LA THEORIE DES JEUX REPETES :

APPLICATION A LA CONCURRENCE OLIGOPOLISTIQUE

PARTIE II

Thierry Pénard

ICI, ENST Bretagne[1]

Avril 1998

Résumé : Les stratégies dans un jeu répété peuvent prendre des formes extrêmement complexes puisqu'elles sont supposées spécifier la conduite des joueurs dans n'importe quelle situation. Les *stratégies simples* développées par Abreu [1986,1988] permettent de lever ces difficultés, en réduisant l'ensemble des règles de décisions d'un jeu à n joueurs à seulement (n+1) règles qui sont indépendantes de l'histoire passée, mis à part l'identité du dernier déviant. Pour chacun des joueurs, il suffit alors de déterminer la pire punition qu'il peut se voir infliger, en termes de gains, pour obtenir une caractérisation de l'ensemble des équilibres du jeu répété. L'ensemble de ces n punitions constituent le *code pénal optimal* du jeu.

Ces résultats peuvent être appliqués à la concurrence oligopolistique. On peut montrer, à la suite d'Abreu [1986], que le code pénal optimal d'une concurrence en quantité prend une forme extrêmement simple. Ce dernier est construit sur le principe du bâton et de la carotte. Il est composé de punitions symétriques qui comportent deux phases : une première phase extrêmement sévère (le bâton) qui dure une période et une seconde phase de durée infinie qui conduit les joueurs sur le sentier le plus collusif du jeu (la carotte). Le bâton et la carotte se révèlent bien supérieurs aux punitions de Cournot-Nash proposées par Friedman [1971]. Si parmi tous les codes pénaux, les firmes privilégient les codes les plus simples mais aussi les plus sévères, on devrait alors observer dans la réalité une utilisation courante de stratégies de représailles ayant la forme de la carotte et du bâton.

[1] Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications de Bretagne, Département d'Economie, BP 832, 29 285 Brest Cedex
Tel : 02 98 00 14 61, Email : thierry.penard@enst-bretagne.fr

PARTIE II.

LES CODES PENAUX DANS UN OLIGOPOLE

Introduction

Dans la plupart des pays industrialisés, les ententes en prix et la répartition des marchés sont illégales *per se*. Les autorités en charge de la politique de la concurrence peuvent sanctionner fortement les firmes qui ne respecteraient pas cette interdiction. Les firmes entretiennent donc des relations *non-coopératives* qui sont équivalentes stratégiquement à un dilemme du prisonnier. Comme les firmes ne peuvent légalement s'accorder sur une solution coopérative, elles doivent le faire de manière tacite en tirant parti de leurs interactions répétées sur le marché. C'est là qu'interviennent les codes pénaux comme mode de garantie de l'accord tacite entre les firmes.

Nous nous limitons à la présentation des codes pénaux développés par Friedman [1971] et Abreu [1986]. Ces codes pénaux s'appliquent à des marchés de concurrence en quantité.

Section 2 Les codes pénaux en quantités

2.1 Les hypothèses

Nous considérons n firmes identiques[2] qui produisent un bien homogène à un coût marginal constant *c*. La fonction de demande inverse est notée *P(.)*. Lorsque les firmes

[2] Elles ont les mêmes fonctions de gain et la même préférence pour le présent, c'est à dire qu'elles utilisent le même facteur d'actualisation pour pondérer leurs gains futurs.

produisent le vecteur de quantités $\hat{q}=(q_1,....,q_n)$, le profit de la firme i s'écrit : $\pi_i(\hat{q})= [P(\Sigma_{i=1}^{n} q_i) - c]q_i$. Ce profit peut aussi être noté $\pi_i(q_i\ ;\ \hat{q}_{-i})$ où le premier terme dans la parenthèse est la quantité produite par la firme i et le second terme $\hat{q}_{-i}$ est le vecteur des quantités produites par les autres firmes.

Hypothèse 1 : $P(.)$ est strictement décroissante et continue.

Hypothèse 2 : $P(0)>c$ et $\lim_{x\to\infty} P(x)=0$

Hypothèse 3 : $S_i=[0,A]$ pour tout i tel que $\pi_i(A;0,...,0) + \frac{\delta}{1-\delta}\max_x \pi_i(x;0,...,0)<0$

L'hypothèse 3 signifie qu'aucune firme n'a intérêt à produire au delà d'un certain seuil A, car les pertes subies ne pourraient jamais être compensées par les profits futurs. L'ensemble de stratégies des firmes est donc un intervalle fermé.

Les hypothèses 1 à 3 garantissent que les fonctions de profits sont continues, quasi-concaves et bornées. De plus, comme l'ensemble de stratégies des firmes est compact et convexe, ce jeu en quantités satisfait les mêmes hypothèses que le jeu constituant défini dans la partie I. Nous pouvons donc conclure que ce jeu admet au moins un équilibre de Nash en stratégies pures. L'équilibre de Nash d'un jeu oligopolistique en quantité est appelé l'équilibre de Cournot ou de Cournot-Nash. Nous supposons que cet équilibre est unique[3]. Nous notons q^c la quantité produite par chaque firme à l'équilibre et $\tilde{q}^c=(q^c,...,q^c)$ le vecteur des quantités de Cournot.

Comme les firmes sont identiques, elles obtiennent le même profit si elles produisent la même quantité *x*. Ce profit est noté $\pi(x)=\pi_i(x,...,x)$ pour tout i. Sous les hypothèses 1 à 3, il existe un vecteur de quantités symétriques $\tilde{q}^m=(q^m,...,q^m)$ qui maximise le profit joint des n firmes avec $q^m=\arg\max_x \pi(x)$. Dans un jeu répété, ces quantités peuvent être une solution d'équilibre si les firmes parviennent à s'entendre sur un code pénal suffisamment sévère pour dissuader toute déviation.

[3] C'est le cas par exemple si la demande est linéaire.

2.2 Les stratégies de déclic :

Friedman [1971] est le premier à proposer un code pénal crédible ou parfait[4]. Ce dernier est composé de punitions *symétriques et stationnaires* consistant à jouer indéfiniment l'équilibre de Cournot du jeu constituant. Ces punitions sont appelées des *punitions de Nash*. Les punitions symétriques sont une classe particulière de punitions qui ne font pas de distinction entre la firme déviante et les autres firmes. Elles prescrivent aux n firmes de produire la même quantité[5].

Friedman montre que des *punitions de Nash* permettent de soutenir n'importe quel profit qui domine au sens de Pareto le profit de Cournot si le facteur d'actualisation utilisé par les firmes est suffisamment proche de un. Les stratégies proposées par Friedman et connues sous le nom de *stratégies de déclic*[6], prescrivent de suivre initialement un sentier de production qui donne un gain actualisé moyen supérieur au profit de Cournot. Ce sentier est appelé le sentier collusif. Dès qu'une déviation est observée, les firmes déclenchent la procédure de punitions qui consiste à revenir à l'équilibre de Cournot indéfiniment[7]. Le code pénal qui soutient le sentier collusif ne contient qu'une seule punition symétrique et n'accorde aucune importance à l'identité du déviant.

Si l'on se restreint à des sentiers collusifs stationnaires, une stratégie de déclic peut être entièrement décrite par deux sentiers : le sentier collusif $Q^0=\{\hat{q}^0, \hat{q}^0, ,..., \hat{q}^0,...\}$ et le sentier de punition $Q^c=\{\tilde{q}^c, \tilde{q}^c,...., \tilde{q}^c,...\}$ tels que le vecteur des quantités collusives $\hat{q}^0$ domine strictement au sens de Pareto le vecteur des quantités de Cournot[8] $\tilde{q}^c$ (c'est à dire $\pi_i(\hat{q}^0) > \pi_i(\tilde{q}^c)$ ou encore $\pi_i(\hat{q}^0) > \pi(q^c)$).

---

[4] Pour être juste, il faut dire que Friedman ne se préoccupait pas à cette époque de donner à ses punitions un caractère *parfait*.

[5] Notons que les punitions proposées par Friedman sont symétriques parce que l'équilibre de Cournot-Nash est symétrique. Si les firmes n'étaient pas identiques, les punitions de Nash ne seraient plus symétriques

[6] C'est à Radner [1980] que l'on doit le terme de "stratégies de déclic" pour désigner cette classe de stratégies.

[7] Cette stratégie a été proposée par Friedman dans un tournoi du « dilemme du prisonnier » organisé par Axelrod [1984]. Elle fut confrontée à d'autres stratégies afin de déterminer la meilleure règle de décision dans le dilemme du prisonnier. « De toutes les règles bienveillantes, celle qui obtint le score le plus faible était également la moins indulgente. Il s'agit du programme de Friedman, sans indulgence aucune, qui recourt aux représailles permanentes. Il n'est jamais le premier à dévier mais une fois que l'autre a fait défection, il ne coopère plus jamais » Axelrod ([1992], p45).

[8] Le vecteur de quantités collusives n'est pas nécessairement symétrique, mais il donne à chaque firme un profit supérieur à son profit de Cournot.

Cette stratégie de déclic est alors équivalente au profil de *stratégies simples* $\sigma(Q^0, Q^1,...,Q^i,...,Q^n)$ avec $Q^i=Q^c$ pour i=1,...,n. Ce profil de stratégies simples peut s'écrire plus simplement $\sigma(Q^0, Q^c)$.

Nous notons $\pi_i^d(\hat{q}^0) = \max_{\{x\}} \pi_i(x;\hat{q}^0_{-i})$ le profit maximum que le joueur peut espérer si les n-1 autres joueurs produisent $\hat{q}^0_{-i}$. Nous donnons alors une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une collusion en stratégies de déclic.

Proposition 1 : *Soit* $Q^c=\{\tilde{q}^c, \tilde{q}^c,...., \tilde{q}^c,...\}$ *le sentier stationnaire de l'équilibre de Nash Cournot du jeu constituant. Pour tout sentier stationnaire* $Q^0=\{\hat{q}^0, \hat{q}^0, ,..., \hat{q}^0,...\}$ *tel que* $\pi_i(\hat{q}^0) > \pi_i(\tilde{q}^c)$ *pour i=1,...,n, les stratégies de déclic* $\sigma(Q^0, Q^c)$ *forment un équilibre parfait du jeu si et seulement si :*

$$\pi_i^d(\hat{q}^0) - \pi_i(\hat{q}^0) \leq \frac{\delta}{1-\delta}\left[\pi_i(\hat{q}^0) - \pi_i(\tilde{q}^c)\right] \qquad i=1,..., n \qquad (1)$$

Preuve : Selon la proposition 1 de la première partie, un profil de stratégies simples est parfait si et seulement si aucune déviation d'une période sur l'un des (n+1) sentiers n'est profitable. Comme les punitions consistent à jouer l'équilibre de Nash du jeu constituant, aucune déviation n'est profitable sur les sentiers de punitions. Chaque firme sélectionne sa meilleure réponse. Il reste à considérer les déviations d'une période sur le sentier collusif. L'inégalité (1) garantit la non profitabilité de ces déviations. Le terme de gauche représente le gain net d'une déviation de $\hat{q}^0$ et le terme de droite son coût (différence actualisée entre le profit collusif et le profit de Cournot). ✍

L'inégalité (1) peut se réécrire sous la forme suivante :

$$\delta \geq \frac{\pi_i^d(\hat{q}^0) - \pi_i(\hat{q}^0)}{\pi_i^d(\hat{q}^0) - \pi_i(\tilde{q}^c)} \qquad i=1,...,N \qquad (2)$$

Nous obtenons une condition sur la valeur du facteur d'actualisation. Le terme de droite correspond au facteur d'actualisation seuil, en dessous duquel les firmes ne peuvent soutenir le sentier collusif Q^0 à l'aide de stratégies de déclic.

Corollaire 2 : *Pour tout sentier collusif stationnaire* $Q^0=\{\hat{q}^0, \hat{q}^0, ,..., \hat{q}^0,...\}$ *tel que* $\pi_i(\hat{q}^0) > \pi_i(\tilde{q}^c)$ *pour i=1,...,n, il existe toujours un* $\underline{\delta} < 1$ *tel que pour tout* $\delta \in [\underline{\delta},1]$*, la stratégie de déclic* $\sigma(Q^0, Q^c)$ *est un équilibre parfait.*

Preuve : Puisque $\pi_i(\hat{q}^0) > \pi_i(\tilde{q}^c)$, $\dfrac{\pi_i^d(\hat{q}^0) - \pi_i(\hat{q}^0)}{\pi_i^d(\hat{q}^0) - \pi_i(\tilde{q}^c)}$ est toujours inférieur à un. Il existe donc toujours un $\underline{\delta} = sup_{\{i\}} \dfrac{\pi_i^d(\hat{q}^0) - \pi_i(\hat{q}^0)}{\pi_i^d(\hat{q}^0) - \pi_i(\tilde{q}^c)}$ tel que pour $\delta \in [\underline{\delta},1]$, la condition (1) est vérifiée et $\sigma(Q^0, Q^c,...,Q^c)$ est un équilibre parfait. ❧

Les firmes en adoptant des stratégies de déclic peuvent soutenir n'importe quel vecteur de quantités qui domine au sens de Pareto l'équilibre de Cournot (en particulier le vecteur qui maximise les profits joints) à condition que le facteur d'actualisation soit suffisamment élevé. Dans la figure 3.1, nous représentons l'ensemble de ces issues.

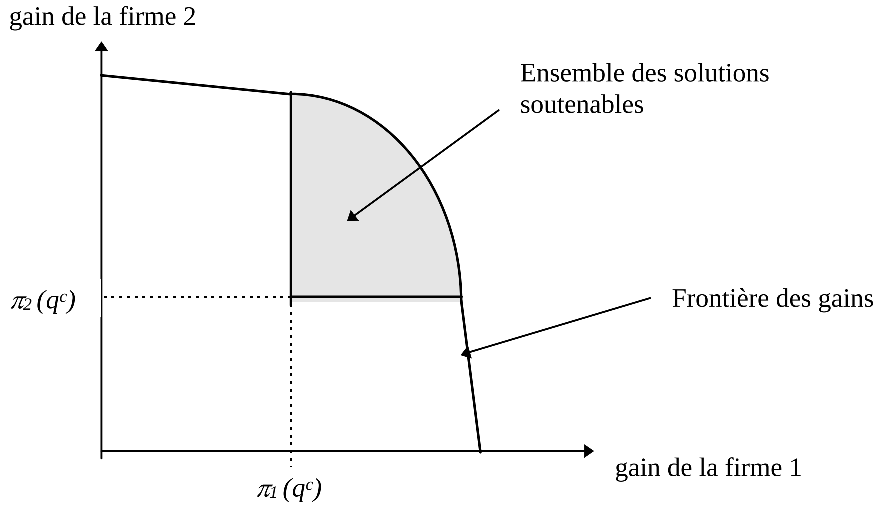

Figure 1 : Ensemble des solutions soutenables par des stratégies de déclic dans un jeu infiniment répété à deux firmes.

2.3. La carotte et le bâton :

Abreu [1986] pense que le code pénal de Friedman n'est guère satisfaisant car il ne punit pas assez sévèrement le déviant. Il montre qu'un code pénal basé sur le principe de la "carotte et du bâton" permet de soutenir de meilleurs équilibres. Les punitions qui composent ce code pénal sont *symétriques* et comportent deux phases : une première phase extrêmement sévère (le bâton) qui dure une période et une seconde phase (la carotte) de durée infinie qui conduit les joueurs sur le sentier symétrique le plus collusif du jeu. Il montre que ces punitions sont optimales relativement aux punitions symétriques et même globalement optimales pour des valeurs élevées du facteur d'actualisation.

De manière formelle, la carotte et le bâton prescrit à chaque firme (déviante et non déviante) dans la première phase de produire une quantité élevée (q^1) afin de réaliser de faibles profits ou des pertes, puis dans la seconde phase de produire une faible quantité (q^0). Cette quantité q^0 donne aux firmes le meilleur profit de collusion qui peut être soutenu par ce schéma de punitions.

Abreu démontre que dans l'ensemble des punitions symétriques optimales, il existe toujours une punition de la forme *carotte et bâton* $Q^1 = \{\tilde{q}^1, \tilde{q}^0, \tilde{q}^0, \ldots\}$ avec $\tilde{q}^1 = (q^1, \ldots, q^1)$ le vecteur de quantités symétriques dans la phase de bâton et $\tilde{q}^0 = (q^0, \ldots, q^0)$ le vecteur de quantités symétriques dans la phase de carotte. La détermination des valeurs de (q^1, q^0) passe par l'écriture des conditions de non déviation dans les deux phases. Notons $\pi(q)$ le profit que les firmes obtiennent lorsqu'elles produisent la même quantité q et $\pi^d(q)$ le meilleur profit qu'une firme peut obtenir en déviant étant donné que les autres firmes produisent la quantité q.

Proposition 3 *: Soit* $Q^1=\{\tilde{q}^1, \tilde{q}^0, \tilde{q}^0, ..\}$ *une punition symétrique à deux phases, alors le code pénal simple* $(Q^1,...,Q^1)$ *est un code optimal relativement aux codes pénaux symétriques si la paire* (q^1,q^0) *vérifie l'un des systèmes d'équations suivants :*

soit $q^0=q^m$.

$$\text{et} \quad \pi^d(q^1) - \pi(q^1)= \delta\,[\,\pi(q^m) - \pi(q^1)] \qquad (3)$$

$$\pi^d(q^m) - \pi(q^m) \leq \delta\,[\,\pi(q^m) - \pi(q^1)] \qquad (4)$$

soit $q^0 > q^m$

$$\text{et} \quad \pi^d(q^1) - \pi(q^1)= \delta\,[\,\pi(q^0) - \pi(q^1)] \qquad (3')$$

$$\pi^d(q^0) - \pi(q^0)= \delta\,[\,\pi(q^0) - \pi(q^1)] \qquad (4')$$

La démonstration de cette proposition est dans Abreu [1986].

Ces deux systèmes d'équations vérifient que nulle déviation d'une période n'est profitable dans la première phase (3 et 3') et dans la seconde phase (4 et 4') d'une punition symétrique à deux phases. Le terme de droite dans chacune de ces équations représente le coût net d'une déviation, différence entre le gain actualisé de la seconde phase ($\frac{\delta}{1-\delta}\pi(q^0)$) et le gain actualisé de la punition complète ($\delta\pi(q^1) + \frac{\delta^2}{1-\delta}\pi(q^0)$).

Selon cette proposition, la détermination d'un code pénal symétrique optimal se ramène à un simple problème de résolution d'un système à deux équations et deux inconnues. Nous procédons de la manière suivante. Dans un premier temps, nous regardons s'il existe une quantité q_1 qui dissuade les déviations dans les deux phase lorsque la quantité produite dans la seconde phase est celle d'un monopole (Nq^m). S'il n'existe aucun q^1 vérifiant simultanément les conditions (3) et(4), nous recherchons alors les paires (q^1,q^0) vérifiant les équations (3') et (4'). Parmi les solutions, nous retenons celle qui a le plus petit q^0 et le plus grand q^1.

Corollaire 4 : *Etant donné* $Q^1=\{\tilde{q}^1\, \tilde{q}^0, \tilde{q}^0, ..., \tilde{q}^0, ...\}$ *une punition symétrique optimale à deux phases et* $Q^0=\{\tilde{q}^0, \tilde{q}^0, ..., \tilde{q}^0, ...\}$*, le profil de stratégies simples* $\sigma(Q^0, Q^1)$ *est un équilibre parfait.*

Preuve : Le profil σ spécifie i) de jouer Q^0 initialement et tant qu'aucune déviation unilatérale n'est observée, ii) de jouer Q^1 dès qu'une déviation est observée. D'après les conditions (4) et (4') de la proposition 3, aucune déviation du profil d'action $\tilde{q}^0$ n'est profitable. De plus comme le code pénal est parfait, le profil de stratégies σ est parfait.

Selon Abreu, la carotte et le bâton peuvent être des punitions *globalement optimales* (relativement à toutes les classes de punitions) si le facteur d'actualisation est suffisamment élevé. Une punition est globalement optimale si sa valeur présente moyenne est égale au minimax du joueur puni, le minimax étant le gain minimum que peut toujours se garantir un joueur. Dans une concurrence en quantité, le minimax est égal à zéro, car une firme peut toujours renoncer à produire. Pour peu que les firmes soient suffisamment patientes, il est alors tout à fait possible d'avoir un q^1 et un q^0 tels que $\pi(q^1)+\frac{\delta}{1-\delta}\pi(q^0)=0$ et qui vérifient les contraintes incitatives de la proposition 3. Les profits correspondant à la carotte compensent tout juste les pertes subies dans la phase du bâton.

Lorsque le facteur d'actualisation en vigueur sur le marché est plus faible, les punitions globalement optimales ont une forme plus complexe. Elles sont asymétriques et non stationnaires[9].

Section 3 Analyse comparative des codes pénaux :

Nous souhaitons illustrer l'efficacité de la stratégie de la carotte et du bâton dans un oligopole avec demande linéaire, en montrant que les possibilités de collusion sont plus grandes avec « la carotte et le bâton » qu'avec des punitions de Cournot-Nash. Pour cela, nous recherchons la valeur seuil du facteur d'actualisation à partir de laquelle une entente sur la quantité de monopole est possible en stratégies de déclic et en stratégies de la carotte et du bâton. Cette valeur seuil est d'autant plus faible que les stratégies sont efficaces. Après calcul,

[9] Lorsque les firmes sont identiques, la détermination des n punitions globalement optimales se ramène à la détermination d'une seule punition dans laquelle le déviant est sanctionné plus sévèrement que les autres firmes. Cette punition asymétrique doit progressivement améliorer le sort de la firme punie en revenant vers un sentier plus symétrique. Pour plus de détails sur la détermination de cette punition, on peut se reporter à Abreu [1988].

nous constatons que la valeur seuil associée à *la carotte et au bâton* est toujours inférieure à la valeur seuil associée aux stratégies de déclic.

3.1 Efficacité des stratégies de déclic

Considérons un oligopole de N firmes symétriques. La demande est égale à P(Q)=a- Q et les firmes ont un coût marginal constant c. A l'équilibre de Cournot, chaque firme produit la quantité $q^c = \frac{S}{N+1}$ (avec $S=a-c$) et obtient un profit égal à $\pi^c = \frac{S^2}{(N+1)^2}$. Les firmes maximisent leur profit joint en produisant la quantité de monopole Nq^m=S/2 (chaque firme produit $q^m = \frac{S}{2N}$).

Une collusion sur la quantité de monopole q^m peut être soutenue par des stratégies de déclic si la condition de non déviation suivante est satisfaite[10] :

$$\pi^d(q^m) - \pi(q^m) \leq \frac{\delta}{1-\delta}\left(\pi(q^m) - \pi^c\right) \qquad (5)$$

Le facteur d'actualisation seuil à partir duquel la quantité de monopole q^m est soutenable est alors donné par :

$$\underline{\delta}_f = \frac{\pi^d(q^m) - \pi(q^m)}{\pi^d(q^m) - \pi(q^c)} \qquad (6)$$

Soit après résolution :

$$\underline{\delta}_f = \frac{(N+1)^2}{(n+1)^2 + 4N} \qquad (7)$$

Proposition 5. *Dans une concurrence à la Cournot, un oligopole à N firmes peut obtenir les mêmes profits qu'un monopole en adoptant des stratégies de déclic si :*

$$\delta \geq \frac{(N+1)^2}{(N+1)^2 + 4N} = \underline{\delta}_f$$

[10] Voir équation (1) de la section 2.

Le seuil $\underline{\delta}_f$ croit avec le nombre de firmes présentes sur le marché mais reste toujours inférieur à un. Lorsque la concentration sur le marché diminue, les stratégies de déclic deviennent moins efficaces pour soutenir la solution de monopole.

Si $\delta < \frac{(N+1)^2}{(N+1)^2 + 4N}$, la collusion porte sur des quantités supérieures aux quantités de monopole. Etant donné le facteur d'actualisation δ, les firmes peuvent au mieux soutenir la quantité q^0 qui vérifie l'équation suivante[11] :

$$\frac{\left(S-(N-1)q^0\right)^2}{4} - (S-Nq^0)q^0 = \frac{\delta}{1-\delta}\left((S-Nq^0)q^0 - \frac{S^2}{(N+1)^2}\right) \qquad (8)$$

Nous obtenons comme solution :

$$q^0 = \frac{N+1-\delta(N-1)(1+\frac{2}{N+1})}{(N+1)^2 - \delta(N-1)^2} S \qquad (9)$$

La quantité de collusion q^0 tend vers q^c lorsque le facteur d'actualisation tend vers zéro. Même pour des facteurs d'actualisation proches de zéro, les firmes peuvent soutenir une quantité q^0 légèrement inférieure à q^c et obtenir un profit collusif supérieur au profit de Cournot.

Proposition 6 : *Dans une concurrence en quantités, un oligopole peut toujours obtenir des profits supérieurs à ceux de l'équilibre de Cournot, en adoptant des stratégies de déclic, quelle que soit la valeur du facteur d'actualisation.*

[11] C'est à dire $\pi^d(q^0) - \pi(q^0) = \frac{\delta}{1-\delta}\left(\pi(q^0) - \pi^c\right)$.

3.2. Efficacité de « la carotte et du bâton »

Comme la carotte et le bâton sont des punitions plus sévères, les possibilités de collusion devraient être plus grandes. En particulier, le facteur seuil $\underline{\delta}_a$ à partir duquel la solution de monopole est soutenable devrait être inférieur à $\underline{\delta}_f$. Nous considérons le même oligopole que précédemment et nous parvenons au résultat suivant (la démonstration est donnée en annexe de cette section).

Proposition 7. *Dans une concurrence à la Cournot, un oligopole à N firmes peut obtenir les mêmes profits qu'un monopole en adoptant la stratégie de la carotte et du bâton si :*

$$\delta \geq \frac{(N+1)^2}{16N} = \underline{\delta}_a . \qquad \textit{lorsque } N < 6$$

$$\delta \geq \frac{(N-1)^2}{(N+1)^2} = \underline{\delta}_a \qquad \textit{lorsque } N \geq 6$$

Preuve : Annexe.

Quel que soit le nombre de firmes sur le marché, les stratégies d'Abreu sont toujours plus efficaces que les stratégies de déclic pour soutenir la solution de monopole, car $\underline{\delta}_f$ est bien supérieur à $\underline{\delta}_a$. En effet, $\frac{(N+1)^2}{(N+1)^2+4N}$ est supérieur à $\frac{(N+1)^2}{16N}$ si le nombre de firmes est inférieur à 6 et à $\frac{(N-1)^2}{(N+1)^2}$ si il existe plus de six firmes sur le marché. A titre de comparaison, nous avons calculé dans le tableau 1 les valeurs de ces deux facteurs seuils selon le nombre de firmes sur le marché.

Tableau 1 : Comparaison des facteurs seuils d'une collusion maximale (solution de monopole) en stratégie de déclic et en stratégie de la carotte et du bâton.

Nombre de firmes	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**10**	**30**	**100**
Facteur seuil $\underline{\delta}_f$	0.529	0.571	0.609	0.642	0.671	0.695	0.716	0.751	0.888	0.962
Facteur seuil $\underline{\delta}_a$	0.281	0.333	0.39	0.45	0.51	0.562	0.604	0.669	0.875	0.96

L'efficacité de la carotte et du bâton tient à la sévérité des punitions qui sont souvent globalement optimales. Dans la proposition suivante, nous donnons le facteur d'actualisation seuil à partir duquel ces punitions sont les plus sévères possibles relativement à l'ensemble des punitions.

Proposition 8 : *Dans un oligopole avec demande linéaire, la carotte et le bâton sont des punitions globalement optimales si :*

$$\delta \geq \frac{4N}{(N+1)^2} \qquad \textit{lorsque } N<6$$

$$\delta \geq \frac{(N+1)^2}{4(N-1)^2} \qquad \textit{lorsque } N \geq 6$$

Preuve : Annexe

Lorsque le nombre de firmes est supérieur à 6, la carotte et le bâton sont des punitions optimales pour soutenir la solution de monopole car on a $\underline{\delta}_a > \frac{(N+1)^2}{4(N-1)^2}$ pour $N \geq 6$. En revanche, lorsque le nombre de firmes est inférieur à 6, on a $\underline{\delta}_a < \frac{4N}{(N+1)^2}$ et il existe des punitions asymétriques plus efficaces que la carotte et le bâton pour soutenir la solution de monopole[12]. Par exemple, en duopole, une punition asymétrique qui tiendrait de manière crédible la firme déviante à son profit minimax, réduirait le facteur d'actualisation seuil associé à la solution de monopole de 0.281 à 0.111.

Lambson [1987], dans le prolongement des travaux d'Abreu, s'est intéressé à la forme des codes pénaux optimaux dans un jeu répété symétrique en prix avec contrainte de capacités. Il montre que les punitions en prix d'un code pénal globalement optimal ont une forme plus simple que dans un jeu à la Cournot. En particulier, lorsque le rationnement est efficace, les codes pénaux optimaux peuvent être constitués de punitions symétriques à deux phases (« la carotte et le bâton ») quelle que soit la valeur du facteur d'actualisation. Dans une *concurrence en prix avec des contraintes de capacité symétriques, les firmes disposent donc de punitions plus sévères pour soutenir une collusion que dans une concurrence en quantité*[13].

Conclusion

Si parmi tous les codes pénaux possibles, les firmes privilégient les codes les plus simples mais aussi les plus sévères, on devrait observer dans la réalité une utilisation courante de stratégies de représailles ayant la forme de la *carotte et du bâton*.

Cependant dans un contexte d'information parfaite, les codes pénaux qui dissuadent les déviations présentent la particularité de ne jamais être appliqués. Ils sont tellement efficaces qu'à l'équilibre, on n'observe jamais ni déviation, ni guerre de prix, ni retour à l'équilibre de Cournot. Dans ces conditions, la forme donnée aux punitions n'a aucune importance. Leur simplicité, leur durée est secondaire par rapport à leur efficacité. En revanche, s'il existe une probabilité non nulle que les punitions soient appliquées, les punitions doivent être dissuasives sans être excessives. Plusieurs explications peuvent être avancées à l'existence de punitions à l'équilibre.

Celle proposée par Segerstrom [1988] consiste à supposer que les firmes ont une probabilité non nulle d'adopter un comportement irrationnel ; c'est à dire de dévier de l'accord de collusion malgré l'existence de punitions dissuasives. Dans ces conditions, les firmes n'ont pas intérêt à adopter des punitions trop sévères ou sur-dimensionnées, car suite à des déviations accidentelles ou irrationnelles, les pertes qu'elles subiraient dans la phase de

[12] Voir Segerstrom [1988] pour des punitions asymétriques, dans un duopole, qui prescrivent à la firme déviante de produire une quantité supérieure à celle de la firme non déviante dans la phase du bâton.

punition, rendraient la collusion peu profitable. *Pour un niveau de collusion donné, leur intérêt est de choisir les punitions les moins sévères possibles dans l'ensemble des punitions crédibles.* Par exemple, il est inutile de retourner de manière permanente à l'équilibre de Cournot si un retour limité dans le temps suffit à dissuader les déviations de la solution de monopole. De même, le bâton et la carotte peuvent être adoucis en choisissant une quantité plus faible dans la phase de bâton. Lorsqu'il existe un risque de déviation, les punitions les plus efficaces ne sont pas nécessairement les plus séveres.

[13] Mais parallèlement, les profits nets de déviation sont plus élevés dans une collusion en prix. On ne peut donc pas conclure *a priori* qu'il est plus facile de soutenir une collusion en prix qu'une collusion en quantités.

Annexe : Démonstration des propositions 7 et 8 (facteurs seuils d'une stratégie du bâton et de la carotte) :

Si la quantité de monopole n'est pas soutenable par les firmes, la stratégie de la carotte et du bâton (q^0,q^1) vérifie le système suivant :

$$\begin{cases} \pi^d(q^0) - \pi(q^0) = \delta\left[\pi(q^0) - \pi(q^1)\right] \\ \pi^d(q^1) - \pi(q^1) = \delta\left[\pi(q^0) - \pi(q^1)\right] \end{cases} \qquad \textbf{(A1)}$$

Nous avons donc :

$$\pi^d(q^0) - \pi(q^0) = \pi^d(q^1) - \pi(q^1)$$

Sachant que $\pi^d(q) = \dfrac{\left[S-(N-1)q\right]^2}{4}$ si q < $\dfrac{S}{N-1}$ et $\pi^d(q) = 0$ si q ≥ $\dfrac{S}{N-1}$, nous résolvons dans un premier temps l'équation $\pi^d(q^0) - \pi(q^0) = \pi^d(q^1) - \pi(q^1)$ pour $q^1 < \dfrac{S}{N-1}$:

$$\frac{\left(S-(N-1)q^1\right)^2}{4} - (S - Nq^1)q^1 = \frac{\left(S-(N-1)q^0\right)^2}{4} - (S - Nq^0)q^0$$

Après résolution de cette égalité, nous obtenons :

$$\left(S-(N+1)q^1\right)^2 = \left(S-(N+1)q^0\right)^2$$

Ceci est équivalent à $q^1 + q^0 = \dfrac{2S}{N+1}$ ou à $q^1 + q^0 = 2q^c$

La moyenne des quantités produites individuellement dans les phases de bâton et de carotte est égale à la quantité individuelle de Cournot, lorsque la quantité de bâton q^1 est inférieure à $\dfrac{S}{N-1}$ et la carotte q^0 est supérieure à $\dfrac{S}{2N}$.

Comme $\pi^d(q^1) - \pi(q^1) = \delta\left[\pi(q^0) - \pi(q^1)\right]$ d'après le système (A1), nous avons :

$$\frac{\left(S-(N+1)q^1\right)^2}{4} = \delta(q^1 - q^0)\left(N(q^1 - q^0) - S\right)$$

Soit les solutions :

$$q^1 = \left[1 + 8\delta\frac{N-1}{(N+1)^2}\right]\frac{S}{N+1}$$

$$q^0 = \left[1 - 8\delta\frac{N-1}{(N+1)^2}\right]\frac{S}{N+1}$$

La solution q^1 est valide tant qu'elle est inférieure à la quantité $\frac{S}{N-1}$. Ceci est vérifié pour $\delta < \frac{(N+1)^2}{4(N-1)^2}$.

De manière similaire, q^0 est supérieure à $\frac{S}{2N}$ si $\delta < \frac{(N+1)^2}{16N}$. (il suffit de résoudre $q^0 = \left[1 - 8\underline{\delta}\frac{N-1}{(N+1)^2}\right]\frac{S}{N+1} = \frac{S}{2N}$)

Nous devons établir une distinction entre le cas où $\frac{(N+1)^2}{16N}$ est inférieur $\frac{(N+1)^2}{4(N-1)^2}$ (c'est à $N^2 - 6N + 1 < 0$ ou de manière équivalente N<6) et celui où $\frac{(N+1)^2}{16N}$ est supérieur $\frac{(N+1)^2}{4(N-1)^2}$

Premier cas : $\frac{(N+1)^2}{4(N-1)^2} > \frac{(N+1)^2}{16N}$ ou N< 6.

La quantité de monopole peut être soutenue par des stratégies de la carotte et du bâton si et seulement si δ est supérieur à $\underline{\delta}_a = \frac{(N+1)^2}{16N}$. Nous remarquons que la solution de monopole peut être soutenue par des punitions qui ne sont pas optimales. La carotte et le bâton est une punition optimale si $q^1 = \frac{S}{N-1}$ et si le facteur d'actualisation est supérieur à $\underline{\underline{\delta}}$ défini par :

$$\pi\left(\frac{S}{N-1}\right) + \frac{\underline{\underline{\delta}}}{1-\underline{\underline{\delta}}}\pi\left(\frac{S}{2N}\right) = 0$$

Après calcul, nous obtenons :

$$\underline{\underline{\delta}} = \frac{4N}{(N+1)^2}$$

Deuxième cas : $\frac{(N+1)^2}{4(N-1)^2} \leq \frac{(N+1)^2}{16N}$ ou N≥6.

Pour $\delta \geq \frac{(N+1)^2}{4(N-1)^2}$, la carotte et le bâton est une punition optimale. En effet, elle inflige de manière crédible un profit actualisé moyen nul, car $q^1 = \frac{S}{N-1}$ et $\pi^d(q^1) = 0$. Le système d'équations définissant (q^0, q^1) s'écrit :

$$\pi(q^1)+\frac{\delta}{1-\delta}\pi(q^0)=0$$

$$\pi^d(q^0)=\frac{1}{1-\delta}\pi(q^0)$$

La quantité de monopole est alors soutenable pour des facteurs d'actualisation supérieurs à $\underline{\delta}_a$ avec $\underline{\delta}_a$ défini par :

$$\pi^d(q^m)=\frac{1}{1-\underline{\delta}_a}\pi(q^m)$$

Soit :

$$\underline{\delta}_a=\frac{\pi^d(q^m)-\pi(q^m)}{\pi^d(q^m)}$$

Après calcul, nous obtenons :

$$\underline{\delta}_a=\frac{(N-1)^2}{(N+1)^2}$$

BIBLIOGRAPHIE :

Abreu, D.(1986) «Extremal Equilibria of Oligopolistic Supergames,» *Journal of Economic Theory* 39, 191-225.

Abreu, D.(1988) «On the Theory of Infinitely Repeated Games with Discounting,» *Econometrica* 56, 383-396.

Axelrod, R. (1984) *The Evolution of Cooperation*, New York, Basic Books. (Traduction française *Donnant Donnant*, Paris, Odile Jacob, 1992.).

Dasgupta, P., & E. Maskin (1986) « The Existence of Equilibrium in Discontinuous Economic Games I : Theory », *Review of Economic Studies* 53, 1-26.

Debreu, G. (1952) « A Social Equilibrium Existence Theorem », *Proceedings of the National Academy of Sciences* 38, 886-893.

Friedman, J.W. (1971) «A Non-Cooperative Equilibrium for Supergames,» *Review of Economic Studies* 28, 1-12.

Friedman, J.W. (1992) «The Interaction between Game Theory and Theoretical Industrial Economics,» *Scottish Journal of Political Economy* 39, 353-373.

Friedman, J.W. (1993) «Repeated Games, Supergames and Oligopoly,» Working Parper, University of North Carolina.

Fudenberg, D. & J. Tirole (1991) *Game Theory*, Cambridge, MIT Press.

Glicksberg, I. (1952) « A Further Generalization of the Kakutani Fixed Point Theorem with Application to Nash Equilibrium Points », *Proceedings of the American Mathematical Society* 3, 170-174.

Greif, A., P. Milgrom, & B.R. Weingast (1994) « Coordination, Commitment, and Enforcement : the Case of the Merchant Guild », *Journal of Political Economy* 102, 745-776.

Kakutani, S. (1941) « A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem », *Duke Mathematical Journal* 8, 457-458.

Lambson, V. (1987) «Optimal Penal Codes in Price-Setting Supergames with Capacity Constraints,» *Review of Economic Studies* 54, 385-398.

Leonard, R. (1994) « Reading Cournot, Reading Nash : the Creation and Stabilisation of the Nash Equilibrium », *Economic Journal* 104, 492-511.

Myerson, R.B.(1991) *Game Theory : Analysis of Conflict*, Cambridge, Harvard University Press.

Nash, J.F. (1951) « Noncooperative Games », *Annals of Mathematics* 54, 289-295.

Radner, R. (1980) «Collusive Behavior in Non-cooperative Epsilon-Equilibria of Oligopolies with Long but Finite Lives», *Journal of Economic Theory* 22, 136-154.

Segerstrom, P. (1988) « Demons and Repentance », *Journal of Economic Theory* 45, 32-52.

Selten, R. (1975) «Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games,» *International Journal of Game Theory* 4, 25-55.