Feuille 2

Exercice 1. Donner l'ensemble de définition et l'image de $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2 - y^2}$.

Exercice 2. Dessiner le graphe de $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$.

Exercice 3. Dessiner le graphe de $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13$.

Exercice 4. Dessiner la surface $S = \{(x,y,z) | z = -y^2\} \subset \mathbb{R}^3$.

Exercice 5. Tracer les courbes de niveau pour les fonctions suivantes :

(a) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ (on pourra utiliser les coordonnées polaires)

(b) $f(x,y) = x^2 - y^2$

(c) $f(x,y) = e^{xy}$

Exercice 6. Montrer que la fonction f définie par $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$ est continue en $(0,0)$.

Exercice 7. Si $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont continues, montrer que $f + g$ est continue.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction ayant la propriété : "$f^{-1}(I)$ est ouvert pour tout intervalle ouvert I dans $\mathbb{R}$".
Montrer que f est continue.

Exercice 9. Soient $X \subset \mathbb{R}^n$ compact, $f : X \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $f(X) \subset \mathbb{R}$ est compact.

Exercice 10. Soit f la fonction définie sur $\{(x\,,\,y) \,/\, y \neq 0\}$ par :

$$f(x\,,\,y) = \frac{1 + x^2 + y^2}{y} \sin y.$$

Pourquoi cette fonction est-elle continue ? Étudier ses prolongements continus possibles.

Exercice 11. Même question pour la fonction définie sur $\{(x\,,\,y) \,/\, x^2 \neq y^2\}$ par

$$g(x\,,\,y) = \frac{1 + x + y}{x^2 - y^2}.$$

Exercice 12. Même question pour $h(x\,,\,y) = \dfrac{|y|}{x^2} e^{-\frac{|y|}{x^2}}$.

Exercice 13. Soit E l'ensemble des éléments $(x\,,\,y)$ de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $1 \leqslant |x| + |y| \leqslant 2$.
Montrer que E est fermé.
La formule $f(x\,,\,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ définit-elle sur E une fonction continue ?
Trouver les points où f atteint sa borne supérieure et sa borne inférieure.

Exercice 14. On considère la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x\,,\,y) = \sup\left\{\frac{x}{1+|y|}, \frac{y}{1+|x|}\right\}.$$

Cette fonction est-elle continue ?

Exercice 15. On donne deux fonctions g et h de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et on suppose que la dérivée de h ne s'annule pas.
Montrer que la fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(x\,,\,y) = \dfrac{g(x)-g(y)}{h(x)-h(y)}$ où $h(x) \neq h(y)$ a un prolongement continu sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 16. Pour chacune des applications suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, donner son domaine de définition et dire (en le justifiant) si elle admet un prolongement continu sur $\mathbb{R}^2$. (Indication : dans plusieurs cas, on peut utiliser des coordonnées polaires.)

$$f_1(x\,,\,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2} \qquad f_2(x\,,\,y) = y\,\sin x \qquad f_3(x\,,\,y) = (x^2+y^2)\,\sin\frac{1}{x^2+y^2}$$

$$f_4(x\,,\,y) = y\,\sin\frac{1}{x} \qquad f_5(x\,,\,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \qquad f_6(x\,,\,y) = \frac{y}{x^2}e^{-\frac{|y|}{x^2}}$$

Exercice 17. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On note φ l'application définie sur $\{(x\,,\,y) \in \mathbb{R}^2\,/\,y \neq 0\}$ par : $\varphi(x\,,\,y) = (x+y)f\left(\dfrac{x}{y}\right)$.
Montrer que φ est continue.
Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que φ puisse être prolongée continuement sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 18. Etudier la continuité de la fonction f définie par :
$f(x\,,\,y) = x^2$ si $|x| \leqslant |y|$
$f(x\,,\,y) = y^2$ si $|x| > |y|$

Exercice 19. Montrer que la fonction f définie par : $f(x\,,\,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ a une limite lorsque $\|(x\,,\,y)\|$ tend vers l'infini.

Exercice 20. Montrer que l'application définie par :
$f(x\,,\,y) = \dfrac{x^4}{y(y-x^2)}$ si $y \neq 0$ et $y - x^2 \neq 0$
$f(x\,,\,y) = 0$ si $y = 0$ ou si $y - x^2 = 0$
n'est pas continue en $(0\,,\,0)$ mais que ses restrictions à toute droite passant par l'origine sont continues en ce point.