Statistiques
Master Statistique et econométrie
Contrôle continu n^o 1

M. Emily, V. Monbet

Master 1 - 2011

Durée de l'épreuve : 45 mn
Sans documents.

Soit X une variable aléatoire de loi de Rayleigh de paramètre σ. Sa densité est donnée par :

$$f(x;\sigma) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right) \text{ si } x \geq 0,\ 0 sinon$$

La loi de Rayleigh est la loi de la norme : si Y_1 et Y_2 sont deux variables aléatoires indépendantes de loi de Gauss centrée et réduite, alors $X = \sqrt{Y_1^2 + Y_2^2}$ suit une loi de Rayleigh. La loi de Rayleigh est utilisée, par exemple, pour modéliser la hauteur des vagues dans une mer formée, au large.

Soit $X_1, \cdots, X_n$ un échantillon iid de X.

1. Montrer que $E(X) = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et $Var(X) = \frac{4-\pi}{2}\sigma^2$.

2. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de σ^2.

3. Est-il sans biais? Sinon, en déduire un estimateur sans biais de σ^2.

4. Donner la variance de l'estimateur du maximum de vraisemblance de σ^2.
   Indication : Trouver la loi de X^2/σ^2 puis se rappeler que la variance d'une loi du χ^2 à k degrés de liberté est égale à $2k$.

5. Etudier les propriétés asymptotiques de l'estimateur du maximum de vraisemblance de σ^2.