Statistiques
Master Statistique et econométrie
Contrôle continu n^o 1

M. Emily, V. Monbet

Master 1 - 2011

Durée de l'épreuve : 45 mn
Sans document.

Soit X une variable aléatoire de loi de Rayleigh de paramètre σ. Sa densité est donnée par :

$$f(x;\sigma) = \frac{x}{\sigma^2}\exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right) \text{ si } x \geq 0,\ 0 sinon$$

La loi de Rayleigh est la loi de la norme : si Y_1 et Y_2 sont deux variables aléatoires indépendantes de loi de Gauss centrée et réduite, alors $X = \sqrt{Y_1^2 + Y_2^2}$ suit une loi de Rayleigh. La loi de Rayleigh est utilisée, par exemple, pour modéliser la hauteur des vagues dans une mer formée, au large.

Soit $X_1, \cdots, X_n$ un échantillon iid de X.

Question 1

Montrer que $E(X) = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et $Var(X) = \frac{4-\pi}{2}\sigma^2$.

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)dx \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)dx \end{aligned}$$

or

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)dx = \frac{1}{2}\sigma^2$$

par définition de la variance d'une loi de Gauss centrée. Et on obtient donc

$$E(X) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}\frac{\sigma^2}{2} = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

avec

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

On obtient le moment d'ordre 2 par une intégration par partie en posant

$$u = x^2 \text{ et } v' = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

La primitive de $\frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$ est $2\exp\left(-x^2 2\sigma^2\right)$, on a alors

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0 + 2\int_0^{+\infty} x \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx \\ &= \left[2\sigma^2 \exp\left(-x^2 2\sigma^2\right)\right]_0^{\infty} = 2\sigma^2 \end{aligned}$$

Question 2

Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de σ^2.
Notons ℓ la log-vraisemblance.

$$\ell(\sigma^2; x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(-\log(\sigma^2) + \log(x_i) - \frac{x_i^2}{2\sigma^2}\right)$$

En dérivant par rapport à σ^2, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\sigma^2)}{\partial(\sigma^2)} &= \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} x_i^2\right) \\ &= -\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{aligned}$$

En annulant la dérivée, on obtient

$$\sigma^2 = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

La dérivée seconde est égale à

$$\frac{\partial^2 \ell(\sigma^2)}{\partial(\sigma^2)^2} = \frac{n}{\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

en remplaçant σ^2 par la valeur réalisant le maximum de vraisemblance $\hat{\sigma}^2 \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n x_i^2$

$$\frac{\partial^2 \ell(\hat{\sigma}^2)}{\partial(\sigma^2)^2} = \frac{n}{\hat{\sigma}^4} - \frac{2n\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^6} < 0$$

Finalement, l'estimateur du maximum de vraisemblance est donné par $\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n X_i^2$.

Question 3

Est-il sans biais? Sinon, en déduire un estimateur sans biais de σ^2.

On montre que

$$\begin{aligned} E(\widehat{\sigma^2}) &= E\left(\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n X_i^2\right) \\ &= \frac{1}{2}E(X^2) = \frac{1}{2}(Var(X) + E(X)^2) \\ &= \frac{1}{2}(\frac{4-\pi}{2}\sigma^2 + \frac{\pi}{2}\sigma^2) = \sigma^2 \end{aligned}$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance est donc sans biais.

Question 4

Donner la variance de l'estimateur du maximum de vraisemblance de σ^2.

$$Var(\widehat{\sigma^2}) = \frac{1}{4n^2}\sum_{i=1}^n Var(X_i^2) = \frac{nVar(X^2)}{4n^2}$$

Or X^2/σ^2 peut s'écrire comme la somme de deux variables aléatoires centrées et réduites au carré. Donc, la loi de X^2/σ^2 est une loi du du χ^2 à 2 degrés de liberté. Ainsi, $Var(X^2/\sigma^2) = 4$ et $Var(X_i^2) = 4\sigma^4$. On conclut donc que

$$Var(\widehat{\sigma^2}) = \frac{\sigma^4)}{n}$$

Question 5

Etudier les propriétés asymptotiques de l'estimateur du maximum de vraisemblance de σ^2.

L'estimateur du maximum de vraisemblance s'écrit comme la somme de n variables aléatoires de même loi de variance finie. On obtient donc la consistance par la loi forte (ou faible) des grands nombres. Par ailleurs, on peut appliquer le théorème centrale limite pour montrer que

$$\sqrt{n}\frac{\widehat{\sigma^2} - \sigma^2}{\sqrt{Var(\widehat{\sigma^2})}}$$

tend en loi vers une variable aléatoire gaussienne centrée.
On peut aussi montrer que la variance de l'estimateur atteint la borne de Cramer-Rao et donc que $\widehat{\sigma^2}$ est une statistique exhaustive.