

EXPOSE ORAL

----- Modèle ARMA

I . Série Temporelle

II . Processus stationnaire

III. Modèle ARMA

IV . Modélisation de Box et Jenkins

V . Application

I . Série Temporelle

- **I .1 Définition :**
- une série temporelle est une suite de nombres réels , indexés par les entiers relatifs tels que le temps. Pour chaque instant du temps, la valeur de la quantité étudiée X_t est appelée variable aléatoire. L'ensemble des valeurs X_t quand t varie est appelé processus aléatoire

$$\{X_t, t \in T\}$$

I . Série Temporelle

- **I .1 Définition**

- Une série temporelle est une suite de nombres réels, indexés par les entiers relatifs tels que le temps .

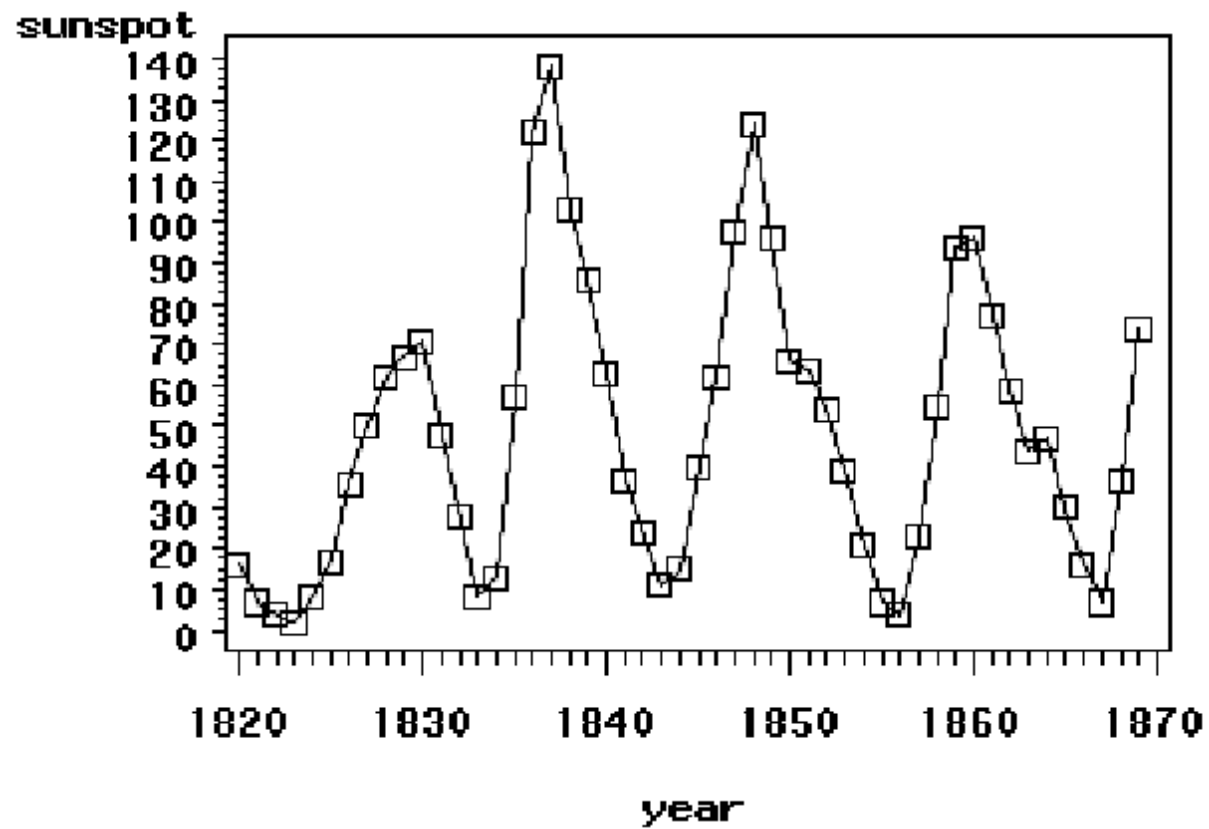
Pour chaque instant du temps , la valeur de la quantité étudiée X_t est appelée variable aléatoire . L'ensemble des valeurs X_t quand t varie est appelé processus aléatoire

$$\{ X_t , t \in T \}$$

- **I .2 Domaine d'application**

- en astronomie ('on the periodicity of sunspots', 1906),
- en météorologie ('time-series regression of sea level on weather ', 1968)
- en théorie du signal ('Noise in FM receivers', 1963)
- en biologie ('the autocorrelation curves of schizophrenic brain waves and the power spectrum', 1960)
- en économie ('time-series analysis of imports, exports and other economic variables', 1971)...etc.

En astronomie ('on the periodicity of sunspots', 1906)



- **I .3 Objectif**

- Modéliser les mouvements de la série temporelle à partir de son histoire et des valeurs présentes et passés d'un Bruit Blanc avec un modèle linéaire .

- **I .4 Histoire**

1927 G.U.Yule -- modèle AR

1931 G.T.Walker – modèle MA et modèle ARMA

1970 G.E.P.Box et G.M.Jenkins (Box—Jenkins)

《Time Series Analysis Forecasting and Control》

1982 ARCH

1985 GARCH

II . Processus stationnaire

- **II . 1 conception de stationnarité**

La stationnarité joue un rôle central dans la théorie des processus

- Processus fortement stationnaire(ou au sens strict) : la distribution de probabilité est invariante par translation de l'axe du temps
- Processus faiblement stationnaire (ou stationnaire à l'ordre 2) : permanence des deux premiers moments (conditions utilisées en pratique)

$$1) EX_t^2 < \infty, \forall t \in T$$

$$2) EX_t = \mu, \forall t \in T$$

$$3) \text{Cov}(X_t, X_{t+k}) = \gamma_k, \forall t, k \in Z$$

- **II . 2 Caractéristiques d'une série temporelle**

- Fonction d'autocovariance :

$$\gamma_k = \text{Cov}(X_t, X_{t+k})$$

- Fonction d'autocorrélation (ACF)

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}, k \in \mathbb{Z}$$

- Fonction d'autocorrélation partielle (PACF) :

$$\psi_X(h) = \frac{|\mathfrak{R}^*(h)|}{|\mathfrak{R}(h)|} \quad \text{avec } \mathfrak{R}(h) = \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{h-1} \\ \dots & & & \dots \\ \dots & \dots & & \dots \\ \dots & & \dots & \dots \\ \rho_{h-1} & \rho_{h-2} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$\mathfrak{R}^*(h)$ obtenue en remplaçant la dernière colonne de $\mathfrak{R}(h)$ par le vecteur $[\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_h]$

- **II. 3 Exemple de processus stationnaire : Bruit blanc**

(1) $EX_t = \mu, \forall t \in T$

(2) $\gamma(t, s) = \begin{cases} \sigma^2, & t = s \\ 0, & t \neq s \end{cases}, \forall t, s \in T$

Autocorrelations

Lag	Covariance	Correlation	-1	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	
0	1.005528	1.00000																						*****
1	-0.0010647	-.00106												.	.									.
2	-0.036747	-.03655											*	.	.									.
3	-0.0062567	-.00622										
4	0.011938	0.01187										
5	-0.025139	-.02500											*	.	.									.
6	-0.014428	-.01435										
7	0.0088565	0.00881										
8	-0.010179	-.01012										
9	-0.026893	-.02674											*	.	.									.
10	-0.024882	-.02475										
11	-0.014021	-.01394										
12	0.035527	0.03533											.	*	.									.

"," marks two standard errors

III. Modèle ARMA

III.1 Opérateur retard

III.1.1 Différence

$$\begin{aligned}\nabla x_t &= x_t - x_{t-1} & \nabla_k x_t &= x_t - x_{t-k} \\ \nabla^p x_t &= \nabla^{p-1} x_t - \nabla^{p-1} x_{t-1}\end{aligned}$$

III.1.2 Opérateur retard, noté B

$$x_{t-p} = B^p x_t, \forall p \geq 1$$

$$B^0 = 1$$

$$B(c \cdot x_t) = c \cdot B(x_t) = c \cdot x_{t-1},$$

$$B(x_t \pm y_t) = x_{t-1} \pm y_{t-1}$$

$$B^n x_t = x_{t-n}$$

$$(1 - B)^n = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i B^i, \quad C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

III.1.3 Appliquer l'opérateur retard

$$\nabla^p x_t = (1 - B)^p x_t = \sum_{i=0}^p (-1)^i C_p^i x_{t-i}$$

$$\nabla_k x_t = x_t - x_{t-k} = (1 - B^k) x_t$$

III.2 Cas particulier : AR(p)

$$\left\{ \begin{array}{l} x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \dots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t \\ \phi_p \neq 0 \\ E(\varepsilon_t) = 0, \text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2, E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0, s \neq t \\ E x_s \varepsilon_t = 0, \forall s < t \end{array} \right.$$

$$\Phi(B)x_t = \varepsilon_t$$

$$\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$$

- Propriété

$$Ex_t = E(\phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \dots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t)$$

$$Ex_t = \mu, \quad E(\varepsilon_t) = 0, \quad \forall t \in T$$

$$\mu = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1 - \dots - \phi_p}$$

- Fonction d'autocovariance

$$E(x_t x_{t-k}) = \phi_1 E(x_{t-1} x_{t-k}) + \dots + \phi_p E(x_{t-p} x_{t-k}) + E(\varepsilon_t x_{t-k})$$

$$E(\varepsilon_t x_{t-k}) = 0$$

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p}, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\gamma_0 = \text{Var}(X_t)$$

Fonction d'autocorrélation

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \cdots + \phi_p \rho_{k-p}, \quad k = 1, 2, \dots$$

- Fonction d'autocorrélation partielle

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 = \phi_{k1}\rho_0 + \phi_{k2}\rho_1 + \dots + \phi_{kk}\rho_{k-1} \\ \rho_2 = \phi_{k1}\rho_1 + \phi_{k2}\rho_0 + \dots + \phi_{kk}\rho_{k-2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \rho_k = \phi_{k1}\rho_{k-1} + \phi_{k2}\rho_{k-2} + \dots + \phi_{kk}\rho_0 \end{array} \right. \quad \phi_{kk} = \frac{E[(x_t - \hat{E}x_t)(x_{t-k} - \hat{E}x_{kt})]}{E[(x_{t-k} - \hat{E}x_{t-k})^2]}$$

- $\phi_{kk} = 0, k > p$

III.3 Cas particulier : MA(q)

$$\begin{cases} x_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \\ \theta_q \neq 0 \\ E(\varepsilon_t) = 0, \text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2, E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0, s \neq t \end{cases}$$

$$x_t = \Theta(B)\varepsilon_t$$

$$\Theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$$

- Propriété

$$\begin{aligned} Ex_t &= E(\mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}) \\ &= \mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(x_t) &= Var(\mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}) \\ &= (1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2) \sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

- Études des autocovariance γ_k

$$\gamma_k = \begin{cases} (1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2) \sigma_\varepsilon^2, & k = 0 \\ (-\theta_k + \sum_{i=1}^{q-k} \theta_i \theta_{k+i}) \sigma_\varepsilon^2, & 1 \leq k \leq q \\ 0, & k > q \end{cases}$$

Le Corrélogramme

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \frac{-\theta_k + \sum_{i=1}^{q-k} \theta_i \theta_{k+i}}{1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2}, & 1 \leq k \leq q \\ 0, & k > q \end{cases}$$

Si $q < \infty$, MA(q) stationnaire

- Le corrélogramme de MA(q) s'annule à partir de q+1

$$\frac{E\{[x_t - \hat{E}(x_t)][x_{t-k} - \hat{E}(x_{t-k})]\}}{\text{Var}(x_{t-k} | x_{t-1}, \dots, x_{t-k+1})} = \frac{E[(\varepsilon_t - \sum_{l=0}^{\infty} I_{l+k} x_{t-l-k})x_{t-k}]}{\text{Var}(x_{t-k})}$$

$$= \frac{E(\varepsilon_t x_{t-k}) - \sum_{l=0}^{\infty} I_{l+k} E(x_{t-l-k} x_{t-k})}{(1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2) \sigma^2} = \frac{-\sum_{l=0}^{\infty} I_{l+k} \gamma_l}{(1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2) \sigma^2}$$

car $\sum_{l=0}^{\infty} I_{l+k} \gamma_l \neq 0$

III.4 Modèle ARMA

- III.4.1 Définition générale

Un processus stationnaire X_t suit un ARMA(p,q) s'il vérifie la relation suivante :

$$\begin{cases} X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \\ \phi_p \neq 0, \quad \theta_q \neq 0 \\ \varepsilon_t \sim BB(0, \sigma_\varepsilon^2) \end{cases}$$

- En introduisant l'opérateur retard, la relation s'écrit :

$$\Phi(L)X_t = \Theta(L)\varepsilon_t$$

avec $\Phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p$

et $\Theta(L) = 1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q$

- **III.4.2 La théorème de Wold**

- Une version simple du théorème de Wold :

Soit T réalisations d'un processus stationnaire centré.

$$\{X_t\}_{t=1}^T$$

$$\exists \varepsilon_t \sim BB(0, \sigma_\varepsilon^2) \quad \text{et} \quad \exists (\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots)$$

$$\text{avec } \delta_0 = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \delta_i = 0$$

$$\text{tels que } X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i \varepsilon_{t-i} = \delta(L) \varepsilon_t$$

- tout processus (X_t) stationnaire peut se mettre sous forme $MA(\infty)$,

- **Approximation fractionnelle du théorème de Wold**

Soit $\theta(L) = 1 + \theta_1 L + \dots + \theta_q L^q$ et $\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p$

avec $\delta(L) \approx \frac{\theta(L)}{\phi(L)}$

Le processus X_t peut être réécrit sous la forme

$$\phi(L)X_t = \theta(L)\varepsilon_t$$

ou $X_t = \frac{\theta(L)}{\phi(L)}\varepsilon_t$: modélisation ARMA(p, q) de X_t

➤ ARMA: approximation de l'écriture MA(∞)

- Remarque : un modèle ARMA stationnaire et inversible peut toujours se réécrire sous la forme d'un modèle AR ou d'un modèle MA
- Cas particuliers
- ARMA(p,0) ou AR(p) : $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$
- ARMA(0,q) ou MA (q) : $X_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$
- ARMA(0,0) : bruit blanc

IV. Modélisation de Box et Jenkins

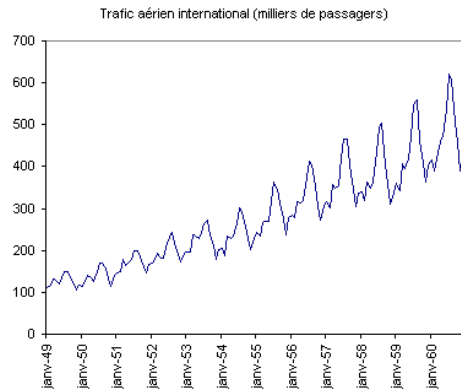
- Stationnarisation et Dessaisonalisation
- Identification
- Estimation
- Validation et Test
- Prévisions

- **IV.1 Stationnarisation et Dessaisonalisation**

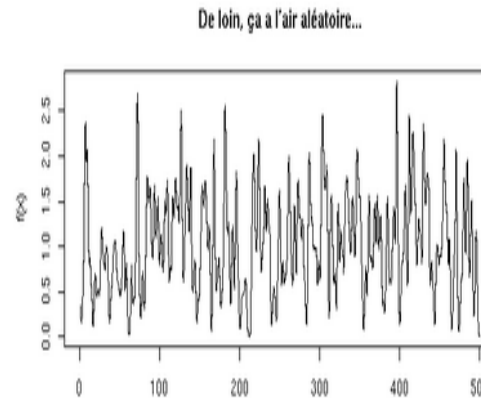
- IV.1.1 Tests de la stationnarité**

- Pour vérifier la stationnarité : plusieurs méthodes

- ✦ Examen visuel de la série



Pas stationnaire



stationnaire

- ✦ Calculs de la moyenne et de la variance sur des sous ensembles de la serie et tests d'égalité
 - ✦ Analyse visuelle de la décroissance de la fonction d'autocorrélation
 - ✦ Tests de recine unité (Dickey-Fuller, ...)

- **Tests de racine unité**

———**identification de l'ordre d'intégration des séries**

- Le test de Dickey & Fuller propose de tester 3 situations

1. H_0 : y_t est un pure RW

$$y_t - \rho y_{t-1} = \varepsilon_t \longrightarrow \Delta y_t = (\rho - 1)y_{t-1} + \varepsilon_t \quad H_0 : \rho = 1$$

2. H_0 : y_t est un RW avec dérive

$$y_t - \rho y_{t-1} = \alpha + \varepsilon_t \longrightarrow \Delta y_t = \alpha + (\rho - 1)y_{t-1} + \varepsilon_t \quad H_0 : \alpha = \rho - 1 = 0$$

3. H_0 : y_t est un RW avec trend et dérive

$$y_t - \rho y_{t-1} = \alpha + \beta t + \varepsilon_t \longrightarrow \Delta y_t = \alpha + \beta t + (\rho - 1)y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$H_0 : \alpha = \beta = \rho - 1 = 0$$

- Le test de Dickey & Fuller Augmenté

H_0 : est intégré d'ordre au moins 1

H_1 : le processus suit un modèle AR(p)

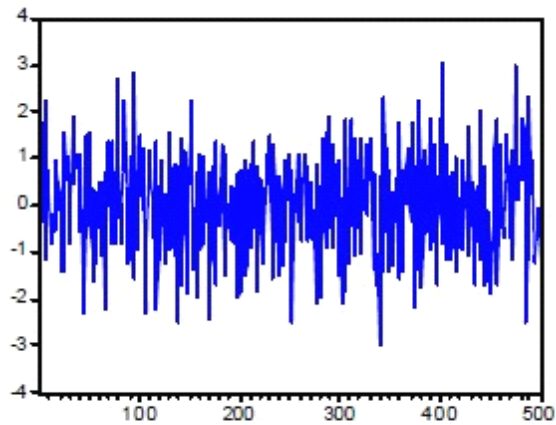
$$A(L)y_t = \varepsilon_t \quad H_0 : A(1) = 0$$

$$A(L)y_t = \alpha + \varepsilon_t \quad H_0 : A(1) = \alpha = 0$$

$$A(L)y_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t \quad H_0 : A(1) = \alpha = \beta = 0$$

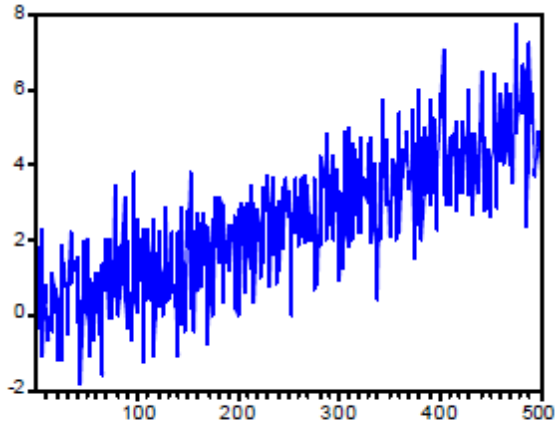
- Compléments sur les tests de racine unité
- Tests de Phillips et Perron

Ils proposent une correction non paramétrique des deux statistique des test de Dickey et Fuller



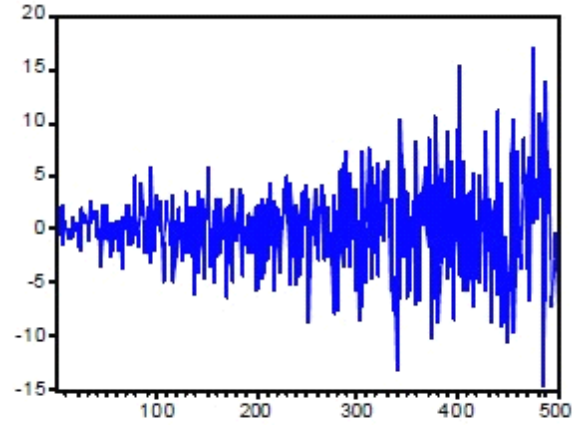
X

Série stationnaire



Z

Série non stationnaire
en moyenne



Y

Série non stationnaire
en variance

IV.1.2 Transformation stationnarisante d'un processus non stationnaire

- **La série non stationnaire**
- **processus TS (Trend stationary)** présente une non stationnarité de nature déterministe

$$Y_t - f(t) = Z_t \text{ stationnaire}$$

- **processus DS (Difference stationary)** présente une non stationnarité de nature stochastique

$$(1 - L)_d Y_t = Z_t \text{ stationnaire}$$

- **IV.1.2** Si la série n'est pas stationnaire, il faut la stationnariser par une méthode adaptée

Processus TS

$X_t = f(t) + E_t$ avec $f(t) =$ fonction déterministe du temps, E_t : stationnaire

Décomposition tendance déterministe - fluctuations

Exemples fréquents :

- Trend linéaire : $X_t = \alpha + \beta_1 t$

- Trend quadratique : $X_t = \alpha + \beta_1 t + \beta_2 t^2$

- Trend polynomial : $X_t = \alpha + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \dots + \beta_n t^n$

- Trend exponentiel : $X_t = \alpha e^{\beta t} \Rightarrow \text{Log}(X_t^{\text{Trend}}) = \text{Log}(\alpha) + \beta t$

- Décomposition saisonnalité déterministe - fluctuations

Modèle sans tendance :
$$X_t = \sum_{i=1}^s \gamma_i D_{i,t} + u_t$$

Modèle avec tendance :
$$X_t = \beta t + \sum_{i=1}^s \gamma_i D_{i,t} + u_t$$

- **Processus DS**

- Les plus utilisées :

- La différence d'ordre d : $\Delta^d X_t = (1-B)^d X_t$

- **Trend stochastique**

$$\Delta X_t = (X_t - X_{t-1}) \sim I(0)$$

- **Saisonnalité stochastique**

$$\Delta_s X_t = (X_t - X_{t-s}) \sim I(0)$$

- **Séries avec trend et saisonnalité stochastiques**

$$\begin{aligned} \Delta \Delta_s X_t &= (1-L)(1-L^s) X_t \\ &= (X_t - X_{t-s}) - (X_{t-1} - X_{t-s-1}) \end{aligned}$$

IV.2 Identification

- Objectif : déterminer d , p , q
- Outils d'identification :
 - ACF
 - PACF
 - Fonction d'autocorrélation inverse
 - Méthode du coin
 - Critères d'information AIC
 - la fonction d'autocorrélation étendue (Tsay, & Ciao)
 - Méthode 'SCAN...

- ACF et PACF

	<i>ACF</i>	<i>PACF</i>
<i>AR(p)</i>	<i>décroissance géométrique vers 0</i>	<i>$\varphi_{kk}=0$ pour $k>p$</i>
<i>MA(q)</i>	<i>$\rho_k=0$ pour $k>q$</i>	<i>décroissance géométrique vers 0</i>
<i>ARMA(p,q)</i>	<i>décroissance géométrique vers 0</i>	<i>décroissance géométrique vers 0</i>

- Critères d'information AIC

- - Estimation de tous les modèles ARMA(p,q) pour $p \leq p^{\max}$
et $q \leq q^{\max}$

- On retient la forme ARMA(p, q) qui minimise au choix l'un
des deux critères AIC ou BIC suivants ($\hat{\sigma}^2 = (\sum \hat{\epsilon}_t^2) / T$)

critere AIC : $AIC(p, q) = \log \hat{\sigma}^2 + \frac{2(p+q)}{T}$

critere BIC : $BIC(p, q) = \log \hat{\sigma}^2 + (p+q) \frac{\log(T)}{T}$

IV.3 Estimation

- L'estimateur du maximum de vraisemblance

H1 on suppose que la population des résidus $\{ \varepsilon_t \}$ peut être décrite par un processus bruit blanc gaussien $N(0, \sigma^2_\varepsilon)$.

Écrivons alors la vraisemblance associée au vecteur de réalisation (x_1, x_2, \dots, x_T) .

$$(2\pi\sigma_\varepsilon^2)^{-T/2} \det [(\theta_i, \phi_i)]^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} x' [(\theta_i, \phi_i)]^{-1} x \right\}$$

IV.4 Validation et Test

Test sur les résidus

- Test d'absence d'autocorrélation des résidus
 - le test de Box-Pierce
 - le test de Ljung-Box
 - le test de Durbin-Watson
- Test d'homoscédasticité
 - le test de Goldfield et Quandt
 - le test de White
 - le test de Breusch et Pagan
- Estimation récursive et analyse de la stabilité du modèle

IV.4 Validation et Test

- Test d'absence d'autocorrélation des résidus
- le test de Box-Pierce et le test de Ljung-Box

$$\begin{cases} H_0 : \rho(1) = \rho(2) = \dots = \rho(h) = 0 \\ H_a : \text{il existe } i \text{ tel que } \rho(i) \neq 0. \end{cases}$$

Statistics :

Box-Pierce $Q_h = T \sum_{k=1}^h \hat{\rho}_k^2$

Ljung-Box $Q'_h = T(T+2) \sum_{k=1}^h \frac{\hat{\rho}_k^2}{T-k} \sim \chi^2(h)$

p>0.05, la série est statistiquement un bruit blanc

Sample: 1 1000
Included observations: 1000

	Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.000	0.000	0.0002	0.990		
2	0.010	0.010	0.1020	0.950		
3	-0.027	-0.027	0.8191	0.845		
4	0.057	0.057	4.0955	0.393		
5	0.019	0.020	4.4761	0.403		
6	0.049	0.047	6.8518	0.335		
7	0.047	0.050	9.0869	0.246		
8	-0.040	-0.043	10.676	0.221		
9	-0.025	-0.026	11.310	0.255		
10	0.009	0.006	11.388	0.328		
11	-0.013	-0.022	11.556	0.398		
12	-0.008	-0.009	11.629	0.476		
13	0.034	0.034	12.803	0.463		
14	0.024	0.025	13.373	0.497		
15	0.017	0.025	13.650	0.552		
16	0.016	0.016	13.914	0.605		
17	-0.009	-0.005	14.005	0.667		
18	0.013	0.016	14.190	0.717		
19	-0.014	-0.013	14.383	0.761		
20	0.027	0.023	15.106	0.770		
21	0.009	0.003	15.187	0.813		
22	-0.009	-0.016	15.277	0.850		

IV.4 Validation et Test

- Test d'absence d'autocorrélation des résidus

➤ le test de Durbin-Watson

$$H_0 : \rho = 0$$

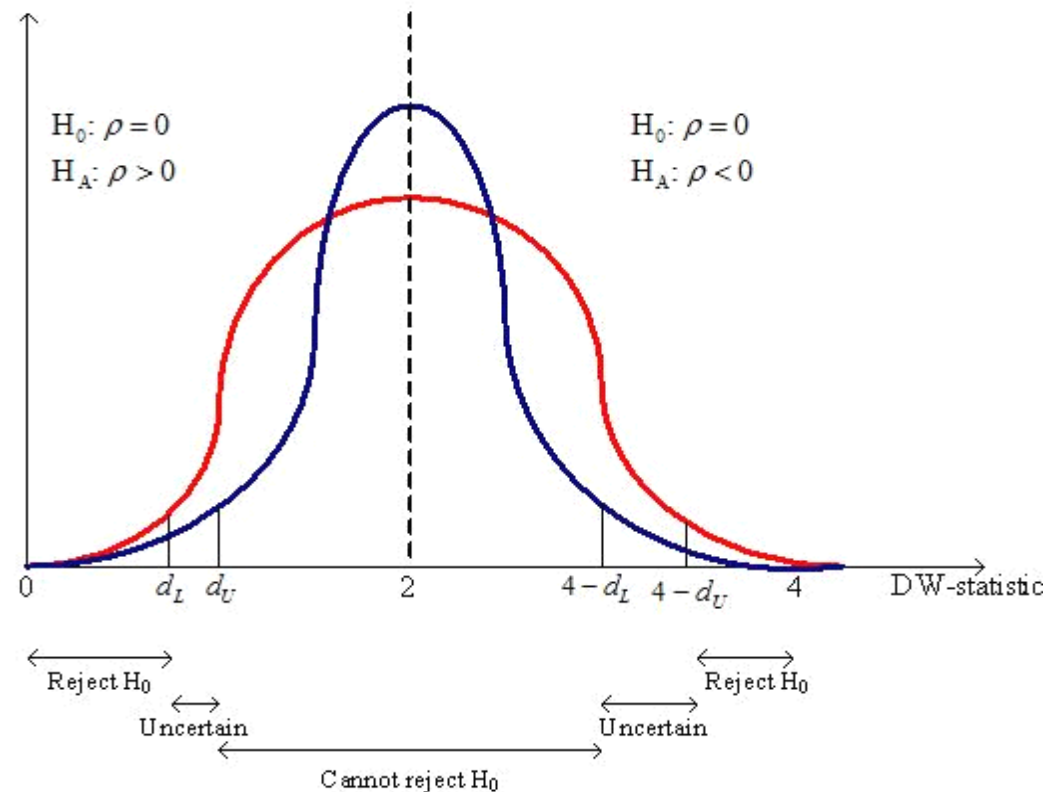
H_1 : il existe d'autocorrélation

statistics :

$$d = \frac{\sum_{t=2}^T (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^T e_t^2},$$

Avec e_t la série de résidu,

T est le nombre d'observation



- Tests de normalité: Bera & Jarque (1984)

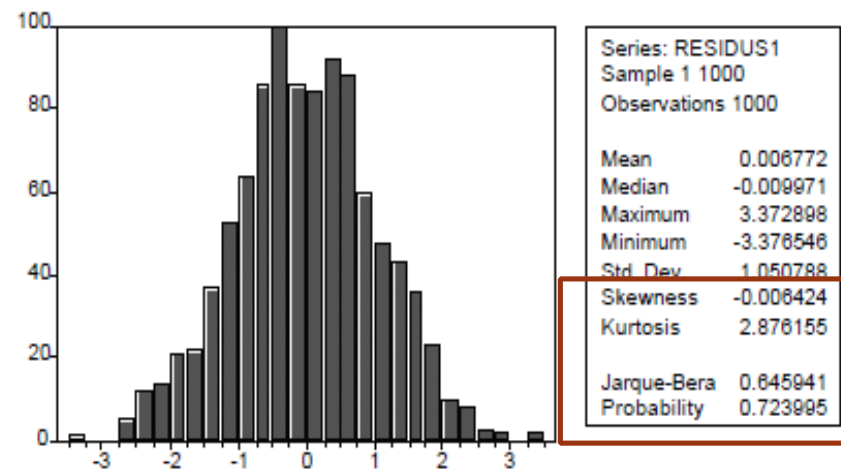
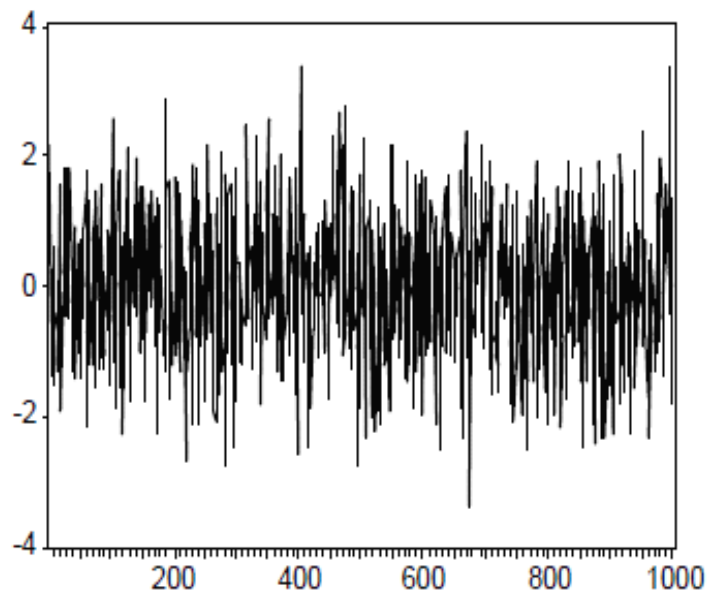
notons μ_k le moment d'ordre k de la distribution $\mu_k = E[(X - E(X))^k]$

Coefficient du skewness $s = \mu_3 / \mu_2^{3/2}$ et de la kurtosis $k = \mu_4 / \mu_2^2$

$s \xrightarrow{L} \mathcal{N}\left(0, \sqrt{6/T}\right)$ et $k \xrightarrow{L} \mathcal{N}\left(3, \sqrt{24/T}\right)$ quand $T \rightarrow \infty$.

→ statistics: $BJ = \frac{T}{6} s^2 + \frac{T}{24} [k - 3]^2$

$BJ \geq \chi_{1-\alpha}^2(2)$ on rejette l'hypothèse H_0 de normalité des résidus au seuil α



- **Estimation récursive et analyse de la stabilité du modèle**

- Estimation récursive du modèle sur les sous-échantillons :

$$t = 1, \dots, T^*; \quad t = 1, \dots, T^*+1; \quad \dots, \quad t = 1, \dots, T-1$$

- Calcul des résidus récursifs (one-step ahead forecast error)

$$\varepsilon_{t+1,t}^* = y_{t+1} - y_{t+1,t}^*$$

- On peut démontrer le résultats suivant :

$$\varepsilon_{t+1,t}^* \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 r_t) \text{ avec } r_t > 1 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} r_t = 1$$

- Résidus récursifs normalisés

$$\omega_{t+1,t} = \frac{\varepsilon_{t+1,t}^*}{\sigma \sqrt{r_t}} \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(0,1) \quad t = T^*, \dots, T-1$$

- Statistique du CUSUM :

$$CUSUM_t = \sum_{\tau=T^*}^t \omega_{\tau+1,\tau} \quad t = T^*, \dots, T-1$$

- Calcul d'un Intervalle de confiance pour le CUSUM à partir des bornes tabulées de la statistique

IV.5 Prévisions

$$\begin{aligned}\hat{x}_t(k) &= E(\phi_1 x_{t+k-1} + \dots + \phi_p x_{t+k-p} + \varepsilon_{t+k} - \theta_1 \varepsilon_{t+k-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t+k-q} | x_t, x_{t-1}, \dots) \\ &= \begin{cases} \phi_1 \hat{x}_t(k-1) + \dots + \phi_p \hat{x}_t(k-p) - \sum_{i=k}^q \theta_i \varepsilon_{t+k-i}, & k \leq q \\ \phi_1 \hat{x}_t(k-1) + \dots + \phi_p \hat{x}_t(k-p) & , k > q \end{cases} \\ \hat{x}_t(k) &= \begin{cases} \hat{x}_t(k) & , k \geq 1 \\ x_{t+k} & , k \leq 0 \end{cases}\end{aligned}$$

$$\text{Var}[e_t(k)] = (G_0^2 + G_1^2 + \dots + G_{k-1}^2) \sigma_\varepsilon^2$$

Incertitude associée aux prévisions

- Critère de pouvoir prédictif
- Critère d'information
- Test s d'anticipations rationnelles
- Limite de prédictibilité d'un modèle ARMA
 - les prévisions hors échantillon des modèles ARMA convergent vers la moyenne non conditionnelle du processus.
 - On peut calculer la limite de prédictibilité
 - Expliquer et présenter

Incertitude associée aux prévisions

- Critère de pouvoir prédictif

Plusieurs indicateurs sont alors possibles :

- (i) la variance du résidu σ^2 , ou la somme des carrés des résidus SCR
 - (ii) le coefficient de détermination R^2 , correspondant à une normalisation de la variance
 - (iii) le coefficient de détermination modifié adjust- R^2
 - (iv) la statistique de Fisher (comme dans le cas du modèle linéaire)
- Le but est alors de minimiser (i), ou de maximiser (ii) ; (iii) ou (iv).

Incertitude associée aux prévisions

- Critère d'information

$$AIC(p, q) = \log \hat{\sigma}^2 + \frac{2(p + q)}{T}$$

$$BIC(p, q) = \log \hat{\sigma}^2 + (p + q) \frac{\log(T)}{T}$$

- Évaluation de plusieurs prévisions

comparer la précision de prévisions non optimales:

➤ l'erreur de prévision $e_{t+h,t} = y_{t+h} - \hat{y}_{t+h,t}$

➤ l'erreur de prévision en pourcentage $p_{t+h,t} = \frac{y_{t+h} - \hat{y}_{t+h,t}}{y_{t+h}}$

- Critères Mean Error (ME) et Error Variance (EV):

$$ME = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T e_{t+h,t} \quad : \text{ mesure du biais (faible avec une « bonne prévision »)}$$

$$EV = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (e_{t+h,t} - ME)^2 \quad : \text{ dispersion des erreurs de prévisions (faible avec une « bonne prévision »)}$$

- Mesures globales de la précision des prévisions: MSE et MSPE

$$MSE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (e_{t+h,t})^2 \qquad MSPE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (p_{t+h,t})^2$$

- Des variantes de ces indicateurs (RMSE et RMSPE) permettent de préserver les unités des grandeurs prévues :

$$RMSE = \sqrt{MSE} \qquad RMSPE = \sqrt{MSPE}$$

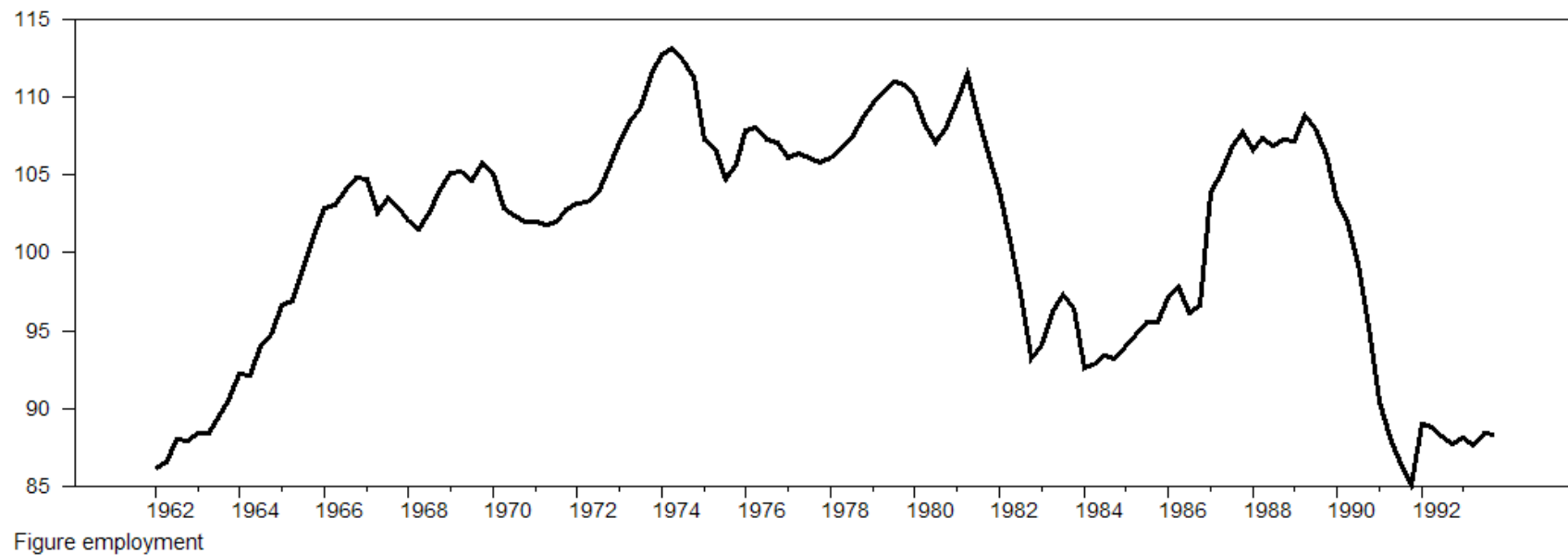
- Autres mesures : MAE et MAPE

$$MAE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |e_{t+h,t}| \qquad MAPE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |p_{t+h,t}|$$

V .Application

Modèle ARMA pour données des employés Canadian

➤ 1961:1 1994:4



- Identification du modèle par AIC

AIC analysis of models for series CAEMP

AIC analysis of models for series CAEMP

```

      MA
AR    0      1      2      3      4
  0 878.0309 730.8361 633.2729 577.3433 538.8695*

```

Variable	Coeff	Std Error	T-Stat	Signif
1. CONSTANT	100.66919685	1.02193041	98.50886	0.00000000
2. MA{1}	1.64030851	0.07690366	21.32940	0.00000000
3. MA{2}	1.73485237	0.12402632	13.98778	0.00000000
4. MA{3}	1.24512724	0.12488565	9.97014	0.00000000
5. MA{4}	0.52384982	0.07770186	6.74179	0.00000000

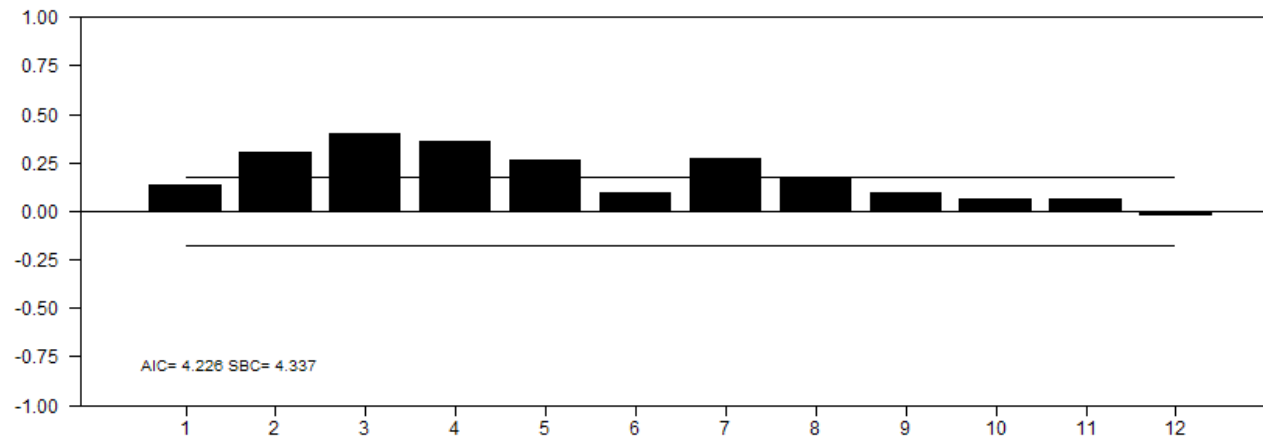


Figure 7.13 MA(4) Model

Lag	Corr	Partial	LB Q	Q Signif
1	0.134	0.134	2.335981	
2	0.305	0.292	14.598495	
3	0.399	0.369	35.837484	
4	0.360	0.306	53.202652	
5	0.266	0.121	62.748269	0.0000
6	0.094	-0.239	63.945063	0.0000
7	0.270	-0.098	73.991724	0.0000
8	0.175	-0.032	78.253554	0.0000
9	0.097	0.011	79.580661	0.0000
10	0.062	-0.026	80.120870	0.0000
11	0.060	-0.068	80.637951	0.0000
12	-0.023	-0.186	80.711685	0.0000

AIC analysis of models for series CAEM

MA

AR 0
0 878.0309
1 880.0309
2 465.3067*
3 466.7484
4 468.6732

Variable	Coeff	Std Error	T-Stat	Signif
1. CONSTANT	98.03027846	4.03455782	24.29765	0.0000000
2. AR{1}	1.44833888	0.07733048	18.72921	0.0000000
3. AR{2}	-0.47669497	0.07779110	-6.12789	0.0000001

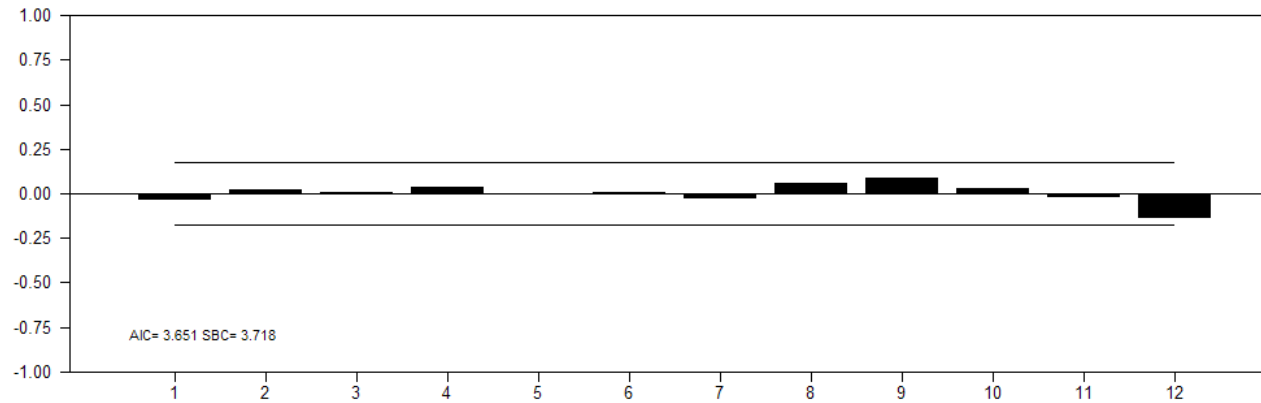
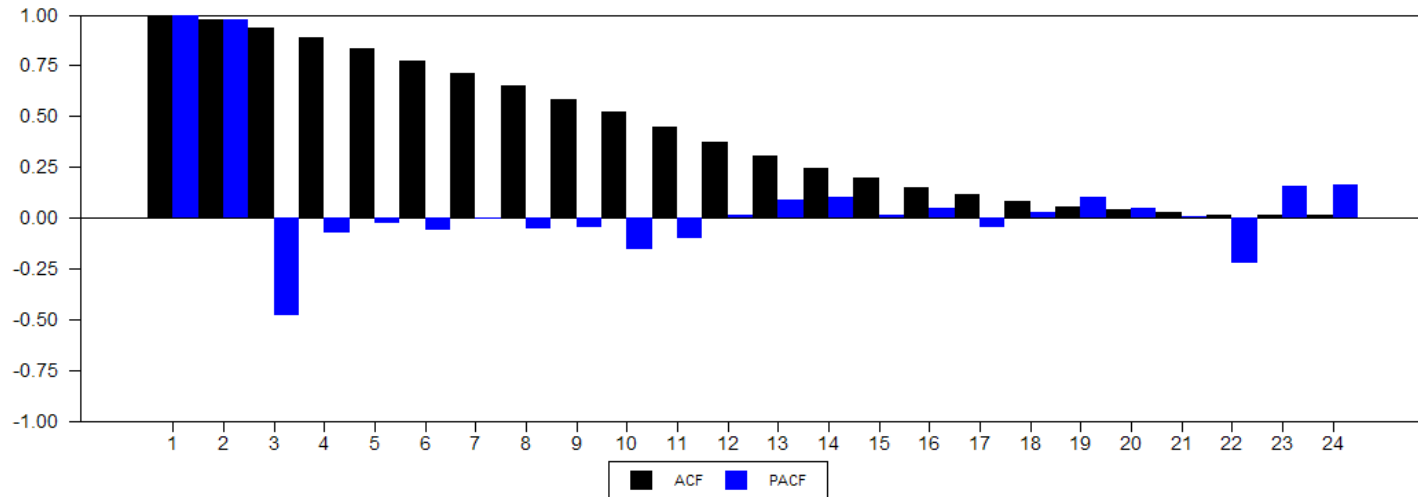


Figure 7.15 AR(2) Model

Lag	Corr	Partial	LB Q	Q Signif
1	-0.040	-0.040	0.2069734	
2	0.024	0.023	0.2833585	
3	0.010	0.012	0.2980000	0.5851
4	0.037	0.038	0.4838390	0.7851
5	-0.001	0.001	0.4839604	0.9224
6	0.006	0.004	0.4882093	0.9746
7	-0.029	-0.030	0.6074602	0.9877
8	0.061	0.058	1.1288116	0.9803
9	0.086	0.093	2.1694659	0.9499
10	0.033	0.038	2.3189310	0.9696
11	-0.024	-0.025	2.3985670	0.9835
12	-0.141	-0.154	5.2470132	0.8741

- Identification du modèle par corrélogramme



Variable	Coeff	Std Error	T-Stat	Signif
1. CONSTANT	98.19346701	4.01731838	24.44254	0.00000000
2. AR{ 1 }	0.77152150	0.05232124	14.74586	0.00000000
3. AR{ 2 }	0.53828892	0.02491408	21.60582	0.00000000
4. AR{ 3 }	-0.35863051	0.07850968	-4.56798	0.00001179
5. MA{ 1 }	0.65749453	0.06696535	9.81843	0.00000000

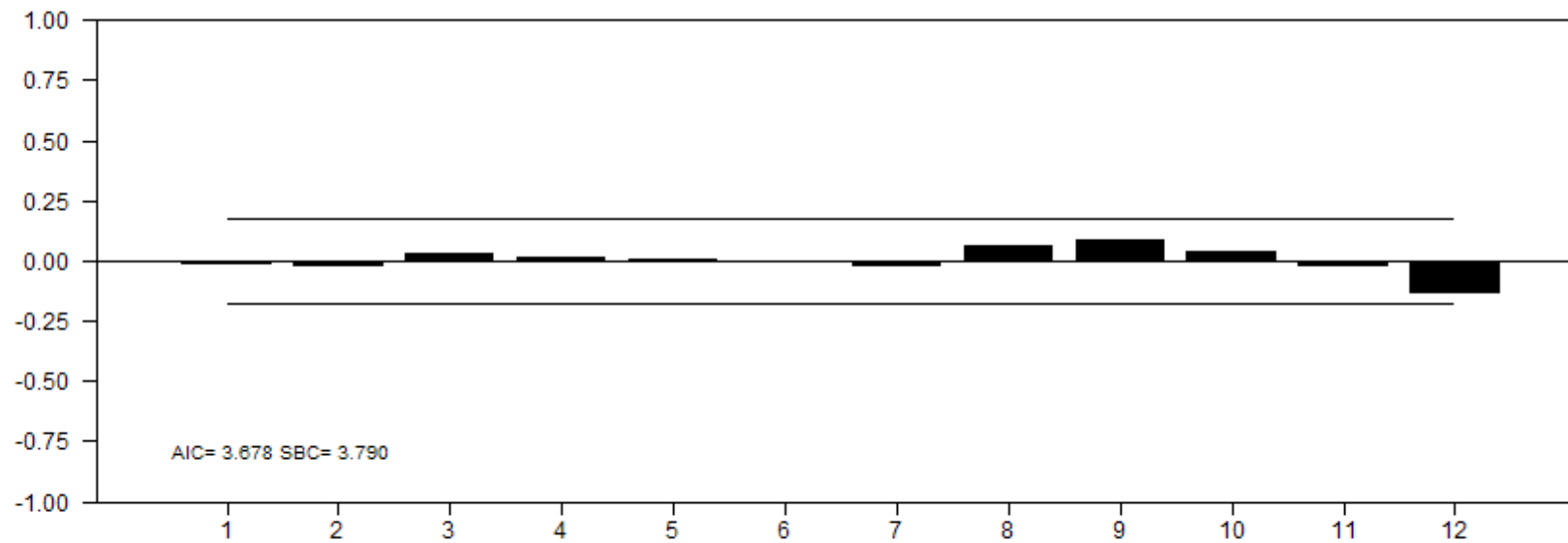


Figure 7.17 ARMA(3,1) Model

Lag	Corr	Partial	LB Q	Q Signif
1	-0.020	-0.020	0.0543124	
2	-0.027	-0.027	0.1496704	
3	0.029	0.028	0.2651552	
4	0.018	0.019	0.3098411	
5	0.010	0.012	0.3236989	0.5694
6	-0.005	-0.004	0.3270654	0.8491
7	-0.027	-0.028	0.4282882	0.9343
8	0.062	0.060	0.9596368	0.9159
9	0.091	0.092	2.1173889	0.8327
10	0.038	0.048	2.3258935	0.8874
11	-0.026	-0.022	2.4204869	0.9330
12	-0.139	-0.149	5.2094481	0.7350

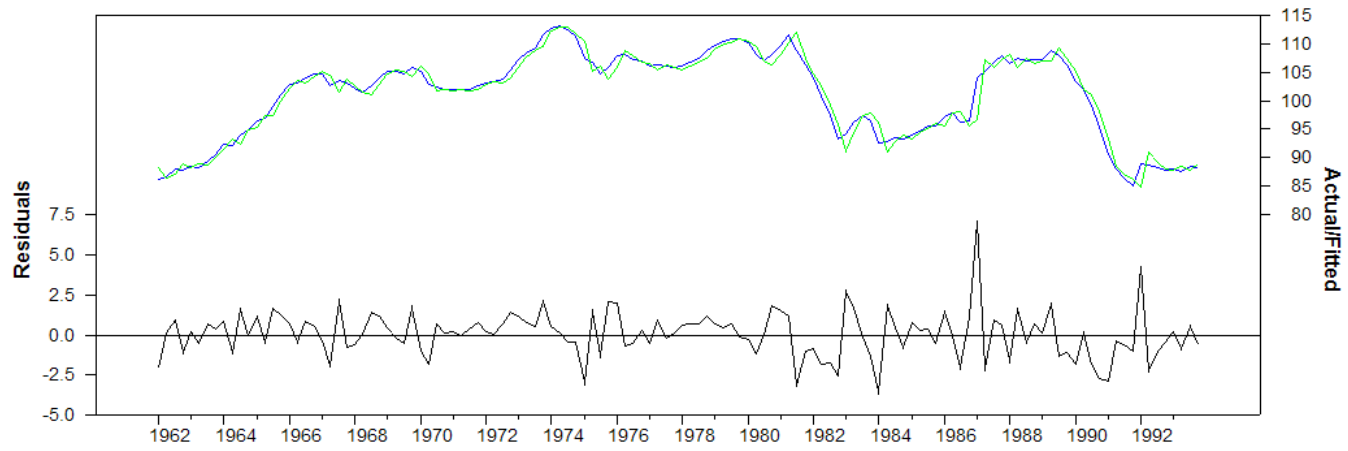


Figure 7.16 Employment: ARMA(3,1) Model, Residual Plot

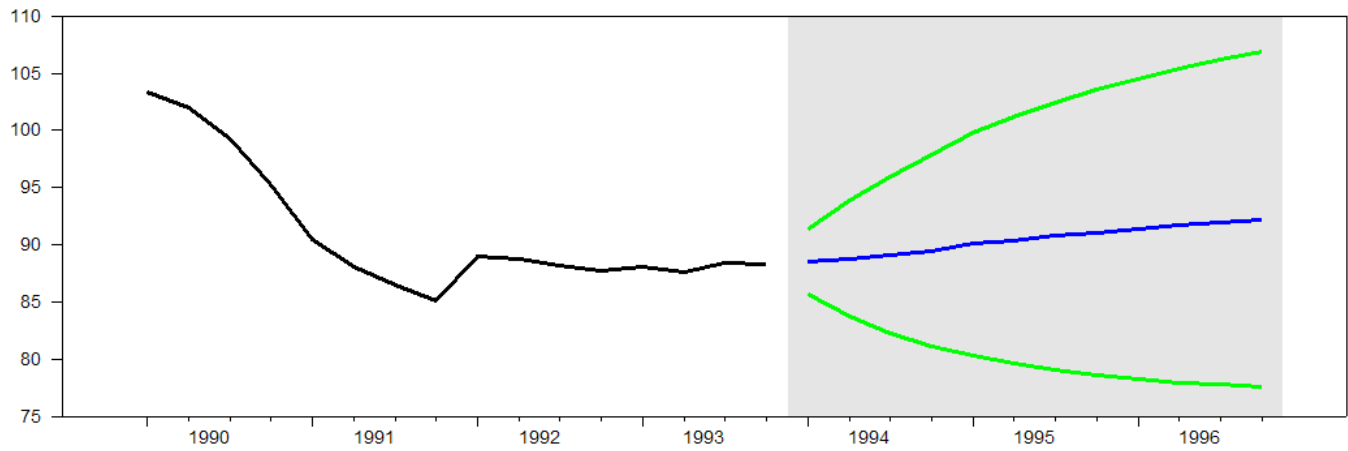


Figure 8.1 Employment History and Forecast: ARMA(3,1) Model

- **Prolongement du modèle ARMA**

$$\text{ARIMA}(p,d,q) \quad \Phi(L)(1-L)^d X_t = \Theta(L)\varepsilon_t$$

$$\text{SARIMA}(p,d,q)(P,D,Q)_s$$

$$\Phi_p(L)\Phi_P(L^s)(1-L)^d(1-L^s)^D X_t = \Theta_q(L)\Theta_Q(L^s)\varepsilon_t$$

- **Prolongement du modèle ARMA**

- ARFIMA: processus à mémoire longue

ARFIMA(p, d, q) :

$$\left(1 - \sum_{i=1}^p \phi_i B^i\right) (1 - B)^d X_t = \left(1 + \sum_{i=1}^q \theta_i B^i\right) \varepsilon_t.$$

- TARMA: processus à seuil

$$y_t = \begin{cases} \phi_{10} + \sum_{i=1}^{p_1} \phi_{1i} y_{t-i} + u_{1t} + \sum_{j=1}^{q_1} \theta_{1j} u_{1,t-j} & \text{si } x_{t-d} \leq c \\ \phi_{20} + \sum_{i=1}^{p_2} \phi_{2i} y_{t-i} + u_{2t} + \sum_{j=1}^{q_2} \theta_{2j} u_{2,t-j} & \text{si } x_{t-d} > c \end{cases}$$

où u_{1t} et u_{2t} sont deux bruits blancs de variance respective σ^2_1 et σ^2_2

- FARMA: $\Delta^d X_t$ suivent un processus ARMA(p, q) où d n'est pas entier, compris entre $-1/2$ et $1/2$

- ARCH : processus avec la variance évolué dans le temps, notamment pour les problèmes monétaire et financière