Feuille 6

Exercice 1. Calculer l'aire de $S_+ = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = a^2\ ,\ z \geqslant 0\}$ en utilisant la représentation paramétrée $f(u,v) = (a\ \cos u\ \cos v\ ,\ a\ \sin u\ \cos v\ ,\ a\ \sin v)$.

Exercice 2. Calculer l'aire du paraboloide

$$\{(x, y, \frac{x^2+y^2}{2}) \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$$

Indication : utiliser des coordonnées polaires, c.à.d. la paramétrisation $f\ :\ (r,\theta) \mapsto (r\ \cos(\theta), r\ \cos(\theta), \frac{r^2}{2})$. La réponse est $\frac{2\pi(\sqrt{8}-1)}{3}$.

Exercice 3. Calculer les intégrales curvilignes $\int_C F \cdot dr$ lorsque :

(a) $F(x,y) = (x^2 - 2xy\ ,\ y^2 - 2xy)$
C : graphe de $y = x^2$ entre $(-1,1)$ et $(1,1)$

(b) $F(x,y,z) = (y^2 - z^2\ ,\ 2yz\ ,\ -x^2)$
C : tracée par $r(t) = (t\ ,\ t^2\ ,\ t^3)$ avec $0 \leqslant t \leqslant 1$

Exercice 4. On considère $F(x,y) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}\ \ ,\ \ \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

1. Montrer que $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. Calculer $\int_C F \cdot dr$, C tracée par $r(t) = (\cos t\ ,\ \sin t)$ avec $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.
3. Les deux précédentes questions sont-elles contradictoires ?

Exercice 5. Utiliser le théorème de Green-Riemann pour trouver l'aire de :

a) l'ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

b) la région entre les courbes $y = x^3$ et $y = \sqrt{x}$

Exercice 6. F est-il un champ de gradient ? Si oui, construire une fonction potentielle :

(a) $F(x,y) = (x,y)$

(b) $F(x,y,z) = (2xy^3\ ,\ x^2z^3\ ,\ 3x^2yz^2)$