Le sujet proposé dans les pages qui suivent doit vous permettre de vous entraîner aux deux épreuves que vous passerez en février et mars. Le but de ces épreuves est de tester votre capacité à utiliser vos diverses connaissances mathématiques pour résoudre des questions diverses. Des notions mathématiques parfois abordées dans des cours séparés peuvent être nécessaires pour répondre aux questions. Par exemple, ici, des notions sur les suites, les séries, les polynômes, la trigonométrie, les nombres complexes (formules d'Euler), la combinatoire (formule du binôme), les études de fonctions. Nous avons ajouté un exercice de géométrie et un exercice de rédaction d'une démonstration par récurrence pour insister sur cet aspect généraliste des épreuves qui vous seront proposées.

D'autre part (et cela ne concerne que le problème) il faut apprendre à s'appuyer sur les questions déjà résolues d'un problème pour attaquer les autres, à saisir la logique de l'enchaînement des questions posées. Savoir insister sur les questions plus délicates (sans y perdre trop de temps), deviner ce qui est attendu quand un énoncé est ambigu.

L'évaluation de vos copies tiendra compte de la qualité de leur rédaction. Il faut expliquer clairement ce que vous proposez (en français et en langage mathématique), il faut être à la fois précis et concis.

SUJET ZÉRO

A. Problème

INTRODUCTION

L'objet du problème est l'étude de la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\forall n \geq 1, \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Dans une première partie, nous nous attacherons à démontrer, de différentes façons, par des méthodes élémentaires, que cette suite converge. Les parties 2, 3 et 4 suivantes seront consacrées à la détermination de sa limite S par divers moyens. Les parties 5 et 6 utiliseront la valeur de S pour calculer la somme de certaines séries numériques.

On rappelle que, pour tous entiers m, n vérifiant $m \leq n$, on note $[\![m, n]\!]$ l'intervalle d'entiers

$$[\![m, n]\!] = \{p \in \mathbb{Z} \mid m \leq p \leq n\}$$

PREMIÈRE PARTIE : Convergence de la suite

Dans cette partie, le candidat utilisera uniquement les connaissances faisant partie du programme de Terminale S.

1. *Première méthode*

a) Démontrer que, pour tout entier $k \geq 2$, on a la majoration

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

b) En déduire que la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ est majorée.

c) Démontrer que la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ converge et donner un majorant de sa limite.

Dans toute la suite du problème, on notera S cette limite.

2. *Deuxième méthode*

On considère la suite $(t_n)_{n\geq 1}$, définie par :

$$\forall n \geq 1, \quad t_n = s_n + \frac{1}{n}$$

a) Démontrer que les suites $(s_n)_{n\geq 1}$ et $(t_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.

b) Donner, en le justifiant, un encadrement d'amplitude 10^{-1} de S.

3. *Troisième méthode*

Ecrire le texte d'un exercice de niveau terminale S démontrant, par comparaison à une intégrale, la convergence de la suite $(s_n)_{n\geq 1}$.

DEUXIÈME PARTIE : Utilisation de polynômes

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 1$: $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n$. Rappeler la formule permettant de calculer la somme $\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ des racines de P en fonction de ses coefficients a_k, $k \in [\![0, n]\!]$.

2. a) Soient $p \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in \mathbb{R}$. Démontrer l'égalité

$$\sin\left((2p+1)\varphi\right) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} \cos^{2p-2k}(\varphi) \sin^{2k+1}(\varphi)$$

où $\binom{2p+1}{2k+1}$ désigne le coefficient binômial pour $k \in [\![0, p]\!]$.

b) En déduire que, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$ et pour tout réel $\varphi \not\equiv 0[\pi]$, on a

$$\sin\left((2p+1)\varphi\right) = \sin^{2p+1}(\varphi) \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} \left(\operatorname{cotan}^2 \varphi\right)^{p-k}$$

où $\operatorname{cotan} \varphi = \dfrac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$.

3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme défini par :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} X^{p-k}$$

a) Pour tout entier $k \in [\![1, p]\!]$, on pose $\gamma_k = \operatorname{cotan}^2\left(\dfrac{k\pi}{2p+1}\right)$. Calculer $P(\gamma_k)$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$.

b) Vérifier que, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, le réel $\dfrac{k\pi}{2p+1}$ appartient à l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$. En déduire que le polynôme P possède p racines distinctes, que l'on déterminera.

c) En déduire les égalités :

$$\sum_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \frac{p(2p-1)}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2p+1}\right)} = \frac{2p(p+1)}{3}$$

4. a) Démontrer, pour tout réel $\varphi \in]0, \frac{\pi}{2}[$, les encadrements

$$0 < \sin\varphi < \varphi < \tan\varphi$$

b) En déduire que, pour tout entier $p \geq 1$, on a l'encadrement

$$\frac{p(2p-1)}{3} < \frac{(2p+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k^2} < \frac{2p(p+1)}{3}$$

c) Démontrer que $S = \dfrac{\pi^2}{6}$.

5. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$, $(v_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ défines par :

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^2} \qquad v_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)^2} \qquad w_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$$

sont convergentes et déterminesr les valeurs exactes de leurs limites, respectivement notées U, V et W.

B. Exercice 1

1) Soit ABC un triangle dans le plan euclidien. On note a la longueur BC, b la longueur AC et c la longueur AB. On note α l'angle au sommet A, β l'angle au sommet B, γ l'angle au sommet C. Faire une figure. Calculer $a^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2$ en l'écrivant sous la forme $\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\|^2$ et en développant le produit scalaire. En déduire la formule

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

2) Calculer les angles d'un triangle dont les longueurs des côtés sont

$$a = 2\sqrt{2}, \quad b = 2\sqrt{3}, \quad c = \sqrt{6} + \sqrt{2}.$$

C. Exercice 2

Soient n un entier naturel supérieur à 1 et $z_1, \ldots, z_n$ n nombres complexes non nuls. Montrer par récurrence que si

$$|z_1 + z_2 + \ldots + z_n| = |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|$$

alors les nombres z_i ont même argument.