Vous trouverez ci-dessous des exemples de questions qui pourraient être posées lors de l'oral de rattrapage proposé en deuxième session. Les énoncés qui vous seront posés ne seront pas exactement ceux-là.

Nous demanderons essentiellement des raisonnements (pas forcément faciles) sur des objets censés être bien connus en deuxième année de licence de mathématiques. Les notions mentionnées ci-dessous ont donc été abordées au lycée ou en L1. Mais nous attendons d'un étudiant de L2 qu'il ait une conception plus précise de ces notions qu'un élève de terminale (pour prendre exemple : un étudiant de L2 doit connaître une caractérisation formelle de la convergence d'une suite de nombres réels). Bien entendu nous apprécierons toute utilisation pertinente de théories que vous avez étudiées cette année.

****

Comment définissez-vous la fonction exponentielle ? Réponse par exemple : comme en terminale, solution de l'équation... Montrez que la fonction exponentielle tend vers plus l'infini en plus l'infini. Que l'exponentielle d'une somme est le produit...

*****

Comment définissez-vous la fonction ln ? Si ln est définie comme fonction réciproque de la fonction exponentielle, montrez qu'elle est dérivable sur $]0,+\infty[$ de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$. Montrez que la fonction ln tend vers plus l'infini en plus l'infini. Plus lentement que n'importe quelle puissance positive.

*****

Ce qui suit est un énoncé reprenant sous une forme moins ouverte une partie de l'exercice précédent.

On suppose connues la dérivée de la fonction exponentielle et la formule de dérivation de $u \circ v$ ainsi que ses conditions d'utilisation. On suppose savoir que la fonction ln est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et que pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$ on a : $\exp(\ln x) = x$. À partir de ces quatre propriétés, montrez que la dérivée de la fonction ln est la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ qui à x associe $\dfrac{1}{x}$.

*****

Connaissez-vous le théorème des accroissements finis ? Énoncez-le, s'il vous plaît. Utilisez ce théorème pour montrer que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dérivable de dérivée $f' \geq 0$ alors f est croissante.

*****

Comment définissez-vous $\displaystyle\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x$ (condition sur u,...) ? Que signifie la phrase « L'intégrale est linéaire » ? Comment montre-t-on que l'intégrale est linéaire ?

*****

Rappelez et démontrez la formule d'intégration par parties sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.

*****

Calculez l'intégrale de 2 à 3 de $(2+x)^{-1}$, de $ln(x)$, de xe^x,...

*****

Calculez la dérivée de $arctan(1 + ln(x))$,...

*****

Montrez que pour $n > k$, $k!$ divise $n(n-1)...(n-k+1)$.

*****

Montrez que si p est un nombre premier alors pour tout $k \in \{1, \dots, p-1\}$, p divise $\binom{p}{k}$. Déduisez en que pour $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, $(a+p)^p \equiv a^p + b^p \mod p$ ***

Démontrez le lemme de Gauss à partir de l'identité de Bézout.

*****

La matrice suivante est-elle inversible ?

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*****

Donnez un exemple de matrice $A \neq 0$ telle que $A^4 = 0$

*****

Soit A une matrice nilpotente. Quelles sont les valeurs propres possibles de A ?

*****

Quand dit-on que deux suites sont adjacentes ? Montrez que deux suites adjacentes sont convergentes et qu'elles ont la même limite.

*****

Montrez que la série $[u_n]$ converge et calculer sa somme pour :

$$u_n = \ln(1 - 1/n^2),\ n \geq 1 \quad u_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \qquad u_n = (n+1)^{1/(n+1)} - n^{1/n}$$

*****

Énoncez et démontrez la formule du binôme.

*****

Etudiez la série $[u_n]$ définie par $u_{2p} = 1/2^p$, $u_{2p+1} = 1/2^{p+2}$. Montrez que le critère de d'Alembert ne permet pas de conclure mais que le critère de Cauchy le permet. Montrez que si pour une suite positive v_n on a $\lim \frac{v_{n+1}}{v_n} = l$ avec $l \neq 1$ alors $\lim v_n^{1/n} = l$.

*****

Calculer la somme des premiers termes d'une suite géométrique.

*****

Calculez la somme des n premiers carrés.

*****

Quelle est l'aire d'un hexagone régulier ?

*****

Énoncez le théorème de Cauchy-Lipschitz. En quels points $(x_0, u_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ l'équation $\frac{du}{dx} = \sqrt{u}$ vérifie-t-elle les hypothèses de ce théorème.

*****

Résoudre $\frac{du}{dx} = \sqrt{u}$.

*****

Comment définissez-vous le nombre π ?

*****

On désigne par $\mathcal{P}$ le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et par M_0 le point de coordonnées $(x_0\ ;\ y_0\ ;\ z_0)$. Démontrez que la distance $d\,(M_0,\, \mathcal{P})$ du point M_0 au plan $\mathcal{P}$ est donnée par

$$d\,(M_0,\, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

*****

On considère trois points A, B et C de l'espace et trois réels a, b et c de somme non nulle. Montrez que, pour tout réel k strictement positif, l'ensemble des points M de l'espace tels que $\|a\vec{M}\mathrm{A} + b\vec{M}\mathrm{B} + c\vec{M}\mathrm{C}\| = k$ est une sphère dont le centre est le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs a, b et c.

*****

Soit $[A, B]$ un segment du plan euclidien. Montrez que la perpendiculiare au segment en son milieu est l'ensemble des points équidistants de A et B.