Épreuve du 7 février 2015

Durée : 4 heures

Vous trouverez les énoncés de deux problèmes dans les pages qui suivent. Vous devez rédiger des réponses aux questions préliminaires et à la première partie du problème 1. Pour le reste vous devez choisir entre deux possibilités : soit la deuxième partie du problème 1 (choix A), soit le problème 2 (choix B).

Merci d'indiquer quel choix vous avez fait en tête de copie (Choix A ou Choix B).

Problème 1 : À propos de la répartition des nombres premiers

Étant donné un entier naturel n, on considère $\pi(n)$ le nombre de nombres premiers compris entre 0 et n. Ce sujet s'intéresse au comportement de la suite $(\pi(n))_n$. Il vise à établir l'encadrement suivant :

$$(\ln 2)\frac{n}{\ln n} \leq \pi(n) \leq e\frac{n}{\ln n}$$

valable pour tout $n \geq 3$. Elle est composée de deux parties, I et II, consacrées respectivement à la minoration et à la majoration annoncées.

Notations et rappels

- On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers positifs.
- Si E désigne un ensemble fini, on note $\#E$ le cardinal de cet ensemble, c'est-à-dire le nombre d'éléments de E.
- Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ désignent deux suites numériques, on notera $u_n \sim_n v_n$ pour dire que ces suites sont équivalentes. On notera $u_n = o(v_n)$ pour dire que la suite $(u_n)_n$ est négligeable devant la suite $(v_n)_n$ et enfin, on notera $u_n = O(v_n)$ pour dire que la suite $(u_n)_n$ est dominée par la suite $(v_n)_n$, c'est-à-dire, qu'il existe un réel c et un entier n_0 tels que pour tout $n \geq n_0$ on ait $|u_n| \leq |v_n|$.
- Si x désigne un réel, on notera $[x]$ sa partie entière, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x ; autrement dit, $[x]$ est l'unique élément de $\mathbb{Z}$ vérifiant :

$$[x] \leq x < [x] + 1.$$

- On rappelle que si a et b sont deux entiers tels que $0 \leq b \leq a$, le coefficient binomial $\binom{a}{b}$ est égal à $\frac{a!}{(a-b)!b!}$.

- Pour tout entier $n \geq 0$, on note $\pi(n)$ le nombre de nombres premiers dans l'intervalle $[0, n]$; ainsi on a $\pi(0) = \pi(1) = 0$, $\pi(2) = 1$, $\pi(3) = 2$, $\pi(4) = 2$, etc. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $\delta(n) = \pi(n) - \pi(n-1)$, de sorte que si l'on pose $\delta(0) = 0$, on voit que δ est l'indicatrice de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{N}$ (c'est-à-dire, $\delta(n)$ vaut 1 si n est premier, et 0 sinon).
- **Dans tout ce texte la lettre p désignera toujours et exclusivement un nombre premier**, ceci y compris lorsque la lettre p sera utilisée comme symbole d'indice d'une somme ou d'un produit. Par exemple, la notation $\sum_{p \leq x} \frac{1}{p}$ désigne la somme des inverses des nombres premiers p inférieurs ou égaux au réel x.

0. Préliminaires

Étant donnés un entier $n \geq 1$ et un nombre premier p, on appelle *valuation p-adique* de n l'entier noté $v_p(n)$ et égal à l'exposant de p dans la décomposition en facteurs premiers de n. Par exemple, si l'on prend $n = 350 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7$ on a $v_2(350) = 1$, $v_3(350) = 0$, $v_5(350) = 2$, $v_7(350) = 1$ et $v_p(350) = 0$ pour tout nombre premier $p \geq 11$.

0.1. Montrer que $v_p(n)$ est l'entier k tel que p^k divise n et p^{k+1} ne divise pas n.

0.2.

0.2.a. Montrer que pour tout $n > 1$ fixé, la suite $(v_p(n))_{p \in \mathcal{P}}$ est nulle à partir d'un certain rang.

0.2.b. Montrer que l'on peut écrire $n = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(n)}$ (ce produit pouvant alors être considéré comme un produit fini). Cette écriture n'est alors rien d'autre que la décompostion en facteurs premiers de l'entier n.

0.3. Montrer que pour tous n et m entiers naturels non nuls et tout $p \in \mathcal{P}$, on a $v_p(nm) = v_p(n) + v_p(m)$

I. Une minoration de la fonction π.

On considère, pour tout entier $n \geq 1$, l'entier $\Delta_n = ppcm(1, 2, \ldots, n)$. Dans cette partie nous allons établir une minoration de Δ_n. Nous en déduirons ensuite une minoration de $\pi(n)$. On considère $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $1 \leq b \leq a$ et l'on pose :

$$I(b, a) = \int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{a-b} dx$$

I.1.

I.1.a. Expliciter $I(1, a)$ en fonction de a.

I.1.b. Montrer que si $b < a$ alors $I(b+1, a) = \frac{b}{a-b} I(b, a)$.

I.1.c. En déduire que $I(b, a) = \frac{1}{b\binom{a}{b}}$.

I.2. On se propose dans cette question de donner une autre méthode pour calculer $I(b, a)$. On considère un réel $y \in [0, 1[$.

I.2.a. En développant à l'aide de la formule du binôme de Newton, montrer que :

$$\int_0^1 (1 - x + xy)^{a-1} dx = \sum_{k=1}^{a} \binom{a-1}{k-1} y^{k-1} I(k, a)$$

I.2.b. En calculant maintenant directement l'intégrale, montrer que :

$$\int_0^1 (1 - x + xy)^{a-1} dx = \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{a} y^{k-1}$$

I.2.c. En déduire que $I(b, a) = \frac{1}{b\binom{a}{b}} = \frac{1}{a\binom{a-1}{b-1}}$.

I.3.

I.3.a. Montrer que $I(b, a) = \sum_{k=0}^{a-b} (-1)^k \binom{a-b}{k} \frac{1}{k+b}$.

I.3.b. En déduire que $I(b, a)\Delta_a \in \mathbb{N}$.

I.3.c. Prouver que l'entier $b\binom{a}{b}$ divise l'entier Δ_a.

I.4. Soit $n \geq 1$ un entier.

I.4.a. Montrer que les entiers $n\binom{2n}{n}$ et $(2n + 1)\binom{2n}{n}$ divisent l'entier Δ_{2n+1}.

(Indication : On remarquera que pour tout $k \geq 1$, Δ_k divise Δ_{k+1}.)

I.4.b. En déduire que l'entier $n(2n + 1)\binom{2n}{n}$ divise Δ_{2n+1}.

(Indication : On remarquera que les entiers n et $2n + 1$ sont toujours premiers entre eux.)

I.4.c. Montrer que pour tout $k \in \{0, \ldots, 2n\}$ on a l'inégalité $\binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}$.

I.4.d. En déduire que $(2n + 1)\binom{2n}{n} \geq 4^n$.

(Indication : On développera l'égalité $4^n = (1 + 1)^{2n}$.)

I.4.e. En déduire que $\Delta_{2n+1} > n4^n$.

I.4.f. Montrer que si $n \geq 9$ alors $\Delta_n \geq 2^n$ et vérifier que cette inégalité est encore vraie pour $n = 7$ et 8.

I.5. Soit $n \geq 1$ un entier.

I.5.a. Soit $p \in \mathcal{P}$, montrer que $p^{v_p(\Delta_n)} \leq n$.

(Indication : On commencera par exprimer $v_p(\Delta_n)$ en fonction des entiers $v_p(1), \ldots, v_p(n)$.)

I.5.b. Montrer que $\Delta_n = \prod_{p \leq n} p^{v_p(\Delta_n)}$.

I.5.c. En déduire que $\Delta_n \leq n^{\pi(n)}$.

I.6.

I.6.a. Montrer que pour tout $n \geq 7$ on a

$$\pi(n) \geq (\ln 2)\frac{n}{\ln n}.$$

I.6.b. Pour quels entiers $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ l'inégalité de la question précédente est-elle encore vraie ?

II. Une majoration de la fonction π

II.1. On cherche dans cette question à majorer simplement le produit $\prod_{p \leq n} p$ en fonction de l'entier $n \geq 1$.

II.1.a. Soient a et b deux entiers tels que $0 < \frac{b}{2} \leq a < b$. Montrer que le produit $\prod_{a<p\leq b} p$ divise l'entier $\binom{b}{a}$ (le produit considéré est supposé être égal à 1 dans le cas où il n'y aurait pas de nombre premier p dans l'intervalle $]a, b]$).

II.1.b. En déduire que pour tout $m \geq 1$, le produit $\prod_{m+1<p\leq 2m+1} p$ divise l'entier $\binom{2m+1}{m+1}$.

II.1.c. Comparer, pour $m \geq 1$, les entiers $\binom{2m+1}{m}$ et $\binom{2m+1}{m+1}$.

II.1.d. En déduire que pour tout entier $m \geq 1$ on a $\binom{2m+1}{m} \leq 4^m$.

(Indication : On développera la quantité $(1 + 1)^{2m+1}$.)

II.1.e. Montrer que pour tout entier $m \geq 1$, on a $\prod_{m+1<p\leq 2m+1} p \leq 4^m$.

II.1.f. Prouver finalement que pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\prod_{p\leq n} p \leq 4^n.$$

(Indication : On pourra montrer par récurrence, pour $n \geq 1$, la propriété P_n : 'pour tout $k \in \{1, \ldots 2n\}$ on a $\prod_{p\leq k} p \leq 4^k$.")

II.2.

II.2.a. Montrer que pour tout entier $m \geq 1$ on a $m! > \left(\frac{m}{e}\right)^m$.

(Indication : On pourra penser au développement en série entière de la fonction exponentielle.)

II.2.b. Déduire de ce qui précède que, pour tout $n \geq 2$, on a $\pi(n)! \leq 4^n$ et que par suite, on a

$$\pi(n) \ln \pi(n) - \pi(n) \leq n \ln 4.$$

II.3. On souhaite montrer, à partir du résultat précédent, que pour tout $n \geq 3$ on a

$$\pi(n) \leq e\frac{n}{\ln n}.$$

Pour cela on raisonne par l'absurde, en supposant qu'il existe un entier $n_0 \geq 3$ tel que $\pi(n_0) > e\frac{n_0}{\ln n_0}$.

II.3.a. Montrer que la fonction $x \mapsto x\ln x - x$ est strictement croissante sur $[1, +\infty[$. En déduire que

$$\frac{e - ln4}{e} < \frac{\ln\ln n_0}{\ln n_0}.$$

II.3.b. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ est majorée par e^{-1} sur $[1, +\infty[$.

Conclure.

Problème 2 : Dérivées successives de la fonction arctangente

Nous nous intéressons aux dérivées successives de la fonction arctan notée f dans la suite. Le but est d'obtenir des formules explicites pour ces dérivées.

I. Préambule

I.1. Rappeler la définition de la fonction f (arctangente). Montrer qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

I.2. Donner un argument assurant que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée f''.

II. Dérivées successives

II.1. Montrer par récurrence sur n que, pour tout entier $n \geq 1$, f est dérivable n fois et que sa dérivée n-ème s'écrit sous la forme

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n},$$

où P_n est un polynôme. On établira au passage la relation

$$P_{n+1}(x) = (1+x^2)P_n'(x) - 2nxP_n(x).$$

II.2. Montrer que, pour tout n, P_n est de degré $n-1$, a la même parité que $n-1$.

III. Expression des dérivées successives

Nous allons trouver une expression des dérivées successives de f. Pour cela, nous allons utiliser des calculs portant sur les nombres complexes.

Soit ϕ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Elle peut s'écrire

$$\phi(x) = \phi_1(x) + i\phi_2(x),$$

où ϕ_1 et ϕ_2 sont toutes les deux à valeurs réelles. On dit que ϕ est dérivable si ϕ_1 et ϕ_2 le sont et on pose alors

$$\phi'(x) = \phi_1'(x) + i\phi_2'(x).$$

III.1. On suppose connues les formules de dérivées des produits et quotients de fonctions à valeurs réelles. Soient ϕ et ψ deux fonctions à valeurs complexes dérivables. Montrer que

$$(\phi\psi)' = \phi'\psi + \phi\psi' \qquad \left(\frac{1}{\phi}\right)' = -\frac{\phi'}{\phi^2}$$

(deuxième formule valable là où ϕ ne s'annule pas).

III.2. Déduire de la question précédente, en raisonnant par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et toute fonction dérivable à valeurs dans $\mathbb{C}$, on a

$$(\phi^n)' = n\phi'\phi^{n-1}$$

(là où ϕ ne s'annule pas pour n négatif).

III.3. Calculer la dérivée n-ème de

$$x \mapsto \frac{1}{x-c},$$

où c est un nombre complexe.

III.4. Montrer l'égalité

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right).$$

III.5. Déduire des deux questions précédentes une expression de la dérivée n-ème de la fonction arctangente. Des puissances de $x-i$ et $x+i$ apparaissent au dénominateur dans cette expression.

III.6. À partir de l'expression précédente (mettre sur le même dénominateur) et de la formule du binôme, donner une expression de la dérivée n-ème de la fonction arctangente ne faisant pas apparaître de nombre imaginaire. En déduire une expression de P_n.

IV. Racines des polynômes P_n

Montrer que pour tout $n > 1$, P_n admet $n-1$ racines réelles distinctes. À partir de l'expression obtenue au **III.5.**, donner les valeurs explicites pour ces $n-1$ racines (cotan$\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, $k = 1\ldots, n-1$). Montrer que, pour $n > 2$, les racines de P_n sont séparées par celles de P_{n-1}.