Statistiques
Master Statistique et econométrie
TD - Feuille n^o 2

M. Emily, V. Monbet

Master 1 - 2011

Exercice 1

Lors du contrôle d'une chaîne de médicaments, on s'intéresse au nombre de comprimés défecteux dans un lot. Les tests effectués sur 20 lots choisis au hasard ont donné les résultats suivants :

1	0	0	3	2	0	5	2	0	0	1	2	1	3	0	1	0	0	2	7

On suppose que ces observations sont des réalisations de variables i.i.d. de loi de probabilité inconnue d'espérance μ et de variance σ^2.

1. On considère quatre estimateurs pour μ :

   - $T_1 = X_1$
   - $T_2 = \frac{X_1+X_2}{2}$
   - $T_3 = \frac{X_1+X_2}{3}$
   - $T_2 = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$

   Calculer le biais et la variance de chacun de ces estimateurs. Quel est le meilleur estimateur? Quelle est l'estimation correspondante?

2. Proposer un estimateur de σ^2 et calculer l'estimation correspondante.

3. Proposer un estimateur de la proportion de lots qui contiennent au moins un comprimé défectueux et calculer l'estimation correspondante.

Exercice 2

Soit $(X_1, \cdots, X_n)$ des variables aléatoires i.i.d d'une loi d'espérance μ et de variance σ^2.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les constantes $a_1, \cdots, a_n$ pour que $\sum_{i=1}^n a_i X_i$ soit un estimateur sans biais de μ.

2. Parmi les estimateurs de μ de la forme $\sum_{i=1}^n a_i X_i$ quel est celui de variance minimale? Quel est le biais de cet estimateur?

3. Parmi les estimateurs de μ de la forme $\sum_{i=1}^n a_i X_i$ quel est celui dont l'erreur en moyenne quadratique est minimale?

4. Parmi les estimateurs sans biais de μ de la forme $\sum_{i=1}^n a_i X_i$ quel est celui dont la variance est minimale?

Exercice 3

On a observé les durées de vie (en millier d'heures) de 30 composants électroniques. les résultats sont les suivants :

0.1 ; 7.4 ; 1.0 ; 7.9 ; 2.1 ; 1.8 ; 17.9 ; 9.3 ; 6.5 ; 3.3 ; 5.6 ; 7.7 ; 0.1 ; 24.3 ; 8.1 ; 10.0;
11.9 ; 1.6 ; 2.7 ; 0.5 ; 5.6 ; 42.5 ; 5.2 ; 2.0 ; 0.2 ; 15.0 ; 3.5 ; 6.4 ; 0.6 ; 3.3

On admet que $\sum_{i=1}^n x_i = 223.5$ et $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 3826.8$.

Première partie - On suppose dans cette partie que la durée de vie des composants électroniques suit une loi exponentielle de paramètre inconnu $\theta > 0$. On rappelle que la densité de cette loi est donnée par :

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} \exp(-\frac{x}{\theta}) \text{ pour } x \geq 0, \ 0 \text{ sinon}$$

1. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance T de θ ainsi que l'estimation correspondante.

2. Cet estimateur du maximum de vraisemblance est-il une statistique exhaustive?

3. Calculer le biais et l'erreur en moyenne quadratique de T.

4. Etudier les propriétés asymptotiques de T (consistance, normalité asymptotique).

5. Calculer la fonction de répartition de la loi exponentielle, puis en déduire un estimateur de la probabilité que la durée de vie d'un composant soit supérieur à une durée quelconque $t \geq 0$. En déduire une estimation que la durée de vie d'un composant soit supérieur à 20000h, 30000h et 40000h et comparer ces résultats avec les fréquences empiriques calculées à partir des données.

6. Tracer sur un même graphique la densité de la loi exponentielle ajustée et un histogramme décrivant la répartition des durées de vie observées (on utilisera un découpage en classes de largeur 3). Discuter la qualité de l'ajustement.

Deuxère partie - On suppose maintenant que la durée de vie des composants électroniques suit une loi dont la densité de probabilité est donnée par :

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta^2} \exp(-\frac{x}{\theta}) \text{ pour } x \geq 0, \ 0 \text{ sinon}$$

avec θ un paramètre inconnu.

1. Calculs préliminaires. On pose pour $n \geq 0$,

$$J_n(\theta) = \int_0^{+\infty} x^n \exp\left(-\frac{x}{n}\right)$$

   (a) Montrer, à l'aide d'une intégration par partie, que pour $n \geq 0$, $J_{n+1} = (n+1)\theta J_n(\theta)$. En déduire que $J_n(\theta) = \theta^{n+1} n!$

   (b) En déduire que f_θ définit bien une densité de probabilité, puis que si X est une variable aléatoire dont la loi admet la densité de probabilité f_θ alors $E[X] = \theta$ et $Var(X) = 2\theta^2$.

2. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance T de θ, ainsi que l'estimation correspondante.

3. Caluler le biais et l'erreur en moyenne quadratique de T.

4. Etudier les propriétés asymptotiques de T.

Exercice 4

Il y a en France 17800 passages à niveau et on a relevé le nombre d'accidents mortels (hors suicides) sur ces passages entre 1985 et 1997. Les nombres observés sont les suivants :

1985	3
1988	2
1991, 1993, 1995, 1997	1

On suppose que le nombre d'accicents X au cours d'une année suit une loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$ inconnu. On a alors, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$P_\theta(X = k) = \frac{\theta^k \exp(-\theta)}{k!}$$

On rappelle que $E[X] = \theta$ et $Var(X) = \theta$.

1. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de T_n de θ, puis l'estimation de θ.

2. Montrer que l'estimateur obtenu à la question précédente est une statistique exhaustive pour θ.

3. Calculer le biais et l'erreur en moyenne quadratique de T_n, puis étudier ses propriétés asymptotiques.

4. Etudier les propriétés asymptotiques de $\sqrt{T_n}$