.9 10.6 11.1 11.1 11.0 10.8 11.4 12.3 11.2 11.2