Statistiques
Master Statistique et econométrie
TD - Feuille n^o 1

M. Emily, V. Monbet

Master 1 - 2011

Exercice 1

Une banque accepte des rouleaux de pièces de 1 cent et donne 50 cents au client sans compter les pièces. Supposons que dans 30% des cas le rouleau contient seulement 49 pièces, qu'il en contient 50 dans 60 % des cas et 51 dans 10%.

1. Trouver la moyenne et la variance du montant que la banque perd sur un rouleau donné.
2. Approcher la probabilité que la banque perde plus de 25 cents sur 100 rouleaux indépendants.
3. Approcher la probabilité que la banque perde exactement 25 cents sur 100 rouleaux indépendants.
4. Approcher la probabilité que la banque perde de l'argent sur 100 rouleaux indépendants.
5. Combien de rouleaux la banque doit-elle collecter pour avoir 99% de chance d'avoir une perte positive?

Exercice 2

Contre une mise d'un montant de M euros, on lance un dé dont les 6 faces sont marquées : As, Roi, Dame, Valet, 10 et 9. Selon le résultat du lancer, le joueur gagne les sommes suivantes (en euros) :

As	Roi, Dame	Valet	10,9
10	6	5	0

On note X la variable aléatoire "gain lors d'un lancer" (sans tenir compte de la mise de départ).

1. Quelle est la loi de probabilité de X? Représenter cette loi de probabilité à l'aide d'un graphique.
2. Rappeler la définition générale de la fonction de répartition. Calculer et tracer la fonction de répartition.
3. Quelle est la probabilité d'avoir un gain supérieur ou égal à 5 euros?
4. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.
5. On dit que le jeu est équilibré lorsque le gain moyen lors d'un lancer est nul (en prenant en compte la mise initiale). Comment doit être choisie la mise pour que le jeu soit équilibré?

Exercice 3

Soit une X variable aléatoire dont la densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \text{ ou } x > 1 \\ 1 - |x| & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Représenter la fonction f à l'aide d'un graphe.
2. Vérifier que f définit bien une densité.
3. Déterminer la fonction de répartition F de X et représenter cette fonction à l'aide d'un graphe.
4. Calculer les quantités suivantes : $P(X < 0)$, $P(X > -\frac{3}{4})$ et $P(-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2})$.
5. Calculer $E(X)$ et $Var(X)$.

Exercice 4

Supposons que $X_1, \cdots, X_n$ sont des variables aléatoires i.i.d. de loi Gamma dont le paramètre de forme α et le paramètre d'échelle λ sont inconnus. La densité de probabilité de la loi Gamma s'écrit :

$$f(x; \alpha, \lambda) = \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} \text{ pour } x \leq 0$$

1. Donner la loi jointe du vecteur $(X_1, \cdots, X_n)$.
2. Montrer que la loi Gamma est une loi de la famille exponentielle. Indiquer le nombre de paramètres de la famille exponentielle. Donner l'ensemble de définition de $(X_1, \cdots, X_n)$.

Exercice 5

Supposons que $X_1, \cdots, X_n$ sont des variables aléatoires i.i.d. de loi Poisson telles que

$$E(X_i) = \exp(\alpha + \beta t_i)$$

avec $t_1, \cdots, t_n$ des constantes connues.

1. Calculer la moyenne d'une loi de Poisson de paramètre λ.
2. Donner la loi de X_1.
3. Donner la loi jointe du vecteur $(X_1, \cdots, X_n)$.
4. Montrer que la loi de Poisson obtenue à la question précédente est une loi de la famille exponentielle.

On rappelle que la loi de Poisson de paramètre λ est donnée par :

$$f(x; \lambda) = P_\lambda(X = x) = \frac{\lambda^x \exp(-\lambda)}{x!} \text{ pour } x \in \mathbb{N}$$

Exercice 6

Supposons que $X_1, \cdots, X_n$ sont des variables aléatoires i.i.d. de moyenne μ. On rappelle que le biais d'un estimateur $\hat{\theta}$ de θ est défini de la façon suivante :

$$b_\theta(\hat{\theta}) = E_\theta(\hat{\theta} - \theta)$$

Montrer que

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

est un estimateur non biaisé de μ.

Exercice 7

Soit X une variable aléatoire telle que $X \sim F_\theta$ et soit $\hat{\theta}$ un estimateur de θ. Montrer que

$$\text{EMQ} = Var_\theta(\hat{\theta}) + b_\theta(\hat{\theta})^2$$

Exercice 8

Supposons que $X_1, \cdots, X_n$ sont des variables aléatoires i.i.d. de loi Gauss de moyenne μ et de variance σ^2.

1. Montrer que
$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \text{ avec } \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$
est un estimateur sans biais de σ^2.

2. Rappeler quelle est la loi de la variable aléatoire
$$Y = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

3. Calculer $E_\sigma(S)$.

4. En déduire que S est un estimateur biaisé de σ. On remarque que ce biais tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Remarque - On retiendra de cet exercice, que le fait qu'un estimateur soit sans biais n'est pas toujours une notion primordiale tant que le biais est faible et tend vers 0.

Exercice 9

Supposons que $X_1, \cdots, X_n$ sont des variables aléatoires i.i.d. de moyenne μ et de variance σ^2. Montrer que
$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \text{ avec } \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$
est un estimateur consistant pour σ^2.

Indication - On peut utiliser le *lemme de Slutsky*.

Exercice 10

Supposons que $X_1, \cdots, X_n$ sont des variables i.i.d. de loi uniforme sur $[0, \theta]$. Et choisissons $\hat{\theta} = \max_{i=1,\cdots,n} X_i$. Montrer que la densité de $\hat{\theta}$ est
$$f(x;\theta) = \frac{n}{\theta^n}x^{n-1} \text{ pour } 0 \leq x \leq \theta$$