Feuille d'exercices
Variables Aléatoires et Conditionnement

B. Delyon, V. Monbet

Master 1 - 2013-2014

1 Indépendance et conditionnement

1.1 Introduction

Exercice 1

Pour améliorer la sûreté de fonctionnement d'un serveur informatique, on envisage d'introduire de la redondance, c'est-à-dire d'avoir plusieurs exemplaires des composants importants. On peut réaliser les opérations suivantes :

- on utilise trois alimentations de 300 Watts chacune : le serveur peut continuer à fonctionner avec une alimentation en panne car il consomme au maximum 500 Watts.
- on place les quatre disques durs en configuration RAID 5 : le serveur peut continuer à fonctionner avec un disque dur en panne.

On suppose que la probabilité de panne d'une alimentation est p et que celle d'une panne de disque dur est q. On suppose en outre que tous les composants sont indépendants.

1. Soit un serveur avec alimentations redondantes : calculer la probabilité de panne du serveur en supposant qu'aucun autre composant que les alimentations ne peut tomber en panne.
2. Soit un serveur avec disques durs RAID 5 : calculer la probabilité de panne du serveur en supposant qu'aucun autre composant que les disques dur ne peut tomber en panne.
3. Si $p = q$, quelle solution de redondance est la plus intéressante ?

Exercice 2

Deux laboratoires pharmaceutiques proposent chacun leur vaccin contre une maladie. On dispose des données suivantes :

- Une quart de la population a utilisé le vaccin A et un cinquième le vaccin B.
- Lors d'une épidémie, on constate que sur 1000 malades, 8 ont utilisé le vaccin A et 6 le B.

On appelle "indicateur" d'efficacité d'un vaccin le paramètre λ:

$$\lambda = \frac{\text{probabilité qu'un individu non vacciné é soit malade}}{\text{probabilité qu'un individu vacciné soit malade}}$$

Quel est selon le vaccin le plus efficace?

Exercice 3

Consider the population of the passengers of the Titanic, with the following variables:

	Female			Male		
	1st	2nd	3rd	1st	2nd	3rd
Survived	134	94	80	59	25	58
Died	9	13	132	120	148	441

1. What is the survival probability given that the passenger is a female in 2nd class? Same question for a male which is not in first class?
2. What is the expectation of the numerical variable "class" given that the passenger survived?
3. What is the expectation of the numerical variable "class" given that the passenger died?

Exercice 4

My mail box has three folders, and messages from George get into one of these randomly with equal probability. Any specific message that I search in folder i has a probability p_i of being found. I search folder 1 for a message of George and don't find it there. What is the probability that there was actually a message from him in this folder?

Exercice 5

A hen lays eggs. The number of eggs is a random variable which follows a Poisson distribution with parameter λ:

$$P(X = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

Each egg gives rise to a chick with probability p. We denote by Y the number of chicks. The last statement means that conditional to X, Y has the distribution of the sum of X Bernoulli variables $\mathcal{B}(1, p)$, hence $Y \sim \mathcal{B}(X, p)$:

$$P(Y = k|X = n) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$$

and the expectation of Y knowing X is pX.

1. Show that the marginal distribution of Y is Poisson with a certain parameter.
2. Show that the marginal distribution of X given $Y = k$ is shifted Poisson distribution with another parameter, and that

$$E[X|Y] = Y + \lambda(1-p).$$

Exercice 6

Soit X et Y deux variables indépendantes prenant les valeurs -1 ou 1 avec probabilité 1/2. Soit $Z = XY$.

1. Montrer que Z est indépendante de X.
2. Calculer $E(XYZ)$ et $E(XY)$. Qu'en déduisez vous?

1.2 Lois de probabilité

1. Soient Y et Z deux variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson de paramètres λ et μ respectivement. Donner la loi de $X = Y + Z$.

2. A filling station is supplied with gasoline once a week. Statistical analysis shows that its weekly volume of sales in thousand litre is well approximated with a random variable with density

$$p(x) = 5(1-x)^4 1_{0<x<1}.$$

What should be the capacity of the station tank in order to have each week a probability less than 10^{-5} to run out of gasoline?

3. A doctor has scheduled two appointments, one at 9 a.m. and the next one at 9:30 a.m. The amount of time an appointment lasts is exponential with expectation 30mn. Assuming that both patients are on time, find the expected amount of time that the 9:30 appointment spends at the doctor's office.

4. Let X be the normal variable $\mathcal{N}(0,1)$. Using an integration by parts, compute $E[X^4]$.

5. Let Y be the Gaussian variable $\mathcal{N}(0,1)$. Prove that $X = \sigma Y + m$ has distribution $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ (use the method of test functions).

6. Let Y be the Gaussian variable $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$. Prove that $X = (Y-m)/\sigma$ has distribution $\mathcal{N}(0,1)$.

7. Let X follow an exponential distribution with parameter λ; what is the distribution of $Y = [X]+1$? (Since Y is discrete, this means: compute for any k, $P(Y=k)$).

8. What is the value of

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2} dx?$$

Use this to compute $E[e^{tX}]$ when $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

9. Compute $E[e^{tX}]$ when $X \sim \mathcal{E}(1)$. For which values of t is this infinite?

10. Show that for a non-negative r.v. X with distribution function F

$$\int_0^\infty (1-F(t))dt = E[X]$$
$$\int_0^\infty t(1-F(t))dt = E[X^2]/2.$$

Hint: $F(t) = E[1_{X\le t}]$.

11. Let X be a non-negative r.v. Consider the function

$$F(t) = \frac{E[\min(X,t)]}{E[X]}, \quad t \ge 0$$

and $F(t) = 0$ for $t < 0$. This is the distribution function of a r.v. T. Prove that

$$E[T] = \frac{E[X^2]}{2E[X]}.$$

12. Let X be a r.v. with Cauchy distribution, i.e. the distribution on $\mathbb{R}$ with density $\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$. Calculate the distribution of $1/X$.

13. Let X be a random variable with density p. The median of its distribution is defined as the solution m to $F(m) = 1/2$. The continuity of F implies that the median exists but unicity is not guaranteed, so we should actually say "a median".

    (a) Give an example of a case where the median is not unique (plot the density and explain).

    (b) Prove that if m is the median of X, and a a real number, then $m + a$ is the median of $X + a$.

    (c) Show that

       (1) $P(X = m) = 0$

       (2) m is solution to $E[\text{sign}(X - m)] = 0$.

    (d) Prove that for any real number c, $E[|X - c|] \geq E[|X - m|]$.
    Hint: Prove and use the relation $|X - c| \geq (X - c)\text{sign}(X - m)$. It may be simpler to start with the case $m = 0$.

1.3 Vecteurs aléatoires

Exercice 0

Calculer la loi marginale de X pour la densité

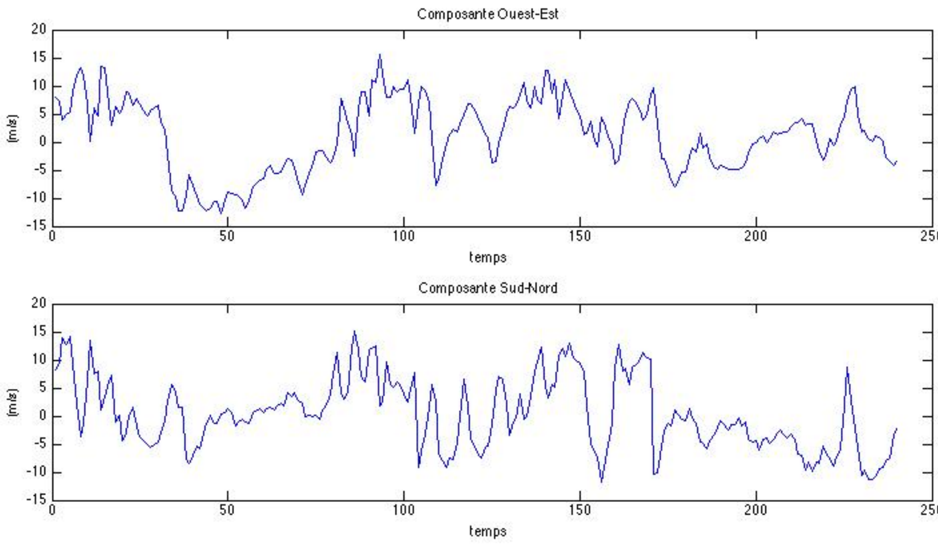
$$p(x, y) = se^{-xy}\mathbb{I}_{y>0}\mathbb{I}_{0<x<1}$$

Même question pour

$$p(x, y) = sy^{x-1}e^{-x}\mathbb{I}_{x>0}\mathbb{I}_{0<y<1}$$

Exercice 1

Nous considérons des données de vent à Ouessant. Les données sont fournies en coordonnées cartésiennes, c'est à dire qu'on a la composante Ouest-Est et la composante Sud-Nord du vent. On note U et V ces deux variables et f la densité jointe instantanée du couple (U, V). La figure ci-dessous donne un exemple de série temporelle des deux composantes.



Il n'est pas très naturel de considérer le vent sous cette forme. On cherche alors une représentation en coordonnées polaires. Notons R le rayon qui représente l'intensité du vent et θ la direction. On veut de plus écrire la loi du couple (R, θ) quand on suppose que le couple (U, V) suit une loi de Gauss centrée de matrice de covariance de la forme $\sigma^2\mathbb{I}$. Cette hypothèse est très simplificatrice.

1. Ecrire f. Quelle est la loi de U? de V?
2. Ecrire U et V en fonction de R et θ).
3. Donner la matrice jacobienne puis le jacobien de la transformation $(R, \theta) \to (U(R, \theta), V(R, \theta))$
4. Calculer la loi jointe du couple (R, θ).
5. En déduire les lois de R et θ.

Remarque - La densité de la loi de Rayleigh est donnée par $p(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)$.

Exercice 2

Deux personnes A et B ont rendez-vous à 14h00 mais elles sont peu ponctuelles, de telle sorte que les instants X et Y de leurs arrivées sont indépendants et uniformément répartis sur $[13, 14]$; on note T la durée de l'attente du premier arrivé. Calculer a loi de T et son espérance.

Exercice 3

On se donne un vecteur aléatoire $Z = (X, Y)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, avec X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi. La densité de probabilité f de Z est définie par

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2}$$

On pose $(U, V) = r_\theta(Z)$ i.e.

$$(U, V) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

1. Donner les densités marginales de X et Y
2. Déterminer les lois marginales de U et V. Sont-elles indépendantes?

Exercice 4

Let $X \sim \mathcal{N}(m, R)$ a d-dimensional random vector

1. For $A \in \mathbb{R}^{p\times d}$, $B \in R^{q\times d}$ compute the covariance matrix of AX and BX.
2. For $a, b \in R^d$ compute the covariance of $\langle a, X\rangle$ and $\langle b, X\rangle$ (use the previous question).

Exercice 5

Let X and Y be $\mathcal{E}(\lambda)$ and $\mathcal{E}(\mu)$ independent random variables. What is the distribution of $Z = \min(X, Y)$?

Hint: Use the test function method. Notice that for any function f, $f(Z) = 1_{X<Y} f(X) + 1_{X\geq Y} f(Y)$.

Exercice 6

Let X and Y be $\Gamma(n, \lambda)$ and $\Gamma(p, \lambda)$ independent random variables. What is the distribution of $Z = (\frac{X}{X+Y}, X+Y)$?

$$f(x) = \frac{x^{n-1} \exp(-x/\lambda)}{\Gamma(n)\lambda^n}$$

Exercice 7

Let X, Y and Z be independent with distribution functions F, G, and H.

1. What is the distribution function of $T = \max(X, Y, Z)$?
2. What is the distribution function of $T = \min(X, Y, Z)$?

   Hint: compute $1 - F_T(t) = P(T > t)$.

Exercice 8

Let X and Y be independent $\mathcal{E}(1)$. Show that the distribution of $(T, Z) = (\frac{X}{X+Y}, X+Y)$ has density $1_{0<t<1}1_{0<z}ze^{-z}$.

Exercice 9

Let $(X, Y) \sim \mathcal{N}(0, Id)$ (2-dimensional). What is the distribution of X/Y?
Hint: Use the test function method. Notice that $\frac{d}{dt}e^{-t^2/2} = -te^{-t^2/2}$.

Exercice 10

Let X be a real Gaussian variable, U be an independent variable with $P(U = 1) = P(U = -1) = 1/2$. Set $Y = UX$. Show that X and Y are uncorrelated but not independent. Hint: compute $E[X^2Y^2]$.

1.4 Conditionnement

1. Let X and Y be two independent variables taking values -1 or 1 with probability $1/2$. Let $Z = XY$. We have seen that Z is independent of X, Z is independent of Y but Z is not independent of (X, Y). Compute $E[X|Y]$ and $E[X|Y, Z]$.
2. Sometimes, the simplest way to compute $E[Y]$ is to use the formula $E[Y] = E[E[Y|X]]$. Here is an example. Assume that one throws a dice, the result is X and then throws a coin X times. Y is the number of heads.
3. We consider the density $p(x, y) = xe^{-xy}1_{y>0}1_{0<x<1}$ on $\mathbb{R}^2$. Compute p_X and $p(y|x)$.
4. Compute p_X, $p(y|x)$, $E[Y|X]$, $Var(Y|X) = E[Y^2|X] - E[Y|X]^2$ when $p(x, y) = xy^{x-1}e^{-x}1_{x>0}1_{0<y<1}$. Compute also the conditional c.d.f. $p(Y \le y|X)$.
5. Let X be an $\mathcal{E}(1)$ variable and Y have, conditionally to X the distribution $\mathcal{P}(X)$. What is the distribution of Y? What is the distribution of X given $Y = k$?
6. Let X be a geometric variable with parameter p and Y have, conditionally to X the distribution gamma with parameters 1 an Y (density $1_{y\ge 0}\lambda e^{-\lambda y}\frac{(\lambda y)^{n-1}}{(n-1)!}$.). What is the distribution of Y? What is the distribution of X given $Y = y$?